






Nagrodę Dziekanów
dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie*
w roku akademickim 2006/2007
uzyskała
Agnieszka Bzowska
za artykuł *Trzy oszustwa wirusa grypy*
zamieszczony w numerze 12(391)/2006

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (405)

Mikrosatelita MOST: Walizka pełna gwiazd <i>Sławomir Ruciński</i>	str. 1
Komiwojażer <i>Anna Niewiarowska</i>	str. 4
Jak Astronom Królewski z Greenwich, Nevil Maskelyne, zważył Ziemię w 1774 roku <i>Bronisława Średniawa</i>	str. 6
 Zadania	str. 8
Aktualności	str. 9
 Wykrywamy próg perkolacji <i>Stanisław Bednarek</i>	str.10
Teoria perkolacji <i>Rafał Łatała</i>	str.12
 Zakleić się nie da !	str.14
 Gra Penneya <i>Andrzej Walat</i>	str.16
Klub 44	str.18
Informatyczny kącik olimpijski (5) – największy XOR podciągu <i>Filip Wolski</i>	str.23
Patrz w niebo	str.24
Luty	str.24
 Krzywa Gaussa i pomarańcze <i>Fidela Castro</i> <i>Rafał Sztencel</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Adamaszek, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2008 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2008 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2008 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:
Domniemania i hipotezy o turbulencji

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Mikrosatelita MOST: Walizka pełna gwiazd

Sławomir RUCIŃSKI*

Historia

Mija właśnie 10 lat od chwili, gdy autor, z małym zespołem naukowym – ale obejmującym całą Kanadę – i zespołem technicznym, głównie z Toronto, złożył do Kanadyjskiej Agencji Kosmicznej (CSA) propozycję zbudowania małego satelity do obserwacji astronomicznych.

Kanada miała wspaniale wczesne sukcesy w badaniach satelitarnych. W latach 1960., jako trzeci kraj na świecie, wysłała na orbitę satelitę naukowego do badania przestrzeni wokółziemskiej *Alouette*. Ale w latach 1970–1990 nie budowano w Kanadzie własnych satelitów, tylko intensywnie uczestniczono w naukowych programach amerykańskich. W latach 1995–1997 zorganizowano nową Agencję Kosmiczną i postanowiono wrócić do własnych, ale raczej skromnych programów.

Announcement of Opportunity ogłoszone przez Kanadyjską Agencję Kosmiczną sugerowało skalę przedsięwzięcia na poziomie poniżej 10 milionów dolarów, co jest bardzo małą sumą, jeżeli chodzi o satelity naukowe do celów astronomicznych: Teleskop Kosmiczny Hubble'a (HST) kosztował (zależnie od tego, co się wlicza do pełnych kosztów) od 4,5 do 6 miliardów dolarów, zaś małe satelity do obserwacji np. świecenia gwiazd w ultrafiolecie czy promieniach Roentgena kosztują zazwyczaj 100–300 milionów dolarów.

Satelita opisany poniżej jest pierwszym całkowicie kanadyjskim (jeżeli nie liczyć rosyjskiej rakiety, która go wyniosła) satelitą naukowym po 30 latach przerwy. Jest też pierwszym w historii mikrosatelitą do obserwacji astronomicznych z pełną, trójosiową stabilizacją orientacji w przestrzeni.

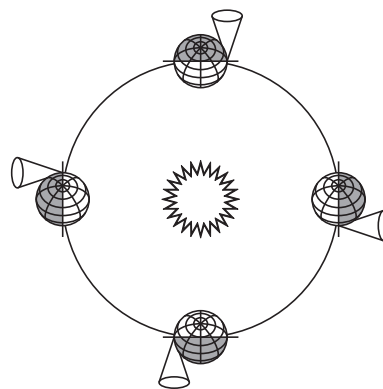
Pomysł

Wysłaniem na orbitę małego, prostego teleskopu do prowadzenia ciągłych obserwacji fotometrycznych gwiazd interesowałem się od dawna. Gdy pierwszy sztuczny satelita Sputnik-1 został umieszczony na orbicie w 1957 roku (jeszcze jedna, ważna rocznica znacznego osiągnięcia technologicznego), byłem zapalonym obserwatorem gwiazd zmiennych. Za pomocą lornetki oceniałem względne jasności gwiazd, co jest dość łatwe i to z dokładnością do kilku procent. Tego typu obserwacje są bardzo użyteczne i nadal wykonywane przez miłośników astronomii ze względu na kolosalną liczbę gwiazd, których nie są w stanie „obsłużyć” astronomowie zawodowi. Wiedziałem wtedy, że satelita mógłby obserwować wybrany punkt na niebie przez około połowę czasu każdego okresu obiegu wokół Ziemi; przez pozostałą połowę orbity musiałby być wyłączony, bo patrzyłby w Ziemię. Ale i tak, możliwość obserwacji bez długich, wielogodzinnych

przerw dziennych wydawała się czymś wspaniałym. Tak właśnie działa HST, obserwując przez około 35 minut z 96-minutowego okresu obiegu wokół Ziemi. W 1957 roku marzyłem: „gdyby tak można było wynieść na orbitę piętnastocentymetrowy teleskop amatorski”.

Przez wiele lat usiłowałem zainteresować tym prostym pomysłem wielu ludzi, na ogół bez skutku. Zwykle uprzejmie wskazywano mi nikły moment bezwładności małego satelity, który chciałby raczej koziółkować, niż zachowywać stałą orientację w stosunku do gwiazd. Wskazywano mi brak małych systemów trójosiowej stabilizacji satelitów. Na szczęście, około 1995 roku, spotkałem w Toronto inżyniera Carrola Kierana. Jego zespół w małej firmie Dynacon pracował nad stabilizacją robotów przemysłowych i miał już prawie gotowy system do stabilizacji małych satelitów. I on właśnie był pierwszym słuchaczem, który potraktował serio moje marzenia.

Chyba jednak najważniejszy pomysł dla satelity MOST (poniżej wytłumaczę ten skrót), do którego doszliśmy we wspólnych dyskusjach z Carrollem Kieranem w latach 1995–1997 polegał na umieszczeniu satelity na orbicie pokrywającej się z linią zmierniczą.

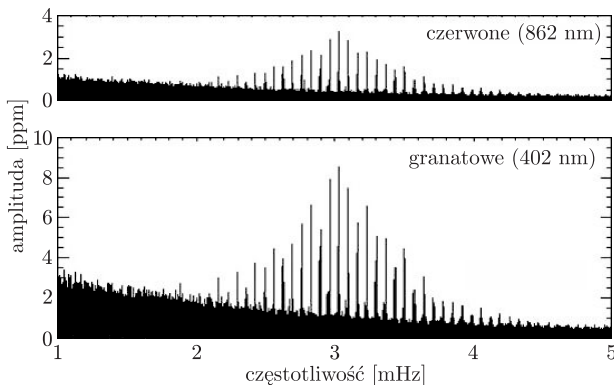


Rys. 1. Orbita satelity MOST dokonuje precesji ściśle w tempie jeden obrót na rok, tak że zawsze ustawiona jest prostopadle do kierunku ku Słońcu. W ten sposób pokrywa się z linią zmierniczą.

Satelita taki jest cały czas oświetlony przez Słońce z jednej strony i może patrzeć w przestrzeń kosmiczną w stronę odsłoneczną bez przerwy. Ale orbita taka musi być doskonale dobrana. Wykorzystuje się do tego naturalną precesję orbit w nieco niesymetrycznym potencjale grawitacyjnym Ziemi. Wszystkie orbity satelitarne podlegają precesji. Wybierając nachylenie orbity nieco różne od 90 stopni względem równika (tzw. orbita biegunowa) oraz odpowiednią wysokość nad powierzchnią Ziemi (około 900 km), można osiągnąć takie tempo precesji orbity, że jej okres wynosi dokładnie jeden rok. Taka orbita jest zawsze ustawiona prostopadle do kierunku ku Słońcu, z wysokości zaś 900 km otwiera się duży, około 57-stopniowy stożek ciągłej widoczności gwiazd z nieba przeciwsłonecznego. Tak więc przez około miesiąc można obserwować gwiazdę w sposób ciągły, bez żadnych przerw dziennych. Istnieje wielka potrzeba obserwacji fotometrycznych gwiazd nie tylko bez przerw dziennych, ale też

*Department of Astrophysics, University of Toronto

z równomiernym rozkładem obserwacji w czasie. Jest to potrzebne do wykrycia sejsmicznych drgań gwiazd o typowych okresach rzędu kilku minut, lecz z mikroskopijnymi amplitudami rzędu kilku milionowych normalnego poziomu jasności. W przypadku Słońca fale sejsmiczne mogą być badane z wielką dokładnością, ponieważ są widoczne na powierzchni Słońca, lecz w przypadku gwiazd widzimy sumaryczny efekt drgań na całej powierzchni. Słońce obserwowane w ten sposób ukazuje serię charakterystycznych drgań.



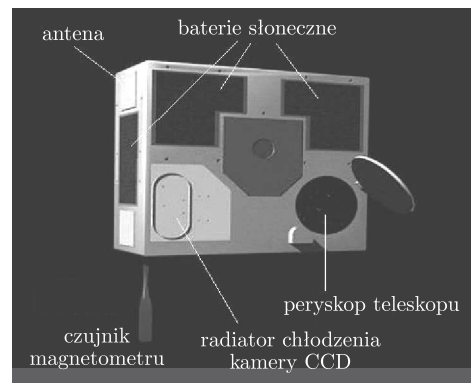
Rys. 2. Oscylacje sejsmiczne Słońca obserwowanego jak gwiazda, czyli przy wykorzystaniu całkowitego strumienia światła. Drgania są bardzo małe – zazwyczaj kilka milionowych części (ppm, ang. parts per million) średniej jasności Słońca.

Przez rozszyfrowanie zawartej w nich informacji można było potwierdzić modele budowy wewnętrznej (w tej chwili dokładność na poziomie 0,1% wielkości takich jak gęstość czy ciśnienie), poznać rozkład prędkości wirowania wewnątrz Słońca jak również rozkład zmian energii z głębokością generowanego przez Słońce spontanicznie pola magnetycznego. Problem w przypadku gwiazd polega na małej amplitudzie drgań. Ale jeżeli obserwacje są dostatecznie długo prowadzone (powiedzmy przez miesiąc), można je „poskładać” (stosując formalizm Fouriera), tak że indywidualne obserwacje co kilka sekund, z dokładnością kilku dziesięciotysięcznych, mogą pozwolić na wykrycie drgań o amplitudzie zaledwie kilku milionowych. To jest właśnie cel satelity MOST, czyli w pełnej nazwie Micro-Oscillations of STars.

Realizacja

Orbita typu „zmiernik – świt” od razu sugerowała dalsze rozwiązania MOSTa: teleskop patrzyłby w przestrzeń ze swojej „ciemnej” strony, gdzie umieszczony byłby radiator do chłodzenia detektora CCD. Od jasnej strony satelity byłyby tylko baterie słoneczne (rys. 3).

Satelita mógł być mały, wielkości dużej walizki (60 × 60 × 24 cm). MOST ma masę 54 kg i jest stabilizowany systemem czterech kół reakcyjnych (*reaction wheels*, rodzaj żyroskopów), z których trzy ustawione są wzajemnie prostopadle, a czwarte jest „na zapas”, bo w końcu są to jedyne ruchome części satelity i pierwsze się zużyją (łożyska nie są smarowane, bo smary odparowują). Koła te wirują bez przerwy, a zmiana tempa ich rotacji powoduje reorientację



Rys. 3. Tak wygląda MOST od swojej „ciemnej” strony. Cała druga strona pokryta jest bateriami słonecznymi. Baterie z tej strony są „na wszelki wypadek”, aby satelita miał energię nawet po utracie stabilności.

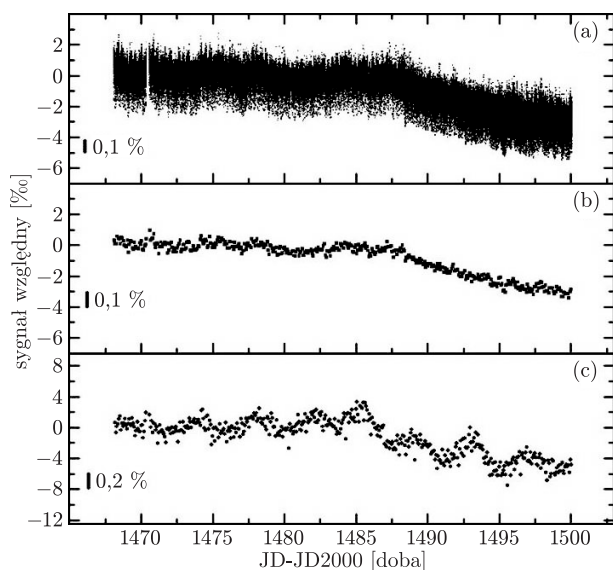
satelity na zasadzie zachowania momentu pędu. Dodatkowo satelita ma magnetometry, które pozwalają automatycznie ocenić natężenie ziemskiego pola i przez oddziaływanie z nim zmiennych prądów w dużych cewkach wokół całego satelity (zintegrowany system stabilizacji) może wytlumiać tendencję do koziołkowania satelity. Prąd elektryczny pochodzący z baterii słonecznych o całkowitej mocy około 30 W. Na pokładzie jest kilka komputerów kontrolujących stabilizację satelity, zbieranie informacji z dwóch detektorów CCD, stabilizację termiczną oraz przesyłanie informacji na Ziemię. Aby uniknąć kosztownych (i biurokratycznych) zabiegów o własną częstotliwość w paśmie radiowym, łączność radiowa odbywa się na falach krótkich w paśmie amatorskim, za pomocą modemu 9600 bps. Jest to zresztą najsłabsza strona systemu, bo przesyłanie jest wolne i ograniczone do małych części całych obrazów CCD (ale za to odczytywanych często, co 1–30 sekund). Pomimo ograniczeń związanych z małymi rozmiarami udało się uzyskać szereg technologicznych osiągnięć. Pierwotne plany przewidywały stabilizację kątową z dokładnością do około 0,004 stopnia. Przez stopniowe ulepszenia programów komputerowych udało się to poprawić aż 10-krotnie, do poziomu 0,0004 stopnia. Rosyjska rakieta *Eurokot* (dawniej rakieta balistyczna SS-19) z doskonałym manewrującym trzecim członem *Breeze* umieściła MOST dokładnie na oczekiwanej orbicie. Było to 30 czerwca 2003 roku, na dzień przed świętem narodowym Kanady.

Program naukowy i wyniki

Po kilku miesiącach prób (i błędów) zespół naukowy zaczął otrzymywać wyniki. W tej chwili mamy już kilkadziesiąt publikacji, które można znaleźć w Internecie po prostu poprzez wyszukanie słów „satellite MOST”. Ograniczę się tylko do bardzo małej próbki.

Jednym z pierwszych obserwowanych obiektów była jasna gwiazda Procyon. Jest to gwiazda typu Słońca, ale bardziej masywna, więc większa i jaśniejsza. Oczekiwano, że drgania sejsmiczne Procyona będą szczególnie intensywne, ale z nieco dłuższymi okresami niż dla Słońca (gdzie typowe oscylacje mają okresy

około 5 minut). Ku naszemu wielkiemu zaskoczeniu, miesiąc obserwacji w styczniu 2004 r. (rys. 4) dał niespodziewany wynik. Procyon... nie wykazuje oscylacji! Nie tylko nie są one silne, ale ich w ogóle nie ma, przynajmniej na poziomie około 3–5 części na milion. Publikacja w *Nature* zrobiła prawdziwą furorę, ale też przyniosła nam nieco niechęci tych obserwatorów, którzy poprzednio „wykryli” (błędnie) oscylacje Procyona za pomocą obserwacji naziemnych (takie obserwacje cierpią głównie z powodu przerw dziennych i przerw wywołanych złą pogodą).

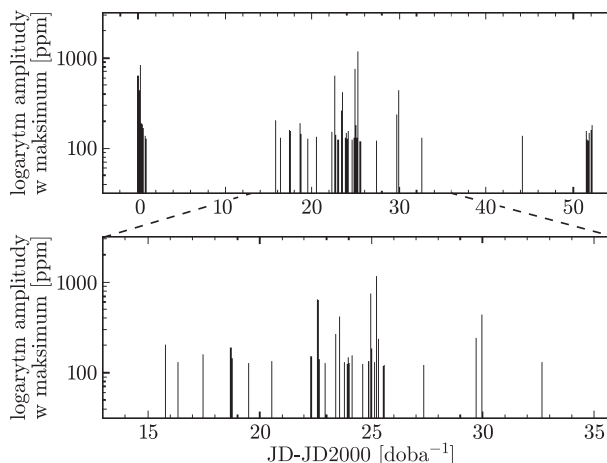


Rys. 4. Zmiany jasności Procyona podczas pierwszej serii obserwacji w roku 2004. Części (a) i (b) rysunku pokazują wszystkie obserwacje i obserwacje uśrednione w przedziałach kilkuminutowych. Stopniowa zmiana jasności przez miesiąc wywołana była efektami instrumentalnymi we wczesnej fazie projektu. Widać identyczną zmianę w innej gwiazdzie, w której wykryliśmy wyraźne pulsacje – część (c).

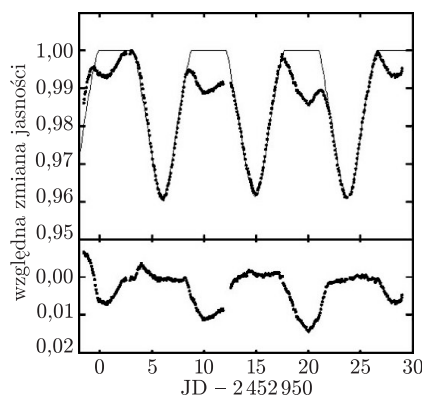
W tej chwili, po dalszych obserwacjach w 2005 i 2006 roku, wiemy, że bardzo słabe oscylacje pojawiają się i zanikają w skali kilku dni, co jest pewnym zaskoczeniem, ale też uniemożliwia stosowanie formalizmu Fouriera do znajdowania okresów oscylacji. Teoretycy myślą teraz, jak ulepszyć teorię wzbudzenia oscylacji w masywnych gwiazdach przez konwekcyjną turbulencję. W polu widzenia Procyona wykryliśmy gwiazdę pulsującą typu Delta Scuti i przeprowadziliśmy analizę jej stosunkowo silnych oscylacji. W gwiazdach tych pulsacje są silne i bardzo złożone ze względu na sprzężenie się dynamicznych własności całej gwiazdy z reakcją cieplną zewnętrznych warstw (rys. 5).

To co widać na rys. 4(c) to „dudnienie” kilku takich oscylacji.

Przykładem przydatności ciągłych obserwacji MOSTem jest wykrycie dwóch systemów plam na powierzchni bliskiej, stosunkowo młodej (1/6 wieku Słońca) gwiazdy Kappa 1 Ceti. Po odjęciu wkładu stabilnej plamy, odpowiadającej za zmiany o amplitudzie około 4% średniej jasności, regularnie powracającej wskutek rotacji gwiazdy co 8,9 dnia, pozostaje druga, słabsza (amplituda około 1%) plama wskazująca na rotację gwiazdy w 9,3 dnia (rys. 6).



Rys. 5. Analiza oscylacji gwiazdy HD 61199 w polu Procyona. Na skali osi poziomej jest częstotliwość oscylacji w cyklach na dzień, na (logarytmicznej) skali pionowej jest amplituda w ppm.



Rys. 6. Obserwacja młodej gwiazdy Kappa 1 Ceti sugeruje istnienie na jej powierzchni dwóch plam (albo systemów plam) z różnymi okresami rotacji. Jest to pierwszy tak wyraźny przejaw rotacji różniczkowej odkrytej nie na Słońcu. Powierzchnie gwiazd są nadal niedostępne do bezpośrednich obserwacji i widoczne są jako punkty nawet przez największe teleskopy.

Prosty model wskazuje, że widzimy rotację różniczkową, podobną jak na Słońcu, z obszarami w wyższych szerokościach rotującymi wolniej. Jest to pierwszy tak klarowny dowód istnienia tego typu rotacji. Przy okazji warto wspomnieć, że te plamy są bardzo duże; na Słońcu w maksimum aktywności sumaryczny efekt osłabienia światła nie przekracza 0,1%.

Co dalej?

W tej chwili MOST jest w czwartym roku swego działania. Orbita powoli rozsynchronizowuje się, ale nawet gdy zaczną następować okresowe zakrycia gwiazd przez brzeg Ziemi, będziemy mogli dalej prowadzić obserwacje. Gorzej, jeżeli popsuje się któreś z kół reakcyjnych, ale jest ciągle jeszcze jedno w zapasie. W sumie przewiduje się działanie satelity przez dalszych kilka lat. W tempie około 12–15 dokładnie badanych obiektów na rok, będziemy mogli jeszcze poczynić wiele obserwacji.

Strona Web o MOST: www.astro.ubc.ca/MOST

Strona autora: www.astro.utoronto.ca/~rucinski

Artykuły wspomniane w tekście:

Procyon: J.M. Matthews i inni *Nature* **430**(2004)51

Kappa 1 Ceti: S.M. Rucinski i inni *Publ. Astr. Soc. Pacific* **116**(2004)1093

Po angielsku problem komiwojażera nazywa się *travelling salesman problem*, w skrócie *TSP*.



*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Komiwojażer

Anna NIEWIAROWSKA *

Ogólny problem komiwojażera formułujemy następująco: dane jest n miast, a każde dwa z nich połączone są drogą o pewnej długości. W jednym z miast znajduje się komiwojażer, który chce odwiedzić wszystkie miasta w taki sposób, aby w każdym mieście znaleźć się dokładnie jeden raz, a na koniec wędrówki powrócić do miejsca startowego. Naszym celem jest znalezienie najkrótszej możliwej trasy dla komiwojażera.

Problem ten można łatwo przedstawić w języku teorii grafów. Dany jest graf pełny (klika) K_n z dodatkimi wagami na krawędziach, które odpowiadają odległościom między miastami. Niech $d(u, v)$ oznacza wagę krawędzi uv (odległość między miastami u i v). Chcemy znaleźć w tym grafie cykl Hamiltona (czyli cykl przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz) o minimalnej sumie wag krawędzi. Ponieważ cykl musi przechodzić przez wszystkie wierzchołki, więc wybór wierzchołka początkowego nie ma znaczenia.

Nasuującym się rozwiązaniem jest rozpatrzenie wszystkich możliwych cykli i wybranie najlepszego z nich. Jednak złożoność takiego rozwiązania jest wykładnicza względem liczby miast, więc już dla niedużych grafów komiwojażer nie doczeka się na wynik takiego obliczenia.

Często zdarza się, że odległości spełniają dodatkowe warunki, na przykład *nierówność trójkąta*:

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$

dla każdej trójki miast u, v, w . Jest tak na przykład – ale nie tylko! – wówczas, gdy miasta są położone na płaszczyźnie, a odległości mierzymy w metryce euklidesowej (to tak, jakby komiwojażer latał samolotem zawsze w linii prostej). Jeżeli wagi krawędzi spełniają nierówność trójkąta, to mówimy o *metrycznym problemie komiwojażera*.

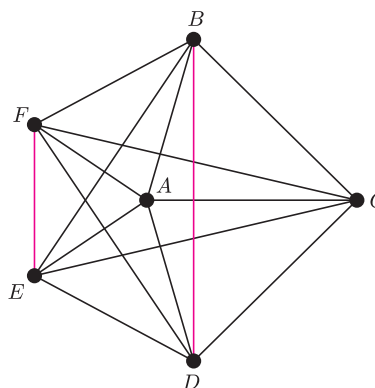
Oba problemy – ogólny i metryczny – są NP-trudne, co oznacza, że żadne szybkie (wielomianowe) rozwiązania nie są znane i bardzo możliwe, że w ogóle nie istnieją. Czy w takim razie nie potrafimy wcale pomóc komiwojażerowi? Na szczęście nie jest tak źle. Jeżeli mamy do czynienia z problemem *metrycznym*, to możemy (tym razem efektywnie!) przygotować trasę, która będzie niewiele gorsza od trasy optymalnej – co najwyżej dwukrotnie dłuższa.

W rozwiązaniu będziemy korzystać z minimalnego drzewa rozpinającego grafu. Kilka słów wyjaśnienia dla niewtajemniczonych. Drzewem rozpinającym grafu G jest dowolny podgraf G , który jest drzewem i zawiera wszystkie wierzchołki grafu G . Jeśli krawędzie grafu mają przypisane wagi, to jest sens mówić o minimalnym drzewie rozpinającym – jest to po prostu drzewo rozpinające o minimalnej sumie wag krawędzi spośród wszystkich drzew rozpinających. W języku komiwojażera minimalne drzewo rozpinające to podzbiór wszystkich dróg, który umożliwia przejazd między każdymi dwoma miastami i ma minimalną łączną długość. Drzewo takie można łatwo skonstruować

w czasie wielomianowym względem rozmiaru grafu, stosując strategię zachłanną.

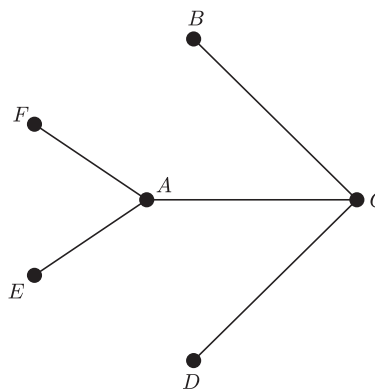
Patrz Cormen, Leiserson, Rivest, Stein *Wprowadzenie do algorytmów*, WNT, Warszawa 2005.

Teraz możemy przedstawić algorytm znajdowania trasy komiwojażera. Dla ułatwienia będziemy od razu pokazywać działanie tego algorytmu na przykładzie z sześcioma miastami, przedstawionym na rysunku (a). Początkowo komiwojażer znajduje się w mieście A .



(a) Kolorowe krawędzie mają koszt 5, czarne 3.

W pierwszym kroku znajdujemy minimalne drzewo rozpinające grafu (rysunek (b)).



(b)

Zauważmy, że gdyby komiwojażer mógł wielokrotnie odwiedzać te same miasta, to jego trasa mogłaby składać się wyłącznie z krawędzi drzewa rozpinającego. Komiwojażer mógłby się wtedy poruszać po drzewie zgodnie z następującymi zasadami:

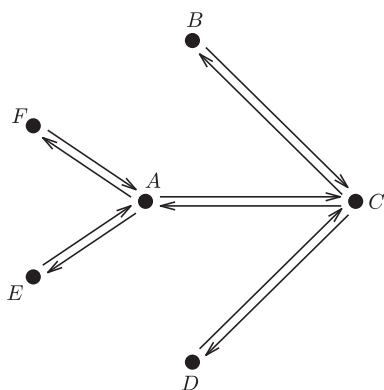
- jeśli z aktualnie odwiedzanego wierzchołka v prowadzi krawędź do pewnego nieodwiedzzonego jeszcze wierzchołka w , to należy się tam udać,
- jeśli wszystkie wierzchołki połączone krawędziami z aktualnym wierzchołkiem v zostały już odwiedzone, to należy cofnąć się do wierzchołka, z którego weszliśmy do v ,

- jeśli aktualny wierzchołek jest wierzchołkiem początkowym i wszystkie sąsiadujące z nim wierzchołki zostały odwiedzone, to kończymy zadanie.

Łatwo zauważyć, że startując z dowolnego wierzchołka drzewa, odwiedzimy wszystkie pozostałe wierzchołki. Powyższy algorytm nazywamy algorytmem przechodzenia grafu (a w naszym przypadku drzewa) *w głąb*. Jeden ze sposobów przejścia przykładowego drzewa został zaprezentowany na rysunku (c).

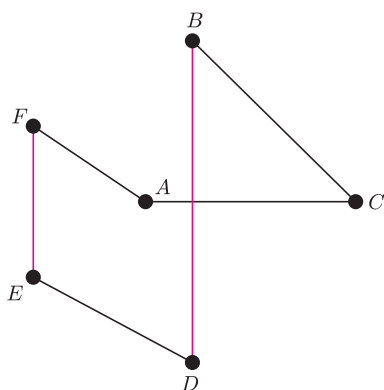
Odwiedzamy tu kolejno wierzchołki:

$A - C - B - C - D - C - A - E - A - F - A$.



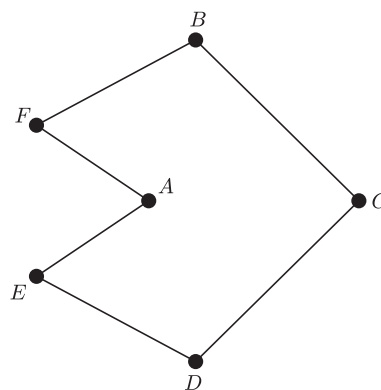
(c)

Okazuje się, że możemy łatwo zmodyfikować znaną trasę tak, aby komiwojazer odwiedzał każde miasto dokładnie jeden raz. Wystarczy w tym celu „przeskakiwać” te wierzchołki, które zostały już odwiedzone, a na koniec wrócić do miejsca początkowego. W naszym przykładzie, zaczynając z wierzchołka A, odwiedzimy najpierw wierzchołki C i B. Następnie, przeskakując odwiedzone już wierzchołki C, przejdziemy do D. Dalej odwiedzimy wierzchołki E i F, a na koniec wrócimy do wierzchołka A. Otrzymaliśmy więc przedstawioną na rysunku (d) trasę $A - C - B - D - E - F - A$. Postępując w opisany powyżej sposób, zawsze uzyskamy cykl Hamiltona, czyli poprawną trasę dla komiwojazera.



(d)

Zauważmy, że trasa ta może być gorsza od optymalnej. W naszym przykładzie koszt znalezionej trasy wynosi 22, a koszt optymalnego rozwiązania (przedstawionego na rysunku (e)) wynosi 18. Oczywiście, gdybyśmy znaleźli inne minimalne drzewo rozpinające lub przechodzili drzewo w nieco innym porządku (zgodnym z przedstawionym powyżej opisem), to moglibyśmy otrzymać cykl o innym koszcie.



(e)

Pokażemy, że cykl znajdujący przez przedstawiony algorytm nie może być dużo gorszy od optymalnego cyklu – jego łączny koszt może być co najwyżej dwukrotnie większy.

Optymalnym rozwiązaniem jest pewien cykl Hamiltona C w klicie K_n . Usuając dowolną krawędź tego cyklu, otrzymamy pewne drzewo rozpinające tej klicy. Wynika stąd, że koszt cyklu C jest większy od kosztu pewnego drzewa rozpinającego K_n , więc tym bardziej jest większy niż koszt minimalnego drzewa rozpinającego.

Gdybyśmy po prostu przechodzili w głąb minimalne drzewo rozpinające (jak na rysunku (c)), to koszt trasy byłby dwukrotnie większy od sumy wag krawędzi tego drzewa (każdą krawędzią przechodzimy dwukrotnie). Omijanie odwiedzonych wierzchołków nie zwiększa kosztu (nierówność trójkąta!), więc koszt znalezionej trasy również jest co najwyżej dwukrotnie większy od sumy wag krawędzi minimalnego drzewa rozpinającego. Reasumując ostatnie dwa akapity, stwierdzamy, że:

koszt znalezionej trasy jest nie większy niż dwukrotny koszt minimalnego drzewa rozpinającego i mniejszy niż dwukrotny koszt najtańszego cyklu Hamiltona.

Czytelnikowi pozostawiamy następujące zadanie: skonstruować rodzinę grafów, dla której najgorsze rozwiązanie, znajdowane przez algorytm, mają (asymptotycznie) koszt dwukrotnie większy od kosztu optymalnego.

Mówiąc fachowo, znaleźliśmy dla metrycznego problemu komiwojazera *algorytm 2-aproksymacyjny*, tzn. szybki (wielomianowy) algorytm przybliżony, dający zawsze wynik o koszcie co najwyżej 2 razy większym od optymalnego. Dla tego problemu istnieje także nieco bardziej skomplikowany algorytm $\frac{3}{2}$ -aproksymacyjny i jest to najlepszy współczynnik, jaki udało się dotychczas uzyskać. Dla ogólnego problemu komiwojazera nie istnieje żaden algorytm aproksymacyjny (o ile $P \neq NP$).

Algorytmy aproksymacyjne są aktywnie badane, ponieważ są jednym ze sposobów atakowania trudnych problemów, których nie potrafimy efektywnie rozwiązywać dokładnie.

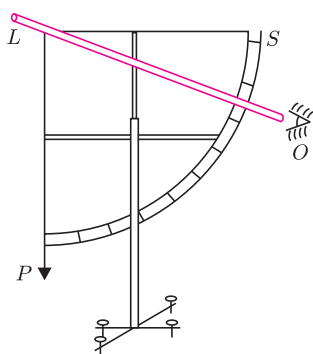
Jak Astronom Królewski z Greenwich, Nevil Maskelyne, zważył Ziemię w 1774 roku

Bronisława ŚREDNIAWA

Na początku był Newton

Izaak Newton (1642–1727), rozważając konsekwencje swojego prawa powszechnego ciężenia, stwierdził, że pion zawieszony w pobliżu góry nie będzie wskazywał dokładnie środka Ziemi, ale zostanie nieco odchyłony w stronę góry przez oddziaływanie grawitacyjne między masą ciężarka pionu a masą góry. Szacował, że to odchylenie dla półkulistej góry o wysokości trzech mil (4,8 km) nie przekroczy dwóch minut kątowych i sceptycznie odnosił się do możliwości pomiaru tak znikomego efektu. Zagadnienie takie zyskało sobie nazwę *Attraction of Mountains* (przyciągania gór) i, pomimo sceptycyzmu Newtona, w XVIII wieku w różnych miejscach na Ziemi przeprowadzano próby pomiaru kąta odchylenia wskazań pionu od kierunku zenitu w pobliżu gór.

Jako pierwsi wyzwanie podjęli w roku 1738 Francuzi, Pierre Bouguer (1698–1758) i Charles Marie de La Condamine (1701–1774), w Ameryce Południowej. Dla szeregu gwiazd wykonali pomiary kąta pomiędzy kierunkiem do gwiazdy a linią wskazywaną przez pion w pobliżu wygasłego wulkanu Chimborazo i w znacznej odległości od niego, dokładnie na zachód, na płaskowyżu Quito. Jednak z powodu zbyt mało dokładnego kwadrantu (rys. 1), nie udało im się zmierzyć kąta odchylenia pionu od prawdziwego kierunku zenitalnego, ale mimo to sam fakt istnienia efektu został potwierdzony.



Rys. 1. Kwadrant astronomiczny.

L – luneta,
S – skala,
O – obserwator,
P – pion.

Pomysł i miejsce

W 34 lata później wielbny Nevil Maskelyne (1732–1811), Astronom Królewski z obserwatorium w Greenwich, wygłosił w Royal Society w Londynie wykład pod tytułem *A Proposal for Measuring the Attraction of Some Hill in this Kingdom by Astronomical Observations*. Sformułował w nim cel doświadczenia jako oszacowanie masy Ziemi oraz jej gęstości w pobliżu powierzchni w porównaniu z gęstością jej głębszych warstw. Zatem doświadczenie miało udzielić, między innymi, odpowiedzi na ówczesne

zadawane pytanie: czy Ziemia jest pustą skorupą, czy wręcz przeciwnie – ma ciężką zawartość?

Wkrótce został powołany komitet w celu przygotowania eksperymentu, w skład którego wchodził, między innymi, Henry Cavendish (1731–1810). Równocześnie przeznaczono fundusze na przygotowanie tego przedsięwzięcia.

Latem 1773 roku Charles Mason (1730–1787) wyszukał w Szkocji odpowiednią górę. Idealna kandydatka miała być możliwie wolno stojąca, o kształcie wydłużonym w kierunku wschód-zachód, wysoka około pół mili (ok. 800 m), bez żlebów, szczelin i jaskiń. Góra Schehallien (1083 m n.p.m.) spełniała najlepiej postawione warunki. Miejsca obserwacji astronomicznych wybrano po stronie północnej i południowej góry w około połowie drogi od podnóża do szczytu, praktycznie na tym samym południku. Warto w tym miejscu zauważyć, że Schehallien w języku Erse (szkocki, należący do grupy języków celtyckich) oznacza nieprzerwaną burzę. Istotnie, kaprysy pogodowe utrudniały znacznie obserwacje i pomiary.

Na tym etapie przygotowań Mason odmówił propozycji kolejnej wyprawy do Szkocji w celu przeprowadzenia planowanego eksperymentu i Maskelyne, choć niechętnie, podjął się wypełnienia tej misji.

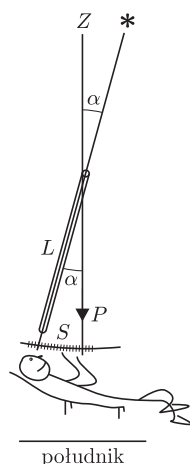
Metoda

Metoda zaproponowana przez Maskelyne'a polegała na bardzo dokładnym wyznaczeniu różnicy szerokości geograficznej dwóch miejsc po północnej (obserwatorium A) i południowej stronie góry (obserwatorium B) leżących praktycznie na linii północ-południe. Pomiary wykonano dwoma sposobami, geodezyjnym i astronomicznym. Metodą geodezyjną znaleziono poprawną różnicę szerokości geograficznych obu punktów obserwacyjnych A i B. W tym celu wyznaczono dokładną odległość tych punktów, a w tablicach Bouguera znaleziono odległość odpowiadającą jednemu stopniowi szerokości geograficznej na szerokości geograficznej Schehallien ($56^{\circ}40'$). Natomiast szerokość geograficzna wyznaczona z metody astronomicznej, opartej na pomiarze odległości zenitalnej gwiazdy w chwili jej przejścia przez południk, była zaburzona przez fakt, że pion nie wskazywał dokładnie środka Ziemi, czyli nie wskazywał na niebie zenitu (Rys. 3 i 4). Następnie należało wyliczyć różnicę tej zaburzonej szerokości geograficznej punktów A i B.

Dla punktów A i B różnice szerokości geograficznej, obliczone sposobem geodezyjnym i astronomicznym, nie były sobie równe. Ich różnica stanowiła podwojony kąt odchylenia wskazania pionu od kierunku do prawdziwego zenitu. Obliczywszy masę góry, można było wyznaczyć masę i gęstość Ziemi.

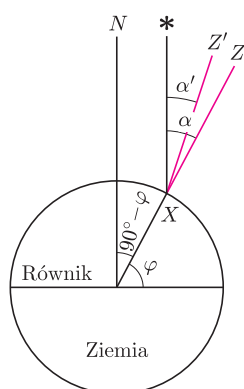
Doświadczenie

Asystent Maskelyne'a, Reuben Burrow, pojawił się pierwszy na miejscu doświadczenia pod Schehallien. Przygotował zakwaterowanie dla astronoma, obserwatorium w płóciennie-drewnianym namiocie



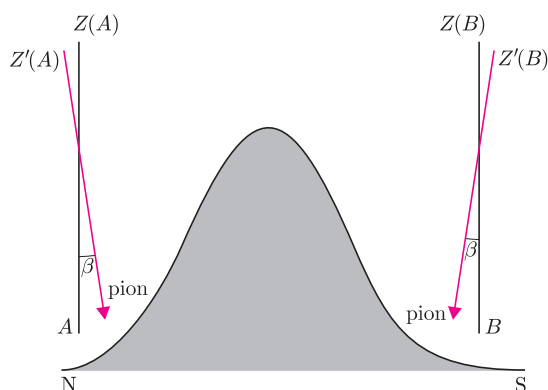
Rys. 2. Urządzenie do pomiaru odległości zenitalnej gwiazdy.

Z – zenit,
 α – odległość zenitalna gwiazdy,
 P – pion,
 L – luneta,
 S – skala ze śrubą mikrometryczną.



Rys. 3. Odległości zenitalne gwiazdy.

α – odległość zenitalna gwiazdy bez zaburzenia wskazań pionu w punkcie A oraz
 α' – przy zaburzeniu wskazań pionu spowodowanym przyciąganiem góry,
 Z – zenit,
 Z' – wskazanie pionu w sąsiedztwie góry,
 N – północ,
 φ – szerokość geograficzna.



Rys. 4. Wskazania pionów Z'(A) i Z'(B) w obserwatoriach A i B w pobliżu góry. Z(A), Z(B) – linie od miejsc obserwacji do ich zenitów, kąt β – kąt pomiędzy wskazaniem pionu a linią do zenitu.

oraz przyrządy astronomiczne, z których najważniejsze były: luneta o długości 3,1 m zaopatrzona w pion, 30,5-centymetrowy kwadrant astronomiczny i zegar astronomiczny.

Dalszym zadaniem jego oraz Williama Menziesia, lokalnego mierniczego, było wykonanie żmudnych pomiarów geodezyjnych, w celu dokładnego wyznaczenia kształtu góry, potrzebnego do wyliczenia jej objętości oraz wyznaczenia prawdziwej różnicy szerokości geograficznej punktów A i B. Te pomiary prowadzono do nastania pierwszych mrozów w listopadzie 1774 roku, a potem na wiosnę następnego roku.

Sam Nevil Maskelyne dotarł pod Schehallien już 30 czerwca 1774 roku i zajął się obserwacjami nieba. Używając lunety zaopatrzonej w pion i dokładną skalę ze śrubą mikrometryczną do pomiaru kąta pomiędzy lunetą a pionem (rys. 2), mierzył kąt pomiędzy wskazywanym zenitem a gwiazdą będącą w najwyższym swoim położeniu tej nocy, czyli w momencie jej przejścia przez linię południka. Kierunek południka wyznaczył w pierwszym obozie za pomocą obserwacji Słońca kwadrantem, a w drugim obozie z powodu braku widocznego Słońca, najpierw z pomiarów astronomicznych, znał bowiem z tablic czas pomiędzy przejściem dwóch gwiazd przez południk, a następnie tak długo ustawiał aparaturę, aż czas z tablic zgadzał się ze zmierzonym w obserwatorium. W kilka dni później, gdy warunki meteo na to pozwoliły, sprawdził ustawienie aparatury pomiarowej na południku za pomocą pomiaru wysokości Słońca kwadrantem. Sprawdzenie kolimacji przeprowadził, prowadząc w obu miejscach A i B obserwacje zarówno przed, jak i po obrocie urządzenia o 180° wokół pionu.

Odległość zenitalną odczytywał ze skali i z podziałki śruby mikrometrycznej z dokładnością do 0,1 sekundy kątowej. W pierwszym obserwatorium, w punkcie B, na południowym zboczu góry pomiary po 3 tygodniach oczekiwania na odpowiednią pogodę zaczęto 20 lipca i trwały one do 19 sierpnia, z tym że 1 sierpnia astronom dokonał obrotu urządzenia pomiarowego o 180° i z tak ustawioną aparaturą powtórzył obserwacje tych samych gwiazd i dodatkowo jeszcze wielu innych. Następnie w ciągu tygodnia przeniesiono się na północną stronę góry do punktu A. Tam pomiary prowadzono od 4 września z przerwami powodowanymi brakiem dobrych warunków atmosferycznych do 24 października.

W sumie Maskelyne wykonał 337 obserwacji 43 gwiazd znajdujących się w granicach $8,5^\circ$ od zenitu i powrócił do Londynu pod koniec października tego samego roku.

Skrzypce

Do legendy przeszła następująca anegdota. Po zakończeniu pomiarów Maskelyne dziękował miejscowym pomocnikom za współpracę, organizując przyjęcie z nieodzwonną beczulką whisky. Wówczas niepostrzeżenie dla biesiadników wybuchł pożar, w wyniku którego spaliły się skrzypce, własność Duncana Robertsona, który swoją muzyką umilał ekipie doświadczalnej wieczory na pustkowiu. Zmartwiony i wzruszony Maskelyne wkrótce przysłał mu sprawny

instrument z Londynu. W podziękowaniu Duncan skomponował pieśń o tych skrzypcach, które, jak legenda niesie, miały być „Stradivariusem” i pewnie zostały później podmienione przez naprawiającego je nieuczciwego lutnika w XIX wieku na instrument miejscowej roboty, ponieważ skrzypce dziś znajdujące się w posiadaniu spadkobierców Duncana zaopatrzone są w napis „Edinburgh 1840”.

Pierwsze wyniki

W rok po przeprowadzeniu doświadczenia opublikowano wstępne wyniki z obliczeń dla 10 gwiazd. Różnica szerokości geograficznej punktów O i P , wyznaczona sposobem astronomicznym (tzn. z zaburzeniem „przyciągania góry”), wynosiła $54,6''$, a prawdziwa różnica szerokości geograficznej tych miejsc wynosiła $42,94''$. Zatem kąt odchylenia pionu od kierunku prawdziwego zenitu w pobliżu góry wyniósł $5,8''$. Kontynuując Maskelyne stwierdzał, że średnia gęstość Ziemi jest co najmniej 2 razy większa niż gęstość jej powierzchniowej warstwy.

Opracowanie danych

Całościowym opracowaniem wszystkich danych zajęł się Charles Hutton (1737–1823) – nauczyciel, matematyk, profesor wojskowej akademii w Woolwich. Jego sprawozdanie ukazało się w *Philosophical Transactions* w 1778 roku. Aby wyliczyć gęstość Ziemi, trzeba było wcześniej wyznaczyć masę góry, a w tym celu poznać jej objętość i gęstość. Przy okazji wykonania koniecznych do tego celu dokładnych rysunków kształtu góry Hutton wynalazł poziomice. Gęstość góry oszacował jako 2,5 raza większą niż gęstość wody i na tej podstawie po

długich obliczeniach otrzymał wartość gęstości Ziemi równą 4,5 gęstości wody. Przyjmując znaną wówczas wielkość promienia kuli ziemskiej – 6500 km, otrzymał masę Ziemi nieco ponad $5 \cdot 10^{21}$ ton.

Z drugiej jednak strony Cavendish w 1798 roku otrzymał ze sławnego doświadczenia z wahadłem torsyjnym gęstość Ziemi równą 5,45 gęstości wody. Hutton jeszcze później dwukrotnie modyfikował w górę swój wynik. Po raz pierwszy po ponownym przeglądzie w 1811 roku danych związanych z budową Schehallien, a drugi raz mając 84 lata w 1821 roku, kiedy ostatecznie zdecydował się podać wartość 4,95 gęstości wody. Nadmienmy tutaj, że zdaniem Newtona Ziemia miała mieć gęstość między 5 a 6 gęstości wody. Co ciekawe, jest to zgodne z naszą obecną wiedzą na ten temat – wartość tę dziś przyjmujemy jako $5,52 \text{ g/cm}^3$ i daje ona masę Ziemi równą $5,974 \cdot 10^{21}$ ton.

Słabą stroną zastosowanej przez Maskelyne’a metody była trudność oszacowania gęstości góry i bardzo mały kąt, który należało wyznaczyć. Jednakże sposób podejścia do zagadnienia, skrupulatność w przeprowadzeniu pomiarów, zebraniu danych, solidne opracowanie wyników, spowodowały, że rezultaty pracy astronoma – pomysłodawcy, matematyka opracowującego dane i całej ekipy doświadczalnej zapisały się chlubnie na kartach dziejów nauki.

Literatura:

1. D. Howse, *Nevil Maskelyne, The Seaman's Astronomer*, Cambridge University Press 1989.
2. G.S. Leadstone, *Maskelyne's Schehallien experiment of 1774*, *Physics Education* 1974, vol. 9, s. 452–458.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 709. W naczyniu przykrytym płaską przylegającą pokrywką znajduje się odłamek lodu o masie $m = 100 \text{ g}$. Oszacować siłę potrzebną do oderwania całej pokrywki naraz, po stopnieniu lodu.

Rozwiązanie na str. 12

F 710. Oszacować siłę potrzebną do oderwania od pleców dobrze postawionej bańki (lekarzkiej).

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

M 1195. Wyznaczyć wszystkie ciągi p_1, p_2, \dots, p_{100} liczb pierwszych, dla których spełnione są podzielności

$$p_1 \mid p_2^2 - 1, \quad p_2 \mid p_3^2 - 1, \quad \dots, \quad p_{100} \mid p_1^2 - 1.$$

Rozwiązanie na str. 13

M 1196. W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełnione są równości (rysunek)

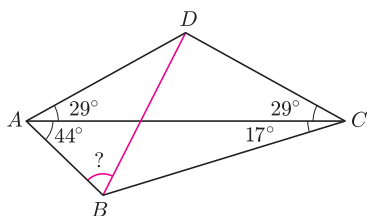
$$\sphericalangle BAC = 44^\circ, \quad \sphericalangle BCA = 17^\circ, \quad \sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD = 29^\circ.$$

Wyznaczyć miarę kąta ABD .

Rozwiązanie na str. 17

M 1197. Danych jest $n \geq 3$ punktów na płaszczyźnie, nieleżących na jednej prostej. Każdemu z tych punktów przyporządkowano pewną liczbę rzeczywistą. Wiadomo, że dla każdej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa dane punkty suma liczb przyporządkowanych punktom leżącym na tej prostej wynosi 0. Wykazać, że każdemu punktowi przyporządkowano liczbę 0.

Rozwiązanie na str. 24



Astronomia cząstek naładowanych, czyli sukces na początek

Obserwacja astronomiczna jest możliwa, o ile nośnik informacji porusza się po torze prostoliniowym. Nie można uzyskać ostrego zdjęcia, jeżeli trajektorie nośników są przypadkowe. Cząstki naładowane, tworzące promieniowanie kosmiczne bombardujące Ziemię, nie noszą informacji o swoich źródłach, ponieważ po drodze przechodzą przez galaktyczne i międzygalaktyczne pola magnetyczne, które zmieniają trajektorie w sposób przypadkowy. Dlatego prawie zawsze zdjęcia astronomiczne są wykonane za pomocą fotonów. Co prawda, potrafimy rejestrować fotony w bardzo szerokim zakresie energii, od fal radiowych po kwanty gamma, ale jednocześnie jesteśmy praktycznie na nie skazani. Do niedawna jedyną alternatywą były neutrino. Jednak liczba obiektów, którym zrobiono zdjęcia w neutrinach, ogranicza się do Słońca i supernowej 1987A.

Trajektorie cząstki naładowanej ulega tym mniejszemu zakrzywieniu w polu magnetycznym, im większa jest jej energia. Jeżeli jest ona bardzo duża, to kierunek zmienia się niewiele i wtedy można by było pomyśleć o astronomii cząstek naładowanych. O jak dużych energiach mówimy? Niestety, o bardzo, bardzo dużych. Jeżeli przyjmujemy, że dopuszczalne odchylenie nie powinno przekraczać trzech stopni, to energie muszą być większe od 40 EeV (egzaelektronowoltów, 10^{18} eV), czyli pięć i pół miliona razy większe niż będą osiągalne w akceleratorze LHC.

Jak dużo tak energetycznych protonów dociera do Ziemi? Niewiele, tylko mniej więcej jeden na kilometr kwadratowy na stulecie. Nie wygląda to zachęcająco, a to jeszcze nie koniec problemów. Astronomowie borykają się nie tylko z ostrością zdjęć, ale również z osłabieniem sygnału na skutek oddziaływania z nie całkiem pustą przestrzenią kosmiczną. Dla tak energetycznych protonów przeszkodą staje się wypełniająca cały Wszechświat mikrofalowe promieniowanie tła. Konkretnie, jeżeli energia protonu przekracza 60 EeV, to w wyniku zderzenia z fotonem tła możliwe jest wyprodukowanie pionu. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest bardzo małe, a więc droga swobodna bardzo duża, ale i tak prowadzi to do tzw. limitu GZK (Greisena–Zatsepina–Kuzmina): cząstka o takiej energii nie może pochodzić z odległości większej niż około 50 Mpc, co w skali kosmologicznej jest niewielką odległością. Protony o wyższych energiach były jednak obserwowane, co powinno świadczyć o ich pochodzeniu z lokalnej gromady galaktyk.

W jaki sposób rejestruje się promieniowanie kosmiczne o tak kosmicznych energiach? Protony oddziałują z atmosferą, tworząc tzw. pęki atmosferyczne. Na poziomie Ziemi obserwowalna część pędu składa się głównie z mionów, gdyż inne składniki takiej, liczącej miliardy cząstek, kaskady albo się rozpadają, albo oddziałują (albo są neutrinami, które bardzo trudno zarejestrować). Promień przecięcia stożka pędu z powierzchnią Ziemi wynosi kilka kilometrów. Pamiętając o bardzo małym strumieniu promieniowania o najwyższej energii, łatwo sobie uzmysłwić, że potencjalny detektor powinien wyglądać tak, jak Obserwatorium Pierre Auger przedstawione na przedniej okładce. Kropki na

zamieszczonej mapce odpowiadają pojedynczym detektorom, z których jeden widoczny jest na zdjęciu. Tworzą one trójkątną siatkę o stałej równej 1,5 km. Zinstrumentowany obszar jest pokolorowany. Pojedynczy detektor zawiera zbiornik o pojemności dwunastu tysięcy litrów. Miony, przechodząc przez wodę, poruszają się z prędkością większą niż prędkość światła w tym ośrodku i wysyłają promieniowanie (fotony) Czerenkowa, które są rejestrowane przez fotopowielacze. W ten sposób każdy detektor potrafi określić liczbę mionów, które go prześwietliły, oraz wyznaczyć dokładny moment przejścia. Połączenie informacji z kilku detektorów, które zostały prześwietlone prawie jednocześnie, pozwala na wyznaczenie pierwotnej energii na podstawie liczby zarejestrowanych mionów oraz kierunku na podstawie różnic czasów przelotu.

Jak widać, pomiar nie jest bezpośredni. Jest on na tyle dobry, na ile dobra jest procedura kalibracji. Z problemem tym miały kłopoty wszystkie wcześniejsze eksperymenty. Dlatego obserwatorium Auger jest wyposażone w niezależną możliwość pomiaru parametrów kaskady, która jest bardziej precyzyjna, ale mniej efektywna. Na mapie przedstawionej na okładce widać cztery punkty, z których wychodzi po siedem zielonych dwudziestokilometrowych odcinków. W punktach tych znajduje się po siedem teleskopów, które są w stanie rejestrować fluorescencję atmosferycznego azotu, której intensywność jest proporcjonalna do liczby cząstek naładowanych uczestniczących w danym momencie w kaskadzie. Teleskopy działają tylko w bezksiężycowe noce. Dla każdej kaskady rejestrują jakby ultrafioletowy meteor poruszający się z prędkością bliską prędkości światła. Rejestracja tej samej kaskady przez teleskopy umieszczone w różnych punktach pozwala na bardzo dokładny pomiar kierunku cząstki pierwotnej. Dzięki temu możliwe jest wykalibrowanie procedury oceny zarówno energii, jak i kierunku przez siatkę detektorów Czerenkowa.

Opublikowane pod koniec zeszłego roku wyniki [1] są przedstawione na mapie nieba na przedniej okładce. Cieniowaniem ukazano zsumowaną ekspozycję, gwiazdki oznaczają położenie galaktyk z aktywnym jądrem (AGN), a małe okręgi (elipsy) oznaczają obszary, z których nadleciało 27 najbardziej energetycznych ($E > 57$ EeV) cząstek. Analiza statystyczna ujawniła, że szansa, aby obserwowany rozkład nie był związany z rozkładem AGN, wynosi zaledwie dwa promile.

Tym samym rozwiązany wydaje się problem pochodzenia najbardziej energetycznych posłańców. Akceleratorami są najprawdopodobniej czarne dziury, które intensywnie podgrzewają centra niedalekich galaktyk po przejściach (np. innej galaktyki w pobliżu). Pracę [1] można uznać za narodziny astronomii cząstek naładowanych.

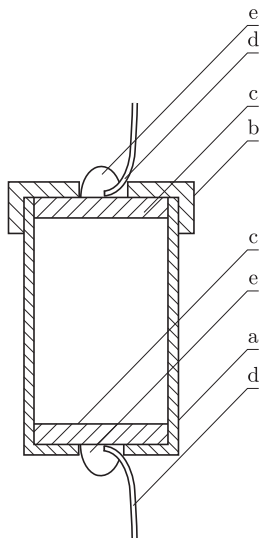
Piotr ZALEWSKI

[1] The Pierre Auger Collaboration, *Correlation of the highest energy cosmic rays with nearby extragalactic objects*, astro-ph/0711.2256, *Science* **318**(2007)938-943

Wykrywamy próg perkolacji

Stanisław BEDNAREK

Słowo *perkolacja* oznaczało pierwotnie metodę wydobywania surowców chemicznych przez wypłukiwanie ich za pomocą rozpuszczalników. Obecnie teoria perkolacji stanowi matematyczną metodę opisu układów nieuporzdkowanych, np. takich jak cząstki substancji przewodzącej rozproszone wewnątrz izolatora. Do naszego doświadczenia potrzebne będzie plastikowe cylindryczne pudełko o średnicy około 20 mm i wysokości około 40 mm. Bardzo dobrze nadaje się do tego celu pudełko od filmu. Oprócz tego potrzebne będą: suchy piasek, metalowe opiłki, przewody, bateria płaska i kawałki blaszki z puszki od konserw. Opiłki możemy uzyskać przez spiłowanie pilnikiem kawałka miękkiego metalu, np. aluminium lub miedzi albo wykorzystać stalowe opiłki używane w szkolnej pracowni fizycznej do badania linii pola magnetycznego. Ponadto niezbędny będzie również dostęp do lutownicy, miernika uniwersalnego i małej menzurki.



Rys. 1. Sposób wykonania elektrod;
a – pudełko od filmu,
b – pokrywka,
c – blaszka,
d – przewód,
e – cyna.

Na początku przygotowujemy płaskie elektrody. W tym celu na kawałkach blaszki rysujemy dwa okręgi o średnicy równej wewnętrznej średnicy pudełka. Ostrożnie, żeby się nie skaleczyć, wycinamy z blaszek dwa kółka. Do każdego z kółek przylutowujemy odizolowaną końcówkę przewodu połączeniowego. Oстрым końcem nożyczek wiercimy niewielkie otworki w środku dna oraz pokrywki pudełka. Przekładamy przewody przez wywiercone otworki, tak żeby elektrody znalazły się wewnątrz pudełka (rys. 1).

Pudełko napełniamy suchym piaskiem i zamykamy pokrywką. Końce przewodów łączymy z biegunami baterii oraz miernika uniwersalnego, tak żeby otrzymać obwód elektryczny, przedstawiony na rysunku 2. Pokrętło miernika ustawiamy na pomiar natężenia prądu w najmniejszym zakresie. Odczytujemy natężenie prądu płynącego przez obwód. Powinno ono wynosić zero, jeżeli tylko użyty piasek był dostatecznie suchy i czysty.

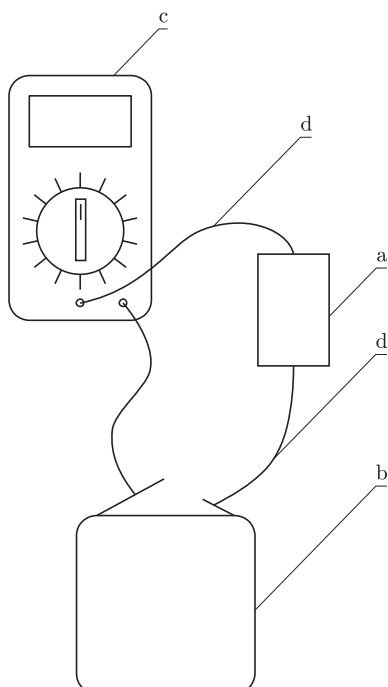
Nasze doświadczenie będzie polegało na pomiarach natężenia prądu elektrycznego, płynącego przez mieszaniny piasku z opiłkami metalowymi o zwiększającej się zawartości opiłków. W tym celu do menzurki wysypujemy niewielką ilość, np. 0,5 cm³ opiłków. Otwieramy pudełko i wysypujemy znajdujący się w nim piasek do menzurki. Górny koniec menzurki zamykamy kciukiem i potrząsamy wielokrotnie menzurką, tak żeby wytworzyć możliwie jak najbardziej jednorodną mieszaninę piasku z opiłkami. Na skali menzurki odczytujemy objętość otrzymanej mieszaniny. Mieszaninę przesypujemy do pudełka, potrząsamy nim i zamykamy pokrywką, a następnie przeprowadzamy pomiar natężenia płynącego przez nie prądu.

Jeżeli pewna ilość mieszaniny nie zmieści się do pudełka i pozostanie w menzurce, to nie należy się tym przejmować. W doświadczeniu będziemy brali pod uwagę względną zawartość opiłków w mieszaninie, która nie zależy od objętości mieszaniny znajdującej się w pudełku. Ta względna zawartość nazywa się współczynnikiem wypełnienia p_f i jest zdefiniowana następującym wzorem

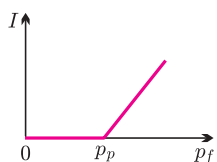
$$p_f = \frac{V_f}{V_m},$$

w którym V_f oznacza objętość opiłków, a V_m – objętość całkowitą mieszaniny.

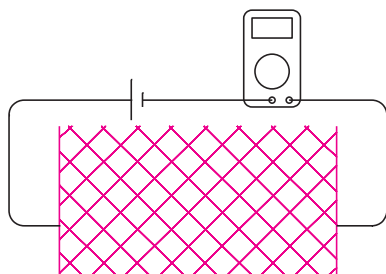
Jeżeli więc do wytworzenia mieszaniny użyliśmy np. 0,5 cm³ opiłków, a całkowita objętość mieszaniny wynosiła 20 cm³, to jej współczynnik wypełnienia p_f wynosi 0,025. Po przeprowadzeniu pomiaru natężenia prądu otwieramy pudełko i wysypujemy mieszaninę do menzurki. Do tej mieszaniny dosypujemy kolejną porcję opiłków, mierzac jej objętość, np. kolejne 0,5 cm³. Zamykamy otwór menzurki kciukiem i wielokrotnie potrząsamy menzurką w celu wytworzenia mieszaniny. Odczytujemy objętość całkowitą mieszaniny i obliczamy jej nowy współczynnik wypełnienia. Mieszaninę przesypujemy do pudełka, potrząsamy nim, zamykamy pokrywką i mierzymy natężenie przepływającego przez nią prądu elektrycznego.



Rys. 2. Obwód elektryczny do badania perkolacji;
a – pudełko od filmu napełnione mieszaniną piasku i opiłków metalowych,
b – bateria płaska,
c – miernik uniwersalny,
d – przewody.



Rys. 3. Zależność natężenia I prądu płynącego przez mieszaninę piasku i opilków metalowych od jej współczynnika p_f wypełnienia przez opilkę; p_p oznacza próg perkolacji.

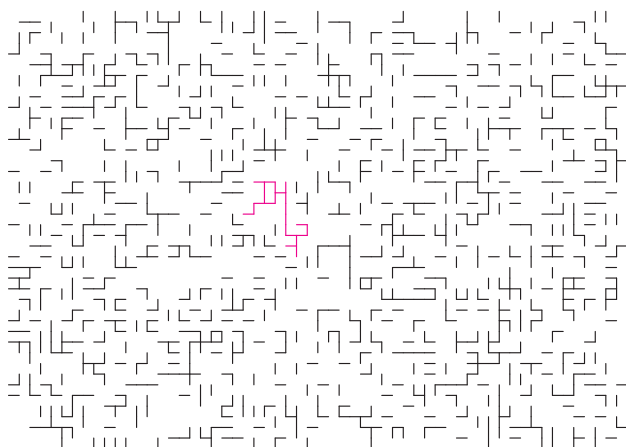


Rys. 4.

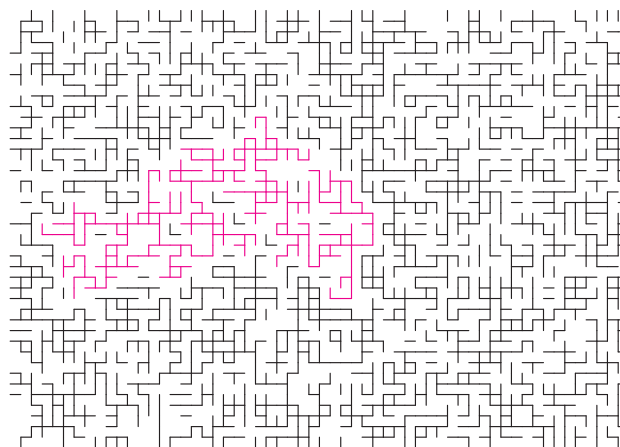
Opisane czynności powtarzamy kilkakrotnie, dochodząc do objętości opilków w mieszaninie wynoszącej np. 5 cm^3 . Rysujemy wykres, przedstawiający zależność natężenia I prądu płynącego przez mieszaninę od jej współczynnika wypełnienia p_f przez opilkę (rys. 3). Okazuje się, że mimo wzrostu współczynnika wypełnienia dla kilku początkowych mieszanin natężenie płynącego przez nie prądu wynosi zero. Poczynając od pewnej wartości współczynnika wypełnienia, natężenie prądu staje się większe od zera i rośnie liniowo ze wzrostem tego współczynnika. Wartość współczynnika wypełnienia, od której to następuje, nazywa się progiem perkolacji.

Na zakończenie warto dodać, że termin *perkolacja* został po raz pierwszy wprowadzony do opisu nieuporządkowanych struktur geometrycznych przez Hammersleya w 1957 r. Hammersley rozważał przepływ płynu przez sześciokątną sieć kanałów, w której losowo wybrana część jest zablokowana. Obecnie przy użyciu perkolacji rozpatruje się różne na pozór bardzo odległe od siebie zjawiska i procesy. Dla przykładu wymienimy tutaj przepływ cieczy w ośrodku porowatym, kompozyty materiałów przewodzących w matrycy izolacyjnej, żelowanie polimerów, wulkanizację, przewodnictwo poprzecinanej losowo siatki (rys. 4), czy rozprzestrzenianie się zaraźliwej choroby w populacji.

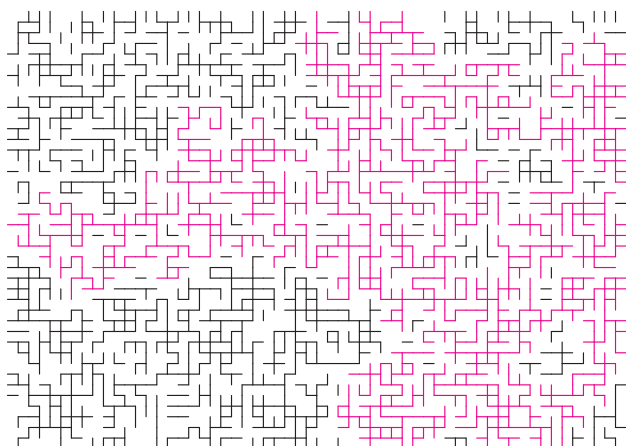
Rzut oka na perkolacje



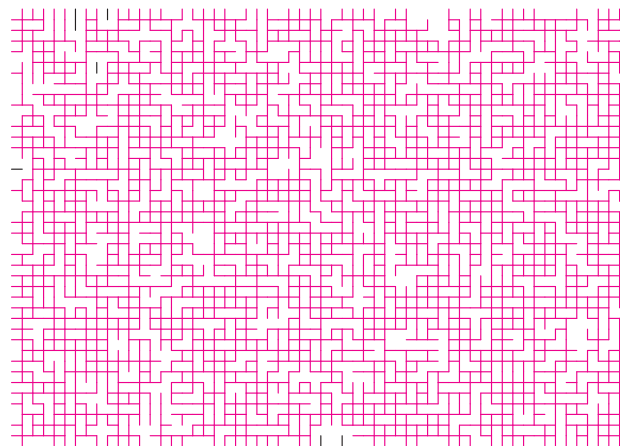
Rys. 1. $p = 0,25$



Rys. 2. $p = 0,49$



Rys. 3. $p = 0,51$



Rys. 4. $p = 0,75$

Fragmenty przykładowych podgrafów losowych kraty \mathbb{Z}^2 dla różnych wartości p . Na każdym rysunku jedna ze składowych została wyróżniona kolorem. Więcej o teorii perkolacji na następnej stronie.



Rozwiązanie zadania F 709.

Siła ta wynosi

$$F = \Delta p S = (p_0 - p)S,$$

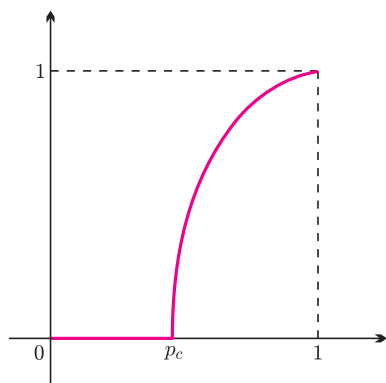
gdzie S to pole powierzchni pokrywki, a Δp to różnica ciśnień między ciśnieniem atmosferycznym a ciśnieniem powietrza ochłodzonego i o zmienionej objętości wewnątrz naczynia. Z równania gazu doskonałego mamy:

$$\frac{p_0(V_0 - V_l)}{T_0} = \frac{p(V_0 - V_w)}{T},$$

gdzie p_0 to ciśnienie atmosferyczne, p nowa wartość ciśnienia, V_l objętość lodu, V_w to objętość wody, a V_0 naczynia. Mamy zatem:

$$F = p_0 S \left(\frac{V_l - V_w}{V_0 - V_w} + \frac{\Delta T}{T} \frac{V_0 - V_l}{V_0 - V_w} \right).$$

Przyjmując $V_0 = 200 \text{ cm}^3$, $T_0 = 273 \text{ K}$, $\Delta T = 20 \text{ K}$, $S = 20 \text{ cm}^2$ oraz $V_l = 110 \text{ cm}^3$, otrzymujemy $F \approx 30 \text{ N}$.



Rys. 1

Teoria perkolacji

Rafał LATAŁA*

Rozpatrzmy kratę d wymiarową, tzn. graf nieskończony, w którym zbiorem wierzchołków jest \mathbb{Z}^d , a krawędziami połączono punkty w odległości 1. Załóżmy też, że dysponujemy monetą, w której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p , a reszka $1 - p$, gdzie p jest liczbą z przedziału $[0, 1]$ i wyobraźmy sobie, że wykonaliśmy nią nieskończenie wiele rzutów. Przeprowadźmy teraz następującą operację – każdej krawędzi przyporządkujmy jeden z rzutów monetą (każdej inny) i jeśli wypadła w nim reszka, to usuńmy krawędź z grafu (taką krawędź nazywa się też zamkniętą), a jeśli orzeł, to ją zostawmy (krawędź otwarta).

Otrzymamy w ten sposób losowy podgraf G_p grafu \mathbb{Z}^d – teoria perkolacji zajmuje się własnościami tego podgrafu. Jeśli wykonamy np. symulację komputerową takiego losowania (patrz str. 11), to zauważymy, że dla małych wartości p krawędzi otwartych jest mało, G_p składa się z wielu niewielkich składowych (składową grafu nazywamy zbiór wierzchołków, z których każde dwa łączy ścieżka złożona z krawędzi grafu), a dla dużych p sytuacja jest odmienna – większość krawędzi otwartych tworzy jedną ogromną składową, pozostałe zaś grupują się w rozproszone niewielkie składowe.

Skłania nas to do postawienia następujących pytań:

- Dla jakich p istnieje nieskończona składowa? Ile jest nieskończonych składowych?
- Z jakim prawdopodobieństwem 0 należy do nieskończonej składowej?
- Jeśli nie ma nieskończonej składowej, to jaka jest „typowa” wielkość składowej zawierającej 0?

Narzucającą się intuicją jest to, że im większe p , tym krawędzi otwartych jest więcej. Łatwo tę ideę sformalizować – wystarczy zamiast rzutów krawędziom przyporządkować losowo wybrane liczby z odcinka $[0, 1]$, a następnie powiedzieć, że dana krawędź należy do G_p , jeśli przyporządkowana jej liczba nie przekracza p . Przy tej konstrukcji zawsze G_p jest podzbiorem G_q przy $p < q$.

Podstawową funkcją, jaką się rozważa, jest *funkcja perkolacji* θ_d . Wartość $\theta_d(p)$ definiuje się jako prawdopodobieństwo tego, że 0 należy do nieskończonej składowej. Oczywiście, $\theta_d(0) = 0$, $\theta_d(1) = 1$ oraz $\theta_1(p) = 0$ dla $p < 1$. Symulacje wskazują, że dla $d \geq 2$ funkcja perkolacji wygląda mniej więcej jak na rysunku 1.

Warto może wspomnieć, że nie jesteśmy w stanie symulować całej nieskończonej kraty. Ale np. istnienie nieskończonej składowej zawierającej 0 można dobrze aproksymować, sprawdzając, czy 0 jest połączone otwartą ścieżką z brzegiem kostki $[-n, n]^d$ dla odpowiednio dużego n .

Funkcja θ_d jest niemalejąca (im większe p , tym graf G_p większy). Pozwala nam to wprowadzić definicję *prawdopodobieństwa krytycznego*:

$$p_c(d) := \sup\{p: \theta_d(p) = 0\}.$$

Zatem $\theta_d(p) = 0$ dla $p < p_c(d)$ oraz $\theta_d(p) > 0$ dla $p > p_c(d)$.

Twierdzenie. Dla $d \geq 2$, zachodzi $0 < p_c(d) < 1$.

Dowód. i) $p_c(d) > 0$, czyli $\theta_d(p) = 0$ dla p małych.

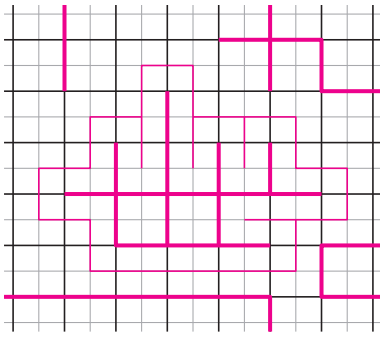
Jeśli składowa otwarta, zawierająca 0, jest nieskończona, to dla dowolnego n istnieje ścieżka długości n bez samoprzecięć, wychodząca z 0, złożona z krawędzi otwartych. Wszystkich ścieżek bez samoprzecięć, wychodzących z 0, jest $f_n \leq 2d(2d - 1)^{n-1}$ (pierwszą krawędź możemy wybrać na $2d$ sposobów, kolejne na nie więcej niż $2d - 1$, bo nie możemy się „cofnąć”). Prawdopodobieństwo tego, że ustalona ścieżka długości n jest otwarta, wynosi p^n . Stąd

$$\theta_d(p) \leq f_n p^n \leq 2dp((2d - 1)p)^{n-1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

dla $p < (2d - 1)^{-1}$.

ii) $p_c(d) < 1$, czyli $\theta_d(p) > 0$ dla p bliskich 1.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 2

Ponieważ $\theta_d(p) \geq \theta_2(p)$ (krata \mathbb{Z}^2 zanurza się w kratę \mathbb{Z}^d), więc wystarczy wykazać, że $\theta_2(p) > 0$ dla $1 - p$ małych. Zauważmy, że jeśli składowa, zawierająca 0, jest skończona, to na kracie przesuniętej o $(1/2, 1/2)$ istnieje pętla przecinająca tylko krawędzie zamknięte (zob. rys. 2).

Wszystkich pętli długości n wokół 0 jest $g_n \leq n3^n$ (pętla musi przeciąć półoś $\overrightarrow{0X}$ w odległości od 0 nie większej niż n , każdą kolejną krawędź możemy wybrać na co najwyżej 3 sposoby), a prawdopodobieństwo tego, że ustalona pętla przecina tylko zamknięte krawędzie, wynosi $(1 - p)^n$. Zatem

$$1 - \theta_2(p) \leq \sum_{n=4}^{\infty} g_n (1 - p)^n \leq \sum_{n=4}^{\infty} n(3(1 - p))^n < 1$$

dla odpowiednio małego $1 - p$. Koniec dowodu.

Jeśli $p < p_c(d)$, to $\theta_d(p) = 0$, co pociąga za sobą nieistnienie z prawdopodobieństwem 1 żadnej nieskończonej składowej. Udowodniono, że prawdopodobieństwo tego, że skończona składowa zawierająca 0 ma przynajmniej n elementów, maleje wykładniczo z n .

Dla $p > p_c(d)$ jest $\theta_d(p) > 0$, co na mocy tzw. prawa zero-jedynkowego implikuje, że prawdopodobieństwo istnienia nieskończonej składowej wynosi 1. Można wykazać też nieco mniej oczywisty fakt, że nieskończona składowa jest z prawdopodobieństwem 1 tylko jedna.

Widzimy więc, że w punkcie $p_c(d)$ graf G_p zmienia własności, mówimy w takiej sytuacji, że mamy do czynienia z *przejściem fazowym*.

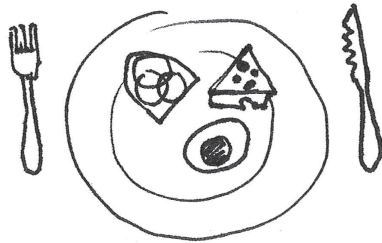
Wnikliwy Czytelnik zada na pewno pytanie, co się dzieje dla $p = p_c(d)$. Przypuszcza się, że $\theta_d(p_c(d)) = 0$ (czyli z prawdopodobieństwem 1 nie ma nieskończonej składowej), ale udowodniono to tylko dla $d = 2$ oraz d odpowiednio dużych. Najprostszy i najciekawszy otwarty przypadek dotyczy kraty trójwymiarowej.

Jak widać, już pytanie o ciągłość funkcji perkolacji w punkcie $p_c(d)$ jest bardzo trudne. Można udowodnić, że θ_d jest ciągła w pozostałych punktach. Symulacje sugerują, że jest ona wklęsła na $(p_c(d), 1]$, ale nie jest to udowodnione. Można zadawać kolejne pytania o własności θ_d – np. różniczkowalność czy szybkość wzrostu w prawostronnym otoczeniu $p_c(d)$. Co ciekawe, najtrudniej na te pytania odpowiedzieć dla niskich wymiarów d .

Ile wynosi wartość $p_c(d)$? Dokładna odpowiedź jest znana tylko dla $d \leq 2$, $p_c(1) = 1$, $p_c(2) = 1/2$. Wyznaczenie tej drugiej wartości zajęło 20 lat (ostatecznie zrobił to Kesten w 1980 roku), podstawowym pomysłem dowodu jest wykorzystanie kraty dualnej, której krawędzie przecinają krawędzie wyjściowej kraty – ideę tę wykorzystywaliśmy już w dowodzie twierdzenia. Symulacje pokazują, że $p_c(3) \approx 0,2488$, $p_c(4) \approx 0,1601$, $p_c(5) \approx 0,1182$. Wiadomo też, że $p_c(d + 1) < p_c(d)$ oraz $p_c(d) = \frac{1}{2d} + \frac{1}{4d^2} + \frac{7}{16d^3} + O(d^{-4})$ przy $d \rightarrow \infty$.

Oczywiście, nie musieliśmy zaczynać od kraty, bada się też perkolację na innych grafach nieskończonych. Najlepiej zrozumiana jest perkolacja na drzewach; co ciekawe, istnieją drzewa, dla których funkcja perkolacji nie jest ciągła w punkcie p_c . Rozważa się też modele perkolacji wierzchołkowej – usuwa się w nich z grafu nie krawędzie, lecz wierzchołki.

Teorię perkolacji stworzyli Broadbent i Hammersley w 1957 roku, by modelować przepływ cieczy przez porowaty materiał (na przykład skałę). Sieć kanalików w takiej skale przybliżyła się kratą trójwymiarową, otwartość krawędzi oznacza, że kanalik jest na tyle szeroki, by umożliwić przepływ cieczy, zaś istnienie nieskończonej składowej mówi, że górną powierzchnię skały łączy z dolną ścieżka złożona z odpowiednio szerokich kanalików, czyli ciecz przecieknie przez skałę. Zagadnienie doprowadziło do stworzenia prostego modelu matematycznego, który okazał się bardzo ciekawy – umożliwił postawienie wielu elementarnych pytań, z których wiele do dziś nie doczekało się odpowiedzi.



Rozwiązanie zadania M 1195.

Załóżmy najpierw, że wśród liczb p_1, p_2, \dots, p_{100} nie ma liczby 2 oraz przyjmijmy bez straty ogólności, że $p_1 \geq p_k$ dla $k = 2, 3, \dots, 100$. Ponieważ liczby p_1, p_2 są nieparzyste, więc p_1 jest dzielnikiem iloczynu

$$\frac{p_2 - 1}{2} \cdot \frac{p_2 + 1}{2},$$

a więc i jednego spośród powyższych czynników. Stąd wynika, że

$$p_1 \leq \frac{1}{2}(p_2 + 1) \leq \frac{1}{2}(p_1 + 1),$$

czyli $p_1 \leq 1$ – sprzeczność.

Załóżmy z kolei, że wśród liczb p_1, p_2, \dots, p_{100} występuje liczba 2 oraz bez straty ogólności przyjmijmy, że $p_{100} = 2$. Wtedy $p_{99} \mid 2^2 - 1$, co oznacza, że $p_{99} = 3$. Wobec tego $p_{98} \mid 3^2 - 1$, co z kolei implikuje równość $p_{98} = 2$. Kontynuując, uzyskujemy ciąg p_1, p_2, \dots, p_{100} spełniający warunki zadania: 3, 2, 3, 2, ..., 3, 2.

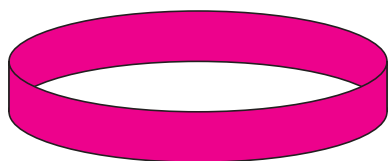
Uwalniając się od założenia $p_{100} = 2$, otrzymujemy dwa ciągi spełniające warunki zadania: 3, 2, 3, 2, ..., 3, 2 oraz 2, 3, 2, 3, ..., 2, 3.



mała delta

Zakleić się nie da!*

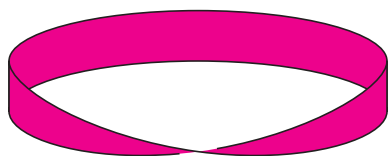
W poprzednim numerze zabawy ze wstęgą Möbiusa (i innymi, podobnymi do niej wstęgami) polegały na cięciu tej wstęgi na najrozmaitsze sposoby. Wobec tego teraz zajmiemy się czymś wręcz przeciwnym – będziemy ją zaklejać.



wstęga rzędu 0, czyli powierzchnia boczna walca

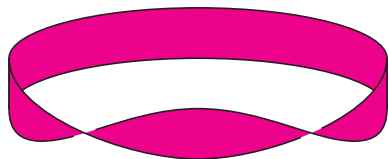
Przypominamy, o czym mowa

Jeśli pasek, np. papieru, w kształcie długiego prostokąta połączymy (np. skleimy) krótszymi bokami, to otrzymamy jedną z wielu figur, a która to będzie, zależy od tego, ile razy obrócimy przed sklejeniem pasek względem jego dłuższej osi. Gdy wcale nie odwrócimy (wstęga rzędu 0), będzie to powierzchnia boczna walca. Gdy raz obrócimy o 180° (wstęga rzędu 1), będzie to wstęga Möbiusa. Wstęgi wyższych rzędów nie mają już „osobistych” nazw. Nazywa się je po prostu wstęgami rzędu 2, 7 czy 100.



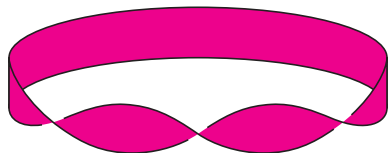
wstęga rzędu 1, czyli wstęga Möbiusa

Eksperyment 1. Co jest brzegiem wstęgi?



wstęga rzędu 2

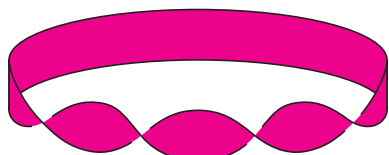
Wzdłuż brzegu wyciętego z papieru koła przyklej cienki drucik i połącz jego stykające się końce. Podpal papier i poczekaj, aż się całkowicie wypali. Pozostanie sam drut, który będzie miał kształt okręgu. Wykonajmy takie samo doświadczenie z prostokątną kartką. Po niewielkiej deformacji okaże się, że i tym razem otrzymaliśmy okrąg. Gdy to samo doświadczenie przeprowadzimy z powierzchnią boczną walca, to okaże się (co i bez tego widać), że jej brzegiem są dwa okręgi. A co będzie, gdy to doświadczenie przeprowadzimy ze wstęgą Möbiusa? Tym razem otrzymamy to samo, co dla koła czy prostokąta, czyli okrąg.



wstęga rzędu 3

Eksperyment 2. Zaklejamy koło kołem

Jeśli dwie figury mają taki sam brzeg, to możemy te brzegi skleić. Co otrzymamy, sklejąc w ten sposób brzegi dwóch kół? Ktoś powie, że placek. Ale bardziej wnikliwy obserwator zauważy, że raczej jest to coś takiego, jak sfera, czyli powierzchnia kuli – przecież koła są połączone tylko na brzegu, więc gdyby je porządnie nadmuchać...

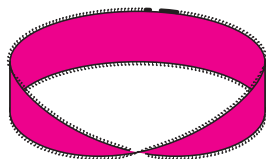
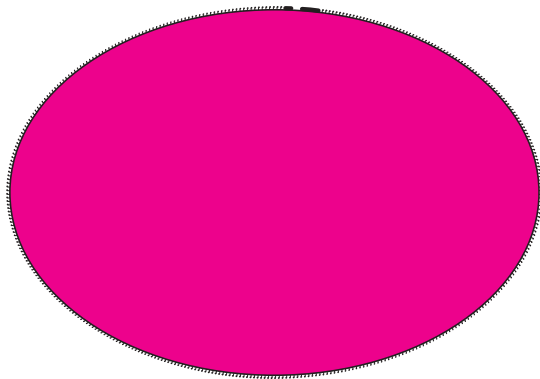
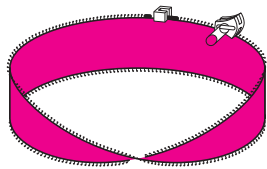


wstęga rzędu 4

Eksperyment 3. Zaklejamy wstęgę Möbiusa kołem

Ponieważ brzeg koła i brzeg wstęgi Möbiusa to okręgi, więc zobaczymy, co wyjdzie, gdy je skleimy. Próba wykonania tego eksperymentu kończy się jednak niepowodzeniem. Z czego to wynika: z braku sprawności naszych palców, ze złej jakości kleju, czy też może z niewykonalności zadania, którego się podjęliśmy?

*mmm – magazyn miłośników matematyki; <http://www.mmm.uni.wroc.pl>



Zmieniamy materiał na niezawodny, czyli bierzemy się do szycia

Potrzebny nam będzie suwak jak do rozpinanej kurtki (żeby po rozpięciu był w dwóch częściach) – im dłuższy, tym lepszy. Jeśli ktoś trafi na taki ze zużytego śpiwora, będzie miał większy komfort pracy i bardziej efektowny wynik. Następnie z płótna wykonujemy wstęgę Möbiusa taką, by jej brzeg miał długość suwaka (jaka jest potrzebna długość płóciennego paska? – oczywiście dwa razy mniejsza niż suwaka, prawda?). Do brzegu przyszywamy jedną część suwaka. Potem z płótna wycinamy koło. Ma ono mieć obwód taki, jak długość suwaka (jaki zatem ma promień? – to już każdy umie obliczyć). Do brzegu koła przyszywamy drugą część suwaka. A teraz zapinamy suwak. I co? Najpierw idzie nieźle, potem trudniej, a zapiąć do końca się nie da. Dlaczego? Suwak sprawdzony, co więc stoi na przeszkodzie?

Przeszkoda jest poważna. Powierzchnia, która powstaje z zaklejenia wstęgi Möbiusa kołem, to *plaszczyna rzutowa* i jest to obiekt, który nie mieści się w przestrzeni trójwymiarowej. Zatem mamy w ręku obiekt z przestrzeni czterowymiarowej wykonany z płótna i suwaka – to znaczy nie mamy, ale mielibyśmy, gdyby udało się zapiąć do końca!

Eksperyment 4. Zaklejamy wstęgę Möbiusa wstęgą Möbiusa

Poprzednio wypracowana technologia da się zastosować do dwóch, tej samej wielkości wstęg Möbiusa. Brzeg każdej z nich obszywamy suwakiem. I każdy może się przekonać, że i tym razem suwak zapiąć się nie da. Gdyby się zapiał, mielibyśmy inny niemieszczący się w przestrzeni trójwymiarowej obiekt: *butelkę Kleina*. Jej fotografie (oczywiście nie do końca zapiętej) można obejrzeć na tylnej okładce tego numeru.

A oto dalsze propozycje zabawy z wstęgami.

Eksperyment 5. Ile jest miejsca na kartce papieru?

Zaznacz na kartce pięć domów. Między każdymi dwoma poprowadź ścieżki, tak aby nie przecinały się nawzajem. Okazuje się to niemożliwe. A jeśli skleimy z kartki powierzchnię boczną walca? Ale jeśli skleimy z niej wstęgę Möbiusa, to połączenie będzie możliwe! A gdy będzie to wstęga rzędu 2? A jeśli domów będzie 6? Sprawdź.

Podobna jest sytuacja w zadaniu z trzema domkami i trzema studniami: chodzi o narysowanie nieprzecinających się dróg łączących każdą studnię z każdym domkiem – na płaszczyźnie zaplanować takich dróg nie można. A czy coś się zmieni, gdy z kartki skleimy powierzchnię boczną walca albo którąś z innych wstęg?

Eksperyment 6. Jak pokolorować mapę?

Narysuj na kartce dowolną mapę, na której państwa graniczą zawsze wzdłuż linii i składają się z jednego kawałka (np. mapę Europy trzeba więc nieco zmienić). Pokoloruj ją tak, aby sąsiednie państwa były zaznaczone innym kolorem. Ilu kolorów musiałeś użyć?

Podobne doświadczenie wykonano kiedyś dla wielu tysięcy map i nie znaleziono żadnej, do pomalowania której potrzebny byłby piąty kolor. W 1840 r. August Möbius postawił hipotezę, że do pokolorowania dowolnej mapy wystarczą cztery barwy. Udało się ją udowodnić dopiero w 1976 r. dwóm amerykańskim matematykom Kennethowi Appelowi i Wolfgangowi Hakenowi. Czy podobnie jest dla map umieszczonych na wstędze Möbiusa? Może wystarczą tam tylko 3 kolory? A może potrzeba ich więcej?

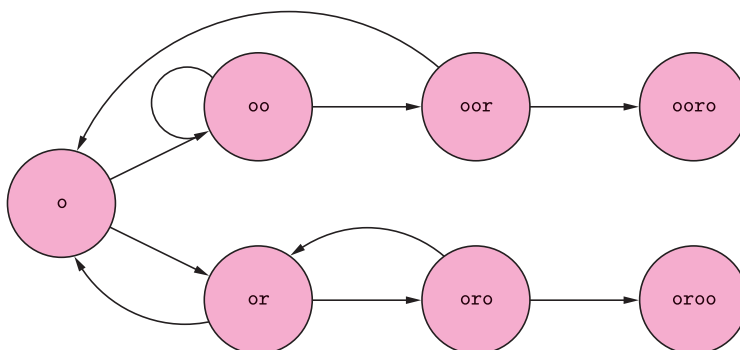
Gra Penneya

Andrzej WALAT

W 1969 roku Walter Penney wymyślił zabawną grę. Alicja i Bill wybierają dwa słowa utworzone z liter o i r symbolizujących dwa wyniki rzutu monetą: orzeł i reszka. Na przykład Alicja wybiera słowo ooro, a Bill oroo. Będą rzucali monetę tak długo, aż wypadnie jedno z ich słów. Jeśli będzie to słowo Alicji (w naszym przykładzie ooro), wygrywa Alicja, a w przeciwnym przypadku wygrywa Bill.

Gra Penneya ma szereg zaskakujących właściwości. W naszym przykładzie większe szanse ma Alicja, bo słowo ooro wygrywa ze słowem oroo w stosunku 3 : 2. Z kolei słowo oroo wygrywa ze słowem rooo w stosunku 7 : 5. Mogłoby się wydawać, że słowo ooro powinno być dużo lepsze niż rooo, ale to nieprawda. Słowo rooo wygrywa z ooro w stosunku 7 : 5. Skąd to wiemy? Piękne rozwiązanie problemu, jak obliczać szanse Alicji i Billa w grze Penneya, wymyślił John Horton Conway. Opis rozwiązania Conwaya można znaleźć w podręczniku Grahama, Knutha i Patashnika *Matematyka konkretna*, którą gorąco polecam. Ale piękno matematyki polega między innymi na tym, że większość interesujących zadań ma wiele, często bardzo różnych, rozwiązań. Ambitny Czytelnik, nawet jeśli nie jest Johnem Conwayem, może spróbować odkryć jakieś własne ciekawe rozwiązanie problemu Penneya. Dla zachęty przedstawiam poniżej jedną propozycję.

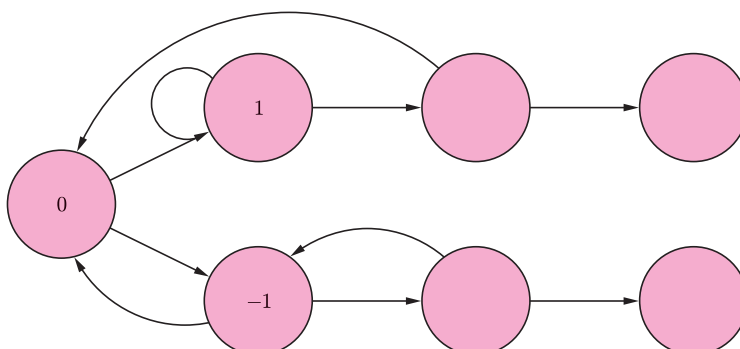
Krok 1. Rysuję graf gry:



Rys. 1

W naszym przykładzie przyjmujemy, że gra zaczyna się naprawdę w momencie wyrzucenia pierwszego orła. Każdy stan gry odpowiada jakiemuś prefiksowi słowa Alicji lub słowa Billa. Tworzą one dwie ścieżki prowadzące do dwóch stanów końcowych: wygranej Alicji lub Billa.

Krok 2. W polu początkowym wpisuję liczbę 0, a w dwóch następnych polach odpowiednio na ścieżce Alicji oraz Billa wpisuję liczby 1 oraz -1.



Rys. 2

Liczba 0 w polu początkowym jest średnią arytmetyczną dwóch liczb, 1 i -1, na polach, do których prowadzą strzałki od pola początkowego.



Rozwiązanie zadania F 710.

Ciśnienie w stygnącej bańce maleje, i w związku z tym rośnie siła potrzebna do oderwania bańki od pleców.

Przypuśćmy, że temperatura i ciśnienie w gorącej bańce wynoszą T_1 oraz p_1 , a w wystudzonej T_2 i p_2 ; wtedy

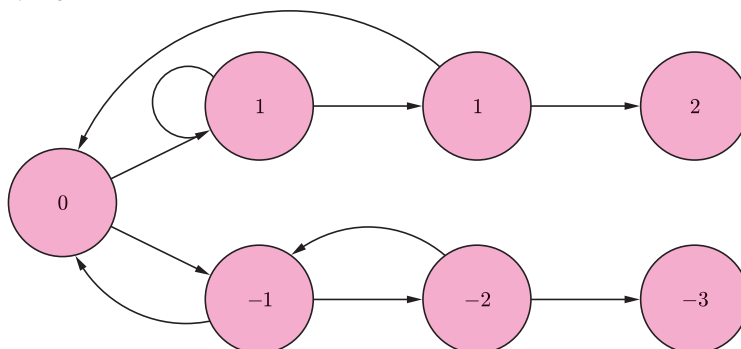
$$F \approx (p_1 - p_2)S.$$

Masa i objętość powietrza w bańce można uznać za stałe, zatem $p_1/T_1 = p_2/T_2$, stąd

$$F \approx p_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) S = p_1 S \frac{\Delta T}{T}.$$

Niech $\Delta T = 100$ K, $T_1 = 400$ K, $S = 10$ cm², $p_1 = 10^5$ Pa, wtedy $F \approx 25$ N.

Krok 3. Wpisuję liczby na kolejnych polach odpowiednio na ścieżce Alicji oraz ścieżce Billa zgodnie z zasadą średniej arytmetycznej: Jeśli dwie strzałki z pola p prowadzą do pól r i s , to liczba w polu p musi być średnią arytmetyczną liczb w polach r i s .

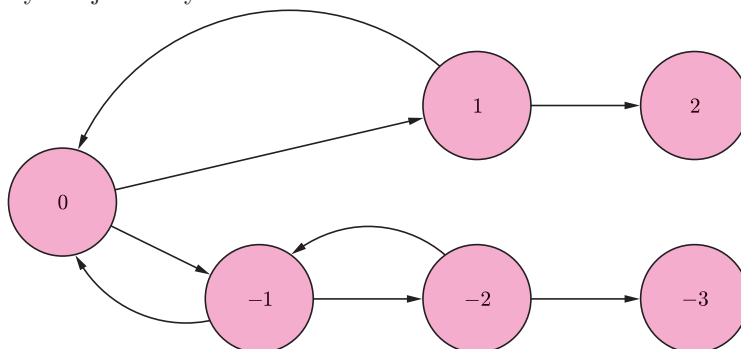


Rys. 3

Šzansie Alicji w pojedynku z Billem są jak 3 : 2 lub inaczej: prawdopodobieństwo sukcesu Alicji, która wybrała słowo ooro, w pojedynku z Billem, który wybrał słowo rooo, wynosi:

$$p_A = \frac{3}{2 - (-3)} = 0,6.$$

Uwaga. Rachunki trochę się upraszczają, jeśli w grafie gry, takim jak na rysunku 1, usuniemy stany z pętelką, przekierowując odpowiednio prowadzące do nich strzałki do kolejnego stanu. W naszym przykładzie końcowy graf wyglądałby tak jak na rysunku 4.



Rys. 4

Skąd to wiemy? Graf na rysunku 4 przedstawia jeden z przypadków zadania o ruinie gracza. W ogólnym przypadku zakładamy, że gracz przystępując do hazardowej gry, ma p zł. W każdym kroku gry stawia określoną stawkę, np. 1 zł, i może ją z jednakowym prawdopodobieństwem podwoić lub stracić. To znaczy stan jego posiadania może się zwiększyć lub zmaleć o daną stawkę. Zakończy grę sukcesem w momencie, gdy uzyska s zł albo klęską, gdy stan jego posiadania spadnie do k zł. Zakładamy, że $k < p < s$ (ale może być $k < 0$, tzn. gracz może zakończyć grę na minusie). Wiadomo, że prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $\frac{p-k}{s-k}$, w naszym przykładzie $\frac{0-(-3)}{2-(-3)} = \frac{3}{5}$.

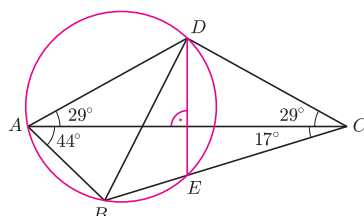
Dowód tego faktu można znaleźć w wielu podręcznikach akademickich z rachunku prawdopodobieństwa. Zwykle są one bardzo formalne, ale istnieje również dowód elementarny.

Ambitnych Czytelników zachęcam do obliczenia szans słowa ooro w pojedynku z rooo oraz słowa rooo w pojedynku z ooro.

Komentarz. Opis rozwiązania przedstawiony na przykładzie może wydawać się nie dość precyzyjny i ogólny. Zgodnie z systemem wartości przyjętym w informatyce rozwiązanie jest kompletne dopiero wtedy, gdy istnieje sprawdzony program będący implementacją wybranej idei algorytmicznej. Taki kompletne program napisany w Logo można znaleźć w aneksie na stronie WWW Delty.



Rozwiązanie zadania M 1196. Przez punkt D prowadzimy prostą prostopadłą do prostej AC , która przecina prostą BC w punkcie E .



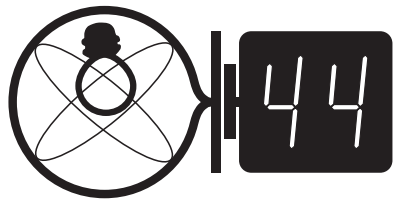
Wówczas

$$\sphericalangle DEC = 90^\circ - \sphericalangle ACE = 73^\circ = \sphericalangle DAB,$$

skąd wynika, że punkty A, B, E, D leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle AED = \sphericalangle CED = 73^\circ.$$

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2008

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z fizyki nr 452, 453

Redaguje Jerzy B. BROJAN

452. Mały ciężarek wisi na nici o długości l i kołysze się z amplitudą kątową α_0 . Aby rozkołysać go mocniej, wprawiamy punkt zawieszenia w ruch harmoniczny o amplitudzie b i odpowiednio dobranej częstotliwości oraz fazie. Jaką maksymalną amplitudę kątową α_1 ciężarek może osiągnąć po czasie t ? Wystarczy odpowiedź przybliżona, dla małej wartości b , a dużej (znacznie większej od okresu drgań) wartości t . Obie amplitudy wahań – początkowa α_0 i końcowa α_1 – są niewielkie.

Zadanie ma dwa warianty, w których punkt zawieszenia porusza się wzdłuż prostej: a) poziomej, b) pionowej. Rozwiązanie tylko wariantu a) będzie ocenione maksymalnie na 0,7, tylko wariantu b) – maksymalnie na 0,9, obu wariantów – oczywiście na 1.

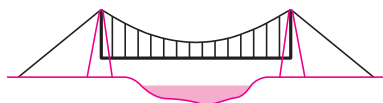
453. Koc elektryczny zawiera dwa obwody oporowe i przełącznik mocy grzania o 4 pozycjach. Jeśli minimalna moc wynosi $P_1 = 50$ W, a maksymalna $P_4 = 300$ W, to jakie są wartości dwóch pośrednich wartości mocy?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2007

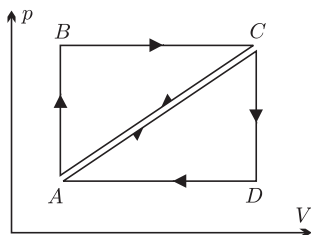
Przypominamy treść zadań:

444. Most jest zawieszony na kablu (rys. 1). Znaleźć postać funkcji opisującej kształt kabla, jeśli ciężar mostu jest równo rozłożony wzdłuż osi poziomej, odstęp między liniami pionowymi są niewielkie, a ich ciężar oraz ciężar samego kabla można pominąć. Jeśli ciężar mostu jest równy P , długość l , a obniżenie środkowego punktu kabla względem najwyższych – h , to ile wynosi siła napięcia kabla w środku, a ile – w najwyższych punktach?

445. Na rysunku 2 przedstawiono dwa cykle termodynamiczne, w których przemianom podlega gaz doskonały. Cykle mają wspólny odcinek AC (choć przebiegany z przeciwnym zwrotem). Sprawność którego cyklu jest wyższa, czy też są one jednakowe? Rozważć przypadki: a) $T_B = T_D$, b) $T_B > T_D$.



Rys. 1



Rys. 2

444. Składowa pozioma N_x siły napinającej kabel pozostaje stała na jego długości, natomiast składowa pionowa N_y równoważy ciężar odcinka mostu od środka (gdzie przyjmujemy $x = 0$) do danego punktu x – stąd $N_y = Px/l$. Niech kształt kabla będzie opisany funkcją $y(x)$, wtedy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{N_y}{N_x} = \frac{P}{lN_x} x,$$

gdzie α jest kątem między stycznymi do kabla a poziomem. Całkując, otrzymujemy parabolę

$$y(x) = \frac{P}{2lN_x} x^2.$$

Z podstawienia $y(l/2) = h$ znajdujemy $N_x = \frac{Pl}{8h}$, a w najwyższych punktach siła napinająca wynosi

$$N = \sqrt{N_x^2 + (P/2)^2} = \frac{P}{2} \sqrt{1 + (l/4h)^2}.$$

445. Całkowita praca wykonana w dolnym i górnym cyklu jest równa polu odpowiedniego trójkąta – zatem jest jednakowa. Zgodnie z definicją

$$\eta = W_{\text{całk}}/Q_1$$

porównanie sprawności sprowadza się do porównania dostarczonych w danym cyklu ciepła Q_1 – w górnym cyklu $Q_{g1} = Q_{AB} + Q_{BC}$, a w dolnym $Q_{d1} = Q_{AC}$. To ostatnie ciepło jest równe – z przeciwnym znakiem – ciepłu oddanemu chłodnicy przez górny cykl, $Q_{d1} = -Q_{g2}$. Jednak całkowite ciepło górnego cyklu $Q_{g1} + Q_{g2}$ jest dodatnie (gdyż w silniku ciepło ulega przekształceniu w pracę), stąd $Q_{g1} > Q_{d1}$. Wyższa jest więc sprawność dolnego cyklu, a wynik ten nie zależy od stosunku temperatur T_B i T_D .

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
 po 441 zadaniach

Mateusz Łącki	– Kraków	42,38
Tomasz Wietecha	– Tarnów	5 - 40,50
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	7 - 40,22
Konrad Kapcia	– Częstochowa	38,99
Marian Łupieżowiec	– Zębrzydowice	35,00
Jerzy Witkowski	– Radlin	1 - 31,82
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	2 - 24,58
Jacek Konieczny	– Poznań	19,16
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	18,96
Ryszard Woźniak	– Kraków	11,64

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2005–2007 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 10 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (7), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;
 „jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Magiera, B. Mikielwicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach, J. Witkowski.

Do rozwiązań zadań z ostatniego rocznika mamy kilka uzupełnień i uwag wynikających z nadesłanych listów.

Zadanie 422 [Odchylenie ciężarka wiszącego na sznurku pod wpływem wiatru] (współczynnik trudności $WT = 3,16$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 1$). W treści zadania jednoznacznie podano, że siła wywierana przez wiatr jest proporcjonalna do długości odcinka sznurka. To dziwne, ale wszyscy rozwiązujący solidarnie zignorowali ten warunek, zastępując go założeniem o proporcjonalności siły do wartości pionowej składowej tego odcinka. Rozwiązali więc faktycznie inne zadanie, co zostało ocenione na najwyżej 0,5. Wyższą ocenę (0,7) uzyskał tylko **M. Łupieżowiec**, który przynajmniej wprost napisał „zakładamy, że wychylenie układu jest niewielkie” – wtedy zanika różnica między oboma warunkami.

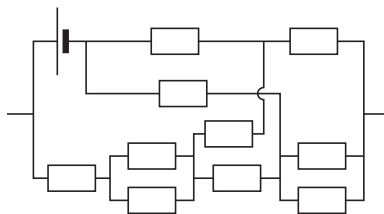
Zadanie 424 [Czy zachowanie pasażerów może wpłynąć na zużycie energii elektrycznej przez tramwaj] ($WT = 3,03$, $LPR = 1$). Biorąc pod uwagę intuicyjny charakter zadania (któż z nas nie jeździł nigdy tramwajem?), można by się spodziewać większej liczby prawidłowych rozwiązań. Za to praca **T. Wietechy** była więcej niż dobra, nasz Czytelnik obliczył nawet dodatkowe koszty obciążające przedsiębiorstwo komunikacyjne (chcą Państwo poznać tę sumę? otóż trzeba by 360 wyjątkowo złośliwych pasażerów, aby na trasie z 11 przystankami zwiększyć zużycie energii o 1 kWh, czyli 33 grosze!). Akcent samokrytyczny: w treści zadania nie podano istotnej informacji, czy tramwaj zwraca energię do sieci podczas hamowania. Jeśli nie zwraca, to rozwiązanie firmowe jest prawidłowe tylko w odniesieniu do fazy rozpędzania się tramwaju, a pobranie energii przez pasażerów podczas hamowania zmniejszy tylko ciepło wydzielane w hamulcach.

Zadanie 428 [Przebieg wskazań wagi, na której stoi obrócona klepsydra piaskowa] ($WT = 3,10$, $LPR = 0$). Tu również wyniki są słabe, np. żaden z naszych korespondentów nie zauważył, że całkowity pęd piasku pod koniec działania klepsydry jest równy początkowemu (równy zero), a stąd średnie wskazanie wagi musi być równe ciężarowi klepsydry.

Zadanie 430 [Obserwacja planet pozasłonecznych metodą zasłonięcia gwiazdy] ($WT = 2,45$, $LPR = 3$). Do rozwiązania firmowego wkrađa się pomyłka, polegająca na zaniżeniu o czynnik 2 podanej średnicy kątowej orbity planety. Prawidłowe rozwiązania: **K. Magiera**, **A. Idzik** i **R. Poleski**.

Zadanie 436 [Siła rozciągająca dwie części stacji orbitalnej] ($WT = 2,68$, $LPR = 2$). Częstym błędem naszych korespondentów było przyjęcie, że siła ta jest różnicą sił ciężkości działających na część bliższą i dalszą Ziemi, co dawało wynik zawyżony o 33% (i ocenę 0,5). Błędu tego uniknęli **K. Magiera** i **T. Choczewski**. W rozwiązaniu zamieszczonym w *Delcie* dał o sobie znać chochlik, który zmienił znak w jednym z równań (końcowy wynik jest poprawny).

Zadanie 437 [Z ogniw 1 V i oporników 1 Ω zbudować baterię o $SEM = 0,8 V$ i $R_w = 0,75 \Omega$] ($WT = 2,29$, $LPR = 5$). Obwód firmowy składał się z 15 elementów (2 ogniw i 13 oporników). Pan **Z. Galias** do rozwiązania zaprzął odpowiedni program komputerowy, dzięki czemu zmniejszył liczbę elementów do 11, a także wykazał, że bardziej się jej zmniejszyć nie da. Obwód „komputerowy” przedstawiamy na marginesie.



No cóż, może niedokładnie taka była intencja prowadzącego tę rubrykę, ale skoro w dzisiejszych czasach komputery służą nawet do dowodzenia twierdzeń matematycznych, to trzeba pogratulować naszemu Czytelnikowi umiejętności programistycznych. Pozostałe dobre rozwiązania – **A. Idzik** (15 elementów, identyczne z firmowym), **K. Magiera** (17 elementów), **R. Woźniak** (17 elementów) i **A. Nowogrodzki** (24 elementy).

Zadanie 439 [Zastosowanie dawno wydobytego ołowiu] ($WT = 2,89$, $LPR = 3$). Słusznie odgadli **A. Idzik**, **K. Magiera** i **T. Wietecha**, że inspiracją do napisania tego zadania był artykuł w „Wiedzy i Życiu” *Astronomia i Rzymianie* (nr 8/2001). Jednak do uzyskania maksymalnej oceny za wskazanie źródła (wg p. 11 regulaminu) konieczne jest, żeby w nim znajdowało się **pełne** rozwiązanie. Otóż wątpliwość dotyczy kwestii pochodzenia domieszki promieniotwórczego izotopu Pb 210 w świeżo wydobytym ołowiu. Według artykułu „izotop Pb 210 powstaje, gdy ruda ołowiu jest bombardowana promieniowaniem pochodzącym z sąsiednich warstw skalnych”. Konsultacje z fizykami, a także przegląd literatury naukowej sugerują, że autor się pomylił, a przyczyną jest raczej domieszka uranu w rudzie ołowiu. Izotop Pb 210 jest więc produktem rozpadu uranu U 238, a nie produktem reakcji wywołanej przez jakies promieniowanie. Mamy nadzieję, że obniżenie ocen do 0,8 nie zostanie uznane przez Czytelników za pedanterię.

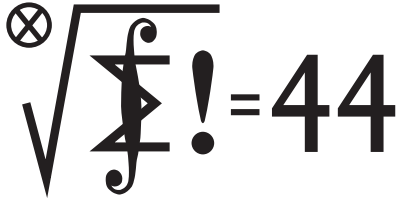
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
442 ($WT = 1,56$) i **443** ($WT = 3,31$)
 z numeru 9/2007

Tomasz Wietecha	– Tarnów	45,04
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	43,47
Konrad Kapcia	– Częstochowa	40,55
Jerzy Witkowski	– Radlin	31,82

Ponad 19 lat temu p. Tomasz Wietecha przysłał nam pierwsze rozwiązanie zadania z fizyki, a teraz wypełnił podwójną normę Weterana Klubu 44F – 6 razy 44 punkty (a oprócz tego 7 rund w Klubie 44M)! Życzymy jeszcze wielu lat satysfakcji z udziału w naszym konkursie!

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 IV 2008

Lista uczestników ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 543 (WT=1,93) i 544 (WT=1,66) z numeru 6/2007

Dariusz Kurpiel	– 2–47,06
Witold Bednarek	– 3–45,38
Krzysztof Kamiński	– 44,41
Marian Łupieżowiec	– 43,55
Andrzej Józwiak	– 42,67
Paweł Najman	– 2–41,89
Paweł Kubit	– 3–41,03
Grzegorz Karpowicz	– 39,24
Marcin Kasperski	– 2–36,86
Wojciech Maciak	– 35,69
Marek Prauza	– 3–34,32
Jerzy Witkowski	– 4–34,28
Marek Spychała	– 33,34
Krzysztof Dorobisz	– 1–32,40
Tomasz Tkocz	– 31,27
Jerzy Cisło	– 5–30,41
Franciszek S. Sikorski	– 29,73
Leszek Grzanka	– 29,14
Bartłomiej Dyda	– 4–29,07
Jan Czardybon	– 27,82
Andrzej Idzik	– 25,46
Grzegorz Kozłowski	– 23,23
Łukasz Garncarek	– 1–23,09
Janusz Olszewski	– 9–23,03
Piotr Kumor	– 10–20,13

Legenda (przykładowo): stan konta 10–20,13 oznacza, że uczestnik już dziesięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (jedenastej) rundzie ma 20,13 punktów.

Trzy osoby w tej kolejce przekroczyły próg 44; reprezentują trzy ligowe generacje: **Witold Bednarek** – najstarszy stażem uczestnik (start 1981); **Dariusz Kurpiel** – też uczestnik wieloletni (choć z długimi przerwami) zostaje kolejnym Weteranem; **Krzysztof Kamiński** – wchodzi do Klubu z numerem 106.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2005, 2006 lub 2007.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Zadania z matematyki nr 555, 556

Redaguje Marcin E. KUCZMA

555. Niech n będzie liczbą parzystą. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k o tej własności, że w każdym k -elementowym podzbiore zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ znajdują się liczby x, y (niekoniecznie różne), których suma albo różnica jest równa n .

556. Dana jest liczba rzeczywista $a > 0$ oraz liczba całkowita $n > 0$. Udowodnić, że największa możliwa wartość iloczynu $x_1 x_2 \dots x_n$, którego czynniki x_i są liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $x_1 + \dots + x_n \leq a$, wynosi

$$\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor \cdot \dots \cdot \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor.$$

Zadanie 556 zaproponował pan Tomasz K. Kujawa z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2007

Przypominamy treść zadań:

547. Udowodnić nierówność $\left(\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{2}\right)^3 > \left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{3\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}\right)^2$ dla liczb rzeczywistych $x > y > 0$.

548. Dla dodatnich liczb całkowitych a, b niech $M(a, b)$ oznacza liczbę par (x, y) , których wyrazy x, y są dodatnimi liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, spełniającymi warunki $x \leq a, y \leq b$. Wykazać, że

$$M(a, b) = \sum_{r \geq 1} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor \mu(r),$$

gdzie μ jest funkcją Möbiusa, określoną wzorami

$$\mu(r) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } r = 1, \\ (-1)^k & \text{gdy } r \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych czynników pierwszych,} \\ 0 & \text{gdy } r \text{ dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej.} \end{cases}$$

547. Podstawienie $x = t^6 y$ sprowadza podaną nierówność do następującej:

$$\left(\frac{y^{2/3}(t^4 + 1)}{2}\right)^3 > \left(\frac{y(t^9 - 1)}{3(t^3 - 1)}\right)^2 \quad \text{dla } y > 0, t > 1.$$

Zmienna y ulega redukcji i zostaje do udowodnienia nierówność

$$9(t^4 + 1)^3 > 8(t^6 + t^3 + 1)^2 \quad \text{dla } t > 1.$$

Rozwijamy wyrażenia potęgowe, przenosimy wszystko na jedną stronę i dostajemy wielomian, który okazuje się być podzielny przez $(t - 1)^4$. Nierówność przybiera postać

$$(t - 1)^4 (t^8 + 4t^7 + 10t^6 + 4t^5 - 2t^4 + 4t^3 + 10t^2 + 4t + 1) > 0.$$

Dla $t > 1$ jest ona spełniona, bo czynnik w ostatnim nawiasie ma wartości większe niż $t^8 - 2t^4 + 1$, czyli $(t^4 - 1)^2$.

548. Niech P będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych nie większych od żadnej z liczb a, b . Dla każdej liczby $p \in P$ rozważamy zbiór A_p złożony z punktów kratowych (x, y) ($x \leq a, y \leq b$) o obu współrzędnych podzielnych przez p . Wielkość $M(a, b)$ wyraża liczbę tych punktów (x, y) pełnego prostokąta kratowego $x \leq a, y \leq b$, które nie należą do żadnego ze zbiorów A_p . Zgodnie z regułą włączeń i wyłączeń,

$$M(a, b) = ab - c_1 + c_2 - c_3 + \dots + (-1)^{|P|} c_{|P|},$$

gdzie $c_1 = \sum_{p \in P} |A_p|$, $c_2 = \sum_{p < q} |A_p \cap A_q|$, i ogólnie

$$c_k = \sum_{p_1 < \dots < p_k} |A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_k}| \quad (p_1, \dots, p_k \in P).$$

Każdy wybór liczb $p_1 < \dots < p_k$ ze zbioru P można utożsamiać z liczbą bezkwadratową $r = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$; różnym wyborom (p_i) odpowiadają różne liczby r .

Zbiór $A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_k}$ składa się z dokładnie tych punktów kratowych (x, y) ($x \leq a, y \leq b$), w których x oraz y są podzielne przez iloczyn $r = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$. W prostokącie $x \leq a, y \leq b$ jest $\lfloor a/r \rfloor \cdot \lfloor b/r \rfloor$ takich punktów.

Oznaczając przez C_k zbiór tych liczb naturalnych, które są iloczynami k różnych czynników pierwszych ze zbioru P , przepisujemy uzyskaną wcześniej równość jako

$$M(a, b) = ab - \sum_{r \in C_1} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor + \sum_{r \in C_2} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor - \dots + (-1)^{|P|} \sum_{r \in C_{|P|}} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor.$$

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza, P. Kumor (10), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (9), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (7), T. Józefczyk, J. Witkowski (4), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. PeczarSKI, M. Adamaszek, P. Kubit, J. Cisło (5), W. Bednarek(4), D. Kurpiel (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, M. Kieza, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, P. Najman, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecik, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, K. Dorobisz, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Garmcarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, K. Kamiński, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zajęc, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Prawa strona przedstawia sumę

$$\sum_{r \in E} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor \mu(r),$$

w której r przebiega zbiór $E = \{1\} \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{|P|}$.

Sumowanie po wszystkich liczbach całkowitych $r \geq 1$ da tę samą wartość sumy, bowiem każda liczba $r \notin E$ ma czynnik pierwszy $p' \notin P$ lub nie jest bezkwadratowa. W pierwszym przypadku $r > \min\{a, b\}$, więc $\lfloor a/r \rfloor \lfloor b/r \rfloor = 0$, a w drugim $\mu(r) = 0$. Otrzymaliśmy zatem równość podaną w tezie zadania.

Karta żałobna: zginął **Przemek Gadziński**. Student, a następnie doktorant Uniwersytetu Wrocławskiego (specjalność: analiza harmoniczna; gotowa praca doktorska). Wcześniej uczestnik Olimpiady Matematycznej i Zawodów Polsko-Austriackich – z tego okresu dobrze zapamiętany przez redaktora ligi zadaniowej jako świetnie zapowiadający się matematyk, przy tym bardzo miły chłopak, skromny i wszystkim życzliwy. W naszej lidze – laureat siedmiokrotny. Nie zdążył wyjść na pozycję lidera, bo przedwcześnie tragicznie zakończył życie. Stało się to parę lat temu, ale dopiero niedawno smutna wiadomość do nas dotarła.

Gdy ktoś któregoś dnia spartaczy robotę, mówi się, że miał zły dzień. Prowadzący ligę zadaniową miał chyba zły rok. Uczestnicy ligi zapewne nie mogli się nadziwić, czytając firmowe rozwiązania zadań, dlaczego są one tak wymyślne. Ano, właśnie dlatego, że redaktor dopiero z prac uczestników dowiadywał się, jak te zadania należało fachowo robić. Dotyczy to zwłaszcza dwóch zadań (**525**, **532**), znacznie prostszych, niż by to mogło wyglądać z lektury opracowań firmowych.

Zawszeć to krzepiące, gdy mamy okazję czegoś się nauczyć od naszych Czytelników. I wszystko jest dobrze, dopóki zadania i nasze rozwiązania są, choćby niezdarne, ale przynajmniej poprawne.

Zdarza się jednak, że zadanie każe udowodnić fałszywe twierdzenie; taka sytuacja miała już w lidze raz czy drugi miejsce. No i teraz znów się powtórzyła (**542**). Ciekawe, że tylko jedna osoba wyraźnie stwierdziła fałsz i podała kontrprzykład. Rzecz jasna, otrzymała ocenę maksymalną.

Pozostałe prace jednak wcale nie zostały ocenione na zero – mimo że podawały „dowód” nieprawdziwej tezy (jak w rozwiązaniu firmowym...). Bo ta teza „normalnie” jest słuszna, poza bardzo wyjątkowymi przypadkami (matematycy mówią: *generycznie*). Istotą matematycznej zawartości zadania, zgodną z intencją jego autora, było właśnie to, co się dzieje przy konfiguracji generycznej.

Redaktor ligi zawinił niestarannością. Powinien był uważniej sformułować treść, dołączając jakiegokolwiek założenie, eliminujące owe patologiczne przypadki. I może nie chciał zbyt surowo oceniać tych, którzy takie założenie podświadomie przyjęli i przy tym założeniu coś sensownie udowodnili.

Zadanie 525. [Układ równań $a = c^2 + d^2$, $b = d^2 + e^2$, $c = e^2 + a^2$, $d = a^2 + b^2$, $e = b^2 + c^2$] (współczynnik trudności $WT=2,24$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=14$). To właśnie pierwsze ze wspomnianych wyżej zadań. Kilku uczestników robi to tak, jak w rozwiązaniu firmowym lub dość podobnie. Niewiele dobrego można o takim rozwiązaniu powiedzieć – poprawne, i tyle. A jak naprawdę należało atakować ten układ równań? Tak, jak to pokazali (różniąc się nieco w szczegółach) **W. Bednarek, J. Cisło, K. Dorobisz, B. Dyda, T. Kujawa, P. Kumor, J. Olszewski, M. Spychała, T. Warszawski**:

Dodajemy stronami równanie pierwsze i trzecie i odejmujemy drugie – dostajemy równanie $\frac{1}{2} - b = (a - \frac{1}{2})^2 + (c - \frac{1}{2})^2$; jeśli więc (a, b, c, d, e) jest rozwiązaniem, to $b \leq \frac{1}{2}$ i przez cykliczność wszystkie niewiadome leżą w przedziale $(0; \frac{1}{2})$; teraz dodając wszystkie równania stwierdzamy, że suma pięciu liczb nieujemnych $a(1 - 2a)$, \dots , $e(1 - 2e)$ jest zerowa – dokończenie oczywiste.

Zadanie 530. [$\triangle ABC$ (ostrokątny); H – ortocentrum; AP, AQ – styczne do okręgu ($BCQP$) o średnicy $BC \Rightarrow$ punkty P, Q, H współliniowe] ($WT=1,77$; $LPR=11$). Zadanie było prościutkie, rozwiązanie firmowe też. Ale można było jeszcze krócej: wystarczyło zauważyć, że wysokości BE i CF są przekątnymi czworokąta $BCEF$ wpisanego w rozważany okrąg i powołać się na znany fakt, że ich punkt przecięcia (czyli H) leży na prostej biegunowej punktu A względem owego okręgu (czyli prostej PQ); tak przedstawili swe rozwiązania **M. Jastrzębski, P. Kumor, P. Łabędzki**.

Dowody, jak w rozwiązaniu firmowym, lub niezbyt istotnie się od niego różniące, podali **J. Cisło, J. Olszewski** oraz **K. Dorobisz, T. Warszawski** – ostatni dwaj nieco skrócili zapis, używając pojęcia potęgi punktu względem okręgu. Ponadto czterej uczestnicy znaleźli rozwiązania analityczne.

Zadanie 531. [Graf (n, q) bez cyklu długości 3, ale nie dwudzielny $\Rightarrow 4q \leq n^2 - 2n + 5$] ($WT=3,28$; $LPR=6$). W omawianym sezonie było to najtrudniejsze zadanie. Wszystkie rozwiązania jak firmowe: **J. Cisło, K. Dorobisz, Ł. Garncarek, P. Kumor, J. Olszewski, T. Warszawski**.

Zadanie 532.
[Ciąg (a_n) : $a_1 = 1$, $a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + \dots + a_{n-1})$; wzór jawny: $a_n = ?$] ($WT=1,23$; $LPR=24$). Znów: rozwiązanie firmowe niepotrzebnie skomplikowane. Wszyscy uczestnicy robią to znacznie prościej – ot tak: ciąg (s_n) o wyrazach $s_n = a_1 + \dots + a_n$ spełnia warunki $s_1 = 1$ oraz

$$s_n - s_{n-1} = \frac{n+1}{n-1} \cdot s_{n-1},$$

czyli

$$\frac{s_n}{n} = 2 \cdot \frac{s_{n-1}}{n-1}.$$

Stąd $s_n/n = 2^{n-1}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, więc

$$a_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot s_{n-1} = (n+1)2^{n-2},$$

i gotowe.

Zadanie 537. [a, b, c – boki trójkąta; $A = \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}}$; B, C – analogicznie $\Rightarrow A + B + C \leq 3$] ($WT=2,42$; $LPR=8$).

Oznaczając mianowniki wyrażeń definiujących A, B, C kolejno przez x, y, z mamy, jak w rozwiązaniu firmowym,

$$A^2 = \frac{x^2 + xy + xz - yz}{2x^2} \quad (B^2, C^2 \text{ – analogicznie}).$$

W tym momencie większość uczestników zauważa, że w myśl nierówności Cauchy’ego–Schwarza [$(A + B + C)^2 \leq 3(A^2 + B^2 + C^2)$] wystarczy wykazać mocniejszą tezę $A^2 + B^2 + C^2 \leq 3$. W zmiennych x, y, z można tę tezę zapisać na przykład tak:

$$\frac{x^2 - xy - zx + yz}{x^2} + \frac{y^2 - yz - xy + zx}{y^2} + \frac{z^2 - zx - yz + xy}{z^2} \geq 0.$$

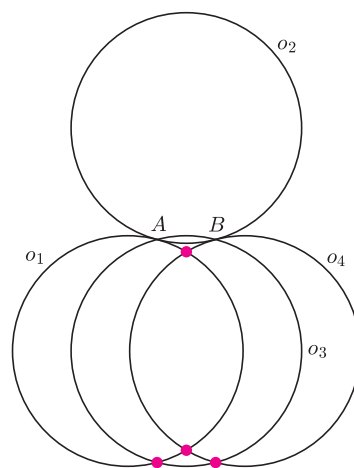
W. Bednarek, K. Dorobisz, A. Idzik, M. Jastrzębski, J. Olszewski, T. Warszawski, T. Wietecha różnymi przekształceniami dowodzą słuszności tak wzmocnionej tezy. Warto jednak nadmienić, że dowód nie jest tu w ogóle potrzebny – jest to bowiem szczególny przypadek ($\lambda = -2$) klasycznej nierówności

$x^\lambda(x-y)(x-z) + y^\lambda(y-z)(y-x) + z^\lambda(z-x)(z-y) \geq 0$,
słusznej dla wszystkich $\lambda \in \mathbf{R}$ oraz $x, y, z > 0$ i znanej pod nazwą *nierówności Schura* (choć niekiedy ta nazwa bywa zawężana tylko do sytuacji, gdy $\lambda \geq 0$); jedynie ostatni z wymienionych uczestników powołał się na nierówność Schura, ale dopiero po dalszym podstawieniu i przekształceniu.

Natomiast oszacowania z rozwiązania firmowego ($A + B \leq 2$, $C \leq 1$, przy założeniu $x \leq y \leq z$) uzyskał **P. Kumor** oraz **J. Olszewski** (drugie rozwiązanie!)

Zadanie 539. [$T_1, \dots, T_m \subset X$; $|X| = n$; $\forall i: |T_i| = 3$; $\forall (i < j): |T_i \cap T_j| \leq 1 \Rightarrow \exists S \subset X, |S| \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$; $\forall i: |S \cap T_i| \leq 2$] ($WT=3,10$; $LPR=6$). Z tym zadaniem poradzili sobie **J. Cisło, K. Dorobisz, M. Jastrzębski, K. Kamiński, M. Kieza, J. Olszewski** – rozwiązania identyczne z firmowym.

Zadanie 542. [Przystające okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 (o różnych środkach); o_1, o_2, o_3 mają punkt wspólny A ; o_2, o_3, o_4 mają punkt wspólny B ($\neq A$) \Rightarrow punkty przecięcia tych okręgów, różne od A, B , są wierzchołkami równoległoboku] ($WT=2,43$; $LPR=1?$??).



Otóż właśnie – kontrprzykład na rysunku: o_2, o_3 przecinają się w blisko położonych punktach A i B , które są jednocześnie punktami styczności okręgu o_2 z okręgami o_1 i o_4 . Cztery pozostałe „punkty przecięcia tych okręgów” nie są wierzchołkami czworokąta wypukłego! Ten przykład podała **Ewa Bieniecka** – jedyna osoba, która jasno stwierdziła, że teza jest fałszywa (a następnie przeprowadziła analizę domniemych wariantów zamierzonej treści).

Bo treść zadania była w ogóle niejasna. Liczba „pozostałych punktów przecięcia” może być zarówno większa, jak i mniejsza od 4 (tę kwestię wyeksponował i częściowo przedyskutował w swoim rozwiązaniu **K. Dorobisz**) – wówczas można próbować różnych interpretacji sensu zadania. Ale we wskazanym przykładzie akurat nie ma wątpliwości: poza A, B są dokładnie cztery punkty przecięcia i nie spełniają tezy.

O co więc naprawdę chodziło w zadaniu? Jeśli (jak w rozwiązaniu firmowym) $o_1 \cap o_2 = \{A, K\}$, $o_2 \cap o_4 = \{B, L\}$, $o_4 \cap o_3 = \{B, M\}$, $o_3 \cap o_1 = \{A, N\}$, to istotnie $KLMN$ jest równoległobokiem (być może zdegenerowanym do odcinka). Jednak, po pierwsze – treść zadania powinna była wykluczyć ewentualne punkty przecięcia okręgów o_1 i o_4 ; a po drugie – gdy o_1, o_2 są styczne, wówczas $K = A$, gdy zaś o_4, o_2 są styczne, wówczas $L = B$; nadal K, L, M, N są wierzchołkami równoległoboku, tyle że nie są to już teraz punkty „różne od A, B ” – to niefortunne wyrażenie powinno było zostać zastąpione jakimś innym, lepiej przemyślanym.

Wszyscy rozwiązujący widzieli pierwszą z tych usterek i wyraźnie pisali, które cztery punkty biorą pod uwagę. Ale formalne załamanie tezy w przypadku połączenia obu usterek zostało dostrzeżone tylko przez panią Ewę.

Informatyczny kącik olimpijski (5) – największy XOR podciągu



Zadanie kolejnej edycji kącika pochodzi z informatycznych zawodów czesko-polsko-słowackich w Rużinie, 2005:

Mając dany ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, \dots, a_N , należy znaleźć taki jego podciąg, którego suma XOR (czyli wartość $a_{i_1} \oplus a_{i_2} \oplus \dots \oplus a_{i_N}$) jest największa.

Przypomnijmy: działanie XOR jest podobne do dodawania w systemie binarnym, z tą różnicą, że pomijamy przeniesienie. W takim razie i -ty bit wyniku działania XOR na kilku liczbach jest wyznaczony przez i -te bity argumentów tej operacji (XOR jest łączne i przemienne, więc możemy mówić o „XORowaniu” kilku liczb naraz). Na przykład $1011 \oplus 0110 \oplus 1010 = 0111$ (w systemie binarnym).

Zastanówmy się, jaki *co najmniej* jest wynik? Jeśli dla jakiegoś i mamy $a_i \geq 2^M$, to wynik również jest nie mniejszy niż 2^M . Niech M będzie największym takim wykładnikiem (czyli liczby a_i są co najwyżej $(M + 1)$ -bitowe). Żeby otrzymać wynik nie mniejszy niż 2^M , nasz podciąg musiałby mieć nieparzystą liczbę a_i nie mniejszych niż 2^M – inaczej mówiąc, nieparzystą ilość takich a_i , w których M -ty bit jest równy 1. Czy podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla niższych bitów? Spójrzmy na $(M - 1)$ -szy bit – chcemy, żeby jednocześnie podciąg miał nieparzystą ilość tych a_i , których M -ty bit jest równy 1, oraz nieparzystą ilość tych a_i , których $(M - 1)$ -szy bit jest równy 1.

Zapiszmy to. Niech $b_{i,j}$ będzie j -tym bitem i -tej liczby. Chcemy więc, żeby dla $k = M$ oraz $k = M - 1$ nieparzysta była liczba:

$$|\{1 \leq i \leq N : x_i = 1 \wedge b_{i,k} = 1\}|,$$

gdzie x_i jest równe 1, jeśli i -tą liczbę wybieramy do podciągu, lub 0, jeśli nie. Czyli, pisząc inaczej:

$$\sum_{i=1}^N x_i \cdot b_{i,k} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Ale to już wygląda na układ równań liniowych (modulo 2) z niewiadomymi x_i , który potrafimy rozwiązywać! Jeśli oznaczymy przez R_k powyższe równanie, to rozwiązanie wyglądałoby tak:

- Weźmy $\mathcal{R} := \emptyset$.
- Dla kolejnych bitów liczb z wejścia (od pozycji $k = M$ do $k = 0$):
 - Piszemy równanie R_k odpowiadające bitom z pozycji k .
 - Sprawdzamy, czy spełnialny jest układ równań $\mathcal{R} \cup \{R_k\}$.
 - Jeśli tak, podstawiamy $\mathcal{R} := \mathcal{R} \cup \{R_k\}$ i ustawiamy k -ty bit wyniku na 1.

Przypomnijmy jeszcze, jak rozwiązywać układy równań liniowych – w szczególności, często spotykane na zawodach programistycznych – modulo 2. Układ równań zapisuje się w macierzy – w i -tym wierszu znajdują się kolejne współczynniki i -tego równania (czyli u nas b_{j,k_i} dla $1 \leq j \leq N$), a po nich prawa strona i -tego równania (wyraz wolny 1). Nasza macierz będzie miała ostatecznie $N + 1$ kolumn i co najwyżej $M + 1$ wierszy. Służy ona jedynie do reprezentacji – operacje na niej (zamiana dwóch wierszy miejscami, i dodanie jednego

wiersza do drugiego) mają swoje odpowiedniki w operacjach na równaniach (zamiana dwóch równań miejscami i dodanie jednego równania do drugiego nie zmieniają zbioru rozwiązań układu równań).

Metodą eliminacji Gaussa, korzystając z tych dwóch operacji, sprowadzamy macierz do znanej postaci schodkowej. Po tej operacji może się okazać, że układ równań był sprzeczny – tj. otrzymamy równanie $0 = 1$. Jeśli zaś tak nie jest, to już w tym momencie wiemy, że układ ma rozwiązanie. To pierwsze miejsce, gdzie możemy wykorzystać specyfikę zadania – zamiast od razu szukać rozwiązań x_i , pozostawimy przy postaci schodkowej i do takiej macierzy dodawajmy po jednym wierszu (równaniu). Przyniesie to istotne polepszenie złożoności obliczeniowej. Po przejrzaniu wszystkich bitów chcemy poznać rozwiązanie x_i otrzymanego układu schodkowego \mathcal{R} . W tym celu macierz trzeba dodatkowo sprowadzić do zredukowanej postaci schodkowej, w której pierwszy niezerowy wyraz w każdym wierszu jest jedynym niezerowym wyrazem w swojej kolumnie oraz jest równy 1.

Dodatkowe przyspieszenie działania już nie algorytmu, a samego programu, uzyskamy wykorzystując „sztuczkę implementacyjną”: do zapamiętania liczby z \mathbb{Z}_2 wystarczy jeden bit, a dodawanie modulo 2 możemy zastąpić XORem – wtedy każdy wiersz macierzy można „upakować” w $\lceil \frac{N+1}{B} \rceil$ liczbach, gdzie B jest liczbą bitów w typie całkowitym danego komputera.

Ostateczny algorytm ma złożoność $O(NM^2)$ – dominującą operacją jest dodawanie dwóch wierszy, wymagające $\Theta(N)$ kroków (choć z bardzo małą stałą), którą to operację trzeba wykonać $O(M^2)$ razy.

Filip WOLSKI



Rozwiązanie zadania M 1197.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że suma s wszystkich liczb przyporządkowanych danym punktom jest nieujemna (w przeciwnym razie zmieniamy znak każdej przyporządkowanej liczbie).

Wybermy dowolny punkt A spośród danych punktów i przyjmijmy, że przyporządkowano mu liczbę a . Niech l_1, l_2, \dots, l_k będą różnymi prostymi, z których każda przechodzi przez punkt A oraz przez co najmniej jeden inny dany punkt. Ponieważ suma liczb przyporządkowanych punktom z prostej l_i równa się 0, więc $0 = (k-1)a + s$, skąd uwzględniając nierówności $k \geq 2, s \geq 0$, uzyskujemy $a \leq 0$.

Zatem każdemu punktowi przyporządkowano liczbę niedodatnią, co wobec zależności $s \geq 0$ jest możliwe jedynie wtedy, gdy każdemu punktowi przypisano liczbę 0.

Patrz w niebo

Jak wiadomo, galaktyki rozbiegają się w przybliżeniu zgodnie z prawem Hubble'a, czyli z prędkością proporcjonalną do odległości, przy czym współczynnik proporcjonalności, zwany stałą Hubble'a, wynosi $75 \text{ km}/(\text{s Mpc})$. Dla odległości mierzonych w gigaparsekach prawo to przestaje być liniowe (co więcej, pojawiają się kłopoty ze zdefiniowaniem odległości). Prawo Hubble'a również nie obowiązuje dokładnie dla galaktyk najbliższych, bowiem w tym przypadku największy wkład do prędkości galaktyki ma jej własna prędkość przypadkowa, której przyczyną jest grawitacyjne działanie pobliskich galaktyk i ich gromad. Takimi najbliższymi skupiskami zakłócającymi równomierne rozbieganie się galaktyk jest gromada w Pannie (w odległości 17 Mpc) oraz Wielki Atraktor w Centaurze (w odległości 43 Mpc) – pisaliśmy o tym w *Delcie* 10/2004. Masę Wielkiego Atraktora oszacowano na 100 000 mas naszej Galaktyki, przez co byłby on obiektem dominującym w dynamice naszego kosmologicznego sąsiedztwa. Nasuwa się naturalne pytanie, co jest dalej?

Otóż pojawiły się sygnały, że mniej więcej w tym samym kierunku (Centaur jest na niebie blisko Panny) za Wielkim Atraktorem znajduje się w odległości 200 Mpc następne skupisko materii, tzw. Koncentracja Shapleya. Jej masę szacuje się na zbliżoną do masy Wielkiego Atraktora. Skoro więc leży ona pięć razy dalej, to jej oddziaływanie musi być 25 razy słabsze, czyli już ledwo wyczuwalne za pośrednictwem współczesnych metod obserwacyjnych. Warto tu bowiem wiedzieć, że poszukiwanie odchyłek ekspansji Wszechświata od Hubble'owskiej (i na tej podstawie wnioskowanie o wielkoskalowym rozkładzie materii) jest ogromnie trudne, gdyż obserwuje się przecież tylko prędkości galaktyk (a nie przyspieszenia!), w dodatku tylko ich składowe radialne (a nie poprzeczne względem kierunku widzenia!). Swoją wiarygodność wyniki zawdzięczają statystyce, czyli wielkiej ilości obserwacji.

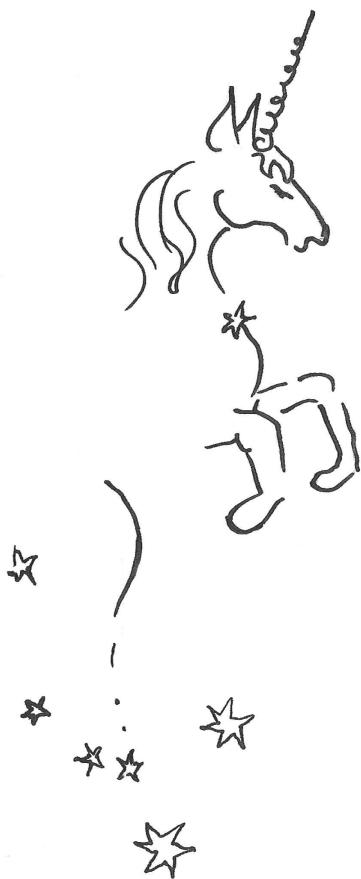
Tomasz KWAST

Luty

Jak wiadomo, jednoroźców nie ma. Nie przeszkadza to jednak, że teraz na wieczornym niebie między dwiema bardzo jasnymi gwiazdami, Syriuszem (alfą Wielkiego Psa) i Procjonem (alfą Małego Psa), można zobaczyć niewyraźny gwiazdozbiór Jednoroźca. Właściwie nie całkiem wiadomo, kto ten gwiazdozbiór wprowadził. Oficjalnie zrobił to Heweliusz, ale podobno gwiazdozbiór ten znany już był w starożytnej Persji. Położony jest w Drodze Mlecznej, a najefektowniejszym w nim obiektem jest mgławica gazowa Rozeta o średnicy ponad 1° . Całe jej piękno widać, oczywiście, dopiero na zdjęciach o długiej ekspozycji, ale jest ona też wyzwaniem dla amatorów astrofotografii, bowiem jej jasność wynosi 6,2 mag. Jest ona w istocie obszarem zjonizowanego wodoru, pobudzanego do świecenia przez kilka bardzo gorących gwiazd znajdujących się w jej centrum. Leży ona w odległości 1 kpc.

Rok 2008 jest rokiem przestępnym, czyli luty ma 29 dni. Nawiasem mówiąc, właśnie 29 lutego (1792) urodził się m.in. Gioacchino Rossini. Wenus i Jowisz są w Strzelcu, planety te widać więc nad ranem i 1 II znajdują się we wzajemnej odległości $0^\circ 6'$. Mars jest w Byku i widać go wieczorem i długo w nocy. Saturn jest we Lwie i 24 II znajdzie się w opozycji (w przeciwnej stronie nieba niż Słońce), a więc widać go przez całą noc. Nów Księżyca wypada 7 II, a pełnia 21 II. Księżyc zakryje dwukrotnie Antaresa: 1 II i 29 II – co będzie w obu przypadkach widać w Australii i na Antarktydzie. Księżyc zakryje też Regulusa 21 II, co zobaczą mieszkańcy Ameryki Południowej. W nowiu (7 II) nastąpi obrączkowe zaćmienie Słońca widoczne na Antarktydzie, w Nowej Zelandii i na wyspach Pacyfiku, a w pełni (21 II) całkowite zaćmienie Księżyca – będzie to w Polsce nad ranem, a więc jeśli pogoda pozwoli, to mamy szanse również je zobaczyć. Przewidywalnych rojów meteorów nie będzie.

T. K.



Krzywa Gaussa i pomarańcze Fidela Castro

Rafał SZTENCEL

– Bo wie pan, jakby zmierzyć dużo razy ciśnienie, to zawsze wyjdzie krzywa Gaussa.

Doktor Konstanty R. do docieklivego pacjenta

Mało kto nie słyszał o krzywej Gaussa, i co gorsza prawie wszyscy wierzą świącie, że po zbadaniu dowolnego zjawiska losowego jakoś tam w końcu ona wyjdzie, czyli pojawi się wykres funkcji

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Jest to zadziwiający fenomen społeczny, skoro 99% populacji (szczególnie absolwenci szkół średnich z ostatnich lat) nie potrafiłoby powiedzieć, co znaczą robaczki składające się na powyższy wzór, tym bardziej że zawiera on pierwiastek kwadratowy, koncept nieznaną większości Europejczyków [1].

Dlaczego najważniejszy rozkład prawdopodobieństwa ma tak dziwaczną postać? Pokażemy, jaki jest jego związek z bardzo naturalnym rozkładem, a mianowicie jednostajnym na n -wymiarowej kuli o promieniu \sqrt{n} , a dokładniej – zbiorze opisanym nierównością

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Rozpatrzmy rzut tego rozkładu na średnicę kuli, czyli np. odcinek $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ na osi x_1 . Jest to rozkład współrzędnej x_1 . Nietrudno obliczyć jego gęstość.

Przekrój kuli płaszczyzną o równaniu $x_1 = x$ jest wyznaczony przez nierówność

$$\sqrt{x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n - x^2} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{n}} = r_{n-1}(x), \quad |x| \leq \sqrt{n},$$

jest więc $(n-1)$ -wymiarową kulą o promieniu $r_{n-1}(x)$. Jak można się ostatnio dowiedzieć od studentów matematyki, objętość kuli jest funkcją wielomianową promienia; prośba o sprecyzowanie postaci wielomianu nierzadko kończy się sukcesem.

Możemy zatem napisać gęstość rozkładu współrzędnej x_1 :

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n/2} & |x| < \sqrt{n}, \\ 0 & |x| \geq \sqrt{n}. \end{cases}$$

Jeśli $n \rightarrow \infty$, to

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Jest to może mniej oczywiste, niż się wydaje. Należy zauważyć, że stałe c_n można wyznaczyć z zależności

$$c_n \cdot \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n/2} dx = 1,$$

jako że f_n jest gęstością i udowodnić jakoś (na przykład z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajorzowanej), że

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n/2} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

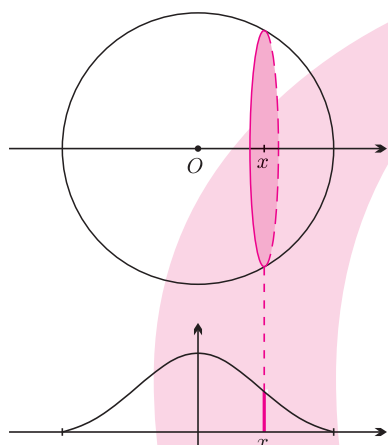
Rozkład Gaussa jest więc rozkładem granicznym współrzędnej x_1 .

w kształcie trójkąta, ale już na kostce trójwymiarowej doprowadzi do gęstości skleionej z wielomianów drugiego stopnia, której kształt będzie przypominać krzywą Gaussa. A jak udowodnić, że gęstość graniczna jest gaussowska?

Rozkład jednostajny na kostce $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ jest rozkładem wektora losowego $X = (X_1, \dots, X_n)$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Rzutowanie na najdłuższą przekątną jest równoważne z pomnożeniem X skalarnie przez wektor jednostkowy, wyznaczający kierunek przekątnej, czyli przejściem do zmiennej losowej

$$(X_1, \dots, X_n) \circ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}},$$

która, zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym, ma asymptotycznie rozkład normalny o zerowej średniej i wariancji $D^2 X_1 = \frac{1}{12}$.



Bibliografia

[1] *Gazeta Wyborcza*, losowo wybrany numer z lata 2007.

Jeśli zastąpimy rozkład jednostajny na kuli rozkładem jednostajnym na sferze, wynik będzie ten sam. Nie trzeba powtarzać rachunków, wystarczy zdać sobie sprawę, że w wysokim wymiarze prawie cała masa kuli skupiona jest tuż pod powierzchnią sfery. Autor przekonał się o tym naocznie, gdy pod koniec lat siedemdziesiątych sprzedano mu w sklepie na Grochowie pomarańcze w kolorze szarozielonym, pochodzące z Kuby. Okazało się, że mają one niezwykle grubą skórę. Prosty rachunek pokazuje, że gdy grubość skóry wynosi 20% promienia, to objętość miąższu stanowi tylko 51,2% całości. W przestrzeni o większej liczbie wymiarów miąższu jest żałośnie mało.

Mało tego, kulę możemy zastąpić kostką (może to być kostka cukru z Kuby, nawet pusta w środku) o jednostkowej krawędzi i rzutować rozkład jednostajny na najdłuższą przekątną. Taka operacja na kwadracie da gęstość