







SPIS TREŚCI NUMERU 9 (400)

Oblicza informatyki <i>Władysław M. Turski</i>	str. 1
Najprostsz y algorytm sortowania <i>Michał Adamaszek</i>	str. 3
Gry nieskończone <i>Paweł Parys</i>	str. 4
 Defilada z komputera <i>Andrzej P. Urbański</i>	str. 6
Aktualności	str. 8
ZADANIA OLIMPIJSKIE	
O dwóch równoważnych problemach <i>Jakub Radoszewski</i>	str. 9
 Wyznaczamy współczynnik napięcia powierzchniowego <i>Stanisław Bednarek</i>	str.12
 Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Wrzesień	str.16
 Metody Monte Carlo <i>Rafał Sztencel</i>	str.17

W następnym numerze:
Twierdzenie Liouville'a

Ten numer to **numer czterechsetny**.

Zazwyczaj z takiej okazji urządza się święto, a najważniejszym składnikiem świąt są prezenty. **Mamy więc prezent dla Czytelników. A nawet dwa.**

Od tego numeru w *Delcie* prezentowane będą cztery dyscypliny. Do astronomii, fizyki i matematyki **dołącza INFORMATYKA**. Serdecznie witamy!

Aby to było możliwe, *Delta* już na stałe będzie o połowę większa, **będzie miała 25 stron!**

To wszystko ciągle w tej samej cenie 4 złote.

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Adamaszek, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt y”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)

internet: www.amos.waw.pl , e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2008 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2008 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

Cena prenumeraty w 2008 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

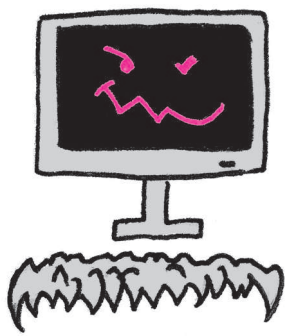
Numer y archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Oblicza informatyki Władysław M. TURSKI*

Informatyka jest nauką o przetwarzaniu informacji, zwłaszcza przy użyciu automatycznych środków pomocniczych.

Słowo „informatyka” wprowadził do polszczyzny nieżyjący już pionier tej dziedziny, profesor Romuald Marczyński, swoim referatem w Zakopanem w grudniu 1968 r. Przedtem używano mniej czy bardziej udolnych kalk anglosaskich: computer science i computing science. Poza ogólnym defektem, polegającym na tym, że dyscypliny mające w swej nazwie „naukę” (science) rzadko są rzeczywiście naukowe, nazwy te były wadliwe dlatego, iż nadmiernie podkreślały rolę narzędzia (computer) lub jednego tylko z wielu sposobów przetwarzania informacji (liczenie – computing). Przyjęta z francuskiego „informatyka” nie ma tych wad i całkiem nieźle odzwierciedla charakter i przedmiot dyscypliny, opisany pierwszym zdaniem niniejszego tekstu.

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Już starożytni (światową prasę obiegła niedawno fotografia pokładowego komputera z brązu, wydobytego z wraku starogreckiej galery) przetwarzali informacje, posługując się sztucznymi przyrządami. Naturalnym przyrządem, a raczej narzędem przetwarzania informacji jest mózg człowieka, żaby czy mrówki, ale naturalne przetwarzanie informacji zachodzi też na poziomie pojedynczych komórek i to wcale niekoniecznie zwierzęcych.

Nie wiemy, niestety, *jak* odbywa się przetwarzanie informacji w istotach żywych i wcale nie jest pewne, że kiedykolwiek się tego dowiemy. Sensacje prasowe o tym, że uczeni kolejny raz „odkryli tajemnicę myślenia”, jeśli nie całkiem fałszywe, dotyczą zjawisk fizjologicznych towarzyszących procesowi myślenia (np. gdy badany myśli o jabłku, zwiększa się elektryczna aktywność neuronów w takiej to a takiej części kory mózgowej). Do zrozumienia istoty myślenia droga stąd wcale nie krótsza, niż od stwierdzenia, że mózg wydziela myśli tak, jak wątroba – żółć.

Jedynie znane nam od A do Z procesy przetwarzania informacji to te, które świadomie wbudowaliśmy do skonstruowanych przez nas urządzeń, i te, które sami czysto mechanicznie wykonujemy zgodnie z ustalonymi procedurami. Doskonale wiemy (a przynajmniej niektórzy z nas wiedzą), jak komputer przetwarza mnożnik i mnożną w iloczyn, ale nikt nie wie, jak odbywa się to w cudzym umyśle. Ba, wielu z nas inaczej znajduje wynik mnożenia $7 \cdot 8$ niż mnożenia $10 \cdot 5$, a komputer robi to zawsze (w pewnych granicach) tak samo.

Niektórzy, bardzo łatwowierni ludzie uważają, że skoro i komputer, i człowiek udzielają tej samej odpowiedzi na pytanie o iloczyn $7 \cdot 8$, i skoro wiadomo, że człowiek myśli, to komputer też myśli, jest obdarzony tzw. sztuczną inteligencją. Inni wyciągają taki wniosek z faktu, że komputery potrafią wygrywać z arcymistrzami szachów. I w tym przypadku autorzy programu doskonale wiedzą, krok po kroku, jak „gra” komputer, nikt zaś nie ma najmniejszego pojęcia o tym, jak gra arcymistrz, a nawet taki antytalent szachowy, jak ja. Między tymi dwoma sposobami przetwarzania informacji: myśleniem i wykonywaniem programu

zachodzi fundamentalna różnica i nic, jak dotąd, jej nie zmniejszyło ani o jotę, choć co do wyników są one czasem zupełnie zgodne, a komputerowe bywają niekiedy o niebo doskonalsze.

Przez długi czas głównym przedmiotem zainteresowania informatyki i informatyków były obliczenia numeryczne, czyli rachunki. Zastosowanie komputerów umożliwiło wykonywanie rachunków, jakie, choć koncepcyjnie proste, były dla ludzi praktycznie niewykonalne. Tytułem przykładu, wyznaczanie orbit poszczególnych komet, co jeszcze w czasach mojej wczesnej młodości było zajęciem niebywale czasochłonnym i stanowiło osiągnięcie uprawniające do obejmowania katedr uniwersyteckich, niemalże z dnia na dzień stało się sprawą rutynową. Bez bardzo szybkich obliczeń nie byłoby astronautyki, nowoczesnej broni i Złotych Tarasów. Możliwość szybkiego rachowania zrodziła też zupełnie nowe metody badań naukowych i nowe praktyki inżynierskie i medyczne. Bez niej nie byłoby metody elementu skończonego, powszechnie dziś stosowanej w projektowaniu inżynierskim, nie miałyby sensu szybka transformata Fouriera (FFT), bez której nie byłoby tomografii komputerowej i wielu innych ważnych, codziennych zastosowań w medycynie (i nie tylko). Bez szybkiego liczenia nie zafascynowałyby nas uroda fraktali (bo byśmy ich w ogóle nie zobaczyli!), nie byłoby impulsu dla badań chaosu, a tym samym – wielu nowoczesnych technologii, nie mówiąc już o doskonałości barw, cieni i faktury grafik komputerowych, ani awatarów w grach i zabawach. Nie byłoby także MP3 i wszystkiego, co za tym idzie.

Kiedy głównym przedmiotem zainteresowania informatyki było liczenie, najważniejszym problemem, obok poprawności rachunku, było pytanie, czy zadane obliczenia kiedykolwiek dobiegną pomyślnego końca? To wcale nie jest pytanie banalne: gdy liczy się coś zupełnie nowatorskiego i wiele godzin czeka na wynik, to bardzo chce się wiedzieć, czy to coś jeszcze nie wyszło, czy też program „zapętlił się na amen”, wykonuje te same instrukcje w kółko, nie posuwając się „do przodu”. I tu spotkaliśmy się – bodajże po raz pierwszy w intelektualnych dziejach ludzkości! – z prostym, lecz nierozstrzygalnym problemem

praktycznym. Owszem, znany już był wynik Gödla o nierozstrzygalności arytmetyki i różnych logik, ale po pierwsze, interesowało się nim bardzo niewiele osób, a po drugie – problemy te nosiły nieco metafizyczny charakter, a w metafizyce wiadomo, że często nie wiadomo, jak jest „naprawdę”. Teraz dowiedzieliśmy się (z dowodem na mur!), że nie da się skonstruować takiego programu, który mógłby posłużyć do badania dowolnego innego programu na okoliczność: czy jego wykonanie skończy się, czy nie.

Nierozstrzygalność problemu stopu (taką nazwę nosi opisane powyżej zadanie) wcale nie oznacza, że dla konkretnego programu nie można stwierdzić, czy jego wykonanie kończy się, czy nie, czy dzieje się tak zawsze, czy tylko w pewnych warunkach. Badania empiryczne (polegające na „puszczaniu” programu na komputerze) nie są tu przydatne, zwłaszcza wtedy, gdy program może nie mieć stopu. Powstało więc zapotrzebowanie na umiejętność wnioskowania o własnościach programu na podstawie analizy jego tekstu, a nie zachowania się w trakcie wykonywania. W ten sposób zrodziła się nowa dyscyplina informatyki: logika programów. Jej naturalnym rozwinięciem stało się programowanie bezpośrednio w logice.

Jak widać, komputery można programować na różne sposoby: żeby udawały rachmistrza i żeby naśladowały czysto logiczne wnioskowanie. Do sprawnego opisu intencji programisty powstały dziesiątki (jeśli nie setki) języków programowania. Niegdyś toczono „święte wojny” o to, który język programowania jest najlepszy. Dziś wiemy już, że pytanie to nie ma większego sensu, gdyż użyteczność języka zależy od szerokiego kontekstu, od celu, środowiska i predylekcji tego, kto ma programować.

Rozmaitość języków programowania świadczy o nabytej łatwości tworzenia translatorów, tj. programów tłumaczących z języka programowania na język sterowania komputerem. Informatyka dochodziła do tego dość długo; trzeba było zbudować nowe teorie, opracować wiele sprytnych metod. Dziś w zasadzie dzieło to zostało zakończone i opisane w solidnych podręcznikach, nowej wiedzy w tym obszarze wiele już nie przybywa. Z jednym, szalenie ważnym wyjątkiem.

Jedną z podstaw wiedzy o językach programowania jest teoria języków formalnych, tj. ciągów powstających z zadanego alfabetu przez stosowanie określonego repertuaru reguł. Teoria ta rozwinęła się bardzo pięknie, jednakże od pewnego czasu zaczęła tracić znaczenie: jej interesujące nowe odkrycia nie miały już żadnego związku z praktyką, co w informatyce jest oznaką dekadencji. Okazało się jednak, że przed tą teorią najfantastyczniejsze wyzwania postawiła . . . przyroda. Spirala DNA, owa alfa i omega wiedzy o życiu, jest przecież napisem zbudowanym z czterech symboli. Rozszyfrowanie reguł, wedle których ten napis jest zbudowany, wyszukiwanie identycznych fragmentów w dwu i więcej różnych spiralach, odtwarzanie ewolucji itp. – wszystko to są zadania o kolosalnym znaczeniu

praktycznym, a biegłość w stosowaniu metod teorii języków formalnych – silnym atutem w ich rozwiązywaniu. Nowiutka gałąź informatyki – bioinformatyka – pełnymi garściami czerpie z dorobku teorii języków formalnych i stymuluje jej dalszy rozwój.

Komputery różnią się między sobą pod wieloma względami. Aby móc badać ogólne własności programów, należało wymyślić swego rodzaju wzorzec, do którego dałoby się sprowadzić każdy realny komputer. Takim wzorcem jest abstrakcyjna maszyna Turinga (wymyślona przed zbudowaniem pierwszych komputerów!); każde realne obliczenie można sprowadzić do obliczenia na maszynie Turinga. Z takim instrumentarium badawczym udało się podzielić problemy rachunkowe na klasy, charakteryzujące się swoistą złożonością obliczeniową. Dla przykładu, w jednej klasie są wszystkie problemy, których rozwiązania wymagają ilości rachowania rosnącej jak wielomian rozmiaru zadania, w innej – problemy, których apetyt na rachunki rośnie szybciej niż jakikolwiek wielomian. Przynależność problemu do danej klasy nie zależy od metody jego rozwiązania; jeśli więc dla problemu z klasy wielomianowej mamy program, który w miarę zwiększania rozmiaru zadania pochłania „nadwielomianowo” wiele mocy obliczeniowej, są podstawy wątpić w jego jakość. Badanie złożoności obliczeniowej różnych problemów stanowi wciąż żywą dyscyplinę informatyki. Do dziś nie wiemy na przykład, czy dwie najważniejsze bodaj klasy obliczeń są, czy nie są tożsame; na autora dobrze uzasadnionej odpowiedzi od lat czeka sowita nagroda!

Z biegiem czasu, oprócz klasycznych obliczeń, takich z początkiem (danymi) i końcem (wynikiem), informatyków zaczęły interesować procesy innego typu. Weźmy dla przykładu system operacyjny – taki jak Windows czy Linux. Z reguły wcale nie jesteśmy zainteresowani stopem tego programu, przeciwnie, jego spontaniczne zatrzymanie (zawieszenie) się jest źródłem wielu smartwień. Celem tego typu procesu nie jest już uzyskanie wyniku, lecz zachowanie określonych relacji między wskazanymi parametrami, co wymaga właściwego reagowania na ich zmiany, zachodzące spontanicznie (np. gdy użytkownik naciśnie klawisz), albo pod wpływem realizacji innych programów. Jądrzem problematyki wynikającej z tego rodzaju okoliczności jest utrzymanie celowej (pożądaney) współpracy wielu biegnących równocześnie autonomicznych procesów. Że nie są to problemy łatwe, poucza smutny los ośliny, co to pośród jadła z głodu padła i wzajemne blokowanie się dwu gentlemanów, upierających się, by przepuścić drugiego przez wąskie przejście.

Przykładem systemu obejmującego olbrzymią liczbę niezależnych, a współdziałających procesów jest oczywiście Internet, sieć łącząca setki milionów autonomicznych komputerów, współpracujących ze sobą przez wysyłanie i odbieranie adresowanych komunikatów, składających się z pakietów informacji, zbudowanych zgodnie z powszechnie stosowanym

protokołem. Komunikatem może być praktycznie wszystko: list miłosny, fragment zakodowanego filmu, wirus komputerowy, sygnał uruchamiający ogrzewanie w moim domu itp. Nie wszystkie pakiety składające się na komunikat idą tą samą drogą od nadawcy do odbiorcy; węzły transmisji wybierają dla każdego z osobną drogę najtańszą. W rezultacie, pakiety mogą docierać nie po kolei, ostateczny montaż odbywa się w komputerze odbiorcy. To, że korzystając z Internetu, mamy wrażenie pełnej ciągłości i płynności dźwięku i obrazu, świadczy o mocy sprzętowych środków informatyki (hardware) i skuteczności oprogramowania (software) tworzących światową sieć komputerową (WWW).

Protokoły internetu są jednakowe dla wszystkich. Stosują je uczniowie i hobbyści, uczeni i maklerzy, terroryści i policjanci. Umożliwia to globalne funkcjonowanie Internetu, lecz także, niestety, ułatwia stale rosnącą przestępczość w sieci. Paradoksalnie, gdyby sieć nie rozwinęła się tak szybko, a raczej gdyby jej rozwój nie nastąpił tak wcześnie, sytuacja mogłaby być inna.

Od drugiej wojny światowej kryptologia (wiedza o szyfrowaniu) zmieniła swój charakter. Od czasu, gdy M. Rejewski z kolegami czysto matematycznym wnioskowaniem (opartym na teorii grup) złamali szyfr Enigmy i zbudowali mechaniczne szablony

(dla niepoznaki i żartu nazwane bombami) do masowego dekodowania niemieckich depesz wojskowych, amerykańscy kryptolodzy też przez czysto matematyczną analizę złamali japońskie szyfry i wreszcie A. Turing zbudował (w 1943/44) elektroniczny komputer (Colossus, tajny do lat 80. ub. w.) do deszyfrowania niemieckich depesz kodowanych ulepszonymi wersjami Enigmy i zupełnie nowymi Lorentzami – stało się oczywiste, że kryptologia wychodzi z epoki płaszcza i szpady i staje się gałęzią matematyki i informatyki. Wzbudziła ożywione zainteresowanie analityczną teorią liczb, którą mało kto się zajmował, przywróciła blask teorii funkcji eliptycznych, od stu bez mała lat uważanej za zamkniętą księgę, zapoczątkowała prace nad konstrukcją stosunkowo tanich urządzeń do szybkiego operowania na bardzo wielocyfrowych liczbach całkowitych. Dwa wspaniałe odkrycia kryptologii: asymetryczna kryptografia z kluczem publicznym (pozwalająca ujawniać klucz do kodowania, zachowując w tajemnicy klucz do rozkodowania) i podpis elektroniczny (dający gwarancję autentyczności dokumentu i jego autorstwa) zmieniłyby oblicze Internetu, szalenie utrudniając życie oszustom i figlarzom, gdyby tylko były powszechnie dostępne wtedy, gdy tworzyły się protokoły sieciowe. Dodanie ich do sieci teraz wymaga sporych modyfikacji i jest zbyt kosztowne na to, żeby zyskać popularność.



Rozwiązanie zadania F 699.

W czasach Perelmana sądzono, iż piorun realizuje się średnio przy różnicy potencjału 1000 MV, dziś encyklopedie podają tylko 100 MV. Co do natężenia prądu w piorunie, dane są jeszcze bardziej płynne; podaje się, że osiąga średnio 20 kA. Daje to łącznie moc 2 miliony MW, czyli 2 miliardy kW, z czego należy do rachunku wpisać połowę, gdyż potencjał podczas wyładowania spada do zera. Wyładowanie trwa średnio tylko 10^{-4} s, co stanowi $28 \cdot 10^{-9}$ godziny. Łącznie Zeus musi zatem zapłacić za około 28 kWh, czyli 7 euro. Nic więc dziwnego, że – nawet jeśli ma nie najwyższą emeryturę – pozwala sobie czasami na długotrwałe burze.



Rozwiązanie zadania M 1180.

Zauważmy, że

$$(ac + bd)^2 + 1 =$$

$$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = \\ = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Jeśli więc $p > 0$ jest wspólnym dzielnikiem liczb $ac + bd$ i $a^2 + b^2$, to p jest dzielnikiem liczby 1, czyli $p = 1$. To oznacza, że liczby $ac + bd$ i $a^2 + b^2$ są względnie pierwsze.

Najprostszy algorytm sortowania

Rozważmy problem sortowania n -elementowej tablicy $a[1..n]$. Jaki algorytm pozwoli nam zrobić to najprościej? Nie chodzi tu wcale o szybkość, ale o to, by dało się go zaprogramować w kilku liniach, bez żadnego ryzyka popełnienia błędu, nawet jeśli nie jesteśmy akurat w najlepszej dyspozycji umysłowej (zaraz, zaraz, miałem porównać $a[i]$ z $a[i+1]$ czy z $a[i-1]$? czy wewnętrzna pętla miała się obracać, dopóki $i < j$, czy $i \leq j$? oj...).

No więc, który algorytm jest najprostszy? Chyba żaden z działających w czasie $O(n \log n)$ się nie nada. To może sortowanie przez wstawianie albo bąbelkowe? Nic z tego. Najprościej jest tak:

```
sort(a[1..n]) {
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      if a[i] < a[j] then zamień(a[i], a[j]);
}
```

Szybki test: czy ten algorytm sortuje tablicę a rosnąco czy malejąco? Nie jest to jasne na pierwszy rzut oka, podobnie jak to, że tablica w ogóle zostanie jakkolwiek posortowana!

Po chwili zastanowienia stwierdzamy, że powyższy algorytm to jedno z wcieleń sortowania przez wstawianie (Insertion Sort). Na początku i -tego obrotu zewnętrznej pętli fragment $a[1..i-1]$ jest posortowany (rosnąco), a wewnętrzna pętla wstawia w odpowiednie miejsce element $a[i]$, używając i -tej pozycji w tablicy jako „bufora” na przesuwane elementy początkowego fragmentu. Czytelnik łatwo sprawdzi, że wewnętrzna pętla mogłaby zakończyć działanie dla $j=i$, ale jej przedłużenie aż do $j=n$ nic nie pociąga.

Nie jest to specjalnie efektywne, ale za to jakie eleganckie! Prościej już się chyba nie da...

Michał ADAMASZEK

Gry nieskończone

Paweł PARYS*



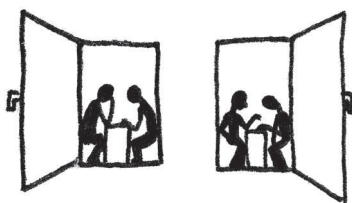
W tym artykule przedstawimy przykład gry, w której żadna strona nie ma strategii wygrywającej, choć każda konkretna rozgrywka kończy się zwycięstwem jednej ze stron.

Słowo „gra” jest dość niejednoznaczne, dlatego ustalmy na początku, o jakich grach będzie mowa, a o jakich nie. Nie będzie na przykład nic o brydżu. W brydżu gracze nie znają kart innych osób, nie ma pełnej informacji. Co więcej, w brydżu grają cztery osoby, a to dla nas za dużo. Będziemy rozważać tylko gry *dwuosobowe, z pełną informacją*, czyli takie, w których każdy gracz wie wszystko o aktualnym stanie gry. Tak jest, na przykład, w szachach lub w grze w kółko i krzyżyk, jednak o tych grach też nie opowiemy, bo możliwy jest w nich remis. Zajmujemy się tylko grami, w których *nie ma remisów*, czyli każda rozgrywka kończy się zwycięstwem jednej ze stron. Takie (być może znane niektórym Czytelnikom) gry to *nim* i *hex*. A oto inny prosty przykład: pierwszy gracz (tradycyjnie będzie nazywany Ewą) mówi liczbę całkowitą, potem drugi z graczy (Adam) mówi inną liczbę i wygrywa ta osoba, czyjej liczba jest większa. Tutaj każda rozgrywka kończy się czymś zwycięstwem.

W tej grze może wygrać każdy z graczy, choć oczywiste jest, że drugi gracz, jeśli tylko chce, może pokonać pierwszego. W takiej sytuacji, gdy gracz może doprowadzić do wygranej niezależnie od zachowania przeciwnika, będziemy mówić, że ma on *strategię wygrywającą*. Jakie mamy możliwości w dowolnej grze? Każdy z graczy może mieć lub nie mieć strategii wygrywającej. Oczywiście, nie mogą jej mieć obaj naraz. Jednak czy może się zdarzyć, że żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej? Intuicyjnie taka sytuacja wydaje się niemożliwa, lecz w rzeczywistości nie jest to wcale takie proste. Jeśli założymy, że każda rozgrywka jest skończona, to można ten fakt dość łatwo udowodnić (przez indukcję). Okazuje się jednak, że jeśli w grze dopuszczamy nieskończenie wiele ruchów, to nie jest to wcale prawdą – istnieje gra, w której żadna strona nie ma strategii wygrywającej.

Czym w ogóle jest *gra nieskończona*? Nie chodzi o to, że gracze nigdy nie skończą grać i dlatego nikt nie wygra. W naszej grze trzeba wykonać wszystkie nieskończenie wiele ruchów, i dopiero wtedy okaże się, kto wygrał. Oto przykład takiej gry: Ewa i Adam na zmianę podają liczby całkowite. Jeśli w powstałym ciągu pojawi się nieskończenie wiele razy liczba 5, to wygrywa Adam, a jeśli nie, to Ewa. Proszę zwrócić uwagę, że tutaj w żadnej chwili gry nie wiemy jeszcze, kto wygra, zwycięzcę można wyłonić dopiero po wszystkich nieskończenie wielu ruchach. Gra ta nie jest jednak specjalnie ciekawa – Adam może mówić cały czas 5 i wygrać niezależnie od posunięć Ewy, ma zatem trywialną strategię wygrywającą.

Teraz skonstruujemy inną grę (to już ta właściwa). Ewa i Adam na przemian podają coraz to większe liczby naturalne. Powiedzmy, że są to $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$, przy czym Ewa podała x_0, x_2, \dots , a Adam x_1, x_3, \dots . Będą to początki i końce przedziałów liczb naturalnych, z lewej strony otwartych, z prawej domkniętych (liczby Ewy otwierają, a liczby Adama zamykają przedziały). Pierwszy przedział to $(x_0, x_1] = \{x_0 + 1, x_0 + 2, \dots, x_1\}$, drugi $(x_2, x_3]$, itd. Suma tych przedziałów to pewien zbiór liczb naturalnych i to na niego będziemy patrzeć po zakończeniu gry.



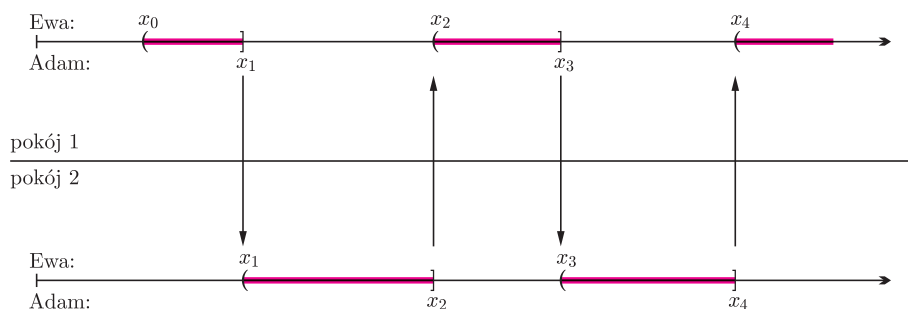
Trzeba już tylko powiedzieć, kto kiedy wygrywa. W tym celu podzielimy wszystkie zbiory liczb naturalnych na „małe” i „duże”. Jeśli wynikowy zbiór będzie duży, to wygra Ewa, a jeśli mały, to Adam. Jak dokonujemy podziału? Chcemy, aby zachodziły następujące, intuicyjne warunki:

- każdy podzbiór zbioru liczb naturalnych jest albo duży, albo mały,
- zbiory skończone są małe,
- jeśli zbiór $U \subset \mathbb{N}$ jest mały, to zbiór pozostałych liczb (czyli $\mathbb{N} \setminus U$) jest duży i odwrotnie,
- jeśli zbiory U i V są małe, to ich suma $U \cup V$ też,
- podzbiór zbioru małego jest mały.

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

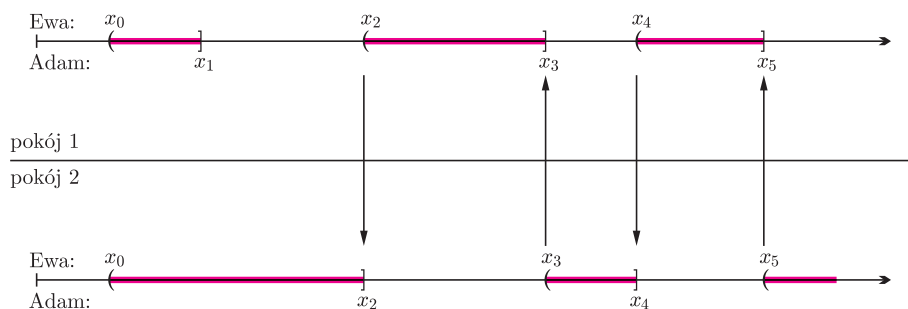
Te warunki mówią nam już, że każdy zbiór, który zawiera prawie wszystkie liczby naturalne (czyli wszystkie oprócz skończenie wielu), jest duży. O zbiorach takich, jak na przykład zbiór liczb parzystych, jeszcze nic nie wiadomo, mamy tu dużą dowolność. Możemy go uznać na przykład za mały, potem uznać za małe wszystkie jego podzbiory i ich sumy z innymi małymi zbiorami, a jako duże ich uzupełnienia. Proszę sprawdzić, że wtedy nic się nie popsuje, żaden zbiór nie będzie musiał być naraz mały i duży. Potem bierzemy kolejny zbiór, o którym jeszcze nic nie wiadomo i powtarzamy operację. Trudność polega na tym, że wszystkich zbiorów jest bardzo, bardzo dużo. Okazuje się jednak, że całą tę klasyfikację można rozszerzyć na wszystkie podzbiory zbioru liczb naturalnych, ale precyzyjny dowód tego faktu pominiemy.

Mamy więc zdefiniowaną grę: Adam wygrywa, gdy suma przedziałów jest zbiorem małym, a Ewa, gdy dużym. Aby pokazać, że żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej, zastosujemy technikę zwaną *podkradaniem strategii*. Będziemy rozgrywać równoległe dwie partie w dwóch pokojach. Przypuścimy najpierw, nie wprost, że Adam ma strategię wygrywającą i zaczniemy dwie rozgrywki, wcielając się w Ewę. W pierwszym pokoju zaczynamy od zrobienia jakiegokolwiek ruchu. Następnie kopiujemy ruchy Adama, tzn. liczbę, którą usłyszymy od Adama, wypowiadamy w drugim pokoju, następnie czekamy w nim na ruch Adama i podaną przez niego liczbę wypowiadamy w pierwszym pokoju i tak dalej.



Adam w obu pokojach z nami wygrywa, bo założyliśmy, że ma strategię wygrywającą. Zatem oba zbiory $(x_0, x_1] \cup (x_2, x_3] \cup \dots$ oraz $(x_1, x_2] \cup (x_3, x_4] \cup \dots$ są małe. Ale wtedy też ich suma, czyli zbiór (x_0, ∞) musiałby być zbiorem małym, co nie jest prawdą, bo zawiera wszystkie liczby oprócz skończenie wielu, czyli jest duży. A zatem sprzeczność, która dowodzi, że Adam nie mógł mieć strategii wygrywającej.

Jeśli Ewa ma strategię wygrywającą, postępujemy podobnie. Teraz w obu pokojach gramy jako Adam. Pierwszy ruch robi Ewa. W pierwszym pokoju pierwszej odpowiedzi udzielamy dowolnie. Następnie w obu kopiujemy ruchy Ewy.



Teraz oba zbiory wynikowe są duże, bo Ewa bez problemów wygrywa. Z warunków o zbiorach dużych i małych wynika, że wtedy zbiór $(x_0, x_1]$ jest duży (jest on przecięciem zbiorów dużych). To jednak niemożliwe, bo zawiera skończenie wiele liczb. Zatem i tym razem dostajemy sprzeczność.

Ostatecznie więc w naszej grze żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej. Mamy więc grę, w którą można sobie ciekawie pograć: nikt nie może mieć pewności, że nas ogra, a jednocześnie my też nie umiemy z każdym wygrać. Trzeba tylko nauczyć się wykonywać każdy ruch dwa razy szybciej niż poprzedni...

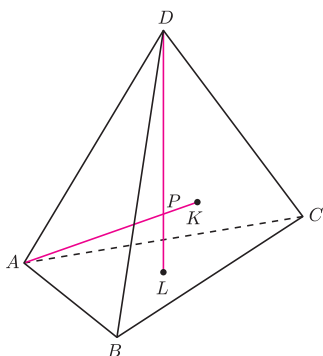
Nasze warunki oznaczają, że rodzina zbiorów „dużych” ma stanowić tzw. *ultrafiltr*, który zawiera wszystkie zbiory o skończonych dopełnieniach. Dowód istnienia takiego ultrafiltru jest niekonstruktywny, wymaga pewnika wyboru. Jeżeli odrzucić pewnik wyboru, to gry bez strategii wygrywającej nie da się w ogóle skonstruować.



Rozwiązanie zadania M 1181.

Odp.: Nie w każdym czworoboku wysokości przecinają się w jednym punkcie.

Niech $ABCD$ będzie czworobokiem oraz przyjmijmy, że wysokości AK i DL przecinają się w punkcie P .



Ponieważ prosta AK jest prostopadła do płaszczyzny BCD , więc $AK \perp BC$. Analogicznie $DL \perp BC$. Stąd wynika, że płaszczyzna wyznaczona przez wysokości AK i DL jest prostopadła do prostej BC , skąd w szczególności otrzymujemy $AD \perp BC$.

Jeśli zatem $ABCD$ jest czworobokiem, w którym przeciwległe krawędzie AD i BC nie są prostopadłe, to wysokości poprowadzone z wierzchołków A i D nie mają punktów wspólnych.

Uwaga: Można wykazać, że wysokości czworoboku przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwie przeciwległe krawędzie tego czworoboku są prostopadłe. Takie czworoboki noszą nazwę *czworoboków ortocentrycznych*.



Defilada z komputera

Pułkownicy, Czerwony i Niebieski, spotykają się na naradzie u Generała.

– Rozkazuję zorganizować wspólną defiladę pododdziału Czerwonych Beretów i pododdziału Niebieskich Beretów – mówi Generał.

– Tak jest, Panie Generale – odpowiadają zgodnie pułkownicy Czerwony i Niebieski.

– Czerwone Berety mają iść tuż za Niebieskimi Beretami. Dla porządku wszystkie szeregi mają mieć równą, jak największą, liczbę żołnierzy – kontynuuje Generał.

– Tak jest, Panie Generale.

– Proszę uzgodnić szczegóły – mówi Generał i wychodzi z pokoju.

– Zobaczymy, ilu mamy razem żołnierzy – mówi pułkownik Niebieski.

– U mnie jest 56.

– A u mnie 77, więc razem 133 – odpowiada pułkownik Czerwony.

– Nie tak łatwo będzie ustawić żołnierzy w równolicznych szeregach – zauważa pułkownik Niebieski.

– Jeśli przyjmę, że ty potrafisz ustawić swoich 56 żołnierzy w określonym szyku, to i ja będę umiał ustawić taką samą część moich żołnierzy, więc pozostanie mi już tylko 77 minus 56 równa się 21, których ustawienie będę musiał uzgodnić z tobą – spostrzega po chwili pułkownik Czerwony.

– A skoro ty potrafisz ustawić swoich 21 żołnierzy, to i ja będę mógł ich odliczyć, co da mi 56 minus 21 równa się 35 żołnierzy do uzgodnienia z tobą – mówi Niebieski.

– Spróbuj jeszcze raz odjąć moich żołnierzy od swoich, bo ja mam ich mniej – radzi po chwili pułkownik Czerwony.

– Po odjęciu zostanie mi ich tylko czternastu – posłusznie wykonuje prośbę Niebieski. – Teraz ja odejmę tych twoich czternastu i zostanie mi siedmiu – mówi Czerwony.

– Mnie też zostało siedmiu – zauważa Niebieski.

– A więc mamy rozwiązanie, możemy ustawić po siedmiu żołnierzy w rzędzie – mówi uradowany Czerwony.

Nagle drzwi otwierają się i wpada Generał.

– Panowie, to ma być porządna defilada, więc rozkazuję, by wzięły w niej udział całe oddziały – krzyknął Generał i wyszedł.

– Ja mam 1001 żołnierzy w oddziale. A ty ilu masz? – pyta Czerwony.

– Ja mam 1089. Czeka nas długi wieczór liczenia – spostrzega Niebieski.

– A co będzie, jak znowu wpadnie Pan Generał z nowym pomysłem? Albo w ostatniej chwili ktoś się rozchoruje? – martwi się Czerwony.

– Wiesz, mam pomysł – mówi Niebieski – Mam w biurze komputer. Zaprogramujemy naszą metodę i już zawsze komputer nam to szybko rozwiąże.

– Dobry pomysł. Prowadź.

Algorytm Euklidesa

Zadanie postawione przez Generała jest równoważne znajdowaniu największego wspólnego dzielnika dwóch liczb. Podana metoda zwana jest algorytmem Euklidesa i została wynaleziona prawie 2400 lat temu. Jest jednym z najstarszych pomysłów na optymalizację jakiegoś zagadnienia.

Po chwili obaj pułkownicy siedzą przed komputerem w biurze Niebieskiego.

– Musimy najpierw ustalić komórki na obliczane wartości – mówi Niebieski, wpisując słowa *Czerwony* i *Niebieski*.

– Ale może byłyby potrzebne dwa komputery, skoro zadanie rozwiązywaliśmy we dwóch? – pyta Czerwony.

– Wystarczy jeden. Przecież pracowaliśmy na zmianę. A to mógłbym już teraz robić sam – odpowiada Niebieski. – Pamiętasz, że powtarzaliśmy nasze obliczenia tak długo, aż obie liczby zrównały się... Teraz wpisujemy operacje, które komputer będzie musiał wykonywać – kontynuuje Niebieski i zapisuje na klawiaturze „Jak długo *Czerwony* różny od *Niebieski* wykonuj:”.

– A teraz od większej odejmij mniejszą – radzi Czerwony.

– Słusznie. Ale najpierw muszę sprawdzić, która jest większa. Zapiszę więc „Jeśli *Czerwony* jest większe niż *Niebieski*, to pomniejsz *Czerwony* o wartość *Niebieski*, inaczej pomniejsz *Niebieski* o wartość *Czerwony*” – mówi Niebieski.

– Teraz każ mu obliczyć – mówi Czerwony. Niebieski posłusznie nakazuje komputerowi liczenie według zadanego programu. Ale komputer uparcie milczy.

– Racja, przecież zapomnieliśmy o zaprogramowaniu naszej komunikacji z komputerem – mówi Niebieski.

– Najpierw wpisujemy instrukcje, które zapytają nas o dane – kontynuuje Niebieski i pisze: „czytaj *Czerwony* i czytaj *Niebieski*”.

– A teraz instrukcje wyjścia – mówi dalej i pisze „wypisz *Czerwony*”.

Oto wersja programu zapisana w języku Pascal:

```
program Defilada;
var Czerwony, Niebieski:integer;
begin
  write('Podaj liczbę Czerwonych Beretów: ');
  read(Czerwony);
  write('Podaj liczbę Niebieskich Beretów: ');
  read(Niebieski);
  while Czerwony <> Niebieski do
    if Czerwony > Niebieski
    then Czerwony := Czerwony - Niebieski
    else Niebieski := Niebieski - Czerwony;
  writeln('Liczba żołnierzy w rzędzie:', Czerwony);
end.
```



Po ponownym uruchomieniu programu komputer pyta o liczby. Niebieski wpisuje 56 i 77, a komputer posłusznie wyświetla 7.

– Działa! Działa! – okrzyki Niebieskiego i Czerwonego zagłusza telefon od Generała.

– Ilu żołnierzy w rzędzie będzie maszerowało na defiladzie? – pyta Generał.

– Chwileczkę, Panie Generale – Niebieski błyskawicznie uruchamia program i wpisuje 1001 i 1089.

– Jedenastu – odczytuje liczbę wyświetlaną na monitorze.

– To doskonale – odpowiada Generał.

Dane z czarnej skrzynki

Pod koniec czerwca sporządzono raport na temat wypadku, któremu uległ bolid Roberta Kubicy w czasie wyścigu w Montrealu. Dominantą przekazów prasowych była informacja o maksymalnym przeciążeniu wynoszącym $a = 75$ g przez około milisekundę ($\Delta t = 1$ ms) po uderzeniu w ścianę toru z prędkością $v = 230$ km/h. Dane te pochodzą z urządzenia ADR (ang. *accident data recorder*), czarnej skrzynki bolidów F1. Jest ono montowane za fotelem kierowcy. Rejestruje parametry pracy samochodu, w tym wskazania grawimetrów.

W oficjalnej informacji dla prasy podkreślano perfekcyjne funkcjonowanie wszystkich systemów bezpieczeństwa, które uratowało Polakowi życie.

Nie ma wątpliwości, że wypadek wyglądał przerażająco. Wyjście z niego z życiem i to w dodatku praktycznie bez szwanku sprawia wrażenie cudu.

Szkiełko i oko podpowiada jednak, że niewątpliwie szczęście niewiele ma wspólnego z podanymi do publicznej wiadomości liczbami, które nie powinny na fizyku zrobić większego wrażenia. Spróbujmy sobie przypomnieć dlaczego.

W literaturze lotniczej można znaleźć informacje na temat maksymalnych stałych przeciążeń, którym może być poddany pilot, bez groźby utraty zdrowia. Wynoszą one niecałe 10 g przy siłach działających w kierunku nóg lub wciskających pilota w fotel, ale o wiele mniej w przypadku siły działającej w kierunku głowy. Oszacowania te, poparte doświadczeniami pilotów (na pilotach?), wiążą się z zachowaniem krwi, która w pierwszym przypadku odpływa z mózgu, powodując utratę przytomności, a w drugim uderza do mózgu, rozrywając naczynia krwionośne, poczynając od siatkówki oka.

Porównanie maksymalnego przeciążenia, któremu poddany był bolid Kubicy, z maksymalnym dopuszczalnym dla pilotów sugeruje niezwykłość przypadku Polaka. Tylko że takie porównywanie wprowadza w błąd. Maksymalne wartości przeciążenia nie mają wiele wspólnego ze śmiertelnością w wyniku różnego rodzaju kraks. To, co niszczy pojazdy, a w konsekwencji może pozbawiać zdrowia i życia ludzi, to kumulacja energii sprężystości. Aby doszło do zniszczenia, zarówno moc (czyli pochodna przekazu energii względem czasu), jak i czas trwania impulsu, muszą być odpowiednio duże.

Główne powody nieszczęśliwych skutków wypadków, dotyczących podróżujących zwykłymi samochodami, to zmiążdżenia i bezpośrednie uderzenia, np. głową w element pojazdu. W sporcie samochodowym są one w znacznym stopniu wyeliminowane, głównie dzięki ekstremalnej trwałości kokpitów (tzw. klatek bezpieczeństwa) i sztywnym złączeniu pilotów

z fotelami. Stąd bierze się zadziwiająca dla laika żywotność pilotów. Mówiąc obrazowo, zwykły kierowca lub pasażer podczas zderzenia są narażeni na uderzenie młotem, a kierowcy sportowi zaledwie na uderzenie młotem gumowym.

Nie sposób jednak zabezpieczyć kierowcy przed energią, przekazywaną mu przez zderzający się pojazd poprzez fotel i system pasów. Niszcząca jest kumulacja energii w danym miejscu ciała. Dla przykładu weźmy pod uwagę serce kierowcy. Możemy je rozpatrywać jako ciężarek zamocowany za pomocą systemu sprężyn do szkieletu. Jego wychylenie z położenia równowagi ponad pewną wartość, rzędu kilku centymetrów, spowoduje nieodwracalne szkody. Do zaistnienia takiego przesunięcia potrzebny jest odpowiednio intensywny przekaz energii. Problematyczne jest jednak choćby ustalenie „stałej sprężyny”, ale żeby unaocznić, iż podane w prasie informacje nie świadczą o potencjalnym zagrożeniu życia Roberta Kubicy, nie będzie to potrzebne. Jeżeli przyjmiemy, że serce jest zamocowane swobodnie, to otrzymać możemy tylko większe, a więc bardziej groźne przesunięcie. Łatwo obliczyć, że przy takim podejściu to maksymalne wychylenie wynosiło nie więcej niż $\Delta s = \frac{1}{2}a \cdot (\Delta t)^2 = 0,4$ mm, natomiast uzyskana w wyniku przyspieszenia prędkość serca względem szkieletu nie przekraczała $\Delta v = a \cdot \Delta t = 0,7$ m/s. Wniosek jest prosty. Do prasy nie zostały przekazane żadne istotne informacje dotyczące wypadku (bo chyba szkoda nawet przypominać, że sama prędkość w chwili pierwszego zetknięcia się bolidu z barierą nie ma żadnego znaczenia).

Żeby umożliwić zorientowanie się, czy Polak był narażony na poważny uszczerbek zdrowia, należałoby podać wykres z zapisem grawimetrycznym lub przynajmniej zgrubną jego charakterystykę, jak choćby przedział czasu, w którym przeciążenie przekraczało np. 20 g. Tylko że wtedy „news”, zyskując wartość informacyjną, straciłby swoją medialność...

Robert Kubica miał szczęście, że jego wypadek był tak spektakularny. Dzięki temu jego bolid wytracał energię stopniowo. Gdyby kraksa miała tylko jeden akt, Polak mógłby pożegnać się z życiem. W przypadku takiego pojedynczego zderzenia z trwałą przeszkodą jest sens mówić o średnim przeciążeniu, które można, po fakcie, ustalić, znając prędkość początkową i mierząc deformację bolidu, czyli „drogę hamowania”. Rekordową wartość tak obliczonego przeciążenia: 179,8 g przeżył w 1977 roku brytyjski kierowca David Purley, uderzając w czasie treningu z prędkością 174 km/h w barierę toru w Silverstone, po zablokowaniu się pedału gazu. Jego bolid zatrzymał się wtedy na drodze zaledwie 65 cm.

Piotr ZALEWSKI

O dwóch równoważnych problemach

Jakub RADOSZEWSKI*

Autor podaje przykład (a w zasadzie dwa przykłady) *redukcji* jednego problemu do drugiego. Redukcja jest techniką pozwalającą porównywać złożoność obliczeniową różnych zadań i dowodzić dolnego ograniczenia na tę złożoność. Klasycznym przykładem jest redukcja problemu sortowania do problemu znajdowania otoczki wypukłej na płaszczyźnie, która pokazuje, że nie można znaleźć otoczki n punktów szybciej niż w czasie $O(n \log n)$. O klasę złożoności wyżej plasują się wielomianowe redukcje dowodzące NP-zupełności trudnych problemów.

RMQ i LCA. RMQ i LCA to dwa klasyczne zagadnienia algorytmiczne, które nierzadko okazują się podproblemami w praktycznych zastosowaniach algorytmiki. Z pozoru nie mają one ze sobą nic wspólnego, jednakże pokażemy, że są w istocie równoważne, czyli że można efektywnie przekształcić rozwiązanie dowolnego z nich, tak by rozwiązywało ono drugie z tych zagadnień.

W zagadnieniu **RMQ** (ang. range minimum query) mamy dany n -elementowy ciąg liczbowy a_1, \dots, a_n i musimy umieć szybko odpowiadać na zapytania $RMQ(i, j)$ o minimalny element fragmentu tego ciągu $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j$, wyznaczonego przez i -ty i j -ty jego wyraz. Wyjaśnijmy to na przykładzie; dla ciągu 7, 3, 4, 1, 6, 8, 2, 5 możliwe są między innymi następujące zapytania:

- $RMQ(6, 8)$ – odpowiedzią jest siódmy element ciągu równy 2,
- $RMQ(1, 8)$ – jest to równoważne z szukaniem minimum całego ciągu, czyli elementu 1.

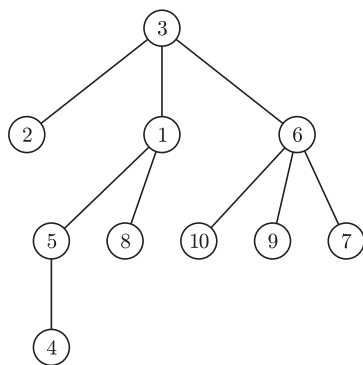
Problem **LCA** (ang. lowest common ancestor) dotyczy z kolei drzew ukorzenionych, których wierzchołki numerujemy liczbami od 1 do n .

Więcej o drzewach można przeczytać w książce Wilsona „Wprowadzenie do teorii grafów”.

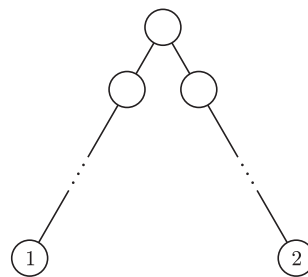
Dla danego drzewa chcemy odpowiadać na zapytania $LCA(i, j)$ o najniższego wspólnego przodka (czyli przodka najbardziej oddalonego od korzenia drzewa) danych wierzchołków i oraz j . Nasze drzewo możemy reprezentować, pamiętając w każdym węźle ojca tego węzła, a także listę wszystkich jego dzieci. Dla przykładowego drzewa (rys. 1) mamy następujące wyniki poniższych zapytań:

- $LCA(4, 8)$ to wierzchołek o numerze 1,
- $LCA(10, 2)$ odpowiada korzeniowi drzewa (numer 3),
- $LCA(6, 7) = 6$ – poszukiwanym przodkiem może być jeden z wierzchołków z zapytania.

W obu problemach poszukujemy struktury danych, którą będziemy w stanie efektywnie skonstruować i dzięki której odpowiadanie na żądane zapytania będzie mogło odbywać się (znacznie) szybciej niż w najbardziej siłowy sposób. W przypadku RMQ najprostszy algorytm polegałby na każdorazowym przeglądaniu zadanego fragmentu ciągu, a w LCA – na przechodzeniu z obydwu węzłów do korzenia drzewa (obsługa zapytań $RMQ(1, n)$ w pierwszym przypadku i $LCA(1, 2)$ dla drzewa z rysunku 2 wymagałyby wówczas wykonania po $O(n)$ operacji).



Rys. 1



Rys. 2



Rozwiązanie zadania F 700.

Ponieważ Ziemia się obraca, więc na równiku występuje przyspieszenie odśrodkowe równe $\frac{v^2}{r}$, gdzie v to prędkość punktu równika (czyli 40 000 km na dobę), a r to promień Ziemi (czyli 6 356,8 km) – zmniejsza ono przyciąganie ziemskie. Po przeliczeniu okazuje się, że niedobór wagi wyniesie około 5 gramów. Zatem nawet złoto kupowane na równiku, a sprzedawane na biegunie, nie przyniosłoby zysku pokrywającego koszty transportu. Sytuację trochę poprawia uwzględnienie faktu, że promień równikowy jest większy od biegunowego – przy optymistycznym rachunku różnica może wynieść kolejne 5 gramów.

Od RMQ do LCA. Dla danego ciągu a_1, \dots, a_n pokażemy algorytm, za pomocą którego przekształcimy ten ciąg do drzewa takiego, że odpowiedzi na zapytania postaci $RMQ(i, j)$ dla ciągu będziemy mogli uzyskać za pomocą

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

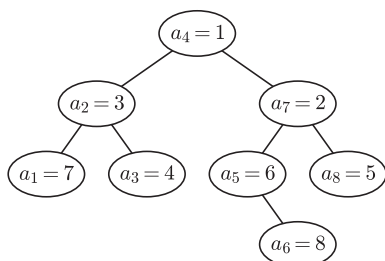
odpowiednich zapytań $LCA(i', j')$ dla i', j' będących numerami pewnych wierzchołków drzewa. Poszukiwaną strukturą jest tak zwane *drzewo kartezyjskie*, będące drzewem binarnym (każdy węzeł ma co najwyżej dwoje dzieci) o następujących właściwościach:

- węzły są ponumerowane liczbami od 1 do n , z czego i -ty węzeł drzewa odpowiada wyrazowi a_i ciągu,
- wyrazy ciągu odpowiadające potomkom węzła i są dla każdego i nie mniejsze od a_i , (*)
- numery potomków lewego dziecka węzła i są mniejsze od i , a numery potomków prawego dziecka i – większe od i (do potomków węzła wliczamy też sam węzeł). (**)

Dla zaznajomionych z klasycznymi strukturami danych oznacza to tyle, że drzewo kartezyjskie jest kopcem binarnym ze względu na wartości węzłów (wartości odpowiadających im elementów ciągu), a drzewem poszukiwań binarnych (BST) ze względu na ich numery. Drzewo kartezyjskie dla ciągu

7, 3, 4, 1, 6, 8, 2, 5

jest przedstawione na rysunku 3.



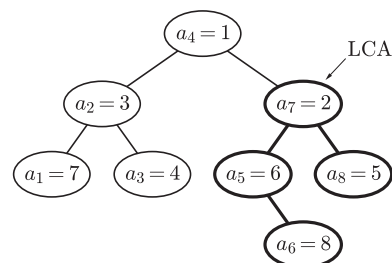
Rys. 3

Czemu to działa? Twierdzymy, że po skonstruowaniu drzewa kartezyjskiego dla ciągu a_1, \dots, a_n zapytanie $RMQ(i, j)$ można zasymulować przez $LCA(i, j)$ (zakładamy odtąd, że $i \leq j$). Sprawdźmy najpierw na przykładzie, że to rzeczywiście działa, przypominając sobie przykładowe zapytania RMQ dla naszego ciągu: rzeczywiście

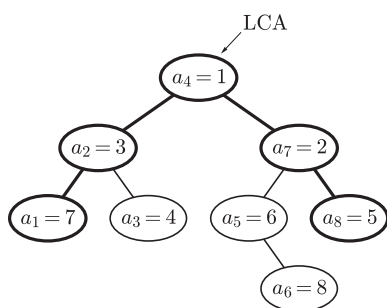
$$RMQ(6, 8) = LCA(6, 8) = a_7 = 2 \text{ (rys. 4),}$$

a także

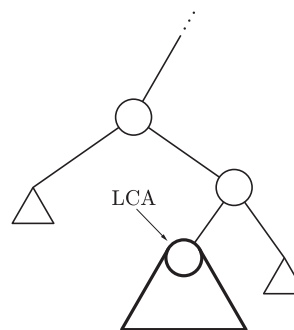
$$RMQ(1, 8) = LCA(1, 8) = a_4 = 1 \text{ (rys. 5).}$$



Rys. 4



Rys. 5

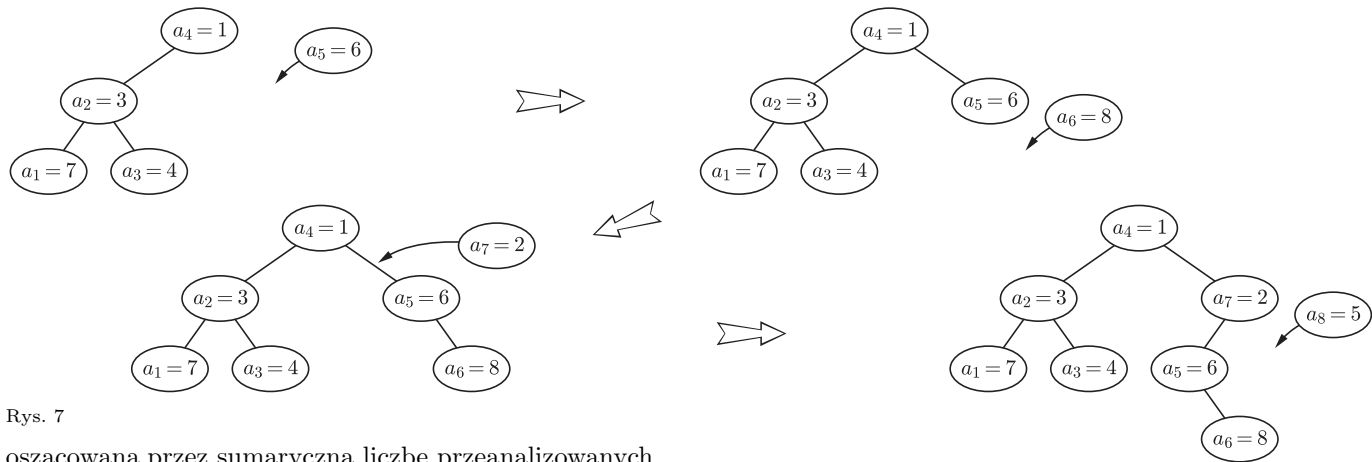


Rys. 6

Czytelnik na pewno sam poradzi sobie z dowodem, że $LCA(i, j)$ jest elementem żądanego podciągu a_i, \dots, a_j . Pozostaje więc pokazać, że węzły odpowiadające wszystkim elementom podciągu a_i, \dots, a_j są potomkami $LCA(i, j)$ – to wobec własności (*) uzasadni, że $LCA(i, j)$ jest minimalną wartością w tym podciągu. Zauważmy więc, że wszystkie pozostałe wierzchołki drzewa albo leżą na ścieżce od $LCA(i, j)$ do korzenia drzewa, albo są potomkami tego typu wierzchołków, ale z „przeciwną gałęzią” niż ta prowadząca z $LCA(i, j)$ (rys. 6). Jeżeli ścieżka prowadząca od $LCA(i, j)$ do korzenia wchodzi do danego węzła od strony lewego syna, to widzimy, że numery tego węzła i wszystkich potomków jego prawego syna są większe od j , czyli nie mieszczą się w zadanym fragmencie ciągu. W przypadku prawostronnym analogicznie wnioskujemy, że numery rozważanych wierzchołków są mniejsze niż i , co kończy dowód.

Jak szybko to działa? Trzeba jeszcze pokazać, jak szybko można skonstruować drzewo kartezyjskie dla danego ciągu. Budowanie drzewa będzie się odbywało metodą przyrostową, dokładniej, będziemy dokładać węzły odpowiadające kolejnym elementom ciągu. Nietrudno zauważyć, że w każdym kroku dokładany węzeł a_i będzie się znajdował na najbardziej prawostronnej ścieżce drzewa. Dlatego też odpowiednie miejsce dla a_i znajdziemy, poruszając się od najniższego węzła prawostronnej ścieżki drzewa aż do napotkania węzła z wartością mniejszą od a_i albo aż do wyczerpania węzłów na ścieżce. W pierwszym z tych przypadków prawym synem znalezionej węzła uczynimy węzeł zawierający a_i , a całą pozostałą część ścieżki podepnimy do a_i od lewej strony, w drugim zaś a_i uczynimy korzeniem drzewa, a całe dotychczasowe drzewo podepnimy do niego z lewej strony (przykład działania algorytmu na rys. 7).

Na pierwszy rzut oka widzimy jedynie, że w każdym kroku algorytmu wykonywanych jest co najwyżej n kroków w górę wzdłuż prawostronnej ścieżki, a zatem jego złożoność czasową możemy oszacować przez $O(n^2)$. Jest to jednak bardzo zgrubne oszacowanie. Jeżeli w każdym kroku będziemy pamiętali najdalszy od korzenia węzeł ścieżki prawostronnej drzewa, to w takim przypadku łączna liczba kroków algorytmu może zostać



Rys. 7

oszacowana przez sumaryczną liczbę przeanalizowanych wierzchołków ścieżek prawostronnych. Skoro jednak raz przejrany wierzchołek na zawsze przestaje się już znajdować na ścieżce prawostronnej, a także każdy wierzchołek zostaje do niej dodany dokładnie raz, to łączna liczba kroków algorytmu może zostać oszacowana przez sumaryczną liczbę wierzchołków drzewa, czyli $O(n)$.

Ostatecznie udało nam się sprowadzić rozwiązywanie RMQ do zagadnienia LCA, tak że złożoność czasowa przejścia jest liniowa względem rozmiaru problemu (n), czyli praktycznie najszybciej, jak się nam mogło udać.

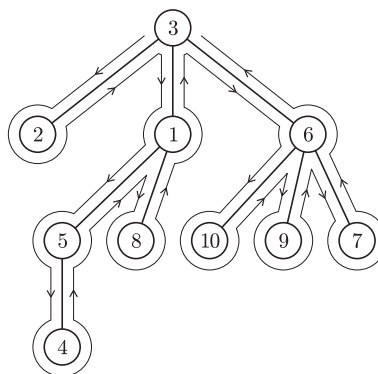
Od LCA do RMQ. Sprowadzenie w tę stronę jest nieco łatwiejsze niż w przeciwną. Tym razem naszym zadaniem jest przekształcenie danego drzewa w pewien ciąg liczbowy tak, aby zapytania postaci $LCA(i, j)$ dały się łatwo zapisać w postaci zapytań $RMQ(i', j')$ dla skonstruowanego ciągu. W pierwszym kroku wykonamy przeszukiwanie drzewa w głąb, rozpoczynając od korzenia i za każdym razem, kiedy znajdziemy się w jakimś wierzchołku, dopiszemy go na koniec listy wynikowej wraz z jego głębokością (korzeń drzewa ma głębokość 0).

Więcej o przeszukiwaniu w głąb można przeczytać w książce Cormen, Leiserson, Rivest, Stein „Wprowadzenie do algorytmów”.

Dla drzewa z rysunku 1 wynikiem tego przeszukiwania będzie lista: (3, 0), (2, 1), (3, 0), (1, 1), (5, 2), (4, 3), (5, 2), (1, 1), (8, 2), (1, 1), (3, 0), (6, 1), (10, 2), (6, 1), (9, 2), (6, 1), (7, 2), (6, 1), (3, 0) (patrz rys. 8).

Na powyższej liście liczba wystąpień każdego wierzchołka jest równa liczbie jego dzieci powiększonej o jeden. Łączny rozmiar tej listy jest więc równy liczbie krawędzi drzewa (łączna liczba wszystkich dzieci) powiększonej o liczbę jego wierzchołków (suma jedynek), czyli $2n - 1$; podobnie całe przeszukiwanie ma złożoność czasową liniową względem rozmiaru drzewa. Okazuje się, że otrzymana lista jest poszukiwanym przez nas ciągiem! Zapytanie $LCA(i, j)$ obsłużymy, identyfikując jakiegokolwiek wystąpienia par (i, g_i) i (j, g_j) (g_x to głębokość węzła x) na liście, zapytując o RMQ na przedziale przez nie wyznaczonym (minimalizujemy drugi element pary, czyli głębokość węzła) i jako poszukiwanego najniższego wspólnego przodka przyjmując pierwszy element znalezionej pary. Czytelnik

łatwo sprawdzi, że każde z wcześniej omówionych przykładowych zapytań LCA zostanie dla naszego drzewa prawidłowo obsłużone, a wynikami będą odpowiednio pary: (1, 1), (3, 0) i (6, 1).



Rys. 8

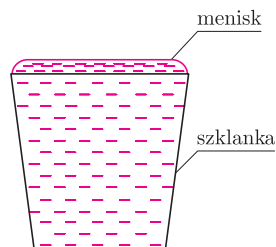
Jeżeli dla każdego węzła drzewa będziemy pamiętać położenie któregośkolwiek jego wystąpienia na liście, to koszt czasowy zapytania LCA będzie dokładnie taki sam, jak koszt odpowiadającego mu RMQ. Pozostało więc odpowiedzieć na pytanie, czy nasze sprowadzenie jest rzeczywiście poprawne. W tym celu przede wszystkim zauważmy, że LCA rozważanych węzłów będzie zawsze występował w podciągu o końcach wyznaczonych przez (i, g_i) i (j, g_j) . Faktycznie, jeżeli tym LCA jest któryś z węzłów i, j , to stwierdzenie to jest oczywiste, a w przeciwnym przypadku ścieżki prowadzące od i oraz j do ich LCA wchodzą przez różne jego dzieci (inaczej nie byłby to najniższy wspólny przodek), czyli między zagłębieniami rekurencyjnymi algorytmu przeszukiwania dochodzącymi do i oraz do j wierzchołek odpowiadający LCA zostanie wypisany. Podobnie można pokazać, że żaden wierzchołek o mniejszej głębokości nie może się w tym przedziale znaleźć, co ostatecznie dowodzi, że poszukiwane LCA będzie znalezionym RMQ.

Wnioski. Pokazaliśmy algorytmy sprowadzające RMQ do LCA i z powrotem w złożoności czasowej $O(n)$, co pozwala nam stwierdzić, iż te dwa problemy są rzeczywiście równoważne. Pozostało nam teraz znalezienie efektywnego rozwiązania któregośkolwiek z tych zagadnień. Tym jednak zajmiemy się w listopadowym numerze *Delty*.

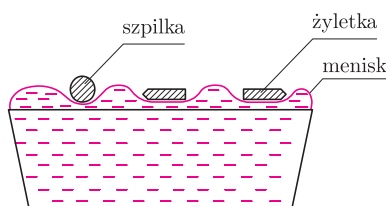
Wyznaczamy współczynnik napięcia powierzchniowego

Stanisław BEDNAREK

Zacniemy od dość zadziwiającego doświadczenia. Do szklanki nalewamy wody. Kiedy szklanka będzie już prawie pełna, wodę wlewamy powoli cienkim strumieniem, tak żeby poziom wody wznosił się ponad brzeg szklanki (rys. 1). Mówimy, że woda tworzy wtedy menisk wypukły. Co się stanie, jeżeli na takiej wypukłej powierzchni wody położymy żyłkę lub kilka szpilek? Pierwsza odpowiedź, która przychodzi nam na myśl, jest taka, że przedmioty te zatoną, a pewna ilość wody wyleje się ze szklanki. Wiemy przecież, że gęstość stali, z której wykonana jest żyłka lub szpilka, jest kilka razy większa od gęstości wody i przedmioty te nie mają prawa pływać w wodzie.



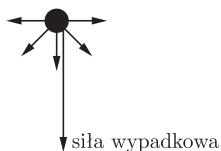
Rys. 1. Menisk wypukły w szklance wody.



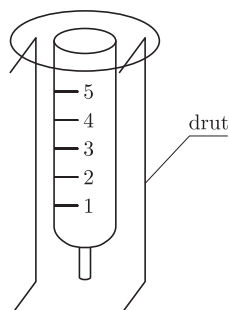
Rys. 2. Żyłka i szpilka utrzymujące się na wodzie dzięki napięciu powierzchniowemu.



Rys. 3. Wypadkowa siła działająca na cząsteczkę w głębi cieczy jest równa zeru.



Rys. 4. Wypadkowa siła działająca na cząsteczkę przy powierzchni cieczy nie jest zerem.



Rys. 5. Stojak z drutu do ustawienia cylindra strzykawki.

Położymy jednak ostrożnie i poziomo żyłkę na powierzchni wody. To samo zrobimy ze szpilekami. Okaze się, że przedmioty te nie zatoną, lecz będą utrzymywały się na wodzie, uginając jej powierzchnię, która wygląda, jakby tworzyła jakąś błonę pokrywającą wodę (rys. 2). Oczywiście, jeżeli ciężar przedmiotów będzie zbyt duży, tak że przekroczy wytrzymałość błony, wówczas ulegnie ona przerwaniu i położone na niej przedmioty zatoną. Zjawisko tworzenia się błony na powierzchni swobodnej cieczy jest nazywane napięciem powierzchniowym.

Zjawisko to tłumaczy się asymetrycznym oddziaływaniem cząsteczek cieczy na cząsteczki znajdujące się w warstwie przypowierzchniowej. Na cząsteczki znajdujące się w głębi cieczy pozostałe cząsteczki oddziałują symetrycznie ze wszystkich stron, tak że wypadkowa siła działająca na nie równa jest zeru (rys. 3). Na cząsteczki znajdujące się przy powierzchni cieczy działa wypadkowa siła wciągająca je w głąb cieczy. Dlatego cząsteczki te tworzą warstwę zwaną błoną powierzchniową (rys. 4). Wielkość fizyczną równą stosunkowi siły potrzebnej do rozerwania błony powierzchniowej do długości tego rozerwania nazywamy napięciem powierzchniowym. Wyznaczenie tego współczynnika będzie przedmiotem naszego doświadczenia.

Do doświadczenia potrzebny będzie plastikowy cylinder od strzykawki lekarskiej o pojemności 5–10 cm³, niewielkie naczynko szklane, np. kieliszek, kawałek miękkiego drutu o średnicy około 1 mm i długości około 25 cm, cienka plastikowa rurka, np. kawałek wkładu od długopisu lub gruba igła do strzykawki, plastelina i suwmiarka. Z drutu wyginamy stojak do ustawienia strzykawki (rys. 5). Otwór wylotowy strzykawki zmniejszamy, tak żeby po napełnieniu strzykawki wodą wypływały z niej pojedyncze krople. Można to osiągnąć kilkoma sposobami: nakładając na wylot strzykawki obciętą igłę na długość około 1 cm, wciskając w otwór strzykawki kawałek plastikowej rurki lub rurki uformowanej z plasteliny.

Założmy dla uproszczenia, że najmniejsza średnica kropli przed oderwaniem się jest równa średnicy rurki. Siła napięcia powierzchniowego F_n utrzymująca kroplę wyraża się wzorem (rys. 6)

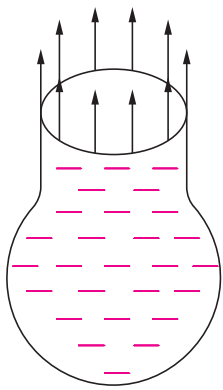
$$(1) \quad F_n = \alpha \pi d,$$

w którym: α – współczynnik napięcia powierzchniowego wody, d – średnica wewnętrzna rurki. Wiadomo, że tuż przed oderwaniem siła F_n jest równa ciężarowi kropli Q , który wyraża się wzorem

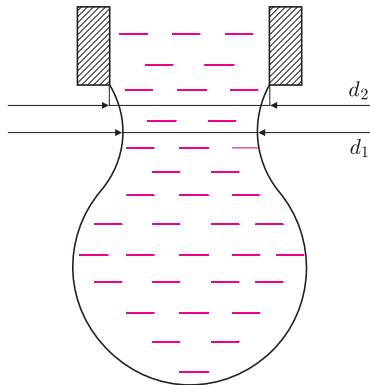
$$(2) \quad Q = V \rho g,$$

gdzie: V – objętość kropli, ρ – gęstość cieczy, g – przyspieszenie ziemskie ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Objętość kropli obliczamy, dzieląc objętość cieczy, która wypłynęła ze strzykawki V_c , przez liczbę kropli n

$$(3) \quad V = \frac{V_c}{n}.$$



Rys. 6. Siły napięcia powierzchniowego utrzymujące kroplę tuż przed jej oderwaniem.



Rys. 7. Bardziej realistyczny kształt kropli.

Porównując wzory (1) i (2) oraz podstawiając wzór (3) po prostym przekształceniu, otrzymujemy wzór

$$(4) \quad \alpha = \frac{V_c \rho g}{\pi d n}$$

Gęstość wody ρ dla danej temperatury odczytujemy z tablic fizycznych. Objętość wody, która wypłynęła, V_c , odczytujemy z podziałki na strzykawce. Liczbę kropli n łatwo policzyć. Pewnym problemem jest wyznaczenie średnicy wewnętrznej rurki – można ją zmierzyć przy użyciu suwmiarki, posługując się ostrożnie szczękami do pomiarów wewnętrznych. Ostrożne użycie tych szczęk jest konieczne w przypadku zżęzenia końcówki strzykawki przy użyciu plasteliny – chodzi o to, żeby nie zdeformować szczękami suwmiarki miękkiej końcówki.

Opisana metoda wyznaczania współczynnika napięcia powierzchniowego cieczy nosi nazwę metody stalagmometrycznej, pochodzącej od greckiego słowa *stalagma*, co oznacza kropla. Mimo swojej prostoty zapewnia ona osiągnięcie dość dokładnych wyników. Pozwala np. wykryć wpływ zmiany temperatury o około 10°C lub domieszki do wody płynu do mycia naczyń na wartość współczynnika napięcia powierzchniowego. Warto więc przeprowadzić te dwa pouczające pomiary samodzielnie.

Dokładniejsze obserwacje, które możemy przeprowadzić, oglądając tworzącą się kroplę przez lupę, wykazują, że tuż przed oderwaniem się kropli ma ona średnicę nieco mniejszą niż średnica wewnętrzna rurki, z której ona wypływa (rys. 7). Dlatego we wzorze (1) należałoby uwzględnić współczynnik poprawkowy mniejszy od jedności opisujący przewężenie kropli. Współczynnik ten określa się, rzutując powiększony cień kropli na ekran i mierząc średnicę najwęższej części kropli i jej średnicę tuż przy końcu rurki, z której kropla wypływa, a następnie obliczając stosunek tych dwóch wielkości d_1/d_2 . Analizując wzory (1) i (4), łatwo przekonujemy się, że bez współczynnika poprawkowego na przewężenie kropli wzór (4) daje zaniżone wartości współczynnika napięcia powierzchniowego.



Zadania

Tym razem zadania z fizyki z podwójną myszką – zobaczymy, czym bawiła się młodzież w połowie XX wieku (motywy zaczerpnięte z książki J. Perelmana, *Zajmująca fizyka*). Potrzebne dane należy odszukać, co jest zajęciem pouczającym.

F 699. Na Olimpie cena jednej kilowatogodziny wynosi 0,25 euro. Oszacuj, ile średnio musi zapłacić Zeus za jednokrotne posłużenie się piorunem.
Rozwiązanie na str. 3

F 700. Ile na równiku waży kilogram cukru, który na biegunie ważył 1 kilogram? Posługujemy się i tu, i tam wagą sprężynową.
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Waldemar POMPE

M 1180. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają warunek $ad - bc = 1$.

Udowodnić, że ułamek $\frac{a^2 + b^2}{ac + bd}$ jest nieskracalny.

Rozwiązanie na str. 3

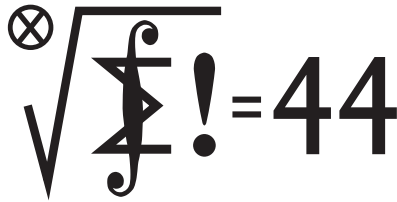
M 1181. Rozstrzygnąć, czy w każdym czworościanie wysokości przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie na str. 5

M 1182. Na przyjęciu spotkało się 100 osób. Wiadomo, że wśród każdych czterech osób znajduje się taka, która zna pozostałe trzy osoby z tej czwórki. Wykazać, że istnieje co najmniej 97 osób, z których każda zna wszystkie osoby będące na przyjęciu. Przyjmujemy, że osoba A zna osobę B , to osoba B zna też osobę A .

Rozwiązanie na str. 16





Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2007

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 545, 546

545. Rozważamy trójkąt ABC spełniające warunek $|ID| = |IE|$, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego, a D, E są punktami przecięcia prostych AI, BI odpowiednio z bokami BC, CA . Wyznaczyć wszystkie trójki liczb α, β, γ , które mogą być miarami kątów $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ takiego trójkąta.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2007

541. Mając daną dodatnią liczbę całkowitą (w zapisie dziesiętnym), możemy dopisać na końcu 0 lub 4 (otrzymując liczbę mającą o jedną cyfrę więcej); ponadto, jeśli dana liczba jest parzysta, wolno nam podzielić ją przez 2. Dowieść, że startując od liczby 4 i wykonując opisane operacje, można uzyskać każdą liczbę całkowitą dodatnią.

541. Niech $f(x) = 10x, g(x) = 10x + 4$ dla $x \in \mathbb{N}$ i niech $h(x) = x/2$ dla liczb parzystych $x \in \mathbb{N}$. Wykażemy, że każda dodatnia liczba parzysta daje się przedstawić w postaci $F(4)$ dla pewnej skończonej superpozycji F funkcji f, g, h (jest to teza zadania dla liczb parzystych).

Dowód indukcyjny: dla liczb 2 ($= h(4)$) oraz 4 nie ma czego dowodzić. Ustalmy liczbę parzystą $y > 4$ i założmy, że każda mniejsza liczba parzysta $x > 0$ da się przedstawić w wymaganej postaci.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 0, przyjmujemy $x = y/5$; wówczas $y = f(h(x))$.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 2, przyjmujemy $x = (y-2)/5$; wówczas $y = h(g(x))$.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 4, przyjmujemy $x = (y-4)/5$; wówczas $y = g(h(x))$.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 6, przyjmujemy $x = (2y-2)/5$; wówczas $y = h(h(g(x)))$.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 8, przyjmujemy $x = (4y-2)/5$; wówczas $y = h(h(h(g(x))))$.

W każdym przypadku x jest parzystą liczbą naturalną, mniejszą od y . Stosując do x założenie indukcyjne, uzyskujemy żądane przedstawienie liczby y ; teza zadania dla liczb parzystych została udowodniona.

Dla liczb nieparzystych teza także zachodzi, bo każdą liczbę nieparzystą można uzyskać z liczby parzystej przez jednokrotne zastosowanie funkcji h .

Redaguje Marcin E. KUCZMA

546. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę niezerowych współczynników wielomianu stopnia n , o współczynnikach rzeczywistych, mającego n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 546 zaproponował pan Krzysztof Dorobisz z Krakowa.

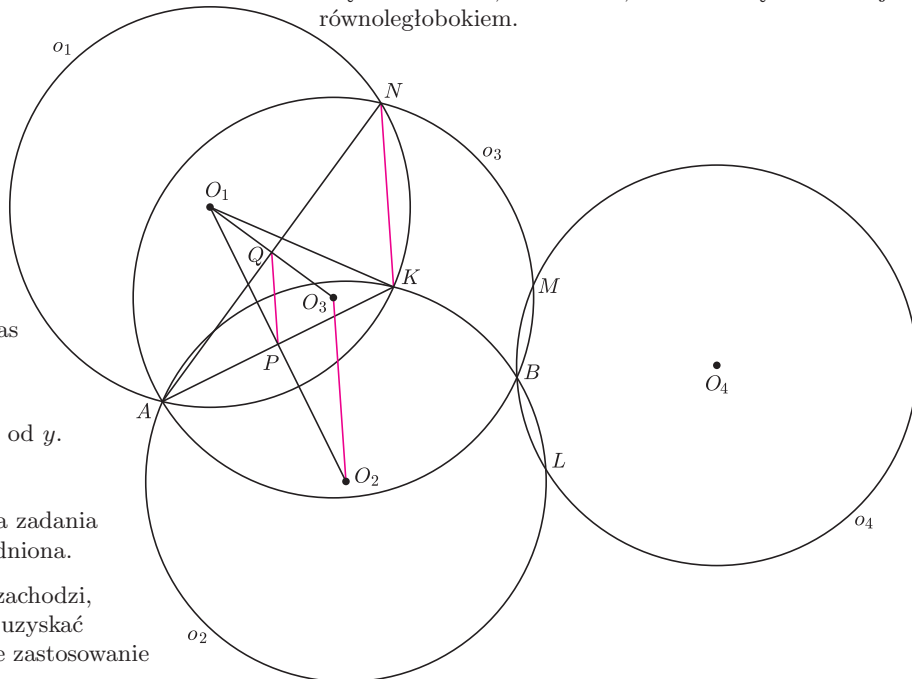
Przypominamy treść zadań:

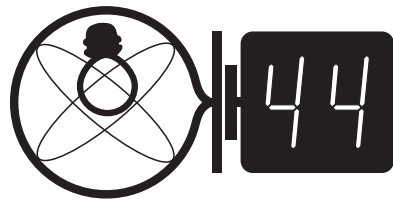
542. Cztery okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 o jednakowym promieniu i różnych środkach są położone na płaszczyźnie tak, że o_1, o_2, o_3 mają punkt wspólny A , zaś o_2, o_3, o_4 mają punkt wspólny B , różny od A . Wykazać, że punkty przecięcia tych okręgów, różne od A i B , są wierzchołkami równoległoboku.

542. Niech O_i będzie środkiem okręgu o_i . Przyjmijmy, że: okręgi o_1, o_2 przecinają się w punktach A i K ; okręgi o_2, o_4 przecinają się w punktach B i L ; okręgi o_4, o_3 przecinają się w punktach B i M ; okręgi o_3, o_1 przecinają się w punktach A i N .

Te cztery okręgi są przystające. Wobec tego odcinki AK i O_1O_2 mają wspólny środek P , zaś odcinki AN i O_1O_3 mają wspólny środek Q . Zatem $\overrightarrow{KN} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{O_2O_3}$.

Analogicznie wykazujemy, że także $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{O_2O_3}$. Tak więc $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM}$, co oznacza, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem.





Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 2007

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

434 (WT = 2,45) i **435** (WT = 1,90)

z numeru 3/2007

Tomasz Tkocz	– Rybnik	46,40
Krzysztof Magiera	– Łosiów	39,27
Tomasz Wietecha	– Tarnów	34,52
Jerzy Witkowski	– Radlin	29,80
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	27,98
Andrzej		
Nowogrodzki	– Chocianów	21,18
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	17,04

Po długiej przerwie witamy nowego członka Klubu 44F – p. Tomasza Tkocza.

A 1,00 0,90 0,81 0,74 0,67 0,61 0,55 0,51 0,46 0,42 0,39 0,36 0,33 0,31 0,28 0,26 0,24

T 1,00 1,05 1,11 1,17 1,22 1,28 1,34 1,41 1,47 1,53 1,60 1,67 1,74 1,81 1,88 1,95

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

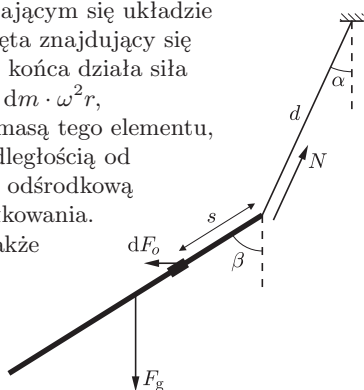
533 (WT = 2,62) i **534** (WT = 1,55)

z numeru 1/2007

Janusz Olszewski	– Suwałki	47,59
Tomasz Wietecha	– Tarnów	43,17
Tomasz Warszawski	– Kraków	41,41
Andrzej Daniluk	– Warszawa	40,64
Dariusz Kurpiel	– Posada	
	Zarszyn	38,60
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	36,52
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	35,20

Janusz Olszewski: drugi w historii Ligi jej uczestnik, który wykonał dziewięć pełnych rund (trzykrotna norma weterańska)!

438. Oznaczmy długość nici jako d , kąt jej odchylenia od pionu jako α , długość pręta jako l , a kąt jego odchylenia od pionu jako β . W obracającym się układzie odniesienia na element pręta znajdujący się w odległości s od górnego końca działa siła odśrodkowa równa $dF_o = dm \cdot \omega^2 r$, gdzie $dm = (m/l)ds$ jest masą tego elementu, a $r = d \sin \alpha + s \sin \beta$ – odległością od osi obrotu. Całkowaną siłę odśrodkową F_o wyznaczmy drogą całkowania. Poza nią na pręt działa także siła ciężkości $F_g = mg$ oraz siła napięcia nici N (zob. rys.).



Warunek równowagi sił po wyeliminowaniu N sprowadza się do

$$F_o = m\omega^2(d \sin \alpha + \frac{1}{2}l \sin \beta) = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Należy jeszcze rozpatrzyć warunek równowagi ze względu na obroty. Moment siły dF_o względem górnego końca pręta wynosi $dM_o = dF_o \cdot s \cos \beta$. Otrzymany w wyniku

Zadania z fizyki nr 442, 443

Redaguje Jerzy B. BROJAN

442. Uporządkować poniższe układy optyczne według wartości ogniskowej:

1. dwie jednakowe soczewki płaskowypukłe zetknięte powierzchniami płaskimi,
2. dwie soczewki (takie same, jak w punkcie 1) ustawione powierzchniami płaskimi do siebie i rozsunięte na pewną (nie bardzo dużą) odległość,
3. jak w punkcie 2, z płaskorównoległą płytką szklaną wstawioną między soczewkami.

Wskazówka: Ogniskową układu optycznego (niekoniecznie cienkiej soczewki) można zdefiniować następująco: jeśli na układ pada promień światła równoległy do osi optycznej i odległy od niej o h , a po wyjściu z układu jest nachylony pod niewielkim kątem α do osi, to ogniskowa wynosi $f = h/\alpha$.

Rozwiązania oparte na gotowym wzorze na ogniskową dowolnego układu soczewek (jeśli taki wzór można znaleźć w specjalistycznych podręcznikach) nie będą akceptowane.

443. Oscylator anharmoniczny tłumiony jest ciałem poruszającym się pod wpływem dwóch sił – siły ściąągającej ciało do położenia równowagi i zależnej od wychylenia (niekoniecznie proporcjonalnie) oraz siły tłumiącej, zależnej od prędkości. Zanotowano kolejne wartości amplitudy drgań takiego oscylatora, wraz z odstępami czasu (jednostki dowolne):

Jaka zależność pierwszej siły od wychylenia i drugiej siły od prędkości jest zgodna z tą tabelą?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2007

Przypominamy treść zadań:

438. Jednorodny pręt wisi na bardzo lekkiej nici, której drugi koniec jest zaczepiony w nieruchomym punkcie. Wprowadzono pręt w ruch obrotowy wokół osi pionowej przechodzącej przez ten punkt, tak że w obracającym się układzie odniesienia pozostawał nieruchomy. Czy możliwe jest, że przy pewnej prędkości kątowej obrotu załączony rysunek dokładnie przedstawia położenie pręta? (Należy zmierzyć na rysunku niezbędne wielkości)

439. W fizyce jądrowej, a także w przemyśle elektronicznym, bardzo poszukiwany jest ołów wydobyty z rud w odległej historii (np. starożytności i średniowieczu). Jakie zalety może mieć taki ołów w porównaniu z „normalnym”, tzn. pochodzącym ze współczesnego procesu wydobycia i oczyszczania?

ścalkowania całkowity moment siły odśrodkowej jest równy momentowi siły ciężkości

$$M_o = m\omega^2 l \cos \beta (\frac{1}{2}d \sin \alpha + \frac{1}{3}l \sin \beta) = \frac{1}{2}mgl \sin \beta.$$

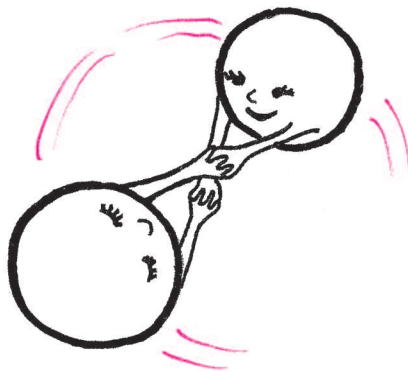
Z dwóch powyższych równań należy wyeliminować ω , otrzymując warunek dotyczący wielkości bezpośrednio mierzalnych na rysunku

$$(d \sin \alpha + \frac{1}{2}l \sin \beta) \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta = (\frac{1}{2}d \sin \alpha + \frac{1}{3}l \sin \beta) \operatorname{tg} \alpha.$$

Według rysunku autora stosunek l/d miał wynosić około 1,4, kąt α – około 25° , a kąt β – około 58° , co oznacza niespełnienie tego warunku (przy takich wartościach l/d i β byłby spełniony dla kąta α równego $54,5^\circ$).

439. W naturalnej skale ołów występuje najczęściej razem z pewną domieszką uranu. Jednym z produktów rozpadu uranu ^{238}U jest promieniotwórczy ołów ^{210}Pb , którego śladowe ilości są obecne w świeżo oczyszczonym ołowiu. Nawet bardzo niewielkie natężenie promieniowania może zakłócać działanie układów elektronicznych lutowanych stopem ołowiu i wpływać na wyniki pomiarów, jeśli taki ołów jest wykorzystany jako osłona czułych przyrządów fizyki jądrowej. Okres połowicznego rozpadu tego izotopu wynosi 22 lata, więc ołów „stary” go nie zawiera.

Patrz w niebo



Już piętnaście lat minęło od odkrycia pierwszego obiektu (o symbolu 1992 QB₁) należącego do Pasa Kuipera, która to nazwa powstała po odkryciu kilkuset kolejnych lodowych planetoid obiegających Słońce poza orbitą Neptuna. Z czasem stwierdzono, że ponad 1% z nich to obiekty podwójne. Pierwszym była planetoida 1998 WW₃₁, tzn. odkryta wprawdzie w 1998 roku, ale której podwójność odkryto dopiero w 2001. Okazało się przy tym, że okres obiegu takiej pary wynosi 570 dni, a względna orbita ciał ma mimośród równy aż 0,8. Odległość składników pary waha się w tej sytuacji od 4000 do 40 000 km. Pojawił się naturalnie problem, jak mogą powstawać tak rozległe pary tych lodowych planetoid, gdyż nie jest to jedyny obiekt tego rodzaju.

Przede wszystkim można by część odpowiedzialności za te odkrycia zrzucić na tzw. selekcję obserwacyjną: z odległości, w jakiej znajdują się ciała należące do Pasa Kuipera, można rozpoznać jako podwójne tylko pary dostatecznie rozległe; inaczej mówiąc, par ciśniejszych po prostu nie da się rozpoznać jako pary. Nie wszystkim jednak odpowiadała taka interpretacja, zwłaszcza że za pomocą teleskopu Hubble'a odkryto jednak pary rozdzielone na mniej niż pół sekundy łuku (ciała, które dzieli 40 000 km, oglądane z odległości Plutona znajdują się w kątowej odległości półtorej sekundy łuku). Jakikolwiek mechanizm powstawania gotowych rozległych par wydawał się badaczom od początku nierealny. Nagłe zwiększenie odległości składników w wyniku działania sił pływowych jakiejś planety nie wchodzi w grę wskutek braku planet w obszarze Pasa Kuipera. Rozbicie jednego obiektu na dwa w wyniku zderzenia z jeszcze innym też nie jest dobrym tłumaczeniem, gdyż po takim zderzeniu oba fragmenty utworzyłyby raczej ciasną parę – tego dowodzą symulacje. Za najbardziej prawdopodobny poszukiwany mechanizm uznano w końcu, że kilka miliardów lat temu, gdy Pas Kuipera był bardzo gęsty, mogło stosunkowo często dochodzić do spotkań trzech (!) ciał. Wtedy mianowicie dwa ciała, skleiwszy się po spotkaniu, mogły zostać – już jako jedna bryła – uwięzione w polu grawitacyjnym pobliskiej trzeciej bryły. A orbity takich świeżych par mogły być rozmaite, w tym również bardzo rozległe.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 1182.

Jeśli wszystkie osoby na przyjęciu znają się, to teza zadania jest spełniona. Przyjmijmy więc, że pewne dwie osoby A, B nie znają się i oznaczmy przez \mathcal{P} zbiór pozostałych osób obecnych na przyjęciu. Wówczas każde dwie osoby X, Y ze zbioru \mathcal{P} muszą się znać – w przeciwnym razie w czwórce $\{A, B, X, Y\}$ nie byłoby osoby, która zna pozostałe trzy.

Jeśli każda osoba ze zbioru \mathcal{P} zna zarówno osobę A , jak i osobę B , to zbiór \mathcal{P} składa się z 98 osób, z których każda zna wszystkie osoby z przyjęcia.

Przyjmijmy więc, że pewna osoba $C \in \mathcal{P}$ nie zna osoby A lub B . Wówczas każda osoba X ze zbioru $\mathcal{P} \setminus \{C\}$ musi znać każdą z osób A, B oraz C – w przeciwnym razie w czwórce $\{A, B, C, X\}$ nie byłoby osoby, która zna pozostałe trzy.

W ten sposób wykazaliśmy, że każda osoba ze zbioru $\mathcal{P} \setminus \{C\}$ zna każdą inną osobę obecną na przyjęciu, co kończy rozwiązanie zadania.

Wrzesień

We wrześniowe wieczory dość nisko nad południowym horyzontem widać mało wyrazisty gwiazdozbiór Koziorożca, o którym warto wiedzieć, że 2000 lat temu w nim znajdował się punkt przesilenia zimowego. Wskutek precesji punkt ten przesunął się do Strzelca, a przez Koziorożca Słońce przechodzi w styczniu i w lutym. Sam gwiazdozbiór nie zawiera żadnych efektownych jasnych obiektów. Można jednak pokusić się o znalezienie za pomocą małej lunety gromady kulistej M30 (NGC 7099) o jasności 7,5 mag i rozmiarach połowy tarczy Księżyca, która to gromada leży w odległości 7,4 kpc. Najjaśniejszą gwiazdą Koziorożca jest akurat nie alfa, lecz delta, która jest gwiazdą zmienną, a w maksimum blasku jej jasność wynosi około 3 mag.

Merkury najdalej od Słońca znajdzie się 29 IX i można próbować znaleźć go po zachodzie Słońca. Wenus jest na granicy Raka i Lwa i wschodzi przed Słońcem. Najsilniej będzie świecić 23 IX. Mars jest w Byku i widać go w drugiej połowie nocy. Jowisz jest w Wężowniku i wieczorem zachodzi, a Saturn we Lwie, blisko Słońca, a więc go nie widać. Now Księżyca wypada 11 IX, a pełnia 26 IX. Podczas nowiu nastąpi częściowe zaćmienie Słońca, ale widoczne będzie na Antarktydzie i w Ameryce Południowej. Księżyc zakryje Regulusa 10 IX, co zobaczą mieszkańcy Polinezji, Japonii, centralnej Azji i wysp Oceanu Indyjskiego; Saturna również 10 IX, co będzie widać z Oceanu Indyjskiego; Antaresa 18 IX, co będzie widać z południowych części Oceanu Atlantyckiego i Wielkiego. 23 IX nastąpi równonoc jesienna, czyli oficjalnie zacznie się jesień. Żadnych przewidywalnych rojów meteorów we wrześniu nie ma.

T. K.

Metody Monte Carlo

Rafał SZTENCEL

Następnie sporządził odlew „morza” o średnicy dziesięciu łokci, okrągłego o wysokości pięciu łokci i o obwodzie trzydziestu łokci. Poniżej jego krawędzi opasywały je dokoła rozchylone kielichy kwiatowe. Na trzydziści łokci otaczały „morze” w krąg. W jego odlewie były razem odlane dwa rzędy rozchylonych kielichów kwiatowych.

1 Kr1 7, 23–24

W poprzednim odcinku pisaliśmy o doświadczalnym wyznaczaniu liczby π za pomocą igły Buffona. Dokładność metody nie była może imponująca, ale w końcu królowi Salomonowi przy poważnych pracach inżynierskich, czyli budowie świątyni, wystarczyło przybliżenie $\pi = 3$ (por. [1], werset na marginesie; szczerze mówiąc, dokładna wartość π nie jest tu potrzebna, co więcej, informacja, że obwód „morza” jest w rzeczywistości nieco większy niż 31,4 łokcia, wywołałaby tylko zamęt w głowach czytelników).

Dziś tak zwane metody Monte Carlo stosuje się m.in. właśnie przy pracach inżynierskich, gdzie – obok założonej dokładności – ważna jest szybkość uzyskania wyniku.

Zilustrujemy metodę prostym przykładem: należy obliczyć $\int_0^1 f(x)dx$, gdzie $0 \leq f(x) \leq 1$ dla $x \in (0, 1)$. Niech $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Definiujemy

$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } Y_n < f(X_n) \\ 0 & \text{gdy } Y_n \geq f(X_n) \end{cases}.$$

Zmienne losowe Z_n są niezależne, ponadto

$$EZ_n = P(Y_n < f(X_n)) = \int_0^1 f(x)dx,$$

ponieważ wektor losowy (X_n, Y_n) ma rozkład jednostajny na kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$. Na mocy prawa wielkich liczb

$$\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n} \rightarrow \int_0^1 f(x)dx \quad \text{p.n.},$$

więc dla dużych n otrzymamy dobre przybliżenie całki.

Być może obliczanie zwykłej całki w ten sposób jest nieopłacalne w porównaniu np. z metodą Simpsona, ale metoda Monte Carlo przenosi się bez większych zmian na całki wielokrotne, gdzie w pełni ujawnia swoje zalety. Nietrudno bowiem podzielić przedział $[0, 1]$ na 10 części, by zastosować jedną ze znanych metod całkowania numerycznego. Ale 100-wymiarowy obszar całkowania należałoby podzielić na 10^{100} części!

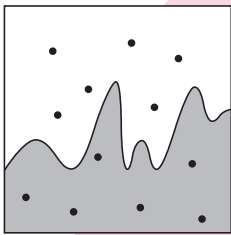
Metody Monte Carlo stosuje się także do rozwiązywania równań całkowych i równań różniczkowych cząstkowych (to ostatnie – ze względu na liczne i głębokie związki teorii prawdopodobieństwa z teorią równań różniczkowych cząstkowych).

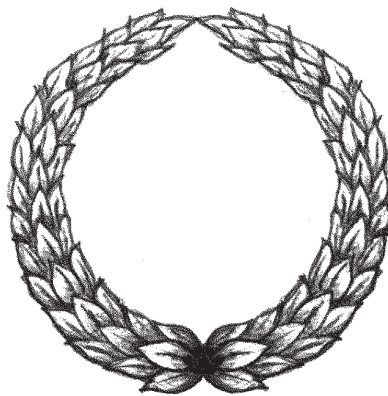
Rozwiązanie znanego problemu komiwojażera, czyli znalezienia najkrótszej trasy, która pozwoliłaby objechać n miast i wrócić do punktu startowego, wymaga mocy obliczeniowej lawinowo rosnącej wraz z n . Metody probabilistyczne umożliwiają znalezienie całkiem niezłej, bo dłuższej o kilka procent od najkrótszej, trasy w rozsądnym czasie. Okazało się również, że człowiek, posługując się intuicją, jest w stanie podać w miarę szybko równie dobre rozwiązanie tego problemu.

Szybkie, nieporządne i suboptymalne rozwiązania problemów są chyba zgodne z duchem epoki. A jeszcze król Salomon mógł sobie pozwolić na wysokiej klasy architekturę przy budowie świątyni.

Literatura

[1] *Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu*, Wydawnictwo Pallottinum, Poznań – Warszawa 1971.





Olimpiada

Zadania I stopnia Olimpiady Fizycznej, Astronomicznej i Matematycznej oraz Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów 2007/2008

LVII OLIMPIADA FIZYCZNA ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach: część I – do 15 października br., część II – do 12 listopada br. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich oraz na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

CZĘŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań – 15 października 2007 r.)

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.

1. Oszacuj, o ile stopni podniosłaby się temperatura baterii w telefonie komórkowym (twoim lub znajomego) w przypadku zwarcia. Załóż, że przed zwarcieniem bateria była w pełni naładowana i że cała wydzielona energia jest zużywana na jej podgrzanie. Przyjmij, że średnie ciepło właściwe na jednostkę objętości baterii jest równe ciepłu właściwemu wody na jednostkę objętości. Podaj parametry baterii (pojemność, napięcie i objętość), dla której przeprowadziłeś obliczenia.

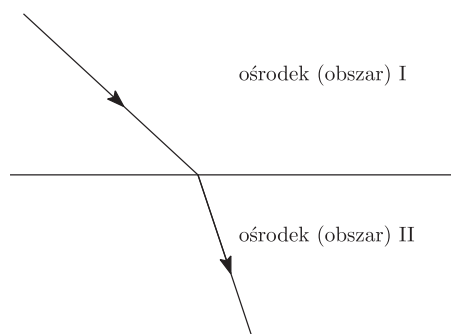
2. Rozważmy (patrz rys. 1)

- promień światła przechodzący przez płaską granicę dwóch ośrodków optycznych o stałych współczynnikach załamania,
 - cząstkę przelatującą z jednego obszaru do drugiego.
- Na (wąskiej) granicy rozważanych obszarów na cząstkę działa (duża) siła prostopadła do tej granicy.

Tor odpowiadający obu tym przypadkom jest przedstawiony na rysunku.

Określ:

- w którym z tych dwóch ośrodków prędkość światła (wartość) jest większa;
- w którym z tych dwóch obszarów prędkość cząstki (wartość) jest większa.

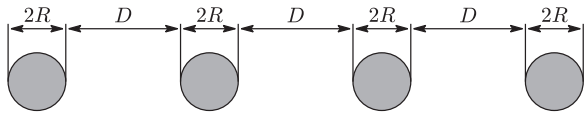


Rys. 1

3. Mała kulka o masie m , naładowana ładunkiem q , znajduje się w próżni, w odległości d od przewodzącej płaszczyzny. Jaką najmniejszą prędkość należy nadać kulce, aby oddaliła się ona na nieskończoną odległość od płaszczyzny?

Przyjmij, że w każdej chwili siła działająca na poruszającą się kulkę jest taka sama, jak siła działająca na kulkę spoczywającą (tzn. że rozkład ładunków w przewodniku natychmiast dopasowuje się do pola elektrycznego pochodzącego od kulki).

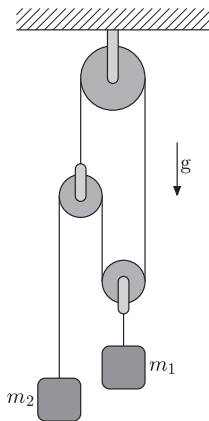
4. Jednakowe krążki hokejowe o promieniu R ustawiono na lodzie w linii prostej, w odległości D jeden od drugiego (rys. 2). Uderzono pierwszy krążek tak, aby uderzył centralnie w drugi, drugi w trzeci itd. Pierwsze uderzenie nie było jednak doskonałe i krążek uzyskał prędkość odchyloną pod bardzo niewielkim kątem w bok. Jaki warunek musi być spełniony, aby wystąpiło „samoogniskowanie”, tzn. aby kąt odchylenia każdego następnego krążka był mniejszy niż poprzedniego? Pomiń tarcie między powierzchniami krążków oraz między krążkami a lodem.



Rys. 2

5. Rozważmy układ bloczków i mas przedstawiony na rysunku 3. Z jakim przyspieszeniem porusza się masa m_1 ?

Liny są nieważkie, wiotkie i nierozciągliwe. Bloczki są nieważkie. Fragmenty lin nieznajdujące się na bloczkach pozostają stale proste. Pomiń tarcie i opór powietrza.



Rys. 3

6. Rozważmy komunikację między statkami kosmicznymi wykorzystującą cząstki wysyłane z dużą prędkością. Statek A wysyła cząstkę do statku B , a statek B natychmiast, gdy ta cząstka do niego dotrze, odsyła ją do statku A . Jaki czas zostanie zmierzony na zegarze na statku A pomiędzy wysłaniem cząstki a jej powrotem?

Statek B oddala się od statku A z prędkością v , a rozpatrywana cząstka porusza się z prędkością V względem statku, z którego ostatnio została wysłana. W chwili, gdy cząstka dotarła do statku B , znajdował się on, w układzie statku A , w odległości $d = 21$ sekund świetlnych od statku A .

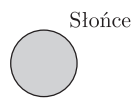
Rozważ dwa przypadki:

a) $v = 0,8c$, $V = 0,9c$;

b) $v = 0,8c$, $V = 5c$. (Ten przypadek odpowiada hipotetycznym cząstkom, zwanym tachionami. Przyjmij, że w przypadku tachionów obowiązuje zwykle, relatywistyczne prawo składania prędkości.)

7. Rozważmy tor Księżyca w układzie inercjalnym związanym ze Słońcem. W jakiej odległości od Słońca powinna krążyć Ziemia, aby ten tor był wypukły w stronę Słońca (patrz rysunek 4) w punktach najmniejszej odległości Księżyca od Słońca?

Przyjmij, że „przesuwając” Ziemię nie zmieniamy odległości Księżyc – Ziemia oraz że Księżyc i Ziemia poruszają się (w układzie Słońca) w jednej płaszczyźnie. Potrzebne dane znajdź w tablicach.



Rys. 4. Wypukły w stronę Słońca fragment toru Księżyca (proporcje nie są zachowane).

8. Oszacuj odchylenie toru elektronu w kineskopie spowodowane występowaniem ziemskiego pola magnetycznego. Przyjmij, że elektrony są przyspieszane na krótkim odcinku za pomocą napięcia $U = 30000$ V, a następnie przelatują do ekranu odległość $l = 0,25$ m. Pozostałe potrzebne dane znajdź w dostępnych ci źródłach.

9. Minimalna droga hamowania samochodu od prędkości $v = 100$ km/h do 0 na suchej nawierzchni wynosi 40 m. Kasia twierdzi, że w takim razie minimalna droga hamowania tego samochodu (również od prędkości $v = 100$ km/h do 0), na częściowo oblodzonej drodze, gdy koła z prawej strony samochodu poruszają się po lodzie, a koła z lewej strony po suchej nawierzchni, wynosi 80 m. Czy Kasia ma rację?

Przyjmij, że ciężar samochodu wraz z kierowcą jest równomiernie rozłożony na wszystkie cztery koła, a środek masy układu znajduje się tuż nad powierzchnią jezdni. Pomiń opór powietrza. Hamowanie powinno być takie, by w jego trakcie samochód jechał prosto, bez obrótu wokół osi pionowej. Przyjmij, że współczynnik tarcia opon o lód jest równy 0.

10. Długi solenoid pływa częściowo zanurzony w diamagnetyku. Oś solenoidu jest równoległa do powierzchni cieczy. Jak zmieni się zanurzenie solenoidu (wzrośnie, zmaleje czy nie zmieni się), gdy podłączymy go do źródła prądu?

Diamagnetyk jest nieprzewodzący, a drut, z którego zrobiono solenoid, jest pokryty warstwą izolacji.

11. Przybliżona reguła w fotografii mówi, że aby otrzymać ostry obraz, robiąc zdjęcie nieruchomemu przedmiotowi, czas otwarcia przysłony powinien być mniejszy niż $1/f$ (licząc w sekundach), gdzie f jest ogniskową obiektywu (w milimetrach). Uzasadnij zależność od f występującą w tej regule.

Uwaga: ta reguła dotyczy zdjęć robionych bez statywu (lub innej podpórki) aparatami niemającymi optycznej stabilizacji obrazu. Przyjmij, że różne f odpowiadają temu samemu aparatowi (z „zoomem”).

W przypadku cyfrowych aparatów fotograficznych f występujące w tej regule nie jest rzeczywistą ogniskową obiektywu, lecz ogniskową „w przeliczeniu” na zwykły aparat małoobrazkowy.

12. Kiedy w powietrzu jest więcej pary wodnej: w wilgotny listopadowy wieczór, gdy wilgotność względna wynosi ok. 100%, a temperatura powietrza jest równa 15°C , czy w upalny lipcowy dzień, gdy wilgotność względna wynosi 40%, a temperatura powietrza jest równa 35°C ?

Definicję wilgotności względnej i niezbędne dane znajdź w dostępnych ci źródłach. Parę wodną możesz potraktować jako gaz doskonały.

13. Oszacuj moc elektrowni wiatrowej (wiatraka) z łopatom o długości 10 m przy wietrze wiejącym z prędkością 5 m/s (3,4–5,4 m/s to 3 stopnie w skali Beauforta – łagodny wiatr). Przyjmij, że elektrownia zamienia na energię elektryczną połowę energii kinetycznej wiatru przelatującego w zasięgu jej łopat.

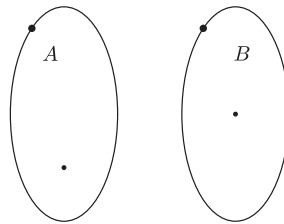
14. Jaki kształt i jakie rozmiary zewnętrzne powinien mieć stalowy zbiornik, aby zużyć jak najmniej stali, a jego wytrzymałość na rozerwanie była wystarczająca do przechowywania $n = 100$ moli gazowego helu o temperaturze $T = 10$ K?

Przyjmij, że zbiornik zostanie umieszczony w próżni. Przyjmij również, że grubość ścianki zbiornika jest dużo mniejsza od jego rozmiarów liniowych, a maksymalne dopuszczalne naprężenie stali wynosi $\sigma = 10^9$ N/m².

15. Rysunki 5.A i 5.B przedstawiają tory punktów materialnych, na które działają siły postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{r}F(r).$$

W obu przypadkach jest to elipsa, przy czym w przypadku A punkt $\vec{r} = \vec{0}$ znajduje się w ognisku elipsy, a w przypadku B – w geometrycznym środku elipsy. Jaką postać ma funkcja $F(r)$ w każdym z tych przypadków?



Rys. 5

CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań – 12 listopada 2007 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. W pionowym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B zawieszono na nieważkiej, nierozciągliwej nici o długości l punktową masę m naładowaną ładunkiem q . Następnie masę wprowadzono w ruch po okręgu w płaszczyźnie poziomej, odległej o h od punktu zawieszenia nici. Niech f_1 oznacza częstotliwość obrotów, gdy ruch odbywa się zgodnie ze wskazówkami zegara (patrząc od góry), a f_2 – częstotliwość obrotów, gdy odbywa się w przeciwnym kierunku, lecz po tym samym torze.

Wyznacz

$$f_{sr} = (f_1 + f_2)/2 \quad \text{oraz} \quad \Delta f = f_1 - f_2,$$

jeśli $B = 0,06$ T, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s², $m = 1$ g, $q = 10^{-8}$ C, $h = 1$ m, $l = 1,2$ m.

T2. Statek kosmiczny porusza się z wyłączonymi silnikami po eliptycznej orbicie wokół Ziemi. Najmniejsza odległość statku od środka Ziemi wynosi r_1 , a największa r_2 . Kapitan statku chce uwolnić się z pola grawitacyjnego Ziemi (oddalić się od niej na nieskończoną odległość), włączając na krótko silniki. W którym punkcie toru powinien to zrobić i w którą stronę powinny być skierowane dysze silników, aby zużył przy tym jak najmniejszą ilość paliwa?

Podaj, ile powinien wynosić w szukanym optymalnym przypadku przyrost prędkości statku spowodowany włączeniem silników. Podaj wynik liczbowy, gdy $r_1 = 7000$ km, $r_2 = 20000$ km.

Dodatkowe dane potrzebne do rozwiązania zadania wyszukaj w tablicach.

Pomiń wpływ Słońca, Księżycy i innych ciał niebieskich na ruch statku.

Uwaga: W rozpatrywanym przypadku suma energii potencjalnej i kinetycznej statku w ruchu po elipsie jest taka sama jak w ruchu po okręgu o promieniu $(r_1 + r_2)/2$.

T3. Jednożyłowy, długi, prostoliniowy przewód elektryczny składa się z miedzianego rdzenia o promieniu r otoczonego warstwą izolatora z polichlorku winylu o grubości d .

Wiedząc, że temperatura zewnętrznej warstwy izolatora jest równa t_z , wyznacz temperaturę t_w zewnętrznej warstwy miedzianego rdzenia, gdy w przewodzie płynie prąd o natężeniu I .

Podaj wynik liczbowy, gdy $r = 1$ mm, $d = 2$ mm, $t_z = 20^\circ$ C, $I = 30$ A.

Niezbędne dane (opór właściwy miedzi, przewodnictwo cieplne izolatora) znajdź w tablicach.

Pomiń zależność oporu elektrycznego od temperatury.

Wskazówka: Jest duża, choć formalna, analogia między stacjonarnym przepływem ciepła a elektrostatyką. Strumień energii cieplnej J_S przepływający przez daną powierzchnię S odpowiada strumieniowi indukcji elektrycznej, a źródła ciepła – ładunkom elektrycznym. Gdy mamy dwie bliskie, równoległe powierzchnie, odległe o d , przy czym na jednej temperatura wynosi T , a na drugiej $T + \Delta T$, to strumień energii cieplnej, płynący prostopadle do tych powierzchni, jest równy $J_S = S\sigma \Delta T/d$, gdzie σ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego materiału pomiędzy tymi powierzchniami. Jest to analogiczny związek, jak związek między strumieniem indukcji elektrycznej a potencjałem pola elektrycznego V : T odpowiada $-V$, a σ – przenikalności elektrycznej ϵ .

W próżni natężenie pola elektrycznego w odległości r od cienkiego, prostoliniowego przewodu, naładowanego ładunkiem λ na jednostkę długości, jest równe $E = 2k\lambda/r$, a jego potencjał $V = 2k\lambda \ln(r/r_0)$, gdzie: $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, ϵ_0 – przenikalność elektryczna próżni, r_0 – stała dowolna, \ln – logarytm naturalny.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Chemiluminescencja – świecenie kapsułki wędkarskiej

Masz do dyspozycji:

- kapsułkę świecącą, wykorzystującą zjawisko chemiluminescencji, używaną przez wędkarzy do oświetlania spławików,
- diodę świecącą,
- baterię 1,5 lub 4,5 V,
- folię aluminiową,
- taśmę izolacyjną,
- cyfrowy miernik uniwersalny z woltomierzem napięcia stałego,
- stoper,
- przewody, zaciski itp. elementy umożliwiające zestawienie obwodu elektrycznego.

1. Wyznacz przebieg funkcji $\frac{I(t)}{I(0)}$, gdzie $I(t)$ oznacza natężenie światła emitowanego przez kapsułkę po czasie t od rozpoczęcia eksperymentu. Odpowiednie pomiary wykonaj w czasie pierwszych 100 minut od momentu, w którym kapsułka zacznie emitować światło. Sporządź wykres uzyskanej zależności czasowej.

2. Sprawdź, czy uzyskaną zależność czasową można opisać wzorem:

$$\frac{I(t)}{I(0)} = e^{-t/\tau},$$

gdzie τ – stała zaniku.

Uwaga:

1. Jeśli do diody świecącej przyłożyć napięcie w kierunku zaporowym, to natężenie płynącego przez diodę prądu będzie proporcjonalne do natężenia padającego na nią światła.
2. Do doświadczenia wybierz diodę, która jest najbardziej czuła na światło emitowane przez kapsułkę.
3. Kapsułki chemiluminescencyjne można kupić w sklepach z artykułami wędkarskimi (fotografia typowych kapsułek umieszczona jest na stronach internetowych Olimpiady Fizycznej).
4. Standardowe woltomierze cyfrowe mają stały, niezależny od zakresu opór wewnętrzny rzędu $1M\Omega$.
5. Zwróć uwagę, aby nie potrząsać kapsułką po rozpoczęciu pomiarów zależności czasowej natężenia emitowanego przez nią światła.

D2. Współczynnik załamania roztworu soli

Masz do dyspozycji:

- wskaźnik laserowy,
- wodę (może być z kranu),
- sól kuchenną,
- lusterko,
- statyw z uchwytem,
- plastelinę,
- miskę,
- linijkę, taśmę mierniczą,
- ekran (może to być ściana),
- menzurkę lub inne naczynie umożliwiające odmierzenie żądanej objętości cieczy.

1. Wyznacz zależność współczynnika załamania n roztworu soli kuchennej w wodzie od stężenia molowego c_m tego roztworu.

2. Znajdź najprostszą formułę matematyczną wiążącą uzyskaną doświadczalnie zależność współczynnika załamania n roztworu wodnego soli z jego stężeniem molowym c_m .

Przyjmij, że stężenie roztworu nasyconego NaCl w wodzie w temperaturze pokojowej wynosi $c_m = 5,4$ mol/l.

Uwaga: Możesz wykorzystać dodatkowo gumową lub plastikową rurkę umożliwiającą przelewanie cieczy z naczynia do naczynia.

D3. Spadający balonik

Masz do dyspozycji:

- balonik,
- urządzenie umożliwiające nagranie filmu o znanej liczbie klatek na sekundę (np. aparat cyfrowy, kamerę internetową itp.),
- komputer z oprogramowaniem umożliwiającym oglądanie pojedynczych klatek nagranych filmu,
- linijkę, taśmę mierniczą.

1. Zbadaj ruch balonika spadającego z prędkością początkową równą zero. Wyznacz przyspieszenie balonika w początkowej fazie jego ruchu. Pomiary wykonaj dla kilku różnych stopni nadmuchania balonika (możesz też użyć kilku baloników o zbliżonych parametrach).

2. Porównaj uzyskane wartości przyspieszenia balonika z przyspieszeniem ziemskim. Wymień czynniki, które wpływają na wartość tego przyspieszenia i przedyskutuj ich znaczenie.

Do doświadczenia użyj balonika o kształcie możliwie zbliżonym do kulistego. Przed nadmuchaniem balonika wyznacz jego masę przy użyciu wagi laboratoryjnej. Masę balonika (baloników) oraz jego (ich) wymiary po nadmuchaniu podaj w rozwiązaniu zadania. Potrzebne do dyskusji dane znajdź w tablicach.



LI OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2007/2008

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

PIERWSZA SERIA

1. W lutym 1987 roku w Wielkim Obłoku Magellana zaobserwowano wybuch supernowej SN 1987A, której jasność obserwowana w maksimum wyniosła $m_v = +3$ magnitudy.

Oblicz moc promieniowania tej supernowej w chwili, gdy osiągnęła największą jasność i porównaj z mocą promieniowania Słońca. Niezbędne dane potrzebne do rozwiązania zadania wyszukaj samodzielnie.

2. Do szkolnej pracowni wyposażonej w kamerę CCD, o wymiarach 9×13 mm i rozmiarach pojedynczego piksela $7,4 \times 7,4$ μm , potrzebny jest nowy teleskop. Zaproponuj wersję teleskopu, która w pełni wykorzystalaby zdolności rozdzielcze kamery. Teleskop powinien objąć taki obszar nieba, aby na obrazie uzyskanym z kamery zmieściła się cała galaktyka M101.

3. Po ustaniu obecnych procesów termojądrowych Słońce zwiększy swój promień do $1,2 \cdot 10^8$ km, przechodząc w stadium czerwonego olbrzyma. Jego temperatura efektywna spadnie do około 3000 K. Która z planet naszego Układu znajdzie się wtedy najbliżej strefy odpowiadającej obecnym warunkom energetycznym w odległości Ziemia-Słońce? Jaka będzie średnica kątowna Słońca oglądanego z tej planety?

4. Jak w ostatnim dwudziestolecu zmieniały się poglądy na wiek Wszechświata? Z jaką dokładnością go szacowano?

W opracowaniu podaj źródła swoich informacji. Rozwiązanie nie powinno być objętościowo większe niż dwie strony, po 1800 znaków na stronie.

ZADANIA OBSERWACYJNE

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej należy dołączyć negatyw lub odpowiedni wydruk komputerowy.

1. Wykonaj fotografie sfery niebieskiej w sposób umożliwiający wyznaczenie z nich szerokości geograficznej miejsca obserwacji. Wyznacz tę szerokość i oceń dokładność uzyskanego wyniku.

2. Na podstawie wizualnych lub fotograficznych obserwacji roju Perseidów lub Orionidów oszacuj błąd wyznaczenia jego radiantu.

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 12 listopada 2007 r.

INFORMACJE REGULAMINOWE

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, **do 8 października 2007 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Uczniowie, którzy przysłać rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej olimpiady: <http://planetarium.chorzow.net.pl>

5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, **do 12 listopada 2007 r.** Decyduje data

stempli pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesyłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ

Planetarium Śląskie

41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).

Dodatkowo do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć na osobnej kartce następujące informacje: imię i nazwisko, rok urodzenia, nazwa szkoły wraz z jej imieniem, adres szkoły (z kodem pocztowym i nazwą województwa), klasa, profil klasy, adres prywatny (z kodem pocztowym),

ZALECANA LITERATURA

- obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych;
- H. Chrupała, M.T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*;
- *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach);
- H. Chrupała, J. Kreiner, M. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*;
- J.M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*;

nazwisko nauczyciela fizyki z astronomią i ewentualnie opiekuna przygotowującego do olimpiady.

10. Zawody II stopnia odbędą się 14 stycznia 2008 r. Zawody III stopnia odbędą się w dniach od 6 do 9 marca 2008 r.

11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.

12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika*;
- E. Rybka, *Astronomia ogólna*;
- *Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa;
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* – praca zbiorowa;
- atlas nieba;
- obrotowa mapa nieba;
- czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*.



III OLIMPIADA MATEMATYCZNA GIMNAZJALISTÓW

Zawody stopnia pierwszego Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów polegają na samodzielnym rozwiązaniu przez uczniów siedmiu zadań. Zadania te uczniowie rozwiązują w domu. Mogą korzystać z różnych książek, konsultować się z nauczycielem, ale muszą je rozwiązywać samodzielnie. Rozwiązane zadania, każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie, oddają nauczycielowi matematyki. Nauczyciel ocenia prace i przesyła je do koordynatora okręgowego właściwego terytorialnie dla szkoły. W tym roku rozwiązania powinny być wysłane najpóźniej dnia **29 października 2007 r.** (decyduje data stempla pocztowego).

Zachęcamy Gimnazjalistów do wzięcia udziału w zawodach!

Nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań. Uczeń, który rozwiąże część zadań, także może zostać zakwalifikowany do zawodów stopnia drugiego.

Adresy koordynatorów, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, miejscu i terminie zawodów, jak również inne bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl/omg.

ZAWODY STOPNIA PIERWSZEGO

10 września 2007 r. – 29 października 2007 r.

1. Rozwiąż równanie: $\left| \left| \left| x - 1 \right| - 2 \right| - 3 \right| - 4 \right| = 0$.
2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A , punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B , punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C , punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D . Oblicz pole czworokąta $KLMN$.
3. Liczby a , b , c są dodatnie. Wykaż, że $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1$.
4. Dana jest liczba ośmiocyfrowa a , której cyfra jedności jest różna od 0. Liczba ośmiocyfrowa b powstaje z liczby a poprzez przestawienie cyfry jedności liczby a na początek.

Wykaż, że jeśli liczba a jest podzielna przez 101, to liczba b jest także podzielna przez 101.

5. Okrąg o promieniu 1 jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg ten jest styczny do boków AB , BC , CD , DA odpowiednio w punktach K , L , M , N . Wiadomo, że $\sphericalangle KLM = 4 \sphericalangle KLN$ oraz $\sphericalangle KLN = 4 \sphericalangle BKL$. Oblicz długość odcinka LN .
6. Ile jest liczb 15-cyfrowych k o następującej własności: Każde trzy kolejne cyfry liczby k są różne oraz w każdej trójce kolejnych cyfr liczby k występuje 0? Odpowiedź uzasadnij.
7. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny oraz taka płaszczyzna przecinająca wszystkie jego krawędzie boczne, że pole uzyskanego przekroju jest większe od pola podstawy ostrosłupa? Odpowiedź uzasadnij.

LIX OLIMPIADA MATEMATYCZNA

ZADANIA KONKURSOWE ZAWODÓW I STOPNIA

I SERIA

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^5 = 5y^3 - 4z \\ y^5 = 5z^3 - 4x \\ z^5 = 5x^3 - 4y \end{cases}$$

2. Dany jest kąt wypukły o wierzchołku P i punkt A leżący wewnątrz tego kąta. Punkty X i Y leżą na różnych ramionach tego kąta, przy czym $PX = PY$ oraz wartość sumy $AX + AY$ jest najmniejsza. Wykazać, że

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YAP.$$

3. Ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, \dots jest określony przez warunki: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2}$ dla $n = 3, 4, 5, \dots$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $k \geq 2$, że liczba a_k jest dzielnikiem iloczynu $a_{k+1}a_{k+2}$.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Każdemu niepustemu podzbiorkowi A zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ przyporządkowujemy liczbę $w(A)$ w następujący sposób: Jeżeli $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A , to

$$w(A) = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{k+1}a_k.$$

Obliczyć sumę wszystkich $2^n - 1$ otrzymanych liczb $w(A)$.

II SERIA

5. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb pierwszych (p, q, r) , że liczby

$$pq + qr + rp \quad \text{oraz} \quad p^3 + q^3 + r^3 - 2pqr$$

są podzielne przez $p + q + r$.

6. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$W(x^2) \cdot W(x^3) = (W(x))^5.$$

7. W n -osobowym stowarzyszeniu działa $2^n - 1$ komisji (każdy niepusty zbiór członków stowarzyszenia tworzy

komisję). W każdej komisji należy wybrać przewodniczącego. Wymagany jest przy tym warunek: Jeżeli komisja C jest sumą $C = A \cup B$ dwóch komisji A i B , to przewodniczącym komisji C jest też przewodniczącym co najmniej jednej z komisji A, B .

Wyznaczyć liczbę możliwych wyborów przewodniczących.

8. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCD$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P . Dowieść, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180^\circ.$$

III SERIA

9. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą a o następującej własności:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y, z \geq a$, spełniających warunek $x + y + z = 3$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3.$$

10. Dana jest liczba pierwsza p . Ciąg liczb całkowitych dodatnich a_1, a_2, a_3, \dots spełnia warunek

$$a_{n+1} = a_n + p \left[\sqrt[n]{a_n} \right] \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykazać, że pewien wyraz tego ciągu jest p -tą potęgą liczby całkowitej. (*Uwaga:* Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x .)

11. Punkty $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ leżą odpowiednio na bokach $BC, CA, AB, BC, CA, AB, BC$ trójkąta ABC , przy czym spełnione są równości

$$\begin{aligned} \sphericalangle P_1P_2C = \sphericalangle AP_2P_3 = \sphericalangle P_3P_4B = \sphericalangle CP_4P_5 = \\ = \sphericalangle P_5P_6A = \sphericalangle BP_6P_7 = 60^\circ. \end{aligned}$$

Dowieść, że $P_1 = P_7$.

12. Dana jest liczba całkowita $m \geq 2$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę całkowitą $n \geq m$, że dla każdego rozbięcia zbioru $\{m, m+1, \dots, n\}$ na dwa podzbiory przynajmniej jeden z tych podzbiorów zawiera takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne), że $ab = c$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 8 października 2007 r. – I seria, 12 listopada 2007 r. – II seria, 10 grudnia 2007 r. – III seria (decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Dla województwa pomorskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

Dla województwa śląskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

KOOM – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1 (Wieżowiec Fizyki), 20-031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

KOOM – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

KOOM – Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-956 Warszawa.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY FIZYCZNEJ

KOOF w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-224 Białystok (woj. podlaskie, powiaty: kętrzyński, mławowski, piski, giżycki, olecko-gołdapski, ełcki).

KOOF w Częstochowie, Al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa (woj. opolskie, woj. świętokrzyskie, powiaty: częstochowski, kłobucki, lubliniecki, myszkowski).

KOOF w Gdańsku, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz (woj. pomorskie, woj. warmińsko-mazurskie z wyłączeniem powiatów: kętrzyńskiego, mławowskiego, piskiego, giżyckiego, olecko-gołdapskiego, ełckiego).

KOOF w Gliwicach, ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice (woj. katowickie z wyłączeniem powiatów: częstochowskiego, kłobuckiego, lublinieckiego, myszkowskiego).

KOOF w Krakowie, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków (woj. małopolskie).

KOOF w Lublinie, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin (woj. lubelskie).

KOOF w Łodzi, ul. Pomorska 149, 90-236 Łódź (woj. łódzkie).

KOOF w Poznaniu, ul. Umultowska 85, 60-780 Poznań (woj. wielkopolskie).

KOOF w Rzeszowie, ul. Reytana 16A, 35-310 Rzeszów (woj. podkarpackie).

KOOF w Szczecinie, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin (woj. zachodniopomorskie, woj. lubuskie).

KOOF w Toruniu, ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń (woj. kujawsko-pomorskie).

KOOF w Warszawie, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa (woj. mazowieckie).

KOOF we Wrocławiu, pl. M. Borna 9, 50-205 Wrocław (woj. wrocławskie).