







## SPIS TREŚCI NUMERU 10 (401)

Automat do badania algorytmów <i>Przemysław Kiciak</i>	str. 1
Liczby przestępne i twierdzenie Liouville'a <i>Michał Krych</i>	str. 4
Modele dyskretne a modele ciągłe w biomatematyce <i>Urszula Forys</i>	str. 6
 <b>Zadania</b> <i>Andrzej Walat</i>	str. 8
Aktualności <i>Andrzej Walat</i>	str. 9
 <b>Grać albo nie grać?</b> <i>Andrzej Walat</i>	str.10
 W dowolnie małym kącie wierzchołkowym są <i>wszystkie</i> proste przechodzące przez jego wierzchołek <i>Marek Kordos</i>	str.12
 $3x + 1$ <i>Wiktor Bartol</i>	str.13
 Liftowane piłki, czyli rzecz o efekcie Magnusa <i>Stanisław Bednarek</i>	str.14
Równanie Pitagorasa w kongruencjach <i>Anna Silka</i> <i>Tomasz Szemberg</i>	str.15
Informatyczny kącik olimpijski (1) <i>Filip Wolski</i>	str.19
Punkty Lagrange'a <i>Tomasz Kwast</i>	str.20
Klub 44	str.22
Patrz w niebo	str.24
Październik	str.24
 Jak oceniamy ryzyko? <i>Rafał Sztencel</i>	str.25

W następnym numerze:  
Czarownica

Dnia 15 lipca 2007 roku  
w Isfahanie (Iran)  
zmarł

**Waldemar Gorzkowski**

Prezydent Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej  
Autor *Delty*

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Adamaszek, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sek. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450,  
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie,  
ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2008 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2008 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

Cena prenumeraty w 2008 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicę:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Automat do badania algorytmów

Przemysław KICIAK\*

Żeby zrozumieć rekurencję,  
należy najpierw zrozumieć rekurencję.



Są takie twierdzenia, z których mnóstwo innych twierdzeń wynika na tyle łatwo, że można je stosować niemal „mechanicznie”, na przykład w geometrii twierdzenie Cevy. Są też takie „mechaniczne” metody rozwiązywania różnych zadań. Zobaczmy, jak można zastosować równania różnicowe do badania złożoności różnych algorytmów iteracyjnych i rekurencyjnych.

Rozważmy nieskończony ciąg liczb  $a_0, a_1, \dots$ , którego pierwsze  $n$  wyrazów wybrano dowolnie, a pozostałe wyrazy (dla  $k \geq n$ ) spełniają równanie

$$a_k = c_{n-1}a_{k-1} + \dots + c_1a_{k-n+1} + c_0a_{k-n} + f(k),$$

w którym liczby  $c_0, \dots, c_{n-1}$  oraz funkcja  $f$  są dane. Początkowe wyrazy ciągu (opisujące **warunek początkowy**) i powyższe równanie określają nasz ciąg jednoznacznie. Jeśli jakiś algorytm przetwarzania danych o rozmiarze  $k \geq n$  polega na rozwiązaniu zadań dla mniejszych danych, a następnie wykonaniu  $f(k)$  operacji w celu otrzymania wyniku, to koszt lub złożoność nieraz możemy opisać w ten sposób. Zwykle chcemy jednak mieć bardziej „jawne” wyrażenie opisujące  $a_k$ .

Zacznijmy od rozwiązania **równania jednorodnego**, tj. takiego, w którym funkcja  $f$  jest zerowa. Zbadamy hipotezę, że równanie takie jest spełnione przez ciąg geometryczny:  $a_k = \lambda^k$ , dla pewnej liczby  $\lambda \neq 0$ . Po wstawieniu mamy

$$\lambda^k = c_{n-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda^{k-n+1} + c_0\lambda^{k-n},$$

skąd po uporządkowaniu otrzymamy tzw. **równanie charakterystyczne**:

$$\lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - c_1\lambda - c_0 = 0.$$

Ciąg geometryczny  $\lambda^k$  jest zatem rozwiązaniem równania jednorodnego, jeśli liczba  $\lambda$  jest rozwiązaniem równania charakterystycznego. Jeśli równanie to ma  $n$  różnych rozwiązań, to mamy  $n$  niezależnych liniowo ciągów geometrycznych spełniających równanie jednorodne i każda ich kombinacja liniowa jest rozwiązaniem. Dobierając jej współczynniki, możemy znaleźć ciąg spełniający warunki początkowe.

Zobaczmy przykład. Równanie

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

z warunkiem początkowym  $F_0 = 0, F_1 = 1$  określa ciąg liczb, zgodnie z którym Leonardo z Pizy teoretycznie, a później Lejzorek Rojtszwaniac praktycznie, choć też na papierze, rozmnażali króliki. Rozwiązaniami równania charakterystycznego

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

są liczby  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  i  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ . Mamy

$$F_k = b_1\lambda_1^k + b_2\lambda_2^k$$

dla pewnych liczb  $b_1, b_2$ . Na podstawie warunków początkowych,

$$F_0 = b_1 + b_2 = 0,$$

$$F_1 = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 = 1,$$

obliczamy  $b_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , skąd wynika, że po upływie  $k$  miesięcy od założenia hodowli możemy mieć nawet

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$$

par królików.

Co możemy zrobić, jeśli różnych rozwiązań równania charakterystycznego jest mniej niż  $n$ ? Jeśli liczba  $\lambda$  jest rozwiązaniem o krotności  $r > 1$ , to równanie

\*Instytut Matematyki Stosowanej  
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski





jednorodne jest spełnione przez ciągi  $\lambda^k, k\lambda^k, \dots, k^{r-1}\lambda^k$ , i znając wszystkie rozwiązania równania charakterystycznego i ich krotności, możemy znaleźć  $n$  niezależnych liniowo ciągów spełniających jednorodne równanie różnicowe. Zabierzmy się zatem za równania niejednorodne.

Jeśli mamy dowolne rozwiązanie równania niejednorodnego, to każde inne jego rozwiązanie możemy otrzymać, dodając pewne rozwiązanie równania otrzymanego przez „wyrzucenie” funkcji  $f$  (czyli równania jednorodnego). W badaniu złożoności algorytmów bardzo często  $f(k) = p(k)\mu^k$ , gdzie  $p$  jest wielomianem pewnego stopnia  $d$ . Jeśli liczba  $\mu$  jest rozwiązaniem równania charakterystycznego (tak, tego rozpatrywanego wcześniej) o krotności  $r$ , to pewne rozwiązanie równania z taką funkcją  $f$  ma postać  $k^r q(k)\mu^k$ , gdzie  $q$  jest wielomianem stopnia  $d$  (to jest prawdą także dla  $r = 0$ ). Współczynniki wielomianu  $q$  możemy obliczyć na podstawie równania. Zobaczmy to, badając konkretne algorytmy.

Maksymalna liczba porównań  $T(k)$  potrzebna do posortowania  $k$ -elementowego ciągu **algorytmem sortowania przez wstawianie** spełnia równanie:

$$T(1) = 0, \\ T(k) = T(k-1) + k - 1 \quad \text{dla } k > 1.$$

Równanie charakterystyczne ma postać  $\lambda - 1 = 0$ , a  $f(k) = (k-1) \cdot 1^k$ . Ponieważ  $\mu = 1$  jest rozwiązaniem równania charakterystycznego (o krotności 1), więc pewne rozwiązanie równania ma postać

$$a_k = k(bk + c) \cdot 1^k.$$

Po podstawieniu do równania mamy

$$bk^2 + ck = b(k-1)^2 + c(k-1) + k - 1.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$ck = (-2b + c + 1)k + (b - c - 1).$$

Ponieważ ta równość zachodzi dla każdego  $k$ , więc  $1 - 2b = 0$  i  $b - c - 1 = 0$ , a stąd  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = -\frac{1}{2}$ . Mamy więc

$$T(k) = \frac{1}{2}(k^2 - k) + d \cdot 1^k.$$

Liczbę  $d$  obliczymy na podstawie warunku początkowego; otrzymamy  $d = 0$ . Zatem, sortując ciąg  $k$ -elementowy algorytmem przez wstawianie, wykonamy co najwyżej  $\frac{1}{2}(k^2 - k)$  porównań.

W **algorytmie sortowania przez scalanie** liczba porównań elementów potrzebna do posortowania ciągu o długości  $n$  nie przekracza

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n - 1.$$

Przyjmijmy, że  $n = 2^k$  dla pewnej liczby naturalnej  $k$  i oznaczmy  $a_k = T(2^k)$ . Rozwiązując równanie  $a_k = 2a_{k-1} + 2^k - 1$  z warunkiem początkowym  $a_0 = 0$  (co Czytelnik powinien tu już umieć), otrzymamy  $a_k = (k-1) \cdot 2^k + 1$ , skąd dla  $n = 2^k$ , czyli  $k = \log_2 n$ , mamy

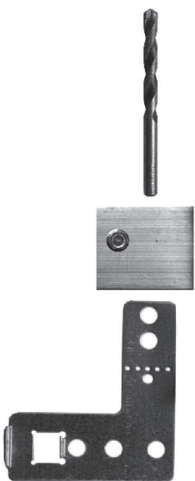
$$T(n) = (\log_2 n - 1) \cdot n + 1.$$

Rozważmy jeszcze dwa algorytmy przybliżonego rozwiązywania równania nieliniowego  $f(x) = 0$ : **metodę Newtona** i **metodę siecznych**. Znacze? To przeczytajcie. W metodzie Newtona potrzebujemy jednego przybliżenia rozwiązania,  $x_0$ , a w metodzie siecznych – dwóch:  $x_0$  i  $x_1$ , na podstawie których obliczamy kolejne przybliżenia. Jeśli liczba  $\alpha$  jest rozwiązaniem, funkcja  $f$  jest klasy  $C^2$  i jej pochodna w otoczeniu  $\alpha$  jest różna od 0, to błędy  $\varepsilon_k = x_k - \alpha$  kolejnych przybliżeń rozwiązania w tych dwóch metodach spełniają równości

$$\varepsilon_k = \frac{f''(\xi_{k-1})}{2f'(\xi_{k-1})} \varepsilon_{k-1}^2, \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_k = \frac{f''(\xi_{k-1})}{2f'(\xi_{k-1})} \varepsilon_{k-1} \varepsilon_{k-2},$$

przy czym liczba  $\xi_{k-1}$  leży w przedziale zawierającym  $\alpha$  i  $x_{k-1}$ , albo  $\alpha$ ,  $x_{k-1}$  i  $x_{k-2}$ , odpowiednio. Oznaczmy

$$a_k = \log |\varepsilon_k| \quad \text{oraz} \quad g(k) = \log \left| \frac{f''(\xi_{k-1})}{2f'(\xi_{k-1})} \right|$$



(podstawa logarytmu może być dowolna, większa niż 1). Dla metody Newtona dostaniemy równanie

$$a_k = 2a_{k-1} + g(k).$$

Zastąpmy  $g(k)$  przez stałą  $G$  i założmy, że  $a_0 < -G$ . Rozwiązaniem tak zmienionego równania jest ciąg

$$\tilde{a}_k = (a_0 + G) \cdot 2^k - G.$$

Możemy dalej sprawdzić, że rozwiązanie równania z  $g(k) < G$  spełnia warunek  $a_k < \tilde{a}_k$ . Wtedy ciąg  $a_k$  dąży wykładniczo do  $-\infty$ , a ponieważ mamy tu kolejne potęgi liczby 2, więc każde kolejne przybliżenie rozwiązania ma około 2 razy więcej cyfr dokładnych. Zbadanie metody siecznych zostawiam Czytelnikowi na deser.

**Algorytm Strassena** jest pierwszym poznany algorytmem mnożenia macierzy o wymiarach  $n \times n$ , w którym trzeba wykonać mniej niż  $C \cdot n^3$  działań arytmetycznych dla pewnej stałej  $C$ . Niech  $n = 2^k > 1$ . W algorytmie Strassena macierze do pomnożenia dzielimy na bloki o wymiarach  $m \times m$ , gdzie  $m = n/2$ . Aby otrzymać bloki, z których składa się wynik, trzeba wykonać 7 mnożeń oraz 18 dodawań i odejmowań macierzy  $m \times m$ . Każde dodawanie i odejmowanie to  $m^2$  działań na współczynnikach. Mamy zatem

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{18}{4}n^2,$$

oraz  $T(1) = 1$ . Oznaczmy  $a_k = T(2^k)$ . Mamy równanie  $a_k = 7a_{k-1} + 18 \cdot 4^{k-1}$  z warunkiem początkowym  $a_0 = 1$ . Rozwiązaniem spełniającym warunek początkowy jest ciąg  $a_k = 7^{k+1} - 6 \cdot 4^k$ , a zatem

$$T(n) = (2^{\log_2 7})^{k+1} - 6 \cdot 4^k = 7n^{\log_2 7} - 6n^2.$$

Ostatni przykład dotyczy **drzew AVL** (ich nazwa pochodzi od wynalazców, których było dwóch: Adelson-Velski i Landis). Koszt wstawiania, usuwania i dostępu do danych w drzewie binarnych wyszukiwań może być proporcjonalny do wysokości drzewa, która w drzewie o  $n$  wierzchołkach może wynosić nawet  $n$ . Jeśli jednak zażądamy, aby różnica wysokości poddrzew dowolnego wierzchołka była nie większa niż 1, to drzewo będzie istotnie niższe. Niech  $C(k)$  oznacza minimalną liczbę wierzchołków drzewa AVL o wysokości  $k$ . Drzewo o wysokości 1 ma zawsze 1 wierzchołek (korzeń), a drzewo o wysokości 2 ma co najmniej 2 wierzchołki. Dla  $k > 2$  mamy

$$C(k) = C(k-1) + C(k-2) + 1,$$

ponieważ drzewo o wysokości  $k$  ma najmniejszą możliwą liczbę wierzchołków wtedy, gdy oba poddrzewa korzenia mają różne wysokości i każde z nich ma najmniejszą dopuszczalną liczbę wierzchołków. Równanie  $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$  jest spełnione przez ciąg stały  $a_k = -1$ . Aby uzyskać rozwiązanie spełniające warunki początkowe, przyjmujemy

$$C(k) = e\lambda_1^k + f\lambda_2^k - 1$$

i obliczamy  $e$  i  $f$ , rozwiązując układ równań

$$C(1) = \lambda_1 e + \lambda_2 f - 1 = 1,$$

$$C(2) = \lambda_1^2 e + \lambda_2^2 f - 1 = 2,$$

w którym występują te same liczby  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , co w hodowli królików. Dostajemy stąd  $e = \frac{1}{10}(5 - 3\sqrt{5})$  i  $f = \frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})$ . Liczbę  $n$  wierzchołków w drzewie AVL możemy oszacować jak następuje:

$$n \geq C(k) = e\lambda_1^k + f\lambda_2^k - 1 > (e+f)\lambda_2^k - 1 = \lambda_2^k - 1,$$

ponieważ  $f > -e > 0$ ,  $e+f = 1$  oraz  $\lambda_2 > -\lambda_1 > 0$ . Zatem  $\lambda_2^k < n+1$ , czyli wysokość drzewa

$$k < \log_{\lambda_2}(n+1).$$

Dalsze przykłady można mnożyć (prawie) jak króliki. Kto umie napisać i rozwiązać równanie różnicowe, temu analiza złożoności wielu pozornie całkiem różnych algorytmów niestraszna. Oczywiście, nie brakuje też takich algorytmów, których analiza jest straszna. Co kto lubi...

# Liczby przestępne i twierdzenie Liouville'a

Pamięci Andrzeja Mąkowskiego

Michał KRYCH\*



W 1744 roku w książce „Wprowadzenie do analizy” Leonhard Euler sformułował hipotezę, że jeśli liczby  $a, b$  są wymierne i nie istnieją takie liczby całkowite  $p, q$ , że  $b = a^{p/q}$ , to liczba  $\log_a b$  nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, czyli że  $\log_a b$  jest liczbą przestępną. W tamtych czasach nikt nie potrafił udowodnić powyższej hipotezy ani nawet wykazać tego, że istnieją liczby przestępne. Minęło 100 lat i sytuacja uległa radykalnej zmianie. Joseph Liouville zdołał dowieść, że pewne liczby są przestępne. W roku 1851 opublikował pracę, dzięki której można np. pokazać, że liczba

$$\ell = 0,110\ 001\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ \dots = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + \dots$$

jest przestępna. Nie zdołał jednak wykazać przestępności liczby  $e$ . Dopiero w 1873 roku dowiódł tego Charles Hermite, natomiast w 1882 r. Ferdinand Lindemann wykazał, że przestępna jest także liczba  $\pi$ . Przestępność logarytmów, o których pisał Euler, została udowodniona dopiero w pierwszej połowie dwudziestego wieku przez Aleksandra Gelfonda i Theodora Schneidera.

Sformułujemy teraz twierdzenie Liouville'a, dzięki któremu można wykazać przestępność liczby  $\ell$  i które rozpoczęło bogatą i trudną teorię.

**Twierdzenie Liouville'a.** *Jeśli liczba niewymierna  $x_0$  jest pierwiastkiem równania*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

*i liczby  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  są całkowite, przy czym  $n \geq 1$  i  $a_n \neq 0$ , to istnieje taka liczba  $C > 0$ , że dla dowolnych liczb całkowitych  $p$  i  $q > 0$  zachodzi nierówność*

$$\left| x_0 - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}.$$

Dowód jest bardzo prosty. Niech

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Równanie  $w(x) = 0$  ma skończenie wiele rozwiązań. Istnieje więc taka liczba  $\delta > 0$ , że z nierówności  $0 < |x_0 - r| \leq \delta$  i warunku  $w(x_0) = 0$  wynika, iż  $w(r) \neq 0$ , tzn. w przedziale  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  równanie  $w(x) = 0$  ma tylko jeden pierwiastek  $x_0$ . Jeśli więc  $r = \frac{p}{q} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , a liczby  $p, q$  są całkowite i  $|x_0 - r| \leq \delta$ , to  $w(r) \neq 0$ . Oczywiście

$$w(r) = \frac{1}{q^n} (a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \dots + a_np^n).$$

Wynika stąd, że liczba  $q^n w(r)$  jest całkowita, a ponieważ jest różna od 0, więc  $|q^n w(r)| \geq 1$ .

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że  $\delta < 1$ . Możemy, bo przedział o środku  $x_0$ , który nie zawiera pierwiastków wielomianu  $w$ , możemy tak skrócić, by jego długość była mniejsza niż 2. Ustalmy zatem  $r = \frac{p}{q}$  takie, że  $|x_0 - \frac{p}{q}| \leq \delta$ . Niech  $A$  będzie największą z liczb całkowitych  $|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$  i niech  $M = 1 + |x_0|$ . W szczególności wiemy, że  $|r| \leq M$ . Mamy

$$\begin{aligned} |w(r)| &= |w(x_0) - w(r)| = |a_1(x_0 - r) + a_2(x_0^2 - r^2) + \dots + a_n(x_0^n - r^n)| = \\ &= |x_0 - r| \cdot |a_1 + a_2(x_0 + r) + \dots + a_n(x_0^{n-1} + x_0^{n-2}r + x_0^{n-3}r^2 + \dots + r^{n-1})| \leq \\ &\leq |x_0 - r| \cdot (|a_1| + |2a_2M| + \dots + |na_nM^{n-1}|) \leq \\ &\leq A(1 + 2M + 3M^2 + \dots + nM^{n-1})|x_0 - r|. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$1 \leq |q^n w(r)| \leq q^n A(1 + 2M + 3M^2 + \dots + nM^{n-1})|x_0 - r|.$$

Wystarczy więc przyjąć, iż

$$C = \frac{1}{A(1 + 2M + 3M^2 + \dots + nM^{n-1})},$$

by teza twierdzenia była spełniona dla  $\frac{p}{q} = r \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Jeśli  $|x_0 - \frac{p}{q}| \geq \delta$ ,

\*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

to nierówność może nie zachodzić, ale wystarczy zastąpić  $C$  przez  $\tilde{C} = C\delta < C$ , by była ona spełniona dla wszystkich liczb wymiernych  $\frac{p}{q}$ . W ten sposób zakończyliśmy dowód twierdzenia.

Pokażemy teraz, że liczba  $\ell$  nie spełnia warunku z twierdzenia Liouville'a niezależnie od wyboru  $n$ . Załóżmy, że  $\ell$  jest pierwiastkiem wielomianu stopnia  $n \geq 1$  o współczynnikach całkowitych. Istnieje wtedy taka liczba  $C > 0$ , że dla dowolnych liczb całkowitych  $p, q$  zachodzi nierówność

$$\left| \ell - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}.$$

Niech  $q = 10^{k!}$  i  $p = q \cdot (10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + \dots + 10^{-k!})$ . Wtedy

$$\frac{C}{10^{n \cdot k!}} \leq \left| \ell - \frac{p}{q} \right| = \ell - \frac{p}{q} = 10^{-(k+1)!} + 10^{-(k+2)!} + 10^{-(k+3)!} + \dots < \frac{2}{10^{(k+1)!}}.$$

Wynika stąd, że

$$10^{(k+1-n) \cdot k!} < \frac{2}{C},$$

co nie jest możliwe, bo liczbę  $10^{(k+1-n) \cdot k!}$  możemy uczynić tak dużą, jak chcemy, wybierając odpowiednio dużą liczbę  $k$ . Przekonaliśmy się, że liczba  $\ell$  nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie Liouville'a mówi, że pierwiastków wielomianów o współczynnikach całkowitych nie można zbyt dobrze przybliżać liczbami wymiernymi: jeśli chcemy podejść bardzo blisko takiego pierwiastka, to musimy mocno zwiększyć mianownik. Oczywiście można powiedzieć, że dowolnie blisko liczby rzeczywistej znajdują się liczby wymierne, ale pomysł porównania tej odległości z odwrotnością potęgi mianownika okazał się niezwykle owocny.

Można udowodnić, że dla każdej liczby niewymiernej  $x_0$  i każdej liczby naturalnej  $n$  istnieją takie liczby całkowite  $p_n$  i  $q_n > n$ , że

$$\left| x_0 - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Nie jest to wcale trudne, uzasadnienie można znaleźć np. w każdej książce, w której omawiane są tzw. ułamki łańcuchowe, którymi zresztą Liouville też się zajmował.

Jeśli  $x_0$  jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych i  $\varepsilon > 0$ , to z twierdzenia Liouville'a wynika, że nierówność

$$\left| x_0 - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

jest spełniona jedynie dla skończenie wielu par liczb całkowitych  $p, q$ . Ta uwaga prowadzi do pytania:

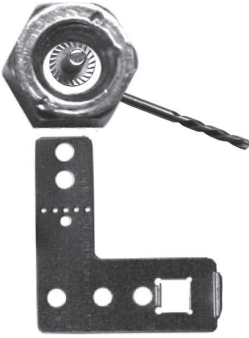
*Dana jest liczba niewymierna  $x_0$ . Dla jakich liczb  $\varepsilon > 0$  istnieje jedynie skończenie wiele par liczb całkowitych  $p, q$ , dla których*

$$\left| x_0 - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} ?$$

Z twierdzenia Liouville'a wynika, że dla pierwiastków wielomianów stopnia  $n$  o współczynnikach całkowitych jest tak, gdy  $2 + \varepsilon > n$ . W 1909 r. pojawiła się praca Axela Thue, w której autor wykazał, że wystarczy, by  $2 + \varepsilon > \frac{n}{2} + 1$ . W roku 1921 Carl Siegel wykazał, że wystarczy, by  $2 + \varepsilon > 2\sqrt{n}$ . W końcu w roku 1955 Klaus Roth wykazał, że wystarczy, by  $2 + \varepsilon > 2$ , czyli że  $\varepsilon > 0$  może być dowolny. Za ten wynik został w 1958 r. nagrodzony medalem Fieldsa. Z twierdzenia Thue–Siegela–Rotha wynika, że jeśli  $\varepsilon > 0$  i dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieją takie liczby całkowite  $p_n$  i  $q_n > n$ , że

$$\left| x_0 - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}},$$

to liczba niewymierna  $x_0$  nie jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych.



# Modele dyskretne a modele ciągłe w biomatematyce

Urszula FORYŚ\*

Modelowanie matematyczne w naukach biomedycznych jest dziedziną stosunkowo nową, której dynamiczny rozwój przypada na ostatnie pięćdziesiąt lat. W porównaniu z fizyką, gdzie modele matematyczne stanowią uznaną podstawę analiz i przewidywań, w podręcznikach do biologii i medycyny w dalszym ciągu nie znajdziemy jawnie napisanych modeli matematycznych, choć czasami zdarza się, że stoją one za uznanymi stwierdzeniami. Jako przykład można podać dawkowanie leków obliczane na podstawie czasu rozpadu danej substancji chemicznej.

Dla dowolnej substancji dynamikę rozpadu opisuje funkcja wykładnicza  $x(t) = x_0 e^{-\alpha t}$ , gdzie  $x_0$  oznacza stężenie początkowe, a współczynnik  $\alpha$  charakteryzuje daną substancję i wyznacza się go doświadczalnie za pomocą tzw. *współczynnika połowicznego rozpadu*. Jeśli  $\Delta t$  oznacza długość odcinka czasu, w którym rozpadowi ulegnie połowa pierwotnej ilości danej substancji, to  $\alpha = \ln 2 / \Delta t$ . Na tej podstawie łatwo możemy obliczyć, jaka powinna być dawka leku, aby jego stężenie utrzymywało się w leczniczych granicach (nie za mało, ale też nie za dużo, gdyż nadmiar może być toksyczny).

\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Spróbujmy zatem zrozumieć, co oznacza pojęcie *model matematyczny* i co musimy wiedzieć, aby taki model zbudować. Powinniśmy rozpocząć od stworzenia tzw. *modelu heurystycznego*, czyli na drodze analizy przebiegu danego zjawiska określić cechy i wielkości charakterystyczne dla niego, zastanowić się, jakie teorie obejmują to zjawisko, które zmienne i parametry można zmierzyć doświadczalnie (dzięki czemu mogą następnie służyć do weryfikacji modelu). Model taki powinien odzwierciedlać stan naszej wiedzy na temat opisywanego zjawiska. Następnie powinniśmy odpowiedzieć na pytanie, czego oczekujemy od modelu matematycznego, który chcemy zbudować. Do tego wszystkiego próbujemy dopasować odpowiednią strukturę matematyczną, którą wraz z założeniami wynikającymi z modelu heurystycznego nazywamy modelem matematycznym.

W modelach klasycznych, których autorzy bazowali na ugruntowanych teoriach fizycznych, stosowano do opisu głównie równania różniczkowe (zwykające, a w bardziej skomplikowanych przypadkach – cząstkowe). Tego typu modele nazywamy ciągłymi, ponieważ budując je, przyjmujemy, że znamy reguły rządzące danym zjawiskiem w dowolnym momencie, a w efekcie otrzymujemy funkcje, które w sposób ciągły (czyli także w dowolnej chwili) opisują przebieg tego zjawiska.

Zauważmy jednak, że stosując taki opis matematyczny, zakładamy np. ciągle nakładanie się generacji, co dla wielu gatunków nie jest prawdą. Wystarczy wymienić choćby owady czy rośliny jednoroczne występujące w strefach klimatycznych z wyróżnionymi porami roku – kolejne generacje są wyraźnie rozseparowane, a wzrost populacji następuje w krokach dyskretnych. W wymienionym przypadku krok czasowy wynosi jeden rok, ale ogólnie jego długość w zasadniczy sposób zależy od danej populacji, np. dla muszki owocówki jest to jeden dzień, a dla komórek – kilka godzin. W takiej sytuacji za pomocą modelu chcemy opisać zmiany liczebności w następnym kroku czasowym, jeśli znamy te liczebności w krokach poprzednich. Taki schemat postępowania odpowiada równaniom różnicowym, a modele wyrażone w ich języku nazywamy modelami dyskretnymi.

W celu przybliżenia różnic między modelami dyskretnymi a ciągłymi wyobraźmy sobie pewien eksperyment. Załóżmy, że hodujemy w laboratorium pewien rodzaj bakterii i w równych odstępach czasu, np. co 30 min, sprawdzamy, ile bakterii się namnożyło. Jeśli wykonywaliśmy eksperyment przez 6 godzin, to mamy 13 wyników pomiarów  $N_k$  dla odpowiadających im chwil  $t_k$ , gdzie  $k = 0, 1, \dots, 12$ . Krok czasowy  $\Delta t = t_{k+1} - t_k = 30$  min odpowiada zmianie indeksu o 1. Znamy zatem liczebności  $N_k$  i możemy na tej podstawie spróbować zbudować model dyskretny, który w najprostszej wersji wyraża się za pomocą równania

$$N_{k+1} = f(N_k),$$

gdzie funkcja  $f$  opisuje, w jaki sposób liczebność populacji w kroku  $k + 1$  zależy od liczebności w kroku poprzednim. Oczywiście, nie zawsze da się znaleźć taką prostą zależność. W przypadku ogólnym można oczekiwać, że liczebność w kroku  $k + 1$  będzie zależała od wszystkich poprzednich, czyli

$$N_{k+1} = f(N_0, \dots, N_k),$$

ale zawsze bierzemy pod uwagę tylko wyszczególnione chwile  $t_k$  i nie interesuje nas, co się działo z populacją np. w chwili pośredniej  $t_k + \Delta t/2$ .

W odróżnieniu od powyższego, modele ciągłe wymagają od nas wiedzy, co dzieje się w dowolnej chwili, a nie tylko w wyszczególnionych jednostkach czasu. Zakładamy więc, że nasza wiedza pochodząca z eksperymentu, mającego z natury dyskretny charakter, wystarcza na to, aby sformułować ogólne prawo, rządzące liczebnością omawianej populacji w każdej minucie, każdej sekundzie, każdej chwili. Taką przybliżoną wiedzę możemy uzyskać, zwiększając częstotliwość pomiarów – zmniejszanie kroku czasowego możemy w przybliżeniu potraktować jak zbieganie do granicy  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Założmy teraz, że model dyskretny da się zapisać za pomocą równania

$$N_{t+\Delta t} = N_t + g(N_t)\Delta t,$$

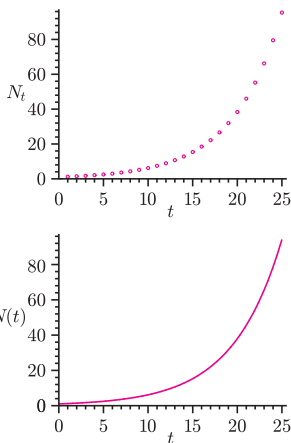
co oznacza, że liczebność populacji w następnym kroku czasowym  $t + \Delta t$  zwiększa się (lub odpowiednio zmniejsza) w stosunku do liczebności w kroku  $t$

proporcjonalnie do długości kroku czasowego, a współczynnik proporcjonalności  $g(N_t)$  jest funkcją liczebności populacji. Równanie to możemy przeformułować w taki sposób, że po lewej stronie dostaniemy iloraz różnicowy  $\frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t}$ , a po prawej funkcję  $g(N_t)$ . Przechodząc do granicy z  $\Delta t$ , dostaniemy równanie różniczkowe  $\frac{dN(t)}{dt} = g(N(t))$  opisujące zmiany liczebności populacji  $N(t)$  w dowolnej chwili  $t$ . Z kolei jeśli mamy równanie różniczkowe

$$\frac{dN(t)}{dt} = g(N(t)), \text{ to przybliżając pochodną przez iloraz różnicowy, otrzymamy równanie różnicowe } \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = g(N(t)).$$

Widzimy zatem, że z formalnego punktu widzenia, o ile krok czasowy jest dostatecznie mały, możemy zastosować zarówno opis dyskretny, jak i odpowiadający mu opis ciągły. Okazuje się jednak, że często te dwa opisy prowadzą do zupełnie innych rezultatów.

W 1798 r. w swojej pracy *An Essay on the Principle of Population* angielski demograf Thomas Malthus stwierdził, że liczba ludności świata wzrasta w postępie geometrycznym, natomiast zasoby żywności – w postępie arytmetycznym. Przedstawiany tutaj model nosi nazwę modelu Malthusa, gdyż stanowi matematyczne odzwierciedlenie jego stwierdzenia.



Rys. 1. Model Malthusa wzrostu populacji – przykładowe rozwiązanie równania dyskretnego i ciągłego.

Przedstawimy teraz dwa proste przykłady ilustrujące z jednej strony podobieństwa, z drugiej strony różnice między dynamiką modeli dyskretnych i modeli ciągłych.

## Model Malthusa wzrostu pojedynczej populacji

Załóżmy, że w danej populacji (przynajmniej w trakcie przeprowadzanego eksperymentu) obserwujemy tylko proces rozrodczości i w następnym kroku czasowym liczebność populacji wzrasta proporcjonalnie do liczby osobników w chwili obecnej. Wobec tego możemy napisać proste równanie różnicowe  $N_{t+1} = \alpha N_t$ , gdzie  $\alpha = 1 + r$  jest współczynnikiem wzrostu, natomiast  $r$  oznacza liczbę potomków jednego osobnika w jednym kroku czasowym. Postępując tak samo, jak to zostało wyżej opisane, możemy przejść od tego równania różnicowego do równania różniczkowego  $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$ . Rozwiązując te równania, dostaniemy odpowiednio  $N_t = N_0 \alpha^t$  oraz  $N(t) = N(0)e^{rt}$  dla równania różnicowego oraz dla równania różniczkowego. Widzimy więc, że dla obu modeli przebieg rozwiązań w czasie jest podobny – porównaj rysunek 1.

## Model logistyczny

Załóżmy teraz, że oprócz procesu rozrodczości w populacji występuje także konkurencja między osobnikami o zasoby środowiska. Klasycznie konkurencję opisuje się za pomocą kwadratu liczebności populacji, zatem otrzymujemy następujące równanie

$$N_{t+1} = \alpha N_t - \beta N_t^2$$

w wersji dyskretniej, czemu odpowiada równanie różniczkowe

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - bN^2(t).$$

Zauważmy, że bezpośrednia konkurencja między osobnikami występuje, gdy osobniki spotykają się. Jeśli założymy, że spotkania osobników są losowe, to liczba tych spotkań jest proporcjonalna do kwadratu liczby osobników – podobnie jak liczba zderzeń cząstek w gazie doskonałym.

Równanie różniczkowe w modelu logistycznym zwykle zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - N(t)/K),$$

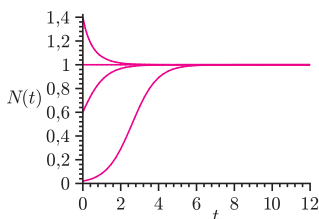
gdzie  $K$  oznacza tzw. pojemność środowiska, czyli liczebność gatunku optymalną dla tego środowiska. Po przeskalowaniu można te równania uprościć do postaci

$$N_{t+1} = \alpha N_t(1 - N_t) \quad \text{oraz} \quad \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - N(t)).$$

O ile teraz jesteśmy w stanie rozwiązać równanie różniczkowe i otrzymać rozwiązanie

$$N(t) = \frac{N(0)}{N(0) + (1 - N(0))e^{-rt}},$$

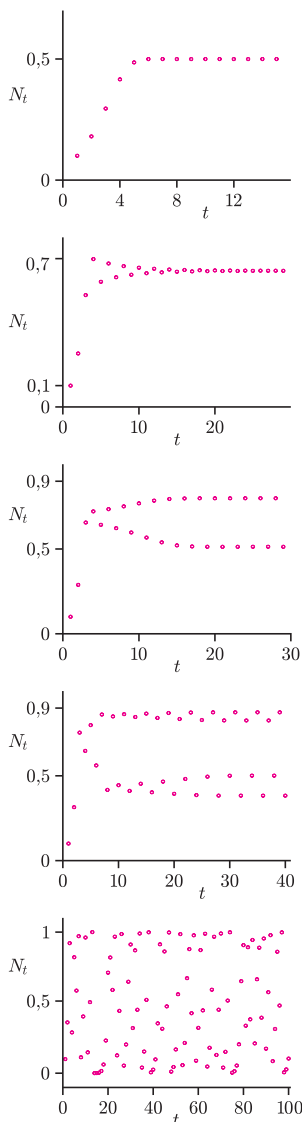
którego przebieg możemy łatwo zbadać, to przebieg rozwiązań równania dyskretnego jest zdecydowanie bardziej skomplikowany i w istotny sposób zależy od parametru  $\alpha$ . Rysunek 2 ilustruje przebieg rozwiązań ciągłego równania logistycznego.  $K = 1$  jest rozwiązaniem stacjonarnym, które nie zależy od czasu. Jeśli  $N(0) > K$ , to liczba osobników przekracza pojemność środowiska, zatem liczebność maleje. Jeśli natomiast  $N(0) < K$ , to liczebność może rosnać



Rys. 2. Rozwiązania ciągłego równania logistycznego dla pojemności środowiska  $K = 1$ .

Wykres rozwiązania dla  $N_0 < K/2$  ma kształt „esowaty”, z punktem przegięcia dla  $N(t) = K/2$ . Tego typu krzywą nazywamy krzywą logistyczną. Kształt esowaty jest charakterystyczny dla wielu procesów biologicznych, gdzie obserwujemy szybki wzrost początkowy, a następnie zahamowanie tego wzrostu i końcowe wysycenie na pewnym poziomie.





Rys. 3. Rozwiązania dyskretnego równania logistycznego dla różnych wartości parametru  $\alpha$ .

do wypełnienia pojemności środowiska, przy czym  $N(0) = K/2$  jest pojemnością progową – jeśli  $N(0) < K/2$ , to początkowo zasoby środowiska wystarczają do szybkiego wzrostu populacji. Dla  $N(t) < K/2$  osobniki nie tracą energii na konkurencję, gdyż nie spotykają się zbyt często, ale w miarę wzrostu liczebności konkurencja zaczyna odgrywać coraz większą rolę, co powoduje zwolnienie wzrostu populacji.

Wydaje się, że podobne cechy powinien wykazywać model dyskretny, ale dzieje się tak tylko w bardzo ograniczonym zakresie parametrów. Okazuje się, że tylko dla  $\alpha < 3$  rozwiązania równania dyskretnego wykazują podobny charakter do rozwiązań równania różniczkowego, ale wraz z rosnącym  $\alpha$  pojawiają się rozwiązania okresowe, prowadzące w efekcie do rozwiązania, które nie ma charakteru okresowego. Mówimy, że dynamika takiego równania jest chaotyczna. Na rysunku 3 widzimy zmiany dynamiki rozwiązań dyskretnego równania logistycznego wraz z rosnącym  $\alpha$ . Rozkład momentów zmian przebiegu rozwiązań, czyli bifurkacji modelu, przedstawia tak zwany diagram Feigenbauma, o którym była mowa np. w *Delcie* 6/2007 z okazji twierdzenia Szarkowskiego.

\* \* \*

Powyżej zapoznaliśmy się z prostymi regułami przejścia między modelem dyskretnym a modelem ciągłym oraz z możliwymi różnicami wynikającymi z tych dwóch typów opisu matematycznego. Zarówno równania różniczkowe zwyczajne, jak i równania różnicowe należą do najprostszego typu aparatu matematycznego, jaki można zastosować w modelowaniu zjawisk biomedycznych. Wraz z rozwojem nie tylko biomatematyki, ale także różnych dziedzin samej matematyki (jak np. równania stochastyczne), struktury matematyczne pojawiające się w modelowaniu ulegają znacznemu wzbogaceniu, co może przyczynić się do pełniejszego opisu danego zjawiska. Od naukowców budujących dany model zależy, jaki typ opisu zostanie wybrany.



## Zadania

*Redaguje Waldemar POMPE*

**M 1183.** Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego należy przyporządkować pewną liczbę rzeczywistą, przy czym suma wszystkich przyporządkowanych liczb powinna być różna od 0. Czy można to uczynić w taki sposób, aby dodatkowo każda liczba była równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują?

Rozwiązanie na str. 24

**M 1184.** W pięciokącie wypukłym  $ABCDE$  spełnione są zależności (rysunek)

$$\sphericalangle C = \sphericalangle E = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad AE + BC = AB = CD = DE = 1.$$

Obliczyć pole tego pięciokąta.

Rozwiązanie na str. 24

**M 1185.** W każde pole tablicy o wymiarach  $25 \times 25$  wpisano liczbę 1 lub  $-1$ .

Następnie dla każdego wiersza i każdej kolumny obliczono iloczyn wszystkich liczb stojących w danym wierszu lub danej kolumnie. Wykazać, że suma 50 uzyskanych iloczynów jest różna od 0.

Rozwiązanie na str. 20

*Redaguje Ewa CZUCHRY*

**F 701.** Druciana ramka zawieszona na poziomej osi znajduje się w pionowym polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$ . Ramka składa się z pręta o długości  $l$  i masie  $m$  oraz dwóch nieważkich drucików o długości  $h$ . Przez ramkę przepuszczamy krótki impuls prądu o natężeniu  $I$  i czasie trwania  $\tau$ . Jaki będzie maksymalny kąt wychylenia ramki do położenia pierwotnego?

Rozwiązanie na str. 21

**F 702.** Poziomy przewodnik o masie  $m$  i długości  $l$  może się ślizgać wzdłuż dwóch pionowych przewodzących prądów. Pręty są połączone kondensatorem o pojemności  $C$  i znajdują się w odległości  $l$  od siebie. Układ znajduje się w polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  skierowanym poziomo i prostopadle do prętów oraz w ziemskim polu grawitacyjnym. Znaleźć przyspieszenie przewodnika.

Rozwiązanie na str. 24

## Kataliza syntezy jądrowej?

Synteza jądrowa, główne źródło energii gwiazd, jest niezwykle efektywnym sposobem uwalniania energii uwięzionej pod postacią masy. Wystarczy porównać masę czterech protonów (jąder wodoru) z masą cząstki  $\alpha$  (jądra helu), żeby się przekonać o prawie siedmiopromilowym zysku ze spakowania czterech nukleonów w jedno jądro.

Jest to najefektywniejszy sposób pozyskiwania energii z materii. Bardziej efektywna jest tylko anihilacja, ale ta wymaga użycia antymaterii, której nie ma skąd wziąć.

Opanowanie produkcji energii netto w wyniku kontrolowanej syntezy jądrowej mogłoby rozwiązać energetyczne problemy ludzkości. Jest jednak problem z temperaturą zapłonu.

Aby zaszła reakcja, należy bardzo zbliżyć dwa lekkie jądra, podczas gdy one bardzo silnie odpychają się elektrostatycznie.

Jednym z pomysłów na katalizowanie syntezy jądrowej jest ekranowanie dodatniego ładunku elektrycznego jądra. Dodanie elektronów nic nie pomaga, bo elektrony są o wiele za lekkie i powstające po dodaniu atomy są monstrualnych rozmiarów: są cztery rzędy wielkości za duże. Wystarczy jednak użyć 200 razy masywniejszych od elektronów mionów, żeby rozmiary atomu stały się porównywalne z rozmiarami jego jądra. To jednak problemów energetycznych ludzkości nie rozwiąże. Po pierwsze, miony są tak nietrwałe, że tylko nieliczne istnieją na tyle długo, aby mogły posłużyć katalizie. Po drugie, z tego samego powodu trzeba je stale produkować, a to obciąża bilans energetyczny.

Kiedyś było inaczej. Tuż po Wielkim Wybuchu mionów było pod dostatkiem. Czy miały one wpływ na proces pierwotnej nukleosyntezy? Proces ten jest bardzo dobrze znany od strony teoretycznej. Obliczenia zgadzają się nadzwyczaj dobrze z pomiarami. To, co wiemy na temat początkowego składu pierwiastkowego, zgadza się np. z oszacowaniami wynikającymi z pomiarów mikrofalowego promieniowania reliktoowego. Im bardziej precyzyjny staje się obraz, tym drobniejsze niezgodności rzucają się w oczy. Niepokojący jest nadmiar atomów litu 6 mierzony w starych gwiazdach o bardzo niskiej zawartości ciężkich pierwiastków, czyli w gwiazdach, które powstały z pierwotnej zupy bez udziału pyłu przetworzonego w wybuchach supernowych. Czy uwzględnienie udziału masywnych, naładowanych cząstek w procesie pierwotnej nukleosyntezy mogłoby pomóc w wyjaśnieniu tej niezgodności?

Oczywiście, miony nic tu nie pomogą, bo ich było co prawda pełno, ale dużo wcześniej. Potrzebne byłyby cząstki naładowane o czasie życia porównywalnym do czasu pierwotnej nukleosyntezy, czyli rzędu tysiąca sekund. Okazuje się, że takie obiekty są przewidywane przez wiele konkurencyjnych teorii cząstek. Jedną z nich jest supersymetria, uważana za jedno z najbardziej obiecujących rozszerzeń Modelu Standardowego.

Takie masywne (o masach rzędu masy najcięższych pierwiastków), naładowane cząstki o odpowiednim czasie życia są przewidywane w kilku wersjach supersymetrii. Niedawno ukazały się prace [1], które pokazują, że modele te pozwalają na uzyskanie zgodności danych dotyczących rozpowszechnienia litu z pierwotną nukleosyntezą.

Przydałby się jakiś Ockham ze swoją brzytwą, ale uprawiający kosmologię i fizykę cząstek już dawno

zapomnieli, że ktoś taki w ogóle istniał. Bardziej tradycyjnie nastawieni odczuwają niesmak, stykając się z informacją o badaniach, których nie wiadomo, jak sprawdzić. Wspomniany pomysł jednak do nich nie należy – proponowany scenariusz ma tę miłą cechę, że będzie można go sprawdzić i to prawie za chwilę. Jeżeli pierwotna nukleosynteza była katalizowana przez długożyciowe, masywne, naładowane cząstki, to właśnie takie cząstki będą produkowane w Wielkim Zderzaczu Hadronów LHC, który, mimo trudności, zbliża się do uruchomienia. Tylko czy cząstki takie da się w budowanych przy LHC detektorach wykryć?

Urządzenia te nie były projektowane w tym celu. Ponieważ poszukiwanie nieznanymi efektów wiąże się z bardzo małymi prawdopodobieństwami, więc LHC będzie działać z częstotliwością 40 MHz po to, aby choć trochę takich niezwykle rzadkich zdarzeń zarejestrować. Informacja o każdym zdarzeniu będzie rejestrowana przez miliardy kanałów elektroniki. Każdy dodatkowy kanał kosztuje. Chodzi nie tylko o pieniądze, lecz także o miejsce i czas potrzebny do przetworzenia rejestrowanej informacji. Detektory były optymalizowane pod kątem wyeliminowania zbędnych informacji. Za zbędną została uznana możliwość pomiaru masy stabilnych, z punktu widzenia detektora, cząstek.

W takim razie odróżnienie masywnych, naładowanych cząstek od pozostałych, praktycznie bezmasowych, powinno być niemożliwe.

Okazuje się, że nie tylko nie jest tak źle, ale wręcz jest bardzo dobrze. Ta sama oszczędność, która miała, z konieczności, ograniczyć wrażliwość detektorów, spowodowała jej zwiększenie. Detektory są otoczone warstwami tzw. komór mionowych, czyli aktywnych płaszczyzn, do których dochodzą praktycznie tylko miony, gdyż żyją dostatecznie długo, słabo oddziałują z materią (są bardzo przenikliwe) i są wystarczająco masywne, żeby nie tracić dużo energii na skutek oddziaływań elektromagnetycznych (tak, jak to dzieje się z elektronami). Hipotetyczne katalizatory pierwotnej nukleosyntezy zachowywałyby się tak samo jak miony. Główną różnicą byłoby ich opóźnienie związane z dużą masą, a więc zauważalnie mniejszą prędkością od prędkości światła. Szczęśliwie, jako komory mionowe zastosowano, między innymi, tuby dryfowe, czyli detektory, które precyzyjnie wyznaczają jedną współrzędną, mierząc czas dryfu sygnału z jonizacji do umieszczonego wzdłuż osi tuby drutu. W ten sposób jedna tuba potrafi obsłużyć kilka centymetrów mierzonej współrzędnej. Przy okazji spóźniałskie cząstki wyglądają inaczej niż relatywistyczne miony. Przechodząc przez wiele warstw, trafiają raz z lewej, raz z prawej strony drutu, więc sygnały przez nie spowodowane, zamiast ułożyć się na prostej, są systematycznie odsunięte od drutu. Pomiar wielkości tego odsunięcia pozwala na oszacowanie masy takiej cząstki.

Dzięki temu już niedługo przekonamy się, czy kataliza pierwotnej nukleosyntezy miała miejsce.

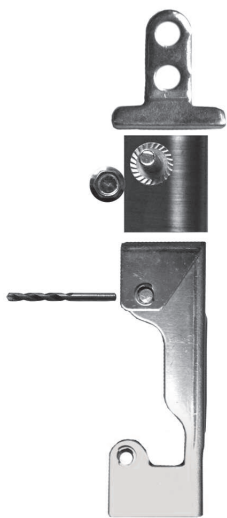
Piotr ZALEWSKI

[1] Zobacz np.: M. Pospelov, *Particle Physics Catalysis of Thermal Big Bang Nucleosynthesis*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 231301

# motywy Grać albo nie grać?

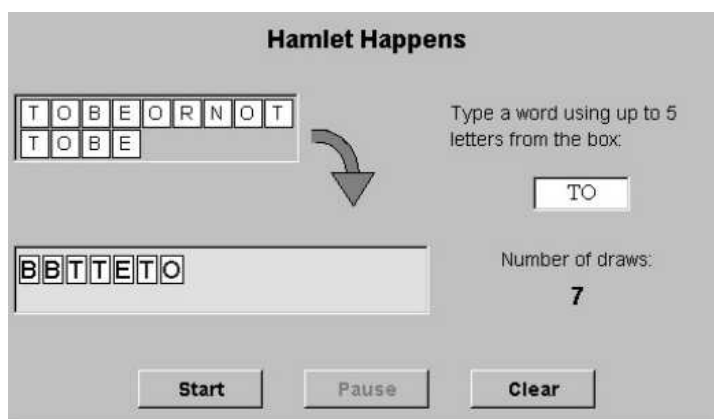
Andrzej WALAT

## Logo



Każdy, kto zna sławną sztukę Szekspira o Hamlecie, księciu Danii, wie, że była to postać tragiczna, którą los zmuszał do trudnych wyborów bez dostatecznych przesłanek, właściwie na podstawie wyniku rzutów kośćmi. Na stronie uniwersytetu stanu Utah [nlvm.usu.edu](http://nlvm.usu.edu) można znaleźć aplet pod tytułem *Hamlet Happens*. Ten tytuł trudno wiernie i krótko przełożyć na polski, ale jego sens jest chyba taki: Każdemu może się przydarzyć, że znajdzie się w sytuacji Hamleta. Tobie także.

Rysunek 1 przedstawia ekran apletu. Widać na nim słynną kwestię Hamleta: *to be or not to be* (być albo nie być) napisaną bez odstępów jako jedno trzynastoliterowe słowo.



Rys. 1

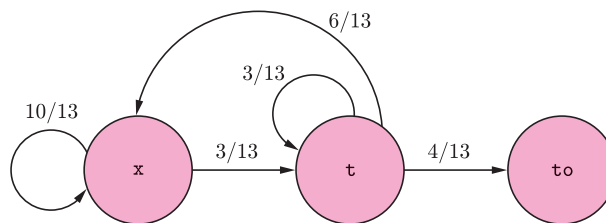
W polu tekstowym pod napisem „Type a word using up to 5 letters from the box” należy wpisać dowolne słowo utworzone z co najwyżej 5 liter wybranych z hasła (kwestii Hamleta). Po kliknięciu przycisku Start komputer zaczyna losowanie. Będzie losował litery i wpisywał je w polu tekstowym pod hasłem tak długo, aż utworzy wybrane przez nas słowo. Na rysunku widać, że wybraliśmy słowo *to* i komputer losował litery 7 razy, aż otrzymał to słowo. Apletu *Hamlet Happens* można używać jako maszyny losującej w wielu różnych grach losowych. Zaczniemy od bardzo prostej gry. Nazwiemy ją grą Hamleta.

Wybierasz dowolne dwuliterowe słowo utworzone z liter występujących w kwestii Hamleta i naciskasz Start. Kiedy komputer utworzy wreszcie wybrane przez Ciebie słowo, otrzymasz nagrodę 12 zł, ale przedtem za każde wylosowanie litery musisz zapłacić 1 zł.

W przypadku gry, której wynik przedstawia rysunek 1, musiałbyś zapłacić za losowanie kolejnych liter 7 zł i otrzymałbyś nagrodę 12 zł. Wygrałbyś na czysto 5 zł. Ale innym razem bilans mógłby być ujemny. Twoje hamletyczne pytanie brzmi: Grać czy nie grać? Zaraz za nim nasuwa się następne pytanie: Jakie dwuliterowe słowo wybrać, żeby mieć największe szanse sukcesu finansowego? Na początek założmy, że będziesz zawsze wybierał słowo *to*. Czy gra się opłaci? Spróbujemy rozstrzygnąć tę kwestię najpierw empirycznie, a potem teoretycznie.

## Rozwiązanie empiryczne

Maszynka losująca *Hamlet Happens*, zanim osiągnie cel, przechodzi przez różne stany. W przypadku przedstawionym na rysunku 1 kolejne stany gry to pod słowa słowa *btteto*, czyli: słowo puste, słowo jednoliterowe *b*, słowo *bb*, itd. aż do stanu końcowego *btteto*. Jest ich łącznie osiem, a ogólnie, w dowolnym przypadku gry z wybranym słowem kończącym *to*, nieskończenie wiele. Podzielimy je na trzy grupy stanów istotnie różnych: słowa kończące się na *to*, słowa kończące się na literę *t* oraz wszystkie inne, te oznaczymy literą *x*. Każda gra zaczyna się od stanu początkowego *x* i kończy stanem końcowym *to*. Można ją opisać za pomocą następującej planszy (grafu).



Rys. 2

Gra Hamleta jest równoważna losowej wędrówce pionka po planszy od pola początkowego *x* do końcowego *to*. Liczby przy strzałkach oznaczają prawdopodobieństwa tego, że pionek w kolejnym ruchu pójdzie na pole wskazywane przez strzałkę.

Literom  $x$  oraz  $t$ , oznaczającym pola planszy, możemy nadać nowy sens:

$x$  – to liczba ruchów, po których pionek ustawiony na polu  $x$  dojdzie do pola końcowego  $to$ ,

$t$  – to liczba ruchów, po których pionek ustawiony na polu  $t$  dojdzie do pola końcowego  $to$ .

Symbole  $x$  oraz  $t$  mają więc sens podobny jak wyrażenie **wynik rzutu kostką**. Wynikiem rzutu kostką może być 1, 2, 3, 4, 5 albo 6. Wartość  $x$  to losowa liczba całkowita nie mniejsza niż 2. Wartość  $t$  – to losowa liczba całkowita nie mniejsza niż 1. Dokładniej: wartość  $x$  to zawsze 1 plus wartość  $t$  albo  $x$ , zależnie od wyniku losowania litery ze słowa **tobeornottobe**; jeżeli wypadnie litera  $t$ , to do jedynki trzeba dodać wartość  $t$ , a w przeciwnym przypadku wartość  $x$ . W języku programowania Logo można to zapisać w następujący sposób.

```
oto x
wynik
  1 + jeżeli los "tobeornottobe = "t [t] [x]
już
```

Losowa wartość  $t$  to zawsze 1 plus wartość  $t$ , wartość  $x$  lub 0 zależnie od wyniku losowania litery ze słowa **tobeornottobe**. Jeśli wylosowaną literą jest  $t$ , to dajemy wartość  $t$ , jeśli  $o$ , to dodajemy 0, a w każdym innym przypadku wartość  $x$ . W języku Logo kodujemy to w następujący sposób:

```
oto t
wynik
  1 + wybierz los "tobeornottobe [t [t] o [0] [x]]
już
```

Po napisaniu `powtórz 10 [wpisz 12 - x wpisz "|, |]` otrzymaliśmy wyniki finansowe 10 gier: 7, 1, -4, 8, 9, 2, -17, 4, -30, 5. W tej serii częściej wygrywaliśmy niż przegrywaliśmy, ale ogólny bilans jest ujemny; w sumie przegraliśmy 15 zł. Wynik eksperymentu może wskazywać, że jeśli nagroda wynosi 12 zł, to chyba nie opłaca się grać, ale 10 prób to trochę za mało, by na ich podstawie wnioskować w sposób pewny. Zdefiniujemy dwie dodatkowe funkcje  $\bar{x} : n$  – średnia z  $n$  wartości  $x$  oraz  $\bar{ś} : n$  – średnia wartość wygranej w  $n$  grach.

```
oto śx :n
niech "s 0
powtórz :n [przyp "s :s + x]
wynik :s / :n
już
```

```
oto św :n
wynik 12 - śx :n
już
```

Można teraz obliczyć średnią wygraną w serii 10000 gier. Na polecenie `pisz św 10000` komputer wypisał na ekranie -2.0353. Teraz możemy powiedzieć z dużą pewnością, że gra się nie opłaca. Jaka powinna być nagroda, żeby gra się opłacała? Nie mniejsza niż średnia

wartość  $x$ . Na polecenie `pisz św 10000` komputer wypisał 14.257. Ale to tylko empiryczna średnia z 10000 wartości  $x$ . Polecenie

```
powtórz 10 [wpisz śx 10000 wpisz "|, |]
```

powoduje wypisanie 10 różnych średnich z 10000 wartości  $x$ . Rezultat: 14.11, 13.797, 14.1819, 14.2667, 14.309, 14.1065, 13.8894, 14.2784, 14.1372, 13.9415 wskazuje, że dokładna teoretyczna wartość średnia  $x$  jest chyba nieznacznie większa niż 14. Ale jaka ona dokładnie jest?

## Rozwiązanie teoretyczne

Treść definicji  $x$  oraz  $t$  w Logo, w postaci jednowierszowego zdania zaczynającego się od słowa **wynik**, może trochę przypominać znane powszechnie równania matematyczne. Ale to nie są zwykle (statyczne) równania, tylko ich dynamiczne odpowiedniki określające sposób wyznaczania losowych wartości  $x$  oraz  $t$ . Oznaczmy teoretyczne średnie wartości  $x$  oraz  $t$  symbolami:  $\bar{x}$  oraz  $\bar{t}$ . Losowa wartość  $x$  to zawsze 1 plus: w  $\frac{3}{13}$  przypadków wartość  $t$ , a w pozostałych  $\frac{10}{13}$  przypadków – wartość  $x$ . Losowa wartość  $t$  to zawsze 1 plus: w  $\frac{3}{13}$  przypadków wartość  $t$ , w  $\frac{4}{13}$  przypadków – 0, a w pozostałych  $\frac{6}{13}$  przypadków – wartość  $x$ . Wnioskujemy, że średnie powinny spełniać następujące równości:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 1 + \frac{3}{13}\bar{t} + \frac{10}{13}\bar{x}, \\ \bar{t} &= 1 + \frac{3}{13}\bar{t} + \frac{4}{13} \cdot 0 + \frac{6}{13}\bar{x}.\end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tego układu dwóch równań liniowych otrzymujemy teoretyczny średni czas oczekiwania na słowo **to** (tj. średnią liczbę losowań, po których otrzymujemy **to**):

$$\bar{x} = \frac{169}{12} \approx 14,08.$$

## Komentarz

Litera  $t$  występuje w haśle **tobeornottobe** z częstością  $\frac{3}{13}$ , a litera  $o$  z częstością  $\frac{4}{13}$ . Nietrudno zauważyć, że

$$\frac{169}{12} = \frac{13}{3} \cdot \frac{13}{4}.$$

Może to nasuwać hipotezę, iż gdybyśmy w naszej grze zamiast dwuliterowego słowa **to** wybrali dowolne inne słowo utworzone z liter  $l_1 l_2 \dots l_n$  występujących w danym haśle odpowiednio z częstością:  $p_1, p_2 \dots$  oraz  $p_n$ , to teoretyczny średni czas oczekiwania na wygenerowanie tego słowa w naszej grze byłby równy iloczynowi odwrotności częstości:

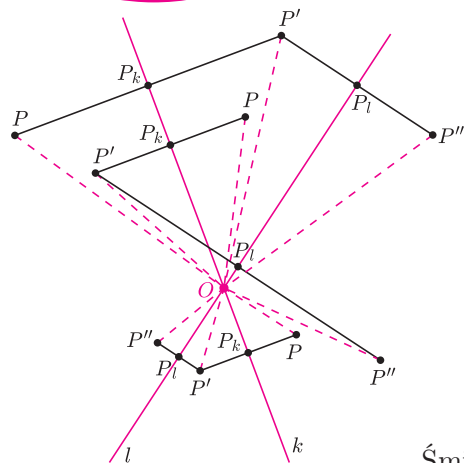
$$\frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{p_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{p_n}.$$

Gdyby to była prawda, to mielibyśmy ogólną, niezwykle prostą metodę wyznaczania teoretycznego średniego czasu oczekiwania na wygenerowanie dowolnego słowa utworzonego z liter danego hasła – znacznie prostszą niż zastosowana przez nas metoda polegająca na rozwiązaniu układu równań liniowych. Ale czy to prawda?

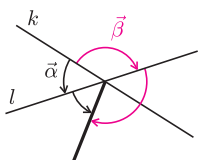
# δ

# mała delta

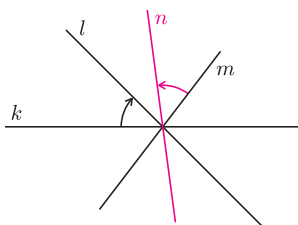
**W dowolnie małym kącie wierzchołkowym są *wszystkie* proste przechodzące przez jego wierzchołek**



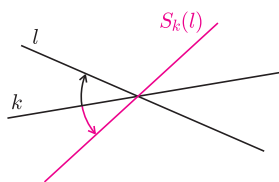
Rys. 1



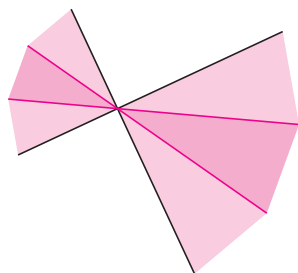
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Jeśli na płaszczyźnie wykonamy symetrię względem dwóch przecinających się prostych, okaże się, że wykonaliśmy obrót wokół punktu ich przecięcia o podwojony kąt między tymi prostymi. Dowód tego faktu jest prosty. Dowolny punkt  $P$  – jeden z tak nazwanych punktów na rysunku 1 – po symetrii względem prostej  $k$  znajdzie się w punkcie  $P'$ , który z kolei po symetrii względem prostej  $l$  znajdzie się w punkcie  $P''$ . Oznaczamy przez  $P_k$  środek odcinka  $PP'$ , a przez  $P_l$  środek odcinka  $P'P''$ . Wówczas możemy zauważyć, że dla każdego z punktów  $P$  mamy

$$\begin{aligned} \sphericalangle \overrightarrow{POP''} &= \sphericalangle \overrightarrow{POP_k} + \sphericalangle \overrightarrow{P_kOP'} + \sphericalangle \overrightarrow{P'OP_l} + \sphericalangle \overrightarrow{P_lOP''} = \\ &= 2\sphericalangle \overrightarrow{P_kOP'} + 2\sphericalangle \overrightarrow{P'OP_l} = 2\sphericalangle \overrightarrow{P_kOP_l} = 2\sphericalangle \overrightarrow{k\vec{l}}. \end{aligned}$$

Śmiało napisaliśmy, że chodzi o  $2\sphericalangle \overrightarrow{k\vec{l}}$ , ale (rys. 2) dwa razy który,  $\vec{\alpha}$  czy  $\vec{\beta}$ ? Czytelnik Przytomny z pewnością sprawdzi, że to wszystko jedno – przypominamy, że chodzi o kąty zorientowane.

To spostrzeżenie pozwala z łatwością udowodnić to, co Niemcy nazywają twierdzeniem Schmidta: *złożenie trzech symetrii względem prostych przechodzących przez jeden punkt to symetria względem jednej prostej też przez ten punkt przechodzącej*. Faktycznie, dla symetrii kolejno względem prostych  $k, l, m$  zastępująca je symetria to symetria względem takiej prostej  $n$ , że (rys. 3)

$$(*) \quad \sphericalangle \overrightarrow{k\vec{l}} = -\sphericalangle \overrightarrow{m\vec{n}},$$

prawda? Czytelnikowi Wątpiącemu zwrócimy uwagę, że wykonanie kolejno wszystkich czterech symetrii to obrót o kąt

$$\sphericalangle \overrightarrow{k\vec{l}} + \sphericalangle \overrightarrow{m\vec{n}} = 0,$$

mamy więc ( $S_a$  to symetria względem prostej  $a$ , natomiast  $\text{Id}$  to identyżność)

$$\text{Id} = S_n S_m S_l S_k, \quad \text{zatem} \quad S_m S_l S_k = S_n S_n S_m S_l S_k = S_n \text{Id} = S_n.$$

W szczególności, gdy zastąpimy symetrie kolejno względem prostych  $k, l, k$  jedną symetrią, to jej oś będzie (rys. 4) obrazem symetrycznym prostej  $l$  względem prostej  $k$  – proszę sprawdzić ze wzorem (\*).

I tak dojechaliśmy do tytułowego stwierdzenia. Jeśli będziemy składali symetrie względem prostych należących do danego kąta wierzchołkowego, to uzyskamy symetrie względem wszystkich prostych kąta trzy razy większego – wystarczy stosować ostatnio poczynione spostrzeżenie. A powtarzając tę operację wiele razy, przez to potrajanie uzyskamy symetrie względem wszystkich prostych przechodzących przez wierzchołek tego kąta.

No dobrze, to są symetrie, ale gdzie te proste? Szanowni Czytelnicy, czyż można wątpić w istnienie prostej, gdy umiemy wykonać symetrię względem niej?

## $3x + 1$



Proponuję naszym droгим Czytelnikom następującą grę. Gra się w nią we dwójkę. Pierwszy gracz wybiera liczbę naturalną, drugi gracz przetwarza ją zgodnie z regułami, o których za chwilę. Jeśli uda mu się dojść do liczby 1, zdobywa punkt. Jeśli nie – punkt przysługuje pierwszemu graczowi, który wtedy wymyśla następną liczbę i gra się powtarza. Jeśli drugiemu graczowi udaje się uzyskać 1, przejmuje inicjatywę i teraz on wymyśla liczbę dla przeciwnika. Gra toczy się do momentu, w którym ktoś osiągnie z góry ustaloną liczbę punktów – albo do znudzenia. Jakie są reguły przetwarzania liczb? Bardzo proste. Jeśli liczba jest parzysta, należy ją podzielić przez 2. Jeśli nieparzysta, należy ją pomnożyć przez 3 i dodać 1. Na przykład, jeśli pierwszy gracz poda liczbę 3, drugi gracz postępuje z nią tak:  $3 \cdot 3 + 1 = 10$ ,  $10 : 2 = 5$ ,  $3 \cdot 5 + 1 = 16$ ,  $16 : 2 = 8$ ,  $8 : 2 = 4$ ,  $4 : 2 = 2$ ,  $2 : 2 = 1$ . Jest jedyńka, punkt zdobyty.

Inaczej mówiąc, definiujemy funkcję  $f$  ze zbioru liczb naturalnych  $\mathbb{N}$  w  $\mathbb{N}$  w sposób następujący:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{gdy } x \text{ parzysta} \\ 3x + 1 & \text{gdy } x \text{ nieparzysta} \end{cases},$$

a gracz, zaczynając od liczby  $n$ , tworzy ciąg  $n, f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \dots$

Brakuje tu jeszcze pewnego ustalenia, istotnego dla przebiegu gry: jak długo ma się gracz męczyć, żeby dojść do 1 lub uznać, że nie ma to szans? Jeśli nie ograniczymy liczby przekształceń, może się trafić uparty gracz, który mimo wykonania już mnóstwa operacji na swojej liczbie, wciąż liczy na uzyskanie jedyńki i nie chce się poddać.

I chyba ma rację. Można przypuszczać, że wychodząc od dowolnej liczby naturalnej, dojdzie się do liczby 1. Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

86, 43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Są i takie nieduże liczby, dla których obliczenie nie mieści się w jednej linii. Na przykład, zaczynając od 27, trzeba wykonać 111 kroków, żeby uzyskać 1, mijając po drodze całkiem niemałą liczbę 9232.

Te przykłady nie stanowią, rzecz jasna, dowodu na to, że tak jest zawsze. Ale... dowodu nie ma (dlatego napisałem wyżej „można przypuszczać”). Nikt, jak dotąd, nie zdołał udowodnić hipotezy, że opisane wyżej działania na kolejnych liczbach muszą w każdym przypadku doprowadzić do liczby 1, nikt też tej hipotezy nie obalił. Nie mając dowodu, próbowano sprawdzać za pomocą komputera. Ostatni (znany autorowi w momencie pisania tego tekstu) wynik pochodzi z lutego 2007 roku: sprawdzono, że hipoteza jest prawdziwa dla wszystkich liczb mniejszych od  $13 \cdot 2^{58}$ , co jest równe w przybliżeniu  $3,746 \cdot 10^{18}$ .

Problem jest znany jako problem Collatza, od nazwiska niemieckiego matematyka Lothara

Collatza, który sformułował go w 1937 roku, choć ma też inne nazwy. Jedną z nich jest „problem  $3x + 1$ ”, od reguły postępowania, gdy otrzymany wynik jest liczbą nieparzystą.

Zachęcam Czytelników do podjęcia próby rozstrzygnięcia problemu Collatza, jeśli nie teraz, to w dalszej perspektywie, a tymczasem spróbujmy grać dalej. Czy sytuacja ulegnie zmianie, gdy funkcja przekształcania liczb będzie miała postać taką

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{gdy } x \text{ parzysta} \\ 3x + 3 & \text{gdy } x \text{ nieparzysta} \end{cases},$$

albo taką:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{gdy } x \text{ parzysta} \\ 3x + 7 & \text{gdy } x \text{ nieparzysta} \end{cases}?$$

Może Czytelnikowi też uda się sformułować własną hipotezę?

*Małą Deltę przygotowali Marek KORDOS i Wiktor BARTOL*

# Liftowane piłki, czyli rzecz o efekcie Magnusa

Stanisław BEDNAREK



Oglądając mecze piłkarskie lub tenisowe, możemy czasem zauważyć ruch piłki po linii krzywej, daleko odbiegającej swym kształtem od paraboli czy odcinka zbliżonego do prostej. Takie piłki, nazywane liftowanymi, lub podkręcanymi są ze względu na nieprzewidywalność swego toru ruchu bardzo trudne do przyjęcia przez przeciwnika. Spróbujmy postawić pytanie, co jest przyczyną ruchu piłki po tak niezwykłym torze. Jak wiadomo, na piłkę w locie działa siła przyciągania grawitacyjnego Ziemi i siła oporu powietrza. Na rozkład przestrzenny pola grawitacyjnego Ziemi wpływu nie mamy. Pozostaje więc, jako sprawca niezwykłego ruchu piłki, opór powietrza.

Żeby przekonać się, jak opór powietrza wpływa na ruch piłki, przeprowadźmy następujące doświadczenie. Kartkę kartonu formatu A4 z bloku technicznego zwijamy wzdłuż dłuższego boku w rurkę i skleamy brzeg na zakładkę o szerokości około 1 cm (rys. 1). Końce rurki nacinamy na głębokość 1,5 cm co 1 cm i odginamy utworzone w ten sposób prostokąty na zewnątrz. Z kartonu wycinamy dwa koła o średnicy 12 cm i przyklejamy je do odgiętych prostokątów. W środkach kół wykonujemy ostrym końcem nożyczek dwa otworki o średnicy 1–2 mm i przekładamy przez nie cienki patyczek do szaszłyków o długości około 30 cm, tak żeby z każdej strony walca wystawał około 4,5 cm.

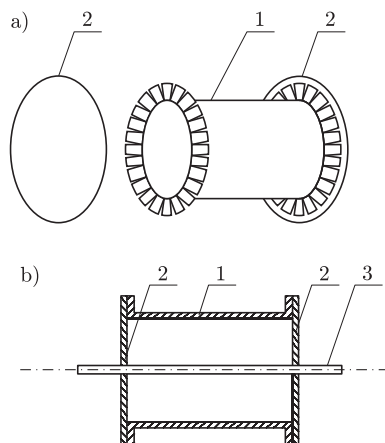
Teraz możemy przystąpić do eksperymentów. Wchodzimy na taboret lub krzesło i trzymamy nasz walec za wystające końce patyczka w wyciągniętych do góry rękach, tak żeby patyczek był poziomo (rys. 2). Puszczamy walec i obserwujemy jego ruch. Pomieszczenie, w którym przeprowadzamy doświadczenie, powinno być wolne od wszelkich podmuchów powietrza. Okazuje się, że walec spada pionowo. Ponownie wchodzimy na taboret lub krzesło, trzymamy walec jak poprzednio palcami za wystające końce patyczka i pokręcamy nimi w palcach, tak żeby wprawić walec w możliwie szybki ruch obrotowy, np. w prawo, i puściliśmy walec swobodnie, obserwując jego ruch. Okazuje się, że walec wprawiony w ruch obrotowy w prawo podczas spadku odchyła się w lewo. Powtarzamy ostatnie doświadczenie, wprawiając walec w ruch obrotowy w kierunku przeciwnym do poprzedniego i obserwujemy jego spадanie. Tym razem walec odchyła się w prawo.

Powstaje problem, jak wyjaśnić zachowanie się walca, gdy został on wprawiony w ruch obrotowy. Poruszający się w powietrzu walec dzięki siłom lepkości wprawia w ruch otaczające go powietrze. Najprostsze, ilościowo poprawne rozwiązanie, nieoddające jednak w pełni złożoności zjawiska, można uzyskać odwołując się do równania Bernoulliego. Równanie to opisuje zachowanie się strugi płynu (cieczy lub gazu) będącego w ruchu. Prawo to wyraża się następującym wzorem

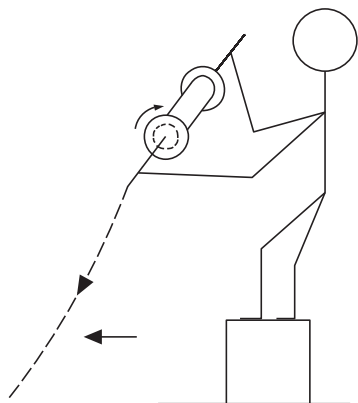
$$(1) \quad p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const},$$

w którym  $p$  oznacza ciśnienie płynu,  $\rho$  – gęstość płynu,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $h$  – wysokość słupa płynu,  $v$  – prędkość płynu. Drugi składnik  $\rho gh$  we wzorze (1) oznacza ciśnienie spowodowane ciężarem płynu, a trzeci  $(\rho v^2)/2$  ciśnienie dynamiczne. W warunkach naszego doświadczenia ciśnienie spowodowane ciężarem płynu można pominąć ze względu na małą wartość gęstości powietrza  $\rho$  oraz małą wysokość  $h$ .

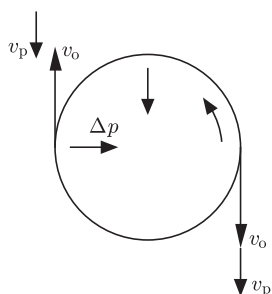
Gdy walec spada, nie obracając się, wtedy prędkości powietrza po obu jego stronach są równe i na walec nie działa żadna siła pozioma. Kiedy walec spada, obracając się, np. w lewo (rys. 3), wówczas prędkości ruchu obrotowego  $v_o$  i ruchu postępowego  $v_p$  sumują się po prawej stronie walca, a odejmują po lewej. Powoduje to, że prędkość strumienia powietrza otaczającego walec z prawej strony będzie większa niż z lewej. Żeby równanie (1) było spełnione, z lewej strony musi pojawić się dodatkowe ciśnienie  $\Delta p$  działające w prawo. Spowodowana tym ciśnieniem siła odchyła tor ruchu walca w prawo. Jako



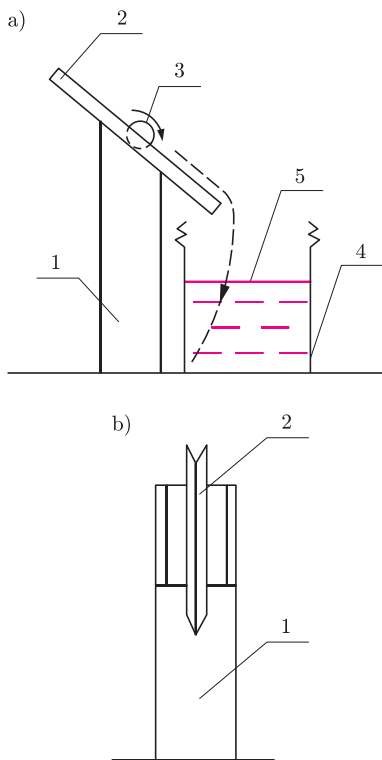
Rys. 1. Budowa walca do badania efektu Magnusa: a) widok ogólny, 1 – rurka z kartonu, 2 – koła; b) przekrój osiowy, 3 – cienki patyczek.



Rys. 2. Sposób puszczenia walca podczas badania efektu Magnusa.



Rys. 3. Układ prędkości i ciśnienie wyjaśniający jeden z przypadków efektu Magnusa.



Rys. 4. Układ do badania efektu Magnusa w wodzie;

a) widok z boku:

- 1 – tekturowe pudełko,
- 2 – rynienka,
- 3 – kulka,
- 4 – akwarium lub duży słoik,
- 5 – woda,

b) widok z przodu.

ćwiczenie warto przeanalizować rozkład prędkości i kierunek dodatkowego ciśnienia  $\Delta p$  podczas obrotu walca w lewo. Zaobserwowany przez nas efekt odchylenia kierunku ruchu obracającego i przesuwanego się w płynie ciała stałego nazwany jest od nazwiska jego odkrywcy efektem Magnusa.

Działanie siły Magnusa powodującej zakrzywienie toru w efekcie Magnusa możemy również łatwo zaobserwować w przypadku kulek poruszających się w wodzie lub oleju. Ponieważ gęstość wody lub oleju jest szacunkowo około tysiąca razy większa od gęstości powietrza, tyleż razy będzie większa siła Magnusa. Wzór opisujący tę siłę jest następujący.

$$(2) \quad P_m = \pi \rho_p v u d l.$$

We wzorze (2)  $P_m$  oznacza wartość siły Magnusa,  $l$  – długość walca,  $d$  – jego średnicę,  $v, u$  – odpowiednio prędkość unoszenia i prędkość opływu walca w odległości, na której ruch jest niezaburzony, czyli w dostatecznie dużej odległości od walca,  $\rho_p$  – gęstość płynu. Jako ciekawostkę warto dodać, że niemiecki fizyk i chemik w jednej osobie, Kutta, oraz badacz rosyjski, Żukowski, podali prawie jednocześnie ten wzór na obliczenie siły Magnusa.

Przystąpimy teraz do zbadania efektu Magnusa w cieczach. Potrzebne będzie akwarium, które z powodzeniem można zastąpić pięciolitrowym słoikiem od przetworów spożywczych. Ponadto tekturowe pudełko dwukrotnie wyższe od słoika, dwie linijki o długości 50 cm oraz taśma klejąca i nożyczki. Nieco uwagi należy poświęcić kuleczce, która staczać się będzie do płynu. Powinna mieć ona średnicę około 1–2 cm i być wykonana z materiału o gęstości nieco większej od gęstości wody. Z powodzeniem można tu zastosować kulisty koralik z tworzywa sztucznego.

Tym razem przeprowadzamy doświadczenie w ten sposób, że umieszczamy kulkę w pobliżu szczytu rynienki i puszczamy ją swobodnie, pozwalając się jej stoczyć do wody. Obserwujemy uważnie ruch kuleczki w wodzie. Wbrew oczekiwaniom tor kuleczki w wodzie zakrzywia się i kuleczka zamiast po paraboli porusza się po torze o kształcie zbliżonym do odwróconej litery C. Z jeszcze bardziej kuriozalnym przypadkiem spotkali się żołnierze niemieccy, kiedy stwierdzili, że podczas strzelania z moździerza gładkimi pociskami jeden z nich poruszał się po pętli, a następnie spadł za strzelającymi. Na szczęście, mówiąc językiem wojskowym, obyło się bez strat siły żywej i sprzętu.

## Równanie Pitagorasa w kongruencjach

Anna SILKA\*, Tomasz SZEMBERG\*

W 1994 roku Andrew Wiles udowodnił sformułowane w XVII wieku Wielkie Twierdzenie Fermata, które głosi, że równanie

$$(1) \quad x^n + y^n = z^n$$

dla  $n \geq 3$  nie ma nietrywialnych (tj. takich, że wszystkie liczby  $x, y, z$  są różne od zera) rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Z drugiej strony wiadomo, że dla  $n = 2$  równanie

$$(2) \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

którego nie sposób nie skojarzyć z imieniem Pitagorasa, ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych.

W tym artykule chcemy się zastanowić, ile rozwiązań ma równanie Pitagorasa w ciele  $\mathbb{Z}_p$ , dla ustalonej nieparzystej liczby pierwszej  $p$ . Mówiąc nieco górnolotnie, będziemy się zajmować geometrią algebraiczną nad pewnymi ciałami skończonymi. Liczenie rozwiązań pewnych równań typu (1) modulo  $p$  stanowiło istotny element dowodu Wileasa.

Przypomnijmy, że ciało  $\mathbb{Z}_p$  to zbiór reszt z dzielenia przez  $p$ , tzn.

$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, \dots, (p-2), (p-1)\}$ , w którym działania określone są niemal

\*Akademia Pedagogiczna, Kraków



jak zwykle dodawanie i mnożenie liczb całkowitych, przy czym wynikiem jest reszta z dzielenia przez  $p$  zwykłego wyniku.

Przykładowo:

$$2 \cdot 2 = 4 = 3 + 1 = 1 \quad \text{w } \mathbb{Z}_3,$$

a w  $\mathbb{Z}_5$  mnożenie odbywa się według reguł:

$$2 \cdot 2 = 4, 2 \cdot 3 = 1, 2 \cdot 4 = 3, 3 \cdot 3 = 4, 3 \cdot 4 = 2 \text{ i } 4 \cdot 4 = 1$$

(mnożenie przez 0 i 1 jest oczywiste, podobnie jak fakt, że jest to działanie przemienne).

Ze względu na to, iż zajmujemy się tu kwadratami liczb, naturalnie i wygodnie jest korzystać z nieco innego (oczywiście równoważnego) zbioru reszt. Dla  $p$  nieparzystego mamy

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ -\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2} \right\}.$$

Zauważmy, że ponieważ  $\mathbb{Z}_p$  składa się z  $p$  elementów, to mamy do rozważenia co najwyżej  $p^3$  trójek liczb  $(x, y, z)$ . W szczególności liczba rozwiązań równania (2) jest zawsze skończona. Naturalne jest pytanie, ile tych rozwiązań dokładnie jest. Odpowiedź stanowi treść następującego twierdzenia.

**Twierdzenie.** *Równanie Pitagorasa ma dokładnie  $p^2$  rozwiązań w ciele  $\mathbb{Z}_p$ .*

Zanim udowodnimy ten ogólny wynik, spójrzmy na kilka rozwiązań w konkretnych przypadkach. Taka analiza zbioru rozwiązań dla małych wartości  $p$  pozwoliła nam sformułować hipotezę dotyczącą ogólnego wzoru oraz wyznaczyła kolejne redukcje w dowodzie.

Dla  $p = 3$  i  $p = 5$  liczby, które spełniają równanie (2), to np:

$$\mathbb{Z}_3 : (0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1),$$

$$\mathbb{Z}_5 : (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 4, 1), (4, 0, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 0).$$

Zauważmy, że, jeśli mamy rozwiązanie  $(x, y, z)$  równania (2), to  $(kx, ky, kz)$  dla każdego  $k \in \mathbb{Z}_p$  też jest rozwiązaniem. Zbiór punktów postaci  $k \cdot (x, y, z)$  to nic innego jak prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych w przestrzeni  $(\mathbb{Z}_p)^3$ . Wszystkie te proste mają jeden wspólny punkt  $(0, 0, 0)$ . Oznaczmy przez  $\sim$  relację proporcjonalności (czyli należenia do jednej prostej). W naszych konkretnych przypadkach mamy dla  $\mathbb{Z}_3$ :

$$(0, 1, 1) \sim (0, 2, 2), (0, 2, 1) \sim (0, 1, 2), (1, 0, 1) \sim (2, 0, 2), (2, 0, 1) \sim (1, 0, 2)$$

i dla  $\mathbb{Z}_5$

$$(0, 1, 1) \sim (0, 2, 2) \sim (0, 3, 3) \sim (0, 4, 4),$$

$$(0, 4, 1) \sim (0, 1, 4) \sim (0, 2, 3) \sim (0, 3, 2),$$

$$(1, 0, 1) \sim (2, 0, 2) \sim (3, 0, 3) \sim (4, 0, 4),$$

$$(4, 0, 1) \sim (1, 0, 4) \sim (2, 0, 3) \sim (3, 0, 2),$$

$$(2, 1, 0) \sim (3, 4, 0) \sim (1, 3, 0) \sim (4, 2, 0),$$

$$(3, 1, 0) \sim (2, 4, 0) \sim (4, 3, 0) \sim (1, 2, 0).$$

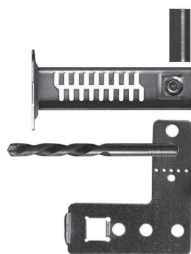
Zauważmy, że na każdej z takich prostych leży dokładnie tyle samo, tj.  $p - 1$  punktów różnych od  $(0, 0, 0)$ .

Dla znalezienia wszystkich (różnych od  $(0, 0, 0)$ ) rozwiązań równania (2) wystarczy zatem odnaleźć po jednym rozwiązaniu w każdej klasie rozwiązań proporcjonalnych. W szczególności w klasie (czyli na prostej) rozwiązania  $(x, y, z)$ , gdy tylko  $z \neq 0$ , poszukiwać będziemy rozwiązania  $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ . Dzieliąc równanie (2) stronami przez  $z^2$ , otrzymamy równanie

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1.$$

W istocie, jest to równanie o dwóch zmiennych. Oznaczając je także  $x$  i  $y$ , otrzymujemy zatem równanie

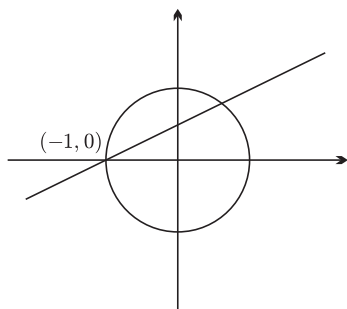
$$(3) \quad x^2 + y^2 = 1.$$



**Uwaga.** Liczba rozwiązań równania (2) to zatem liczba rozwiązań równania (3) pomnożona przez liczbę punktów na prostej bez zera, czyli  $(p-1)$ , plus rozwiązanie trywialne  $(0, 0, 0)$  i rozwiązania, dla których  $z = 0$ .

Równanie (3) to, oczywiście, równanie okręgu jednostkowego, tylko tym razem na płaszczyźnie  $(\mathbb{Z}_p)^2$ . Co prawda trzeba pamiętać, że rozważamy ciała skończone i ten okrąg składa się tylko ze skończonej liczby punktów, ale dla dalszych rozważań celowe jest chwilowe pozostanie przy tradycyjnej wizualizacji okręgu jednostkowego w  $\mathbb{R}^2$ .

Wykorzystamy klasyczny pomysł na szukanie trójek pitagorejskich oparty na obserwacji, że przecięcie okręgu (jednostkowego) z prostą o współczynnikach wymiernych albo daje dwa punkty o współrzędnych wymiernych, albo nie daje żadnego. Inaczej mówiąc, jeśli prosta o współczynnikach wymiernych przecina okrąg w punkcie o współrzędnych wymiernych, to drugi punkt przecięcia też musi mieć takie współrzędne. W naszej sytuacji słowo „wymierny” zastępujemy przez „określony nad  $\mathbb{Z}_p$ ”.



Oczywistym rozwiązaniem równania (3) jest para liczb  $(-1, 0)$ . Każda prosta przechodząca przez ten punkt ma równanie postaci  $y = ax + a$ . Szukamy rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} y &= ax + a \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Wstawiając pierwsze równanie do drugiego i porządkując współczynniki, dostajemy

$$(1 + a^2) \cdot x^2 + 2a^2 \cdot x + (a^2 - 1) = 0$$

Zauważmy, że od wartości współczynnika  $(1 + a^2)$  zależy, czy mamy do czynienia z równaniem pierwszego, czy drugiego stopnia.

Jeśli  $1 + a^2 = 0$ , to  $a^2 = -1$  i jedynym rozwiązaniem jest  $x = -\frac{a^2-1}{2a^2} = -1$ , czyli nie dostajemy nic nowego. Jeśli równanie jest jednak kwadratowe, to na podstawie twierdzenia Bezouta lewa strona dzieli się przez dwumian  $(x + 1)$ . Konkretnie mamy:

$$((1 + a^2)x^2 + 2a^2x + (a^2 - 1)) : (x + 1) = (1 + a^2)x + (a^2 - 1).$$

Zatem rozwiązaniami naszego układu są  $x = -1$  (co nie jest żadną nowością) oraz  $x = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ , gdzie  $a \in \mathbb{Z}_p$ .

Łatwo można sprawdzić, że  $\frac{1-a^2}{1+a^2}$  nigdy nie jest równe  $-1$  dla  $p \geq 3$ , czyli znaleźliśmy nowy punkt na okręgu:

$$\left( \frac{1-a^2}{1+a^2}, \frac{2a}{1+a^2} \right),$$

który wyznacza punkt na prostej  $(1 - a^2, 2a, 1 + a^2)$ . Dla różnych wartości parametru  $a \in \mathbb{Z}_p$  otrzymujemy przy tym różne proste.

Aby znaleźć liczbę rozwiązań równania (3), musimy zastanowić się, czy i kiedy  $a^2 = -1$ . Gdy przyjrzymy się wartościom funkcji  $x^2$  dla kilku wartości  $p$  (patrz margines), nasuwa się następujący lemat.

**Lemat.** Niech  $p$  będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas

- (1) jeśli  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , to istnieją dokładnie dwa takie elementy  $q \in \mathbb{Z}_p$ , że  $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ;
- (2) jeśli  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , to dla każdego  $q \in \mathbb{Z}_p$  mamy  $q^2 \not\equiv -1 \pmod{p}$ .

Dowód lematu wynika od razu z następującego Kryterium.

**Kryterium Eulera.** Liczba  $x \in \mathbb{Z}_p$  jest kwadratem w  $\mathbb{Z}_p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ .

Istotnie, gdy  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , to  $\frac{p-1}{2}$  jest liczbą parzystą, więc  $(-1)^{(p-1)/2} = 1$ , co oznacza, że  $-1$  jest kwadratem. Natomiast gdy  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , to  $\frac{p-1}{2}$  jest liczbą nieparzystą. Zatem  $(-1)^{(p-1)/2} = -1$ , a to na podstawie Kryterium kończy dowód Lematu.

Wartości funkcji  $x^2$ :

w  $\mathbb{Z}_3$

$\pm a$	0	1
$a^2$	0	1

w  $\mathbb{Z}_5$

$\pm a$	0	1	2
$a^2$	0	1	-1

w  $\mathbb{Z}_7$

$\pm a$	0	1	2	3
$a^2$	0	1	4	2

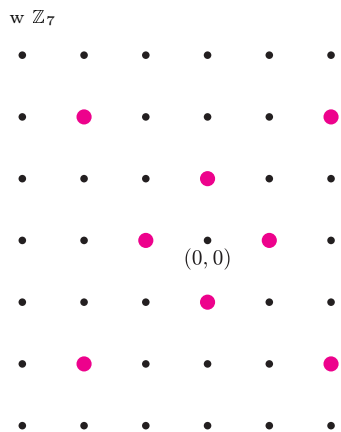
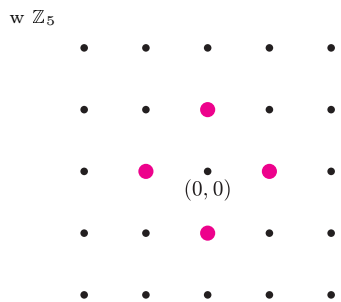
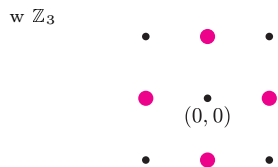
w  $\mathbb{Z}_{11}$

$\pm a$	0	1	2	3	4	5
$a^2$	0	1	4	9	5	3

w  $\mathbb{Z}_{13}$

$\pm a$	0	1	2	3	4	5	6
$a^2$	0	1	4	9	3	-1	10

Tak naprawdę wyglądają okręgi jednostkowe



Dla Czytelników zaawansowanych udowodnimy teraz to Kryterium.

Niech  $\mathbb{Z}_p^*$  oznacza zbiór elementów niezerowych ciała  $\mathbb{Z}_p$ . Z Małego Twierdzenia Fermata mamy, że  $x^{p-1} = 1 \pmod p$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{Z}_p^*$ . Rozważmy następujące odwzorowanie:

$$\mathbb{Z}_p^* \ni x \longrightarrow x^2 \in \mathbb{Z}_p^*$$

Ponieważ  $x^2 = (-x)^2$  i  $x \neq -x$ , więc dokładnie połowa, czyli  $\frac{p-1}{2}$  elementów w  $\mathbb{Z}_p^*$  jest kwadratami. Weźmy teraz odwzorowanie:

$$\mathbb{Z}_p^* \ni x \longrightarrow x^{(p-1)/2} \in \mathbb{Z}_p^*$$

Ponownie na podstawie Małego Twierdzenia Fermata  $x^{p-1} = 1 \pmod p$  dla każdej liczby  $x \in \mathbb{Z}_p^*$ . Pierwiastki kwadratowe z 1 to 1 i -1, zatem

$$x^{(p-1)/2} = 1 \pmod p \quad \text{lub} \quad x^{(p-1)/2} = -1 \pmod p.$$

Każde z równań

$$x^{(p-1)/2} = 1 \quad \text{oraz} \quad x^{(p-1)/2} = -1$$

ma co najwyżej  $\frac{p-1}{2}$  rozwiązań. Ale łącznie mają  $p-1$  rozwiązań. Zatem każde z nich musi mieć dokładnie  $\frac{p-1}{2}$  rozwiązań.

Jeśli  $x^{(p-1)/2} = -1$ , to  $x$  nie jest kwadratem w  $\mathbb{Z}_p$ . Gdyby istniało takie  $r$ , że  $r^2 = x$ , mielibyśmy

$$1 = r^{p-1} = (r^2)^{(p-1)/2} = x^{(p-1)/2} = -1,$$

a to daje sprzeczność. Biorąc pod uwagę wyliczoną wyżej liczbę kwadratów w  $\mathbb{Z}_p^*$ , dostajemy tezę Kryterium.

Mamy już teraz w ręce wszystkie narzędzia potrzebne do dokładnego policzenia liczby rozwiązań równania Pitagorasa. Czyli przyszła pora na dokończenie artykułu.

### Dowód Twierdzenia.

Gdy  $p \equiv 3 \pmod 4$ , to równanie (3) ma  $p+1$  rozwiązań: punkt  $(-1, 0)$  i po jednym punkcie dla każdej prostej  $y = ax + x$ , czyli dla każdego  $a \in \mathbb{Z}_p$ . Każde z nich odpowiada  $p-1$  punktom w relacji  $\sim$ . Zatem mamy  $(p+1) \cdot (p-1)$  rozwiązań plus rozwiązanie trywialne. Łatwo zauważyć na podstawie Kryterium, że w tej sytuacji równanie (2) nie ma rozwiązań, dla których  $z = 0$ . Korzystając z Uwagi, otrzymujemy zatem łącznie  $p^2$  rozwiązań.

Z kolei gdy  $p \equiv 1 \pmod 4$ , to mamy dwa pierwiastki kwadratowe z  $-1$ , oznaczmy je  $q$  i  $-q$ . W tej sytuacji równanie (3) ma o dwa rozwiązania mniej niż poprzednio, czyli  $p-1$ . Każde z nich odpowiada jak poprzednio  $p-1$  punktom w relacji  $\sim$ . W ten sposób dostajemy  $(p-1)^2$  rozwiązań.

Brakujące rozwiązania dostajemy, analizując (2) dla  $z = 0$ . Wtedy dwa rozwiązania:  $(1, q, 0)$  i  $(1, -q, 0)$  znów reprezentują po  $(p-1)$  punktów w relacji  $\sim$ .

Uwzględniając rozwiązanie trywialne, mamy łącznie

$$(p-1)^2 + 2 \cdot (p-1) + 1 = p^2.$$

A to kończy dowód Twierdzenia.

Uważny Czytelnik dostrzegł zapewne, że pominęliśmy dowód Twierdzenia, gdy  $p = 2$ . Mamy nadzieję, że taki Czytelnik jest w stanie uzupełnić tę lukę (w najgorszym razie licząc rozwiązania „na palcach”,  $\mathbb{Z}_2^3$  to tylko 8 punktów).

\* \* \*

Co można zrobić dalej? Można, na przykład, modyfikować współczynniki równania i badać, jak wpływają takie manipulacje na liczbę rozwiązań – na przykład dla równania

$$x^2 + 2y^2 = 3z^2.$$

Tego typu zabawy gorąco polecamy Czytelnikowi chcącemu sprawdzić, na ile sam opanował przedstawione tu idee.

Bardzo uważny Czytelnik zauważył, że nasze Twierdzenie zachodzi tylko dla pewnych ciał skończonej charakterystyki. Rozważanie innych ciał i podejście do **modularności** (pojęcie, które odegrało decydującą rolę w dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata) równania Pitagorasa to temat, któremu sami chcemy się bliżej przyjrzeć.

#### Literatura

[Sie] Sierpiński, Wacław, *Trójkąty pitagorejskie*, PWN, Warszawa, 1954.

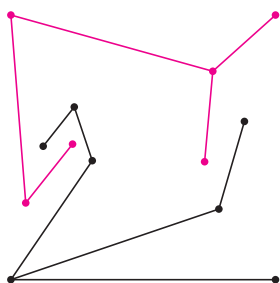
[Wil] Wiles, Andrew, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) 141 (1995), 443–551.

## Informatyczny kącik olimpijski (1)

Informatyczny kącik olimpijski otwiera zadanie z IOI (Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej) 2006. Oto ono:

Mamy dane  $N$  punktów, spośród których 4 są wierzchołkami kwadratu, a pozostałe leżą w jego wnętrzu. Żadne 3 punkty nie są współliniowe i każdy jest jednego z dwóch kolorów (dwa sąsiednie wierzchołki kwadratu są czarne, a pozostałe dwa – kolorowe). Należy dorysować  $N - 2$  odcinki, każdy z nich o końcach w punktach tego samego koloru tak, aby każda para punktów o tych samych kolorach była połączona albo odcinkiem, albo ciągiem odcinków. Żadne dwa z narysowanych odcinków nie mogą się przecinać. Przykład rozwiązania jest na rysunku 1.

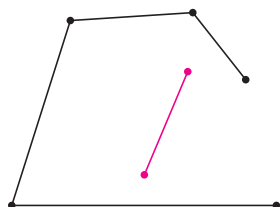
Rys. 1



Treść zadania dopuszcza możliwość, że rozwiązanie nie istnieje. Żeby odkryć, kiedy rozwiązanie istnieje, a kiedy nie, należałoby spróbować rozwiązać kilka przypadków „ręcznie”. W ten sposób można wpaść na kilka sugestii, jak podejść do niego w sposób bardziej usystematyzowany – a więc na trop algorytmu.

Gdybyśmy próbowali łączyć punkty „na chybił trafił”, tj. wybierając dowolne pary, moglibyśmy wpaść w ślepy zaułek. Odcinki nie mogą się bowiem przecinać, a łącząc je dowolnie, moglibyśmy „odciąć” część z punktów czarnych lub kolorowych. Przykład jest na rysunku 2 – czarne punkty są połączone, ale kolorowych punktów już nie da się połączyć, nie przecinając żadnego odcinka czarnego z kolorowym.

Rys. 2



Uprościmy sobie na razie zadanie – co się stanie, jeśli zamiast kwadratu byłby trójkąt, o dwóch wierzchołkach jednego koloru ( $A$  i  $B$ ), a trzecim ( $C$ ) innego koloru? Przyjmijmy, że  $C$  jest czarny. Wtedy, jeśli wewnątrz  $ABC$  istnieją punkty czarne, to na pewno istnieje jakiś punkt  $X$ , połączony z  $C$  odcinkiem czarnym. Przyjrzyjmy się temu wyróżnionemu punktowi. Leży on wewnątrz trójkąta i jest tego samego koloru co  $C$ . W takim razie trójkąt  $ABX$  jest kolorystycznie tego samego typu co  $ABC$ . Z pozostałymi parami wierzchołków jest tak samo, tyle tylko, że kolory zamieniają się rolami – trójkąty  $CAX$  i  $BCX$  mają po dwa czarne i jeden kolorowy wierzchołek. To spostrzeżenie prowadzi nas do algorytmu:

*Dane:* Trójkąt  $ABC$  ( $A$  połączone odcinkiem z  $B$ ) z, opcjonalnie, czarnymi i kolorowymi punktami wewnątrz.

1. Jeśli w środku nie ma punktów, lub są tylko czarne lub kolorowe, rozwiązanie jest natychmiastowe.
2. Wybieramy dowolny wierzchołek  $X$  koloru tego samego co  $C$ , i łączymy go z  $C$ .
3. Rekurencyjnie wywołujemy procedurę dla trójkątów  $ABX$ ,  $BCX$  i  $CAX$ .

Powyzsza rekurencja jest skończona, ponieważ za każdym wywołaniem liczba punktów wewnętrznych spada co najmniej o 1 (punkt  $X$ ). Jeśli zadaniem powyższego algorytmu nazwiemy połączenie wszystkich punktów czarnych i kolorowych w dwie spójne składowe, to jego poprawności prosto dowodzi się przez indukcję. Przy dowodzie przyda się założenie, że żadne trzy punkty nie są współliniowe – w szczególności, żadne „dodatkowe” punkty nie leżą na odcinkach łączących pary punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $X$ .

Jak to się ma do oryginalnego problemu? Można oczywiście spróbować skonstruować analogiczny algorytm dla czworokątów. Ale jeśli wstępny kwadrat oznaczymy  $ABCD$  –  $A$  i  $B$  tego samego koloru, podobnie jak  $C$  i  $D$  – i połączymy  $A$  z  $B$  oraz  $C$  z  $D$ , a następnie już posiadany algorytm zastosujemy dla trójkątów  $ABC$  i  $CDA$ , to rozwiązany zostanie i przypadek czworokąta.

Jaka jest złożoność algorytmu? Oznaczmy przez  $L$  rozmiar zadania – liczbę punktów w trójkącie, wyłączając wierzchołki. Niech  $T(L)$  będzie kosztem rozwiązania zadania o rozmiarze  $L$ . Wtedy mamy  $T(0) = O(1)$ , oraz

$$T(L) = \max_{a+b+c=L-1} (T(a) + T(b) + T(c)) + O(L).$$

Rozwiązaniem tej rekurencji jest  $T(L) = O(L^2)$ . Gdyby udało nam się ograniczyć zmienne  $a$ ,  $b$  i  $c$  – np. przez  $a, b, c \leq \frac{1}{2}L$  – to rozwiązaniem byłoby już  $T(L) = O(L \log L)$ . Istnieje taki sposób, ale wymaga sortowania punktów wewnątrz trójkąta. Jeśli mamy wybrać punkt  $X$  koloru czarnego, to sortujemy punkty czarne kątowno dookoła wierzchołka  $A$  i wybieramy taki, który nie znajduje się w pierwszej  $\frac{1}{6}$  ani w ostatniej  $\frac{1}{6}$  punktów i podobnie dla wierzchołków  $B$  i  $C$ . W ten sposób  $a, b, c \leq \frac{5}{6}L$  – ale równanie robi się bardziej skomplikowane. Jeśli  $L_1$  to liczba punktów tego koloru co punkt  $X$ , a  $L_2$  – drugiego koloru ( $L_1 + L_2 = L$ ), to mamy  $T(L_1, L_2) = \max(T(a_1, a_2) + T(b_1, b_2) + T(c_1, c_2)) + O(L \log L)$ , gdzie maksimum jest brane po  $a_1 + b_1 + c_1 = L_1 - 1$ ,  $a_2 + b_2 + c_2 = L_2$ ,  $a_1, b_1, c_1 \leq \frac{5}{6}L_1$ . Rozwiązanie i tu ma prostą postać:

$$T(L_1, L_2) = O(L \log^2 L).$$

W praktyce, równie dobry – albo i lepszy – wynik otrzymalibyśmy, losując po prostu punkt  $X$ .

Filip WOLSKI

# Punkty Lagrange'a

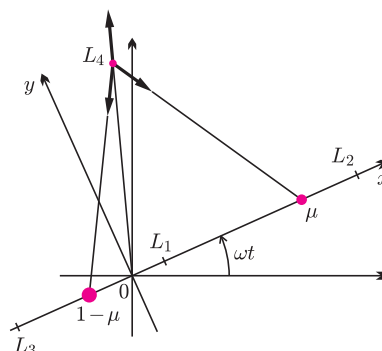
Tomasz KWAST

Równania ruchu punktu materialnego pod wpływem grawitacji ze strony drugiego punktu materialnego są rozwiązywalne, co oznacza, że potrafimy napisać formuły określające położenie i prędkość każdego z nich w dowolnej chwili. Nie da się tego zrobić już w przypadku trzech punktów i to nie dlatego, że jeszcze nikt tych formuł nie zdołał wyprowadzić. Jest znacznie gorzej: dowiedziono, że takich ogólnych formuł nie ma i nie będzie. Nie przeszkadza to w śledzeniu ruchu trzech ciał pod wpływem wzajemnej grawitacji – numerycznie. A pewne własności tego ruchu dają się jednak opisać formułami – mówimy: „analitycznie”. O tym niżej.



Tak zwane ograniczone zagadnienie trzech ciał polega na badaniu ruchu ciała o bardzo małej masie (tzw. znikomego) w polu ciężkości dwóch ciał o masach skończonych (ciał „ciężkich”) obiegających się po kołach. Mimo niezachęcającej nazwy (ograniczone) ma ono zastosowanie w bardzo wielu przypadkach w mechanice nieba i w astrofizyce. Jest to przecież model ruchu statku kosmicznego lecącego z Ziemi na Księżyc, ruchu planetoidy czy komety w polu ciężkości Słońca i Jowisza, ruchu atomu gazu przelatującego z jednego składnika gwiazdy podwójnej do drugiego. We wszystkich tych sytuacjach istotne jest, że ciało znikome wyczuwa obecność obu ciał ciężkich, ale nie wpływa na ich ruch, czyli one nie wyczuwają jego obecności.

Skoro dwa ciała ciężkie mają się obiegać po kołach, to oznacza, że ruch ten odbywa się ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , a ciała te dzieli niezmienna odległość  $R$ . Wtedy na mocy praw Keplera zachodzi  $\omega^2 = GM/R^3$ , gdzie  $M$  oznacza sumę mas tych ciał, a  $G$ , jak zwykle, stałą grawitacji. Nic nie stoi na przeszkodzie, by sumę mas, odległość ciał skończonych i prędkość kątową uznać za jednostki (masy, odległości i odwrotności czasu). Masa ciała cięższego niech będzie równa  $1 - \mu$ , a lżejszego  $\mu$ . Stała grawitacji wtedy też przyjmie wartość równą 1 i wszystkie równania w nowych zmiennych staną się prostsze graficznie, nie tracąc nic z treści. Uczni stwierdzili, że ruch ciała znikomego wygodnie jest śledzić w układzie współrzędnych obracającym się (a więc nieinercyjnym!) jednostajnie z prędkością  $\omega$  wokół środka masy (oczywiście dwóch ciał skończonych, skoro trzecie jest znikome) – rysunek. Bez wdawania się w formalne przeróbki równań przewidujemy, że w takim układzie ruch ciała znikomego będzie się odbywać pod wpływem grawitacji (przyspieszeń) ze strony obu mas ciężkich oraz przyspieszenia odśrodkowego.



Ale mniejsza o ruch. Zapytajmy chytrze, czy jest możliwy bezruch ciała znikomego względem układu obracającego się. Warunkiem tego musi być zerowanie się sumy wektorów trzech wspomnianych przyspieszeń. Mamy więc problem, czy istnieją w obracającym się układzie punkty, w których raz umieszczone ciało znikome (czyli z zerową prędkością) mogłoby przebywać stale? Na pytanie to można odpowiedzieć albo uczenie, albo zgadując. Ucznienie oznaczałoby zbudowanie potencjału tych trzech przyspieszeń, obliczenie jego trzech pochodnych cząstkowych względem współrzędnych (gradientu), przyrównanie ich do zera i znalezienie takich  $x, y, z$ , które spełniałyby te trzy algebraiczne równania. Zgadywanie natomiast warto zacząć od spostrzeżenia, że jeżeli takie punkty istnieją, to – po pierwsze – muszą leżeć w płaszczyźnie obiegania się mas ciężkich. Po drugie, że na osi  $x$ , na której leżą ciała ciężkie, w każdym punkcie przyspieszenia te działają wzdłuż tej osi, co znacznie zgadywanie ułatwia. Zauważamy więc, że np. w punkcie  $x$  leżącym niedaleko osi obrotu między masami ciężkimi działa przyspieszenie grawitacyjne skierowane



## Rozwiązanie zadania M 1185.

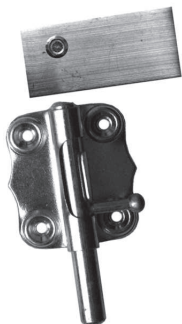
Niech  $a_i$  oznacza iloczyn liczb stojących w  $i$ -tym wierszu, natomiast niech  $b_j$  będzie iloczynem liczb stojących w  $j$ -tej kolumnie. Przyjmijmy ponadto, że dokładnie  $n$  spośród liczb  $a_1, a_2, \dots, a_{25}$  jest równych  $-1$ . Wtedy iloczyn wszystkich liczb z tablicy wynosi  $(-1)^n$ .

Przypuśćmy, że suma wszystkich 50 iloczynów jest równa 0. Wtedy dokładnie  $25 - n$  liczb spośród  $b_1, b_2, \dots, b_{25}$  równa się  $-1$ . To z kolei oznacza, że iloczyn wszystkich liczb stojących w tablicy wynosi  $(-1)^{25-n}$ . Uzyskałoby sprzeczność, gdyż liczby  $n$  oraz  $25 - n$  są różnej parzystości; ich suma, czyli liczba 25, jest nieparzysta.

ku masie  $1 - \mu$  w lewo, ku  $\mu$  w prawo oraz przyspieszenie odśrodkowe skierowane też w prawo. Może więc te trzy przyspieszenia gdzieś się równoważą? Jeżeli tak, to położenie tego osobliwego punktu  $x$  określi równanie (pamiętajmy o uproszczonych jednostkach):

$$\frac{1 - \mu}{(\mu + x)^2} = \frac{\mu}{(1 - \mu - x)^2} + x.$$

Czy ma ono rozwiązanie względem  $x$ ? Każdy widzi, że po zlikwidowaniu mianowników i uporządkowaniu powstaje zwykłe równanie algebraiczne, tylko – niestety – piątego stopnia. A więc rozwiązanie na pewno jest, lecz w ogólnym przypadku nie potrafimy go zapisać wzorem algebraicznym. Zawsze jednak można numerycznie znaleźć owo  $x$ , czyli położenie tzw. punktu Lagrange’a lub libracji  $L_1$ . Łatwo już teraz zgadnąć i sprawdzić, że na osi  $x$  musi istnieć drugi punkt Lagrange’a  $L_2$  w prawo od  $\mu$  (dwa przyspieszenia grawitacyjne w lewo i jedno odśrodkowe w prawo) i trzeci  $L_3$  w lewo od masy  $1 - \mu$  (dwa przyspieszenia grawitacyjne w prawo i odśrodkowe w lewo). We wszystkich przypadkach położenia punktów libracji (mówimy „liniowych”) określają analogiczne równania, oczywiście również piątego stopnia. Nawiasem mówiąc, rzadko zdarza się, by cokolwiek w przyrodzie było określone przez równanie piątego stopnia.



Gdybyśmy zgłębiali ten problem uczenie, to wykrylibyśmy jeszcze dwa punkty libracji. Ale z użyciem tylko szkolnej matematyki poprzestaniemy na sprawdzeniu, że te pozostałe dwa punkty libracji ( $L_4$  i  $L_5$ ) leżą w wierzchołkach trójkątów równobocznych rozpiętych na odcinku  $R$  łączącym masy ciężkie. A sprawdzenie jest już łatwe. Oto dowód. Rachunek trzeba przeprowadzić na składowych, bo te trzy przyspieszenia są teraz skierowane w trzech kierunkach. Przyspieszenie ku masie cięższej to  $(1 - \mu)[-1/2, -\sqrt{3}/2]$ , ku masie lżejszej to  $\mu[1/2, -\sqrt{3}/2]$ . Odśrodkowe jest skierowane w kierunku  $OL_4$  i jego składowe wynoszą po prostu  $[\frac{1}{2} - \mu, \sqrt{3}/2]$ , bo przecież  $\omega = 1$ . Dzięki doborowi jednostek wystarcza zajmować się geometrią trójkąta równobocznego! W każdym razie suma trzech wektorów zeruje się, co kończy dowód. Punkt libracji  $L_5$  leży symetrycznie względem  $L_4$  po drugiej stronie osi  $x$ . Warto tu zwrócić uwagę, że masy ciężkie i te dwa punkty Lagrange’a (mówimy „trójkątne”) tworzą trójkąty zawsze równoboczne, tj. bez względu na wartości owych mas.

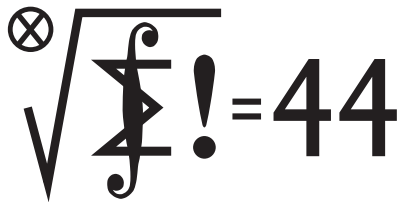


Na koniec każdy spyta, co to wszystko ma do przyrody. Otóż ma! Zawsze tak jest, że jeżeli prawa przyrody czegoś nie zabraniają, to przyroda to zrealizuje. Dlatego w trójkątnych punktach libracji znajdujemy chociażby: planetoidy trojańskie w układzie Słońce–Jowisz (Grecy są w  $L_4$ , a Trojanie w  $L_5$ ), pyłowe księżycy Ziemi w układzie Ziemia–Księżyc (przynajmniej – nie wszyscy wierzą w ich istnienie), przynajmniej po jednym małym satelicie w układzie Saturn–Dione i Saturn–Tethys. Oczywiście, te wszystkie ciała znikome nie powstały w punktach libracji, lecz musiały przylecieć z daleka. Skoro przyleciały, to w przyszłości odlecą, ale przez pewien czas mają prawo ciasno obiegać punkty libracji, sprawiając wrażenie, że tam tkwią. A w liniowych punktach Lagrange’a nic nie ma? Rzeczywiście, nie ma, gdyż w nich równowaga trzech przyspieszeń jest zawsze chwiejna, w przeciwieństwie do punktów trójkątnych, w których równowaga jest trwała, jeżeli tylko  $\mu < 0,038521\dots$ , co zachodzi w wymienionych tu przypadkach. Niestety, zbadanie charakteru równowagi jest znacznie trudniejsze niż odkrycie samej równowagi. Inaczej mówiąc, do wykazania własności punktów Lagrange’a, czy skąd bierze się ta ostatnia liczba, szkolna matematyka już nie wystarcza.



#### Rozwiązanie zadania F 701.

Pod działaniem siły  $F = IB\ell$  w ciągu czasu  $\tau$  pręt osiągnie prędkość  $v = IB\ell\tau/m$ . Z zasady zachowania energii mamy, że  $mv^2/2 = mgh(1 - \cos\alpha_{\max})$ , stąd maksymalny kąt wychylenia ramki wynosi  $\alpha_{\max} = 2 \arcsin \frac{IB\ell\tau}{2m\sqrt{gh}}$ .



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 XII 2007

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
**535** ( $WT = 2,64$ ) i **536** ( $WT = 1,53$ )  
z numeru 2/2007

Tomasz Warszawski	– Kraków	45,32
Tomasz Wietecha	– Tarnów	43,17
Andrzej Daniluk	– Warszawa	42,70
Dariusz Kurpiel	– Posada	
	Zarszyn	42,51
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	38,05
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	36,73
Witold Bednarek	– Łódź	36,18

Tomek Warszawski – po raz drugi.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z matematyki nr 547, 548

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**547.** Udowodnić nierówność  $\left(\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{2}\right)^3 > \left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{3\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}\right)^2$  dla liczb rzeczywistych  $x > y > 0$ .

**548.** Dla dodatnich liczb całkowitych  $a, b$  niech  $M(a, b)$  oznacza liczbę par  $(x, y)$ , których wyrazy  $x, y$  są dodatnimi liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, spełniającymi warunki  $x \leq a, y \leq b$ . Wykazać, że

$$M(a, b) = \sum_{r \geq 1} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor \mu(r),$$

gdzie  $\mu$  jest funkcją Möbiusa, określoną wzorami

$$\mu(r) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } r = 1, \\ (-1)^k & \text{gdy } r \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych czynników pierwszych,} \\ 0 & \text{gdy } r \text{ dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej.} \end{cases}$$

Zadanie 548 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2007

Przypominamy treść zadań:

**543.** Znaleźć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające warunki

$$\begin{aligned} x(f(x+1) - f(x)) &= f(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}, \\ |f(x) - f(y)| &\leq |x - y| & \text{dla } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**544.** Jak wiadomo (od czasów Eulera), równanie  $x^3 + y^3 = z^3$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich  $x, y, z$ . A czy równanie  $x^{3/2} + y^{3/2} = z^{3/2}$  ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich  $x, y, z$ ?

**543.** Niech  $f$  będzie jedną z szukanych funkcji; jasne, że  $f(0) = 0$ . Oznaczmy  $f(x)/x = g(x)$  dla  $x \neq 0$ . Podstawiając  $f(x) = xg(x)$  do zadanego równania, dostajemy zależność  $x(x+1)g(x+1) = x(x+1)g(x)$ . Zatem

$$(1) \quad g(x+1) = g(x) \quad \text{dla } x \neq -1, 0.$$

Stąd przez indukcję

$$\begin{aligned} g(x+n) &= g(x) & \text{dla } x > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ g(x-n) &= g(x) & \text{dla } x < 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Drugi z warunków zadania przyjmuje postać

$$(2) \quad |xg(x) - yg(y)| \leq |x - y|.$$

Ustalmy liczby  $a, b > 0$  i podstawmy w (2)  $x = a + n$ ,  $y = b + n$ :

$$|(a+n)g(a) - (b+n)g(b)| \leq |a - b| \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Gdyby liczby  $g(a), g(b)$  były różne, uzyskany po lewej stronie ciąg dążyłby do nieskończoności. Zatem  $g(a) = g(b)$  dla  $a, b > 0$ . To znaczy, że funkcja  $g$  jest stała na przedziale  $(0, \infty)$ .

Analogicznie uzasadniamy, że jest też stała na przedziale  $(-\infty, 0)$ . Obie te stałe są równe, jak pokazuje równanie (1) (np. dla  $x = -1/2$ ). Tak więc  $g(x) \equiv c$  dla  $x \neq 0$ ; nierówność (2) mówi zaś, że  $|c| \leq 1$ .

Wniosek: funkcja  $f$  ma postać  $f(x) = cx$  dla  $x \in \mathbb{R}$  ( $c$  – stała,  $|c| \leq 1$ ) i każda funkcja tej postaci spełnia wymagane warunki.

**544.** Odpowiedź: *nie*.

Dowód: Przypuśćmy, że liczby naturalne (w znaczeniu: liczby całkowite dodatnie)  $x, y, z$  spełniają podane równanie. Po podniesieniu stronami do kwadratu mamy

$$(3) \quad x^3 + 2xy\sqrt{xy} + y^3 = z^3.$$

Widać stąd, że  $xy$  jest kwadratem liczby wymiernej; a skoro  $xy$  jest liczbą naturalną, jest też kwadratem liczby naturalnej:  $xy = t^2$ . Niech  $d = \text{NWD}(x, y)$ ; tak więc

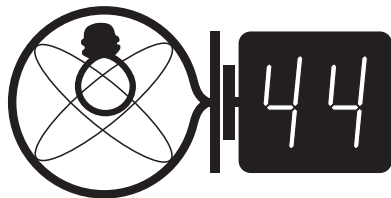
$$d^2 \cdot \frac{x}{d} \cdot \frac{y}{d} = t^2.$$

Liczby naturalne  $x/d, y/d$  są względnie pierwsze, więc z uzyskanej zależności wynika, że każda z nich jest kwadratem liczby naturalnej:  $x = du^2, y = dv^2$ . Podstawiamy to do równania (3) i otrzymujemy

$$d^3(u^3 + v^3)^2 = z^3.$$

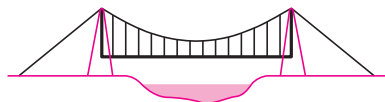
Zatem  $z$  dzieli się przez  $d$ . Przyjmując  $z = ds$ , dostajemy równość  $(u^3 + v^3)^2 = s^3$ , z której wynika, że  $s$  jest kwadratem liczby naturalnej,  $s = w^2$ , i ostatecznie  $u^3 + v^3 = w^3$ . Ale to ostatnie równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

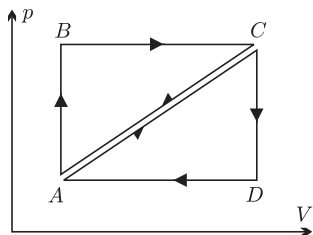


Termin nadsyłania rozwiązań:

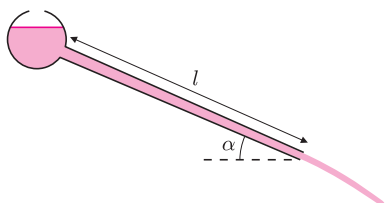
31 XII 2007



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
436 (WT = 2,68) i 437 (WT = 2,29)  
z numeru 4/2007

Krzysztof Magiera	– Łosów	43,97
Tomasz Wietecha	– Tarnów	34,52
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	31,61
Jerzy Witkowski	– Radlin	31,60
Andrzej		
Nowogrodzki	– Chocianów	24,58
Jacek Konieczny	– Poznań	19,16
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	18,38

444. Most jest zawieszony na kablu (rys. 1). Znaleźć postać funkcji opisującej kształt kabla, jeśli ciężar mostu jest równo rozłożony wzdłuż osi poziomej, odstęp między linami pionowymi są niewielkie, a ich ciężar oraz ciężar samego kabla można pominąć. Jeśli ciężar mostu jest równy  $P$ , długość  $l$ , a obniżenie środkowego punktu kabla względem najwyższych –  $h$ , to ile wynosi siła napięcia kabla w środku, a ile – w najwyższych punktach?

445. Na rysunku 2 przedstawiono dwa cykle termodynamiczne, w których przemianom podlega gaz doskonały. Cykle mają wspólny odcinek  $AC$  (choć przebiegany z przeciwnym zwrotem). Sprawność którego cyklu jest wyższa, czy też są one jednakowe? Rozważyć przypadki: a)  $T_B = T_D$ , b)  $T_B > T_D$ .

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2007

Przypominamy treść zadań:

440. Jaś mieszka w wysokim budynku i zabawia się, oblewając przechodniów wodą z okna. Używa w tym celu konewki (schemat – zob. rys. 3), a żeby sięgnąć strumieniem wody bliżej lub dalej, zmienia jej kąt pochylenia  $\alpha$ . Jaki kąt da mu największy zasięg strumienia? Jak daleko powinien stać przechodzień, aby czuć się bezpiecznie? Długość konewki  $l$  i wysokość spadku  $h$  są dane (oczywiście  $l \ll h$ ). Opór powietrza należy pominąć.

441. Dwa równoległe długie przewodniki prostoliniowe o promieniu  $r = 1$  mm są odległe o  $d = 10$  cm. Z jednej strony do ich końców przyłożono pewne napięcie, a z drugiej połączono je opornikiem  $R$  (rys. 4). Opór samych przewodników można pominąć. Jaka powinna być wartość  $R$ , aby siła elektrostatycznego przyciągania ładunków na jednym i drugim przewodniku równoważyła się z siłą magnetycznego odpychania przewodników, wynikającą z przepływu prądu? Względna przenikalność elektryczna i magnetyczna ośrodka wynosi 1.

440. Jeśli można pominąć opory ruchu wody w konewce (lepkość i wiry), to prędkość  $v$  wypływającej wody można obliczyć z zasady zachowania energii (tzn. z równania Bernoulliego):

$$v = \sqrt{2gh_k} = \sqrt{2gl \sin \alpha},$$

gdzie  $h_k = l \sin \alpha$  jest wysokością spadku wody wewnątrz konewki. Ze względu na warunek  $l \ll h$  składowa pionowa początkowej prędkości wody nie ma znaczenia i istotna jest tylko jej pozioma składowa, równa

$$v_x = \sqrt{2gl \sin \alpha} \cos \alpha.$$

Przyrównując pochodną względem  $\alpha$  do zera, nietrudno wykazać, że maksymalna wartość  $v_x$  występuje dla kąta  $\alpha$  spełniającego warunek:  $\sin^2 \alpha = 1/3$ , czyli  $\alpha = 35,3^\circ$ .

Czas spadku z wysokości  $h$  jest równy  $t = \sqrt{2h/g}$ , a więc zasięg figlów Jasia wynosi

$$z = 2k\sqrt{hl},$$

gdzie  $k$  jest maksymalną wartością wyrażenia  $\sqrt{\sin \alpha} \cos \alpha$ , równą  $k = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,62$ .

441. Natężenie pola elektrycznego nici naładowanej z liniową gęstością ładunku  $\lambda$  (ładunkiem na jednostkę długości) w odległości  $\rho$  od tej nici wynosi

$$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}.$$

Całkując, otrzymujemy różnicę potencjałów między punktami odległymi o  $r$  i  $d$  od nici

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{r}.$$

Napięcie  $U$  między dwoma równoległymi przewodnikami naładowanymi przeciwnymi ładunkami jest równe  $2\Delta V$ , gdyż pole pochodzi od obu przewodników. Przyjmując, że  $U$  jest dane, możemy stąd wyznaczyć  $\lambda$ , a następnie siłę przyciągania elektrostatycznego na jednostkę długości

$$\frac{F_{elst}}{l} = \lambda E(d) = \frac{U^2 \pi \epsilon_0}{2d \ln^2(d/r)}.$$

To wyrażenie należy przyrównać do siły odpychania magnetycznego

$$\frac{F_{magn}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 U^2}{2\pi R^2 d}.$$

Stąd

$$R = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{d}{r} \right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 552 \Omega.$$





### Rozwiązanie zadania F 702.

Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy, że

$$ma = mg - BI, \quad (1)$$

gdzie

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C \frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{ind}}}{\Delta t} = C \frac{Bl \Delta v}{\Delta t} = CBl a. \quad (2)$$

Zatem, wyrażając natężenie prądu przez przyspieszenie  $a$  i wstawiając tę zależność do pierwszego równania, otrzymujemy:

$$a = \frac{g}{1 + CB^2 l^2 / m}.$$



### Rozwiązanie zadania M 1183.

Przypuśćmy, że takie przyporządkowanie istnieje oraz niech  $a$  będzie największą spośród wszystkich przyporządkowanych liczb. Oznaczmy ponadto przez  $b$  i  $c$  liczby sąsiadujące z liczbą  $a$  oraz przyjmijmy, że  $b \geq c$ . Skoro liczba  $a$  jest największa spośród rozpatrywanych liczb, więc  $b \leq a$ .

Z drugiej strony, wszystkie przyporządkowane liczby są nieujemne. Zatem

$$b \geq b - c = |b - c| = a.$$

Stąd uzyskujemy  $b = a$  i w konsekwencji  $c = 0$ . Wobec tego wszystkie przyporządkowane liczby muszą być kolejno równe  $a, a, 0, a, 0, a, 0, \dots$

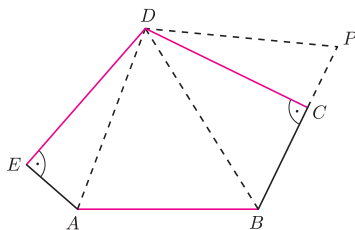
Ponieważ liczba wierzchołków wielokąta nie jest podzielna przez 3, więc  $a = 0$ .

Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż suma wszystkich przyporządkowanych liczb powinna być różna od 0.



### Rozwiązanie zadania M 1184.

Niech  $P$  będzie takim punktem leżącym na półprostej  $BC$ , że  $CP = AE$ .



Wówczas trójkąty prostokątne  $DEA$  i  $DCP$  są przystające, a pole pięciokąta  $ABCDE$  jest równe polu czworokąta  $ABPD$ . Ponadto  $AD = PD$  oraz  $AB = BP$ , skąd wynika, że trójkąty  $ABD$  i  $PBD$  są przystające. Zatem pole czworokąta  $ABPD$  jest równe

$$2 \cdot \left( \frac{1}{2} BP \cdot CD \right) = 1.$$

## Patrz w niebo

Wiek Wszechświata najczęściej ocenia się, wyznaczając wartość stałej Hubble'a, gdyż jej odwrotność to właśnie czas osiągnięcia przez galaktykę aktualnej odległości. Trzeba więc uzyskać informację o odległości galaktyki (co jest trudne i ocena jest z reguły mało dokładna) oraz o prędkości radialnej (co jest znacznie łatwiejsze, gdyż jest to po prostu pomiar). Niezłą obecnie dokładność wyznaczenia stałej Hubble'a zawdzięczamy, oczywiście, wielkiej liczbie tego rodzaju obserwacji i ich uśrednieniu. Inna metoda oceny wieku Wszechświata, a właściwie gromad gwiazdowych, to analiza ich diagramów Hertzsprunga–Russella. Mianowicie, ponieważ gwiazdy masywniejsze ewoluują szybciej, ciąg główny gwiazd gromady odchyła się w prawo (na tradycyjnym diagramie) tym niżej, im starsza jest gromada. Znając przebieg ewolucji gwiazd o różnych masach, można ocenić wiek gromady. Pomiaru takie dają obecnie dla najstarszych gromad wynik  $13,2 \pm 1,5$  mld lat.

Kilka lat temu zastosowano jeszcze inną metodę wykorzystującą obecną wiedzę o ewolucji gwiazd aż do stadium stygnącego białego karła. Grupa kanadyjskich astronomów za pomocą teleskopu Hubble'a pomierzyła jasności najślabszych białych karłów w gromadzie kulistej M4 w Skorpionie (której odległość jest znana – to ważne). Pomiaru jasności widomej, sięgające do – uwaga! – 30 mag, można wtedy przeliczyć na jasności absolutne, a znając teoretyczny przebieg ewolucji gwiazd do osiągnięcia takich właśnie jasności, można ocenić, jak długo to trwało. Okazało się, że te białe karły w gromadzie M4 rozpoczęły życie jako normalne gwiazdy  $12,7 \pm 0,7$  mld lat temu. Wynik ten dobrze zgadza się ze wspomnianym wyżej. Sam Wszechświat jest jeszcze o jakiś miliard lat starszy, ocenia się bowiem, że tyle czasu musiało upłynąć od Wielkiego Wybuchu do powstania samych gromad.

Tomasz KWAST

## Październik

W październikowe wieczory dość wysoko na południowym zachodzie widać cztery gwiazdozbiory należące do najmniejszych. Żrebię jest najmniejszym gwiazdozbiorem północnego nieba, w dodatku zawierającym niezbyt jasne gwiazdy. Najmniejszy na całym niebie, a mimo to bardzo wyrazisty, jest Krzyż Południa, ale w Polsce jest niewidoczny. Na północnym zachodzie do Żrebięcia przylega Delfin, z którym od północy sąsiaduje Lis, a od północnego zachodu Strzała. Gdyby z tej czwórki stworzyć jeden gwiazdozbiór, to jeszcze byłby niewielki. Najjaśniejsze gwiazdy ma tu Delfin, ma też kształt łatwy do zapamiętania. Gamma Delfina jest ładną kolorową gwiazdą podwójną, o czym można się przekonać za pomocą dobrej lornetki. Jeden składnik jasnożółty ma jasność 5,47 mag, drugi czerwony ma 4,49 mag. Układ znajduje się w odległości 45 pc.

Wenus jest we Lwie i widać ją jako Gwiazdę Poranną. Największą kątową odległość od Słońca osiągnie 28 X. Mars jest w Bliźniętach i wieczorem wschodzi. Jowisz jest w Wężowniku i wieczorem już zachodzi. Saturn jest, jak Wenus, we Lwie, więc widać go nad ranem. Nów Księżyc wypada 11 X, a pełnia 26 X. Księżyc zakryje Regulusa 7 X, co może być widoczne w Europie, ale będzie już świt. Ponadto zakryje tego samego dnia Saturna, ale to zakrycie będzie widoczne na Pacyfiku, oraz Antaresa 15 X, co zobaczą mieszkańcy południowej części Ameryki Południowej i Antarktydy. Z meteorów można spodziewać się bardzo słabego roju Giacobinidów 9 X i skromnego Orionidów około 20 X.

T. K.



# Jak oceniamy ryzyko?

Rafał SZTENCEL

Chyba tak samo, jak szanse pomyślnych zdarzeń – zdecydowanie źle. Dlatego też zarówno w przypadku zdarzeń pomyślnych, jak i niepomyślnych, dajemy się wodzić za nos tym, którzy zarabiają na przewidywaniu zachowania masowego konsumenta. Poniżej kilka przykładów.

1. W książce [2] (oraz np. na okładce *Delty* 5/2006) można obejrzyć reprodukcję siedemnastowiecznej włoskiej tablicy do gry w kości. Składa się ona z 56 obrazków (bo tyle jest wyników rzutu trzema nierozróżnialnymi kostkami). Z każdym wynikiem wiąże się wygrana lub przegrana. Okazuje się, że gra jest minimalnie wygrywająca dla bankiera. Margines zysku nie przekracza 1% obrotów. Łatwo to wytłumaczyć. Grano w karczmach pod czujną kontrolą zainteresowanych. Bankier, który – zdaniem graczy – zarabiałby za dużo, zapewne rychło skończyłby z nożem w plecach. Jeśli dziś wybierzemy się do kasyna, by zagrać w ruletkę, margines zysku kasyna nie przekroczy 3%. Mało tego – jeśli zagramy w blackjacka, okaże się, że bankier gra według ścisłych instrukcji, ma bowiem nieznacznie ogrywać przeciętnego gracza, w wyniku czego przegra z dobrym (tacy jednak mają zakaz wstępu do kasyn). Jasne jest, że i tutaj jawność przepływu gotówki wymusza minimum uczciwości. Ale już w Dużym Lotku organizator zabiera 50% wpływów, a w bardzo zyskownych dla sieci telewizyjnych konkursach audiotele (por. [4]) do 97%. Miraż wygranej, widocznej przecież na ekranie, zupełnie zaćmiewa zdolność rozumowania.

2. Co jest bardziej niebezpieczne dla dziecka – pistolet czy basen kąpielowy? Autorzy [3] argumentują, że jednak basen. W USA jest 6 milionów basenów, w których rocznie tonie 550 dzieci poniżej dziesiątego roku życia, a zatem jedno na 11000 basenów. Natomiast z powodu wypadków z bronią, której w USA jest około 200 milionów sztuk, ginie rocznie 175 dzieci poniżej dziesiątego roku życia, czyli mniej niż jedno na milion sztuk broni. W USA dość często słyszy się o potrzebie wprowadzenia ograniczeń w dostępie do broni, natomiast żadna wpływowa organizacja nie zajmuje się basenami, a przecież łatwo sobie wyobrazić, że wprowadzenie elementarnych zabezpieczeń mogłoby ocalić wiele potencjalnych ofiar.

3. Zbiorowa histeria, wywołana chorobą wściekłych krów, a nieco później – ptasią grypą, wymagałaby obszernej analizy, wykraczającej poza ramy tego artykułu. Odnotujmy jedynie, że przerażający obraz mózgu niszczonego przez praktycznie niewykrywalne w domowych warunkach priony musi wzmacniać poczucie zagrożenia – bo nie jesteśmy w stanie kontrolować sytuacji.

4. Politycy pewnego środkowoeuropejskiego kraju postanawiają wysłać wojska na Bliski Wschód, by wspomóc potężnego sojusznika. Premier i prezydent ogłaszają decyzję w telewizji, przy czym ten ostatni myli nazwę kraju docelowego z różniącą się jedną literą nazwą jego sąsiada. Już w tym momencie widzom cierpnie skóra, a sama decyzja jest oczywiście kontrowersyjna – dla niejasnych na razie korzyści politycznych naraża się życie wielu ludzi.

Okazuje się, że w trakcie czteroletniej misji ginie 23 żołnierzy, a korpus ekspedycyjny liczył ich średnio 1700. Oznacza to ubytek 0,34% w ciągu roku, czyli tyle, ile (patrz [1]) w grupie 37-latków żyjących w normalnych warunkach. Oczywiście, w grupie 20-latków ubytek byłby mniejszy – około 0,14%

Przypomnijmy, że hrabia de Buffon uważał (por. [5]), że zdrowy 56-latek jest głęboko przekonany, że przeżyje jeszcze 24 godziny mimo szansy zgonu w ciągu doby równej 0,0001, co daje roczny ubytek 3,65%.

Według tablic z [1] za praktycznie nieśmiertelne mogą się uważać 11-letnie dziewczynki: przy rocznym ubytku 0,013% i braku starzenia się żyłyby średnio 7700 lat!

## Literatura

[1] B. Błaszczyszyn, T. Rolski, *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa 2004

[2] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Script, Warszawa 2006

[3] S.D. Levitt, Stephen J. Dubner, *Freakonomia. Świat od podszewki*, Helion, Gliwice 2006

[4] W. Markiewicz, *Polityka*, 36 (2157), 5 IX 1998

[5] R. Sztencel, *O igle Buffona nieco inaczej*, Delta 8/2007