SPIS TREŚCI
NUMERU 8 (399)

W następnym numerze:

INFORMATYKA

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delty", ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS
01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
internet: www.amos.waw.pl , e-mail: biuro@amos.waw.pl
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące**. Cena jednego numeru w 2007 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2007 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u
internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

Cena prenumeraty w 2007 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH" SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.
Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
http://www.mimuw.edu.pl/delta

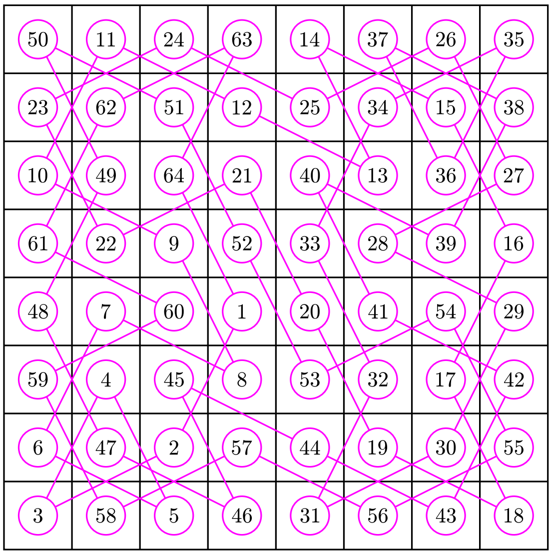
Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Leonhard Euler (1707–1783)

Jak widać, w tym roku mija 300 lat od narodzin najpłodniejszego bodaj uczonego w dziejach – podaje się, że opublikował 886 prac, a nie były to publikacje takie, jakie się dziś zlicza dla różnych urzędów, tylko duże, przeważnie książkowe opracowania. Dotyczyły one zarówno wszelkich dziedzin matematyki, jak też mechaniki, optyki, astronomii, hydrauliki, budowy okrętów, artylerii, muzyki itd. Niektóre z jego wyników przypominamy w tym numerze. Potęga umysłu Eulera jest tym bardziej imponująca, że miał trudności z pisaniem: w 1735 roku stracił oko, a w 1766 – drugie i znaczną część prac po prostu dyktował z pamięci.

O „posiadanie” Eulera walczą od lat co najmniej trzy państwa. Euler urodził się i zdobył wykształcenie (u Bernoullich) w Szwajcarii. Potem (1725) został zakupiony przez Piotra I do Petersburskiej Akademii Nauk (zakupiony, bo odbywało się to na podobnych zasadach, jak dziś w świecie piłkarskim) – przyznaje się do niego zatem Rosja. Odkupił go (1741) dla Akademii Berlińskiej Fryderyk II – i Niemcy też uważają go za swojego uczonego. Rosja ma jednak więcej praw do Eulera, bo z powrotem dla Petersburga odkupiła go (1766) Katarzyna II (ciekawe, że wszyscy wymienieni monarchowie noszą dziś przydomek „wielki”).

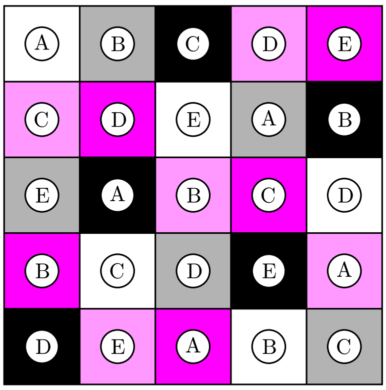
W dziedzinach tradycyjnie uważanych za domeny nauki prace Eulera porządkowały powstałą w XVII wieku pojęciową i metodologiczną dowolność, precyzowały badaną problematykę, formułowały problemy, stawiały hipotezy.



Suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest równa 260.
Co więcej – łamana łącząca kolejne pozycje konika ma środek symetrii.

Warto jednak zwrócić uwagę na włączanie do zainteresowań nauk ścisłych, w szczególności matematyki, obszarów tak odległych, że nie wszystkie z nich – po dziś dzień – stały się pełnoprawnymi dyscyplinami naukowymi. Karierę – w postaci teorii grafów – zrobiło rozwiązanie problemu spacerów po mostach Królewca (patrz tylna strona okładki). Spostrzeżenie, że suma liczby wierzchołków i ścian nadmuchiwalnego do kuli wielościanu jest o dwa większa od liczby krawędzi, zapoczątkowało topologię kombinatoryczną (o tym na stronie 10). Ale problem obejścia szachownicy ruchem konika w ten sposób, by dwa razy nie stanąć na tym samym polu (najciekawsze rozwiązanie podał Karl Jänisch – rysunek), wskazuje tylko na lansowaną przez Eulera, ale społecznie niechętnie przyjmowaną nawet dziś tezę, że matematyka jest wszędzie. Podobną rolę pełni, na przykład, badanie figur o stałej szerokości (wspomnieliśmy o tym w *Delcie* 1/2007).

Większą rolę pełni w matematyce problem uformowania szyku oficerów. Jego treść jest następująca: mamy na placu musztry ustawić kwadratowy szyk złożony z 36 oficerów, którzy pochodzą z sześciu pułków, przy czym każdy pułk reprezentują oficerowie sześciu różnych (ale takich samych w różnych pułkach) rang; dobre ustawienie to takie, w którym w żadnym szeregu ani w żadnej kolumnie nie będzie się powtarzał ani pułk, ani ranga. Euler twierdził, że jest to niemożliwe, a nawet że nie można tego zrobić dla n^2 oficerów, gdzie n jest dowolną liczbą parzystą niepodzielną przez 4. Przypuszczenie Eulera dotyczące 36 oficerów zostało potwierdzone dopiero w 1900 roku przez Tarry'ego, natomiast przypuszczenie ogólne okazało się całkowicie nietrafne. W 1960 roku Bose, Shrikhande i Parker udowodnili, że takie ustawienie jest możliwe dla dowolnego n z wyjątkiem $n=2$ i $n=6$. Pytanie Eulera spowodowało jednak ogromne zainteresowanie takimi kwadratami (tzw. ortogonalnymi kwadratami łacińskimi) i znalezienie dla nich interesujących zastosowań.



Oto przykład ustawienia szyku 25 oficerów, różniących się zarówno rangą (litery), jak przynależnością do pułku (zabarwienie pola).

Teza, że matematyka czy szerzej – nauka, jest wszędzie, spowodowała też, iż Euler napisał pierwszą popularnonaukową książkę dla dzieci: *Listy do księżniczki niemieckiej*, w której tę wszechobecność problemów nauki prezentuje.

Wojciech GUZICKI, Marek KORDOS

Euler i kombinatoryka

Nazwisko Eulera występuje wielokrotnie w każdym podręczniku kombinatoryki. Z ogromnej liczby poruszanych przez niego problemów przytoczymy jeden: problem zliczania podziałów liczby. Podziałem liczby n nazywamy przedstawienie jej w postaci sumy liczb naturalnych. Na przykład, liczba 6 ma 11 podziałów (zauważmy, że kolejność składników nie jest istotna):

$$6,\ 5+1,\ 4+2,\ 4+1+1,\ 3+3,\ 3+2+1,\ 3+1+1+1,\ 2+2+2,$$
$$2+2+1+1,\ 2+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1.$$

Zauważmy, że wśród tych 11 podziałów istnieją cztery podziały na liczby nieparzyste:

$$5+1,\ 3+3,\ 3+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1$$

i cztery podziały na liczby niepowtarzające się:

$$6,\ 5+1,\ 4+2,\ 3+2+1.$$

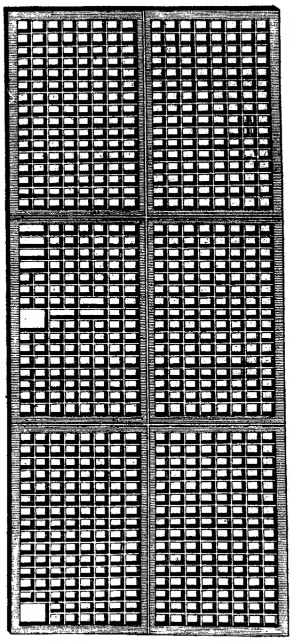
Euler zauważył, że nie jest to przypadek. Okazuje się, że dla każdej liczby naturalnej liczba podziałów na składniki nieparzyste jest równa liczbie podziałów na składniki parami różne (niepowtarzające się). W dowodzie Euler skorzystał z nieskończonych sum i iloczynów. Zauważył, że jeśli iloczyn

$$Q = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdot\ldots$$

zostanie przedstawiony w postaci szeregu

$$Q = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + \ldots,$$

to współczynnik stojący przy x^n jest właśnie liczbą podziałów n na składniki parami różne. Po chwili zastanowienia możemy bowiem dostrzec, że np. x^6 powstaje na cztery sposoby: iloczyn samych jedynek i x^6 z szóstego czynnika; iloczyn jedynek z wyjątkiem x z pierwszego czynnika i x^5 z piątego; iloczyn jedynek, x^2 z drugiego czynnika i x^4 z czwartego; wreszcie iloczyn jedynek, x z pierwszego czynnika, x^2 z drugiego i x^3 z trzeciego. Następnie Euler wziął drugi iloczyn:



$$R = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\ldots$$

i, korzystając ze wzoru

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots,$$

przedstawił go w postaci

$$R = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\cdot\ldots$$

Zauważmy, że mamy tu do czynienia z nieskończonym iloczynem szeregów nieskończonych. Ten ostatni iloczyn Euler przepisał w postaci:

$$R = (1+x+x^{1+1}+\ldots)(1+x^3+x^{3+3}+\ldots)(1+x^5+x^{5+5}+\ldots)\cdot\ldots$$

Po „wymnożeniu" i redukcji wyrazów podobnych otrzymał

$$R = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + \ldots,$$

czyli ten sam szereg, co w przypadku Q. To oczywiście wymagało dowodu. Najpierw jednak zastanówmy się, tak jak w przypadku Q, skąd wzięły się współczynniki przy kolejnych potęgach x. Rozumując podobnie jak poprzednio, przekonamy się, że potęgi x powstają przez mnożenie jedynek i potęg o wykładnikach nieparzystych. Stąd wynika, że współczynnik przy x^n jest równy liczbie podziałów n na składniki nieparzyste. Teraz do dokończenia dowodu wystarczyło udowodnić równość $Q = R$. Euler zdefiniował trzeci iloczyn

$$P = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdot\ldots$$

i zauważył, że

$$PQ = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdot\ldots$$

Ponieważ wszystkie czynniki iloczynu PQ występują w iloczynie P, więc

$$\frac{1}{Q} = \frac{P}{PQ} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdot\ldots = \frac{1}{R},$$

czyli $Q = R$.

Wykorzystana w dowodzie metoda tzw. funkcji tworzących odegrała w następnych wiekach ogromną rolę w kombinatoryce.

Czytelnikowi władającemu funkcjami tworzącymi wyrażonymi w postaci nieskończonych sum, iloczynów i iloczynów sum nieskończonych z biegłością mniejszą niż Euler, należy się na zakończenie chociaż szkic dowodu elementarnego. Otóż każdemu podziałowi liczby n na liczby nieparzyste

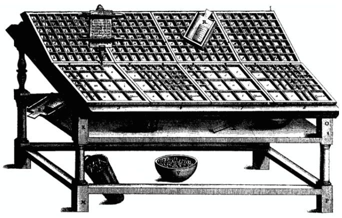
$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$$

przyporządkujemy podział na liczby parami różne. Przypuśćmy, że liczba k_1 występuje w tym podziale l_1 razy. Liczbę l_1 zapiszemy w postaci sumy potęg dwójki (czyli w systemie dwójkowym): $l_1 = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \ldots$. Następnie zamiast l_1 składników k_1 zapiszemy składniki $k_1 \cdot 2^{p_1}, k_1 \cdot 2^{p_2}, \ldots$. W podobny sposób potraktujemy pozostałe składniki nieparzyste podziału liczby n. Popatrzmy na przykład:

$$69 = 7+7+7+5+5+5+5+5+5+3+3+3+3+3+1+1+1.$$

Ten podział zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} 69 &= 7\cdot 3 + 5\cdot 6 + 3\cdot 5 + 1\cdot 3 = \\ &= 7\cdot(2^1+2^0) + 5(2^2+2^1) + 3\cdot(2^2+2^0) + 1\cdot(2^1+2^0) = \\ &= 7\cdot 2 + 7\cdot 1 + 5\cdot 4 + 5\cdot 2 + 3\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = \\ &= 14+7+20+10+12+3+2+1 = \\ &= 20+14+12+10+7+3+2+1. \end{aligned}$$



Nietrudno udowodnić, że w ten sposób otrzymujemy wszystkie podziały na liczby parami różne oraz różnym podziałom na liczby nieparzyste odpowiadają różne podziały na liczby niepowtarzające się. Wynika to stąd, że każdą liczbę naturalną $m \geqslant 1$ można w jednoznaczny sposób przedstawić w postaci $m = 2^p \cdot q$, gdzie liczba q jest nieparzysta. Szczegóły dowodu pozostawimy Czytelnikowi.

Wojciech GUZICKI

Euler i nieporządek

Nieporządek to takie ustawienie (permutacja) liczb od 1 do n, w którym żadna liczba nie stoi na właściwym miejscu (tzn. jedynka nie stoi na pierwszym miejscu, dwójka na drugim, trójka na trzecim itd.). Na przykład, permutacja 34152 jest nieporządkiem liczb od 1 do 5, a permutacja 51243 nie jest nieporządkiem (czwórka stoi na czwartym miejscu). Euler znalazł wzór rekurencyjny, z którego można łatwo obliczyć liczby nieporządków dla kolejnych n. Oznaczmy liczbę nieporządków liczb od 1 do n symbolem D_n. Euler udowodnił, że wtedy

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_n = (n-1)\cdot(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Stąd możemy łatwo obliczyć, że np.

$$D_3 = 2, \quad D_4 = 9, \quad D_5 = 44, \quad D_6 = 265, \quad \ldots, \quad D_{12} = 176214841.$$

Z tego wzoru rekurencyjnego Euler wyprowadził inny, prostszy wzór:

$$D_1 = 0, \quad D_n = n\cdot D_{n-1} + (-1)^n \quad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Wreszcie wyprowadził wzór ogólny:

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Wojciech GUZICKI

Rozwiązanie zadania F 698.
Ciśnienie zewnętrzne będzie równe ciśnieniu słupa cieczy, wyrażającym się przez jej średnią gęstość: $p = \rho_{\text{śr}} g h = \rho_0 \left(1 + \frac{\alpha h}{2}\right) g h$. Stąd $h = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{1 + \frac{2p\alpha}{\rho_0 g}} - 1\right)$.

Euler i liczba e

Z szacunku dla Eulera w tym artykule używać będę tak jak on notacji $\sqrt{-1}$. Jako ciekawostkę podam, że literą i oznaczał on „wielkość nieskończenie dużą”, tak więc pierwsza z równości (1) wyglądała w książce [1] tak: $e = (1 + 1/i)^i$.

Liczba e, podstawa logarytmów naturalnych, występowała w matematyce na sto co najmniej lat przed publikacją Eulera [1]. W tej fundamentalnej monografii (obok wielu innych tematów) wiele miejsca poświęcił Euler liczbie e i jej licznym zastosowaniom. Euler wiedział, że

(1) $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

oraz że $\left(e^x\right)' = e^x$. To właśnie spowodowało, że podstawowe znaczenie przypisał logarytmom naturalnym (czyli o podstawie e) oraz funkcji wykładniczej e^x. Żeby podkreślić wagę tej liczby, Euler nadał jej specjalną, do dziś stosowaną nazwę, właśnie e. Oczywiście, dla dowolnego rzeczywistego x mamy

(2) $$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Należy pamiętać, że Euler nie znał współczesnej ścisłości analizy matematycznej i aparatu δ–ε, genialnie natomiast operował formułami. Niezbyt przejmując się istnieniem $\sqrt{-1}$, wstawił $x\sqrt{-1}$ w (2) i wyszło mu

(3) $$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\cdot\sin x.$$

Literatura

[1] Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, 1748

[2] Leonhard Euler, *De fractionibus continuis*, Comment. Acad. Sc. Petrop. 9 (1737)

[3] Eli Maor, *e: The story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994

Stąd już tylko krok do sławnej formuły

(4) $$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

Innym cenionym obecnie wynikiem Eulera o liczbie e jest jej niewymierność. Wydaje mi się jednak, że Eulera niezbyt ten fakt interesował; w pierwszym tomie [1], gdzie jest on udowodniony, nie jest on jasno sformułowany. To, co Eulera bardzo interesowało, to przybliżone rozwiązania równań czy też efektywne wyliczanie przybliżeń konkretnych liczb, między innymi liczby e. W tym celu w Rozdziale XVIII [1] przedstawił teorię ułamków łańcuchowych i podał oszacowania błędów, jakie popełniamy, urywając ułamek łańcuchowy w pewnym miejscu.

Euler zauważył, że naturalny schemat wyliczania wartości ułamka łańcuchowego prowadzi do szeregu naprzemiennego, oraz odwrotnie – sumę szeregu naprzemiennego można przedstawić jako ułamek łańcuchowy. Ponieważ z (2) mamy

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$$

więc stosując swoją metodę Euler otrzymał

(5) $$\frac{e-1}{e} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\ldots}}}}}.$$

Sam Euler uznał za najważniejsze ułamki łańcuchowe postaci

(6) $$a_0 + \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ldots}}}},$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots$ to liczby naturalne $\geqslant 1$. Podał on sposób rozkładu dowolnej dodatniej liczby wymiernej na ułamek skończony postaci (6). Dla liczby e udowodnił w [2] i powtórzył w [1] rozkład

(7) $$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}.$$

Niestety pracy [2] nie czytałem, a w [1] Euler wylicza tę równość do sześciu kresek ułamkowych z wartości e podanej z dokładnością do 12 miejsc dziesiętnych. O nieskończonym rozwinięciu pisze, że „uzasadnić je można za pomocą rachunku nieskończonych”.

Podkreślić należy, że liczby tutaj występujące (poza pierwszą) tworzą nieskończony postęp arytmetyczny. Jeśli uwzględnimy łatwą do udowodnienia jedyność rozkładu liczby dodatniej na ułamek łańcuchowy postaci (6), od razu zauważymy, że liczba e musi być niewymierna.

Standardowy obecnie dowód niewymierności liczby e, używający szeregu (1), został najprawdopodobniej podany przez J. Fouriera, a więc jest o około sto lat późniejszy od naszkicowanego wyżej. Jest on następujący. Niech $e = p/q$, gdzie p i q są liczbami naturalnymi. Mnożąc (1) przez $q!$, otrzymamy

$$p(q-1)! = \left(\sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!}\right) + \frac{1}{q+1} +$$
$$+\frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots,$$

gdzie jasne jest, że lewa strona oraz wartość w nawiasie po prawej są liczbami naturalnymi. To, co pozostało po prawej stronie, jest więc też liczbą naturalną dodatnią i mniejszą od

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q+1}\right)^k = \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Otrzymaliśmy więc jawną sprzeczność.

Ponadto polecam książkę Eli Maora [3].

Przemysław WOJTASZCZYK

Euler i obroty Ziemi

Bezwładność w ruchu obrotowym opisuje tzw. tensor momentu bezwładności I, czyli symetryczna, kwadratowa macierz o rozmiarze 3. Jest to sześć niezależnych liczb, ale dla każdego ciała istnieje ortogonalny układ współrzędnych, w którym tylko wyrazy na pozycjach 1,1, 2,2 i 3,3 nie są równe 0. Trzy osie takiego układu nazywamy osiami głównymi, a trzy nieznikające składowe tensora I – głównymi momentami bezwładności. Dla jednorodnej elipsoidy obrotowej, którą przybliżamy kształt Ziemi, trzy osie główne wyznacza oś symetrii elipsoidy i dowolne dwie osie prostopadłe do niej i do siebie nawzajem.

Leonhard Euler, jak większość wybitnych matematyków swoich czasów (d'Alembert, Lagrange, Laplace), zajmował się także fizyką, a zwłaszcza dziedziną, która w XVIII stuleciu rozwijała się wyjątkowo szybko – mechaniką. Jego nazwisko nosi sposób opisu chwilowego położenia bryły sztywnej (tzw. kąty Eulera) oraz układ równań różniczkowych opisujących jej ruch rotacyjny. Przyjrzyjmy się tym równaniom.

Przypuśćmy, że na bryłę sztywną nie działa chwilowo żaden moment siły. Ruch w tej sytuacji wyznacza zasada zachowania momentu pędu, którą w układzie inercjalnym możemy zapisać jako

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0.$$

Równanie to prościej rozważać w układzie związanym sztywno z bryłą, gdy osie układu współrzędnych zgodne są z jej osiami głównymi. Po rozpisaniu na współrzędne przyjmuje ono postać

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x = (I_y - I_z)\omega_y\,\omega_z, \\ I_y\dot{\omega}_y = (I_z - I_x)\omega_x\,\omega_z, \\ I_z\dot{\omega}_z = (I_x - I_y)\omega_x\,\omega_y, \end{cases}$$

gdzie I_x, I_y i I_z to główne momenty bezwładności.

Gdybyśmy przyjęli, że Ziemia jest sztywną, jednorodną kulą, a więc ciałem o jednakowych trzech momentach głównych bezwładności, jej ruch byłby jednostajnym obrotem wokół ustalonej osi. Jednak francuska wyprawa pomiarowa pod przewodnictwem Pierre'a Louisa de Maupertuisa w latach 1736–37 stwierdziła, że Ziemia jest spłaszczona na biegunach, a wybrzuszona na równiku, a więc jej równikowy promień ($R_r = 6378$ km) jest dłuższy od biegunowego ($R_b = 6357$ km). Powodem odkształcenia jest oczywiście ruch obrotowy Ziemi. Za Eulerem zastanowimy się, jaki ma to wpływ na obrót naszej planety.

Czytelnik biegły w rachunku całkowym może sprawdzić, że przy założeniu jednorodności moment bezwładności Ziemi wzdłuż osi spłaszczenia, $I_z = \frac{2}{5}MR_r^2$, jest większy od momentu liczonego wzdłuż którejkolwiek z osi do niej prostopadłych, $I_\perp = \frac{1}{5}M(R_r^2 + R_b^2)$ (M to masa Ziemi).

Równania Eulera bryły sztywnej, której dwa momenty bezwładności są równe, mają postać

$$\begin{cases} I_z\,\dot{\omega}_z = 0, \\ I_\perp\,\dot{\omega}_x = \omega_z(I_\perp - I_z), \\ I_\perp\,\dot{\omega}_y = \omega_z(I_z - I_\perp). \end{cases}$$

Zauważmy, że pierwsze równanie daje się rozwiązać bez pomocy pozostałych dwóch. Oznacza ono, że składowa prędkości kątowej Ziemi wzdłuż osi z jest stała w czasie. Czytelnicy obeznani z równaniami różniczkowymi występującymi w mechanice rozpoznają zapewne pozostałe dwa równania. Opisują one ruch kołowy z prędkością kątową, $\omega_p = \omega_z(1 - \frac{I_z}{I_\perp})$, niezależną od promienia koła. Innymi słowy, wektor chwilowej prędkości kątowej zakreśla stożek o dowolnym kącie rozwarcia i w stałych jednostkach czasu. Okres tego ruchu, tzw. precesji swobodnej, obliczamy, przyjmując, że ω_z odpowiada obrotowi Ziemi o okresie jednej doby. Za Eulerem otrzymujemy

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = 1 \text{ doba} \cdot \frac{I_\perp}{I_z - I_\perp} = 1 \text{ doba} \cdot \frac{R_r^2 + R_b^2}{R_r^2 - R_b^2} \approx 300 \text{ dni}.$$

Obserwacyjnego potwierdzenia rachunków Eulera dokonał amerykański astronom Seth Carlo Chandler w 1891 roku. Kąt rozwarcia stożka zakreślanego w przestrzeni przez wektor $\vec{\omega}$ okazał się bardzo mały: promień drogi bieguna, czyli punktu przecięcia chwilowej osi obrotu i powierzchni Ziemi, to raptem kilkanaście metrów. Zaskoczeniem było odkrycie, że faktyczny ruch osi obrotu jest raczej nieregularny, a jego okres to ponad 430 dni. Niezgodność okresu zaobserwowanego przez Chandlera i rachunków można wytłumaczyć stosunkowo prosto: Ziemia nie jest jednolitą bryłą sztywną, jej wewnętrzne warstwy są płynne i prawdopodobnie nie uczestniczą w precesji warstw zewnętrznych. Większym problemem są nieregularności. Wydaje się, że odpowiedzialne mogą tu być procesy na powierzchni Ziemi (pływy, zmiany zasolenia wód i prądy oceaniczne) i pod jej powierzchnią (przemieszczenia mas).

Należy podkreślić, że opisany efekt nie ma nic wspólnego z precesją astronomiczną, czyli powolnym obrotem osi Ziemi powodowanym przez oddziaływanie z Księżycem i Słońcem. Obszerniej o wszystkich subtelnościach ruchu obrotowego Ziemi i ich przyczynie można przeczytać w artykule Jolanty Nastuli w *Delcie* 12/2006.

Mikołaj KORZYŃSKI

Euler i teoria liczb

Nie sposób przedstawić w krótkim artykule pełnej listy zasług Eulera na polu teorii liczb. Dokonałem więc wyboru najbardziej charakterystycznych przykładów jego osiągnięć w tej dziedzinie.

Za jedno z najważniejszych twierdzeń teorii liczb uważane jest prawo wzajemności reszt kwadratowych. Zostało ono sformułowane bez dowodu przez Eulera, a udowodnione przez Gaussa.

Liczbę r nazywamy resztą kwadratową modulo p, jeżeli kongruencja

$$x^2 \equiv r \pmod{p}$$

ma rozwiązanie całkowite x. Prawo wzajemności reszt kwadratowych orzeka, że dla dowolnych różnych nieparzystych liczb pierwszych p i q wszystkie trzy warunki:

(i) liczba p jest resztą kwadratową modulo q,

(ii) liczba q jest resztą kwadratową modulo p,

(iii) obie liczby p, q przy dzieleniu przez 4 dają resztę 3

są fałszywe lub też prawdziwe są dokładnie dwa z nich.

Euler udowodnił, że szereg odwrotności liczb pierwszych jest rozbieżny. Przy okazji odkrył następujący związek między funkcją ζ Riemanna i liczbami pierwszymi

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \,,$$

gdzie mnożenie rozciąga się na wszystkie liczby pierwsze p. Powyższa równość jest spełniona dla dowolnej liczby zespolonej s o części rzeczywistej większej od 1.

Euler wyjaśnił też kwestię kilku zagadnień pochodzących od Fermata, który miał zwyczaj formułowania twierdzeń bez dowodu.

Jedno z takich twierdzeń, znane jako małe twierdzenie Fermata, orzeka, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz dowolnej liczby całkowitej a liczba $a^p - a$ jest podzielna przez p.

W innej wersji

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \,,$$

o ile liczba a jest względnie pierwsza z p. Euler nie tylko jako pierwszy opublikował dowód tego twierdzenia, ale uogólnił je na przypadek dowolnej, niekoniecznie pierwszej, liczby naturalnej $k > 1$. Mamy bowiem

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k} \,,$$

gdzie φ jest funkcją Eulera. Z definicji $\varphi(k)$ jest liczbą liczb całkowitych dodatnich względnie pierwszych z k i mniejszych od k. Powyższe uogólnienie znane jest jako twierdzenie Eulera.

Fermat był przekonany, że liczby postaci

$$2^{2^n} + 1$$

są pierwsze dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n. Przypuszczenie to zostało obalone przez Eulera, który wykazał, że

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417 \,.$$

Euler udowodnił wielkie twierdzenie Fermata dla wykładnika 3, które w tym przypadku mówi, że równanie

$$x^3 + y^3 = z^3$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Sformułował też hipotezę będącą uogólnieniem powyższego twierdzenia. Przypuszczał, że dla dowolnego $n > 2$ nie można przedstawić n-tej potęgi liczby naturalnej w postaci sumy mniej niż n potęg o wykładniku n.

Tak więc według hipotezy Eulera równanie

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = z^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_k, z$, jeżeli $n > 2$ oraz $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Hipoteza ta okazała się jednak fałszywa, ale została obalona dopiero w roku 1967 przykładem

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

znalezionym przez Landera i Parkina. W 1988 roku Noam Elkies wykazał, że hipoteza Eulera jest także fałszywa dla $n = 4$. Jednak do tej pory nie została ona rozstrzygnięta dla żadnej liczby $n > 5$.

Od Eulera pochodzi równość

$$158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4$$

oraz rozwiązanie parametryczne równania diofantycznego $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$.

Od Eulera pochodzi także wielomian

$$x^2 + x + 41$$

dający 40 różnych liczb pierwszych dla 40 kolejnych argumentów $x = 0, 1, 2, \ldots, 39$. Mimo intensywnego użycia komputerów do dnia dzisiejszego nie znaleziono wielomianu stopnia 2, który dawałby więcej niż 40 różnych liczb pierwszych dla kolejnych wartości argumentu.

Jarosław WRÓBLEWSKI

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele – dowód Eulera

Przypuśćmy, że jedynymi liczbami pierwszymi są $p_1, p_2, \ldots, p_m$ i $m \in \mathbb{N}$. Wówczas, jak wiemy z twierdzenia o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze (którego dowód nie odwołuje się do liczebności zbioru liczb pierwszych), każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić w postaci $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Oznaczmy zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych symbolem $\mathbb{Z}_0^+$.

Zbiór $\left\{\frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}} : k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$ jest więc zbiorem wszystkich odwrotności liczb naturalnych, przy czym każda taka odwrotność występuje w tym zbiorze tylko raz. Inaczej mówiąc,

$$\left\{\frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}} : k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_0^+\right\} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

a stąd

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_0^+} \frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

(Wyrazy tych szeregów są dodatnie, więc kolejność sumowania nie ma znaczenia.) Szereg harmoniczny jest rozbieżny, zatem każda z powyższych sum jest nieskończona.

Skończona jest natomiast każda z sum $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{p_i})^k$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Istotnie, są to szeregi geometryczne o (dodatnim) ilorazie $\frac{1}{p_i}$ mniejszym od 1 i suma takiego szeregu jest równa $\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$. W takim razie skończony jest także iloczyn tych sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1}\right)^k \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_m}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdots \frac{1}{1-\frac{1}{p_m}}.$$

Iloczyn nieskończonych szeregów wygląda podobnie jak iloczyn skończonych sum: jest znowu sumą, której każdy składnik jest iloczynem, zawierającym po jednym elemencie z każdej sumy, i wszystkie takie iloczyny muszą wystąpić. W szczególności,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1}\right)^k \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_m}\right)^k = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_0^+} \frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}}.$$

Założenie o skończoności zbioru liczb pierwszych doprowadziło do sprzeczności: po lewej stronie mamy liczbę skończoną, po prawej szereg rozbieżny do nieskończoności. I to jest koniec dowodu.

Wiktor BARTOL

Stała Eulera–Mascheroniego

Rozgłosu i sławy przysporzyło dwudziestoośmioletniemu Eulerowi wykazanie w 1735 roku równości

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Podobne wyniki uzyskał także dla

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

gdzie s jest dodatnią liczbą parzystą. W ogłoszonej rozprawie stwierdził ponadto, że z równości

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \ln(n+1) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^4} + \ldots$$

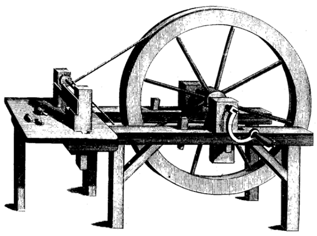
wynika zbieżność ciągu

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \ln(n+1)$$

przy $n \to +\infty$, a jego granicę oznaczył przez C (od takiego stwierdzenia do dowodu jest całkiem daleko, ale w XVIII w. tym się nie przejmowano). Uważał, że zasługuje ona na dokładniejsze zbadanie i wyznaczył ją z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku. Może myślał, że poznanie jej natury przybliży go do wyznaczenia, na przykład, $\zeta(3)$? Ostatecznie, dzięki wynajdywaniu coraz to nowych równości zawierających C, wiedział, że $C = 0{,}5772156649015328\ldots$. Pod koniec swego życia przyznał, że stała C pozostała dla niego zagadką. Pałeczkę wyznaczania kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego C przejął włoski matematyk Lorenzo Mascheroni. Zastosowane przez niego w 1790 roku oznaczenie γ zamiast C pozostało do dziś. Do dziś też nie umiemy odpowiedzieć na pytanie, czy γ jest liczbą wymierną.

Marcin HAUZER

Równania Eulera–Lagrange'a

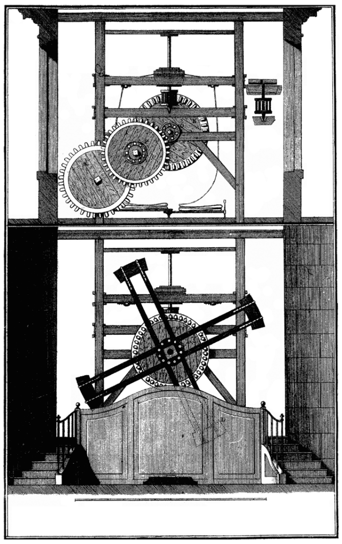


Ogólnym sformułowaniem praw ruchu układu mechanicznego, tzn. mającego skończoną liczbę stopni swobody, jest tzw. *zasada najmniejszego działania*. Dla uproszczenia podamy tę zasadę dla przypadku ruchu jednej cząstki punktowej w jednym wymiarze przestrzennym, co powinno wystarczyć do zrozumienia sedna sprawy.

Przypiszmy cząstce pewną funkcję rzeczywistą $L = L(x, \dot{x}, t)$ (gdzie t jest zmienną czasową, $x = x(t)$ oznacza położenie cząstki w chwili t, natomiast $\dot{x} := \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ jest prędkością cząstki) charakteryzującą jej ruch. Funkcja L nazywa się funkcją Lagrange'a. Zasada najmniejszego działania mówi, że ruch cząstki odbywa się w taki sposób, że tzw. *całka działania* S zdefiniowana wzorem

$$S := \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(x, \dot{x}, t) \tag{1}$$

osiąga minimum dla małej różnicy $|t_2 - t_1|$.



Podamy teraz równanie, którego rozwiązanie minimalizuje ową całkę działania. Załóżmy w tym celu, że $x = x(t)$ jest właśnie funkcją opisującą rzeczywisty ruch cząstki, dla którego całka S ma minimum. Niech $\delta x(t)$, zwana wariacją funkcji $x(t)$, oznacza mały przyrost tej funkcji w przedziale od t_1 do t_2 o własności $\delta x(t_1) = 0 = \delta x(t_2)$. Wtedy zastąpienie $x(t)$ przez $x(t) + \delta x(t)$ spowoduje zmianę działania określoną przez różnicę całek

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[L(x + \delta x, \dot{x} + \delta\dot{x}, t) - L(x, \dot{x}, t)\right]. \tag{2}$$

Przyrównanie do zera powyższej całki, czyli wariacji działania δS, jest warunkiem koniecznym na to, aby S miało minimum dla funkcji $x = x(t)$. Rozwińmy teraz wyrażenia podcałkowe w szereg potęgowy względem δx i $\delta\dot{x}$, oraz ograniczmy się do wyrazów pierwszego rzędu. Możemy więc zasadę najmniejszego działania zapisać w postaci

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(x, \dot{x}, t) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right) = 0. \tag{3}$$

Całkując wyrażenie zawierające $(\partial L/\partial\dot{x})\ \delta\dot{x}$ przez części (i korzystając z tego, że $\delta\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x$), otrzymujemy

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x = 0. \tag{4}$$

Pierwszy wyraz w tym wyrażeniu znika na mocy definicji $\delta x(t)$. Drugi wyraz powinien znikać przy dowolnych wartościach wariacji δx. Będzie to możliwe wtedy, gdy wyrażenie podcałkowe spełnia warunek

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Równanie to nazywa się równaniem Eulera–Lagrange'a i zostało wyprowadzone niezależnie przez L. Eulera oraz J-L. Lagrange'a w latach 50. osiemnastego wieku. Jest ono tzw. równaniem ruchu cząstki, to znaczy jego rozwiązanie określa rzeczywisty ruch cząstki. Zadanie warunków początkowych dla tego równania, tzn. $x_1 = x(t_1)$ oraz $\dot{x}_1 = \dot{x}(t_1)$, pozwala je rozwiązać jednoznacznie.

Na przykład, dla nierelatywistycznej cząstki swobodnej o masie m poruszającej się w płaskiej czasoprzestrzeni, funkcja Lagrange'a ma prostą postać

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{6}$$

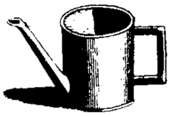
Równanie Eulera–Lagrange'a przyjmuje wtedy znaną powszechnie postać drugiego prawa Newtona:

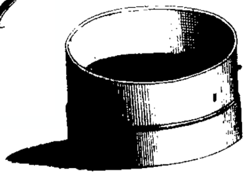
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0. \tag{7}$$

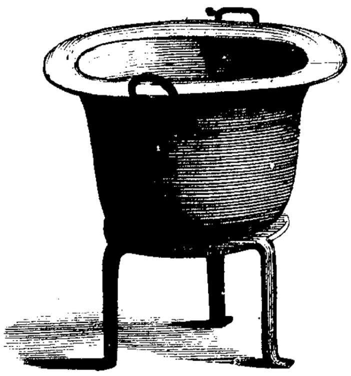
Zasada najmniejszego działania daje się łatwo uogólnić na przypadek układu wielu cząstek poruszających się w wielowymiarowej czasoprzestrzeni w zadanym polu sił. Jest ona również powszechnie stosowana w teorii pola, tzn. dla układów mających nieskończenie wiele stopni swobody. Otrzymane wtedy równania Eulera–Lagrange'a są znanymi równaniami zmian w czasie tych pól: są to np. równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego oraz równania Einsteina dla pola grawitacyjnego. Zasada najmniejszego działania jest powszechnie stosowana w fizyce współczesnej, m.in. dla otrzymywania równań ruchu danego układu – albowiem często łatwiej jest odgadnąć funkcję Lagrange'a układu niż równania ruchu.

Ewa CZUCHRY, Włodzimierz PIECHOCKI

Mechanika płynów







Wśród kilkuset prac opublikowanych przez Eulera kilkanaście dotyczyło mechaniki płynów. Temat ten łączy się z jednej strony z mechaniką w ogóle, jak również z budową, sprawnością i nawigacją okrętów. Już druga jego praca [E4] dotyczyła budowy okrętów i została zgłoszona do konkursu ogłoszonego przez Paryską Akademię Nauk, przynosząc dwudziestoletniemu autorowi wyróżnienie.

Główna seria prac Eulera o mechanice płynów powstała we wczesnych latach pięćdziesiątych XVIII wieku w Berlinie. W pierwszej pracy [E258] autor wykłada swoją koncepcję podejścia do problemu:

dla danej masy płynu, zarówno wolnej, jak zamkniętej w naczyniach, znajdującej się w dowolnym ruchu, jednocześnie będącej pod wpływem dowolnych sił, należy wyznaczyć ruch, jakim jego porcje będą się wzajemnie poruszały, równocześnie z ciśnieniem, jakim te porcje będą oddziaływać na siebie nawzajem i na ściany naczyń.

Autor pokazuje, że choć ruch cząstek płynu jest mniej ograniczony niż w przypadku ciał stałych, to nadal podlega pewnym prawom. Zakładając, że płyn jest nieściśliwy, wyprowadza po raz pierwszy równanie ciągłości. Argumentuje, że każdy płyn, wypełniający zamknięte naczynie, musi być w stanie równowagi, nawet jeżeli jest poddany działaniu dowolnych sił. Po raz pierwszy rozdziela kinematyczny i dynamiczny aspekt ruchu płynów. W końcu dowodzi, że sztywne pole prędkości jest możliwe tylko dla jednorodnej translacji.

Dalsze części tej pracy, zredagowanej po łacinie, zostaną napisane dopiero przy okazji powrotu do Petersburga w 1766 roku. Zamiast tego Euler rozwija pełną teorię mechaniki płynów w trzech pracach przedstawionych, a następnie wydanych po francusku [E225, E226, E227].

Pierwsza z nich wykłada teorię hydrostatyki jako szczególny przypadek ruchu płynu. Przedstawia dopracowaną koncepcję ciśnienia i jej zastosowania. Po raz pierwszy przedstawia ogólne równania hydrostatyki. Wyjaśnia pomysł termometru gazowego i prezentuje po raz pierwszy równania równowagi. W pracy tej Euler dowodzi również, że z dynamicznego punktu widzenia nie ma zasadniczej różnicy między płynami ściśliwymi i nieściśliwymi.

Druga praca [E226] opisuje ruchy płynów na tej samej zasadzie, jak w pracy poprzedniej przedstawiona była statyka płynów. Praca ta zawiera jedne z najwcześniejszych uwag wskazujących na znaczenie warunków brzegowych przy wyznaczaniu odpowiedniej całki dla danego różniczkowego równania cząstkowego. Założenie, że stan ruchu płynu jest znany w jakimś momencie, redukuje całą teorię do określonej formuły analitycznej. Dowodzi, że rozwiązania mogą istnieć nawet wtedy, gdy równowaga nie jest możliwa. Pokazuje, że istnienie stałego pola prędkości jest przypadkiem szczególnym, przytaczając kontrprzykład ruchu wirów (jest to pierwszy przykład szczególnego przypadku tzw. strumienia Poiseuille'a).

Trzecia praca jest kontynuacją drugiej (przedstawione były w odstępie dwóch miesięcy). Euler zamieszcza w niej, między innymi, pełną teorię przepływu płynu przez rury i rozważa zachowanie płynów ściśliwych. W pracy tej po raz pierwszy pojawia się potencjał zespolony użyty do opisu źródła, ujścia lub wiru.

Moim zdaniem pogląd na zagadnienie mechaniki płynów Euler najlepiej podsumował we wstępie do pracy [E226]:

Jest zrozumiałym, że materia ta (mechanika płynów) jest dużo trudniejsza (niż statyka) [...] niemniej jednak mam nadzieję szczęśliwie dotrzeć do celu w tym sensie, że jeżeli jakieś trudności nie zostaną przezwyciężone, to nie będą to braki mechaniki, tylko analizy: nauka ta nie została jeszcze doprowadzona do stopnia perfekcji umożliwiającego uzyskanie formuł analitycznych obejmujących ruchy płynów.

Upłynęło 250 lat, a pogląd ten nadal można uznać za aktualny...

Piotr ZALEWSKI

[E4] *Meditationes super problemate nautico, quod illustrissima regia Parisiensis Academia scientarum proposuit*, opublikowane w *Pièce qui a remporté le prix de l'académie royale des sciences* w 1727 roku

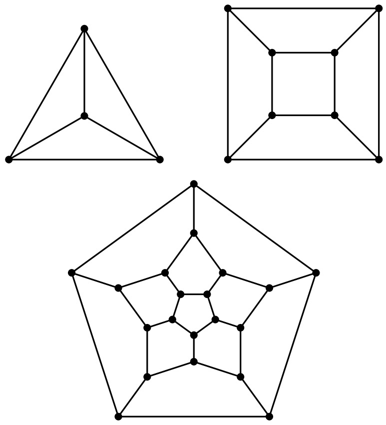
[E258] *Principia motus fluidorum*, przedstawione Akademii Berlińskiej 31 sierpnia 1752 roku

[E225] *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides*, przedstawione Akademii Berlińskiej 11 października 1753 roku

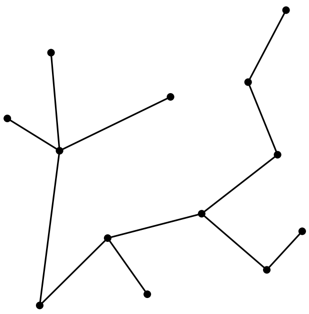
[E226] *Principes généraux du mouvement des fluides*, przedstawione Akademii Berlińskiej 4 sierpnia 1755 roku

[E227] *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*, przedstawione Akademii Berlińskiej 2 października 1755 roku

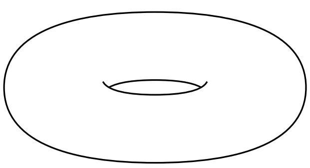
(numeracja wg Eneström Index)



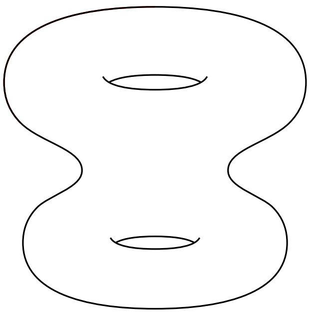
Rys. 1. Diagramy Schlegela dla czworościanu, sześcianu i dwunastościanu foremnego.



Rys. 2.



Rys. 3. Czytelnik bez trudu, wykonując jakąś triangulację torusa, sprawdzi, że jego charakterystyka Eulera–Poincarégo jest równa 0.



Rys. 4. A jaka jest charakterystyka Eulera–Poincarégo dla precla?

Wzór Eulera

W 1752 roku Euler zapisał, że suma liczby s ścian i w wierzchołków wielościanu wypukłego jest o 2 większa od liczby k jego krawędzi. Zależność

$$s - k + w = 2$$

nosi nazwę wzoru Eulera. Uzasadnienie tego spostrzeżenia nie jest trudne. Na przykład można zrobić to, odwołując się do tzw. *diagramu Schlegela*. Jest to płaski graf odpowiadający temu, co zobaczymy zbliżywszy oko do jednej ze ścian (przezroczystego) wielościanu wypukłego tak, by wszystkie jego wierzchołki widzieć przez tę ścianę (przykłady na rysunku 1). Jeśli nieograniczony obszar, widoczny na zewnątrz tej ściany uznamy też za ścianę, to diagramowi Schlegela wielościanu będą odpowiadały te same liczby s, k, w, które odpowiadają wielościanowi. Uruchamiamy teraz procedurę: jeśli krawędź oddziela dwie różne ściany, to ją usuwamy – nietrudno zauważyć, że wyrażenie $s - k + w$ nie zmienia przy tej procedurze swej wartości (zarówno s, jak k zmniejszają się o 1). Procedura zatrzymuje się, gdy zostanie nam tylko jedna ściana, czyli gdy pozostaną tylko połączone łamane, tak jak, na przykład, na rysunku 2. Teraz usuwamy ich wolne końce wraz z prowadzącymi do nich krawędziami – to znów nie zmienia wartości wyrażenia $s - k + w$ (o 1 zmniejsza się w i k). W efekcie zostaje jeden punkt – dla niego jest $s = w = 1$ i $k = 0$, czyli $s - k + w = 2$ i tak musiało być zatem od początku.

Proste spostrzeżenie, że w wielościanie zachodzi

$$(1) \qquad s \leqslant \frac{2}{3}k \quad \text{i} \quad w \leqslant \frac{2}{3}k,$$

wynika z faktu, że ściany mają co najmniej trzy boki-krawędzie, a każda krawędź należy do dwóch ścian (podobnie z wierzchołka wychodzą co najmniej trzy krawędzie i każda łączy dwa wierzchołki). Gdy zastosujemy do tego wzór Eulera, możemy otrzymać

$$s \geqslant \frac{1}{3}k + 2, \quad w \geqslant \frac{1}{3}k + 2$$

oraz

$$(2) \qquad w \leqslant 2s - 4, \quad s \leqslant 2w - 4,$$

co zapewne każdy z Czytelników umie wykazać.

Od razu nasuwa się pytanie, czy dla dowolnych liczb s, k, w, spełniających wzór Eulera, istnieje wielościan mający odpowiednio tyle ścian, krawędzi i wierzchołków. Odpowiedź jest oczywiście „nie” – np. nie ma wielościanu o jednej ścianie. Ale jak brzmi odpowiedź, gdy dodatkowo założymy, że s i w to co najmniej 4, a k – co najmniej 6? Pytanie okazało się niełatwe. Dopiero w 1906 roku Steinitz udowodnił, że
jeśli liczby całkowite dodatnie s, k, w spełniają wzór Eulera i warunki (1)*, to istnieje wielościan wypukły mający s ścian, k krawędzi i w wierzchołków.*

Korzystając z twierdzenia Steinitza, Czytelnicy mogą bez specjalnego trudu wykazać, że
warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich s i w istniał wielościan wypukły mający s ścian i w wierzchołków, jest (2).

Wzór Eulera został uogólniony przez Poincarégo na dowolne powierzchnie (i rozmaitości wyższych wymiarów). Okazuje się bowiem, że gdy dowolną powierzchnię jakoś striangulujemy (czyli podzielimy na – być może krzywoliniowe – trójkąty), to wyrażenie $s - k + w$ będzie miało tę samą wartość, niezależnie od tego, jak tę triangulację wykonamy. Liczbę tę, *charakterystykę Eulera–Poincarégo* powierzchni M, oznacza się na ogół $\chi(M)$. Nie zmienia się ona przy odkształcaniu powierzchni bez rozrywania i sklejania (czy ogólniej – przy homeomorfizmach) i na dodatek, gdy w powierzchniach M_1 i M_2 wytniemy po kółku i potem skleimy je tymi otworami, otrzymując powierzchnię M, okaże się, że

$$\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Marek KORDOS

Ciąg Eulera–Jaczewskiego

Czym zasłużył się Leonhard Euler w algebrze? Wieloma odkryciami, ale przede wszystkim napisaniem dzieła *Vollständige Anleitung zur Algebra* wydanego przez Petersburską Akademię Nauk w 1770 r. Uważa się, że jest to druga, po *Elementach* Euklidesa, książka matematyczna o największej liczbie wydrukowanych egzemplarzy.

Książka była pisana, gdy nie zostały jeszcze odkryte grupy, pierścienie, ideały, ciała, przestrzenie liniowe, topologia i geometria algebraiczna, algebry uniwersalne, algebry Boole'a – słowem, kiedy algebra nie zawojowała jeszcze naszego świata matematycznego, a matematyka nie była wcale algebraicznym mocarstwem.

Euler podaje zadania i je rozwiązuje. To ciekawy sposób nauczania. Ujmuje to skomplikowanie brzmiąca maksyma: *Tego, czego powinniśmy się nauczyć, by coś robić, uczymy się, robiąc to właśnie.*

Niektóre z tych zadań zakwalifikowalibyśmy dziś do matematyki rekreacyjnej, inne są zadaniami tekstowymi, dobrymi i dla dzisiejszej szkoły. Wiele z nich Euler przepisał z pierwszej niemieckiej książki o algebrze (1553). Oto przykłady.

Trzech kupców nabyło na spółkę dom za 100 talarów reńskich. Gdyby pierwszy z nich pożyczył od drugiego połowę jego pieniędzy, to mógłby dom kupić samodzielnie. Gdyby drugi kupiec pożyczył od trzeciego jedną trzecią jego pieniędzy, także mógłby kupić dom samodzielnie. To samo mógłby zrobić trzeci kupiec, pożyczywszy od pierwszego ćwierć jego pieniędzy. Ile pieniędzy miał każdy z nich?

Pewien bogaty szlachcic podzielił w testamencie sztuki złota między swoje dzieci w następujący sposób. Dziecko o numerze i otrzymało $a \cdot i$ sztabek, plus n-tą część pozostałej liczby sztuk złota. Okazało się, że wszystkie dzieci otrzymały po równo – tyle samo złota. Ile było dzieci i ile sztuk złota miał szlachcic? Uwaga: n nie jest liczbą dzieci, tylko pewną liczbą naturalną.

Zadanie to jest stare, rozwiązywał je już Cardano. Rozwiązań jest wiele. Czytelnik z XXI wieku będzie miał wiele uciechy, szukając kolejnych.

Ale nie tylko takie ciekawostki wypełniają *Wprowadzenie do Algebry*. Wiele miejsca poświęca Euler równaniu $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ i jego rozwiązaniom wymiernym. W języku dzisiejszej geometrii algebraicznej powiedzielibyśmy, że bada krzywe eliptyczne i punkty wymierne na nich – to klasyczne zagadnienie odegrało zasadniczą rolę w dowodzie Wilesa Wielkiego Twierdzenia Fermata. A słynne już wtedy zadanie Fermata Euler próbuje rozwiązać i oczywiście nie osiąga celu. Uzasadnia nawet, jak może, „dlaczego" rozwiązać się nie daje. Przy końcu książki pisze mniej więcej tak, proroczo: „widocznie do tego równania potrzebne są specjalne metody, które nie zostały jeszcze wynalezione. Dla równania $x^3 + y^3 = z^3$ udało mi się znaleźć metodę".

Owa metoda to idea „nieskończonego zejścia", znana właściwie już Fermatowi. Zakładamy, że rozwiązanie istnieje i wykazujemy, że musi istnieć następne, z mniejszymi liczbami. I tak dalej,. . . , ale nieskończonego ciągu malejących liczb naturalnych nie ma. Jeżeli konstruujemy taki ciąg, to. . . musi gdzieś tkwić fałsz. Euler tłumaczy to dość długo i zawile – widocznie metoda była zbyt świeża.

Wspomnijmy tu chyba jedyny polski akcent, związany z Eulerem: *ciąg Eulera–Jaczewskiego.*

Wielomian jednorodny f kilku zmiennych jest proporcjonalny do sumy swoich pochodnych cząstkowych mnożonych przez zmienne. Na przykład dla $f(x,y,z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ mamy

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} &= x \cdot (2xyz + y^2z + yz^2) + \\ &+ y \cdot (x^2z + 2xyz + xz^2) + \\ &+ z \cdot (x^2y + xy^2 + 2xyz) = \\ &= 4 \cdot (x^2yz + xy^2z + xyz^2) = 4f. \end{aligned}$$

Ta nietrudna zależność nosi nazwę tożsamości Eulera. Przeskoczmy 250 lat. We współczesnej geometrii algebraicznej ciągiem Eulera nazywa się taki oto dokładny ciąg wiązek wektorowych na przestrzeni rzutowej wymiaru $n : 0 \to O \to \bigoplus_{i=1}^{n} O(1) \to T \to 0.$

Pierwsza z wiązek, O, to wiązka trywialna, potem następuje suma prosta wiązek liniowych odpowiadających hiperpłaszczyznom, wreszcie T to wiązka styczna. Odwzorowanie $\bigoplus_{i=1}^{n} O(1) \to T$ jest generowane przez różniczkowania $\frac{\partial}{\partial x_i}$, zaś zanurzenie $O \to \bigoplus_{i=1}^{n} O(1)$ jest opisane lokalnie jako

$$f \to \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

a ta ostatnia funkcja jest proporcjonalna do f na mocy właśnie relacji Eulera.

Czy wyjaśniłem, o co chodzi? Oczywiście, że. . . nie wszystkim. I nie będę się starał.

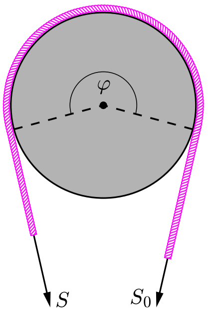
Mój były student, a potem kolega z pracy, młodo zmarły Krzysztof Jaczewski (1955–1994), wykazał, (znów nie będę tłumaczyć!), że istnienie uogólnionego ciągu Eulera charakteryzuje *rozmaitości toryczne*, teoria których interesująco łączy zaawansowaną geometrię algebraiczną z prostą geometrią wielościanów. Jeszcze dziesięć lat temu były to szalenie modne zagadnienia. A wspomniany ogólniejszy ciąg nazywa się dziś w literaturze matematycznej ciągiem Eulera–Jaczewskiego. I taki to jest „polski akcent" związany z Leonhardem Eulerem; może wybaczymy temu wybitnemu uczonemu, że przyjął gościnny chleb na dworze carycy Katarzyny, sprawczyni rozbiorów Polski.

Michał SZUREK

Lina Eulera

Zagadnienie liny Eulera jest stosunkowo mało znane, chociaż sam opisywany mechanizm jest powszechnie używany w różnego rodzaju układach mechanicznych, np. przekładniach, hamulcach taśmowych, czy wręcz przy cumowaniu statków.

Rozpatrzmy linę opasującą palik, jak na rysunku poniżej.



Jeśli na jeden koniec liny działa siła S, to w przypadku braku tarcia, aby ją zrównoważyć, musimy na drugi koniec podziałać taką samą siłą. W przypadku, gdy współczynnik tarcia liny o palik μ jest niezerowy i powoduje występowanie siły tarcia T, do zrównoważenia siły S potrzeba jest siła $S_0 = S - T$. Zależność tę można wyrazić też w następujący sposób:

$$S = S_0 e^{\mu\varphi},$$

gdzie φ jest kątem „opasania" liny na palik. Wzór powyższy, zwany także (jeden z wielu) wzorem Eulera, został po raz pierwszy otrzymany przez Leonharda Eulera w wyniku zsumowania małych przyczynków siły tarcia powstałych w wyniku zmiennego nacisku liny na powierzchnię palika.

Mianowicie, dla bardzo małych kątów opasania $\Delta\varphi$ siła S_0, potrzebna do skompensowania siły naciągu S, dana jest przez zależność:

$$S = S_0 + T = S_0 + \mu N,$$

gdzie N jest siłą nacisku liny na palik, dla małych kątów równą $N = \Delta\varphi S_0$. Zatem

$$S = S_0(1 + \mu\Delta\varphi).$$

Dla kąta opasania równego $2\Delta\varphi$ mamy także:

$$S_{2\Delta\varphi} = S_{\Delta\varphi}(1 + \mu\Delta\varphi) = S_0(1 + \mu\Delta\varphi)^2.$$

Jeśli mały kąt $\Delta\varphi$ jest n-tą częścią pewnego kąta φ, tzn. $n \cdot \Delta\varphi = \varphi$, wtedy

$$S_{n\Delta\varphi} = S_0(1 + \mu\Delta\varphi)^n.$$

Biorąc kąt $\Delta\varphi$ coraz mniejszy, tzn. biorąc coraz większe n, otrzymujemy w granicy $n \to \infty$:

$$S_\varphi = S_0 e^{\mu\varphi},$$

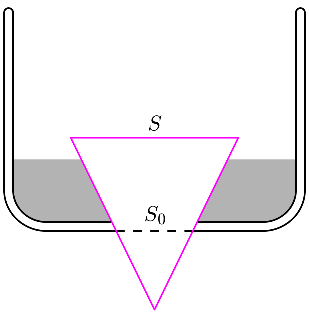
gdzie $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ jest podstawą logarytmu naturalnego, o której mowa na stronie 4. Przykładowo, dla $\mu = 0,5$ (współczynnik tarcia liny konopnej o drewno) i przy trzykrotnym opasaniu palika liną ($\varphi = 6\pi$) mamy, że stosunek siły naciągającej S do blokującej S_0 jest rzędu 10^4.

Ewa CZUCHRY

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 697. Kolisty otwór o powierzchni S_0, wykonany w dnie akwarium, został zatkany stożkowatym korkiem o polu podstawy S (rys. 1). Dla jakiej maksymalnej gęstości korka ρ można spowodować jego wypłynięcie poprzez dolewanie wody do akwarium?
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1

F 698. Rtęć w barometrze została zastąpiona pewną ściśliwą cieczą, której gęstość rośnie wraz z głębokością zgodnie ze wzorem $\rho = \rho_0(1 + \alpha h)$. Jaka będzie wysokość słupa takiej cieczy przy ciśnieniu atmosferycznym równym p?
Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Waldemar POMPE

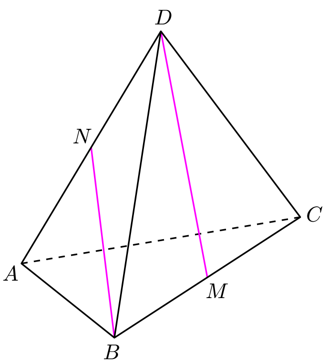
M 1077. Zbiór S składa się z 18 kolejnych liczb całkowitych. Udowodnić, że zbioru S nie da się rozbić na takie dwa rozłączne podzbiory, których iloczyny elementów są równe.
Rozwiązanie na str. 15

M 1078. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian $f(x)$ stopnia 100 o współczynnikach całkowitych o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej n każde dwa wyrazy ciągu

$$f(n),\ f(f(n)),\ f(f(f(n))),\ldots$$

są względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 15

M 1079. Dany jest czworościan foremny $ABCD$ o krawędzi długości 1. Punkty M i N są odpowiednio środkami krawędzi BC i AD (rys. 2). Obliczyć odległość między prostymi BN i DM.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

Puste pudełko wyklucza sterylność

Otwieranie prezentów jest przyjemne i irytujące jednocześnie. Starym, ale sprawdzonym sposobem drażnienia obdarowywanego jest przygotowanie matrioszki: pudła, w którym jest pudełko, w którym ukrywa się pudełeczko... a dopiero w najmniejszym pudełeńku schowany jest cenny drobiazg. Perfidną odmianą zabawy jest pozostawienie najmniejszego pudełeńka pustym. Czy obdarowany może się w takiej sytuacji autentycznie ucieszyć?

Owszem może, jeżeli wiadomo, że ewentualny prezent przyniósłby więcej kłopotu niż pożytku.

Tak właśnie, w wielkim skrócie, wygląda pierwszy oficjalny wynik eksperymentu MiniBooNE (Booster Neutrino Experiment) w Fermilabie. Jego głównym zadaniem miało być potwierdzenie lub zanegowanie wyniku otrzymanego dekadę wcześniej przez eksperyment LSND (Liquid Scintillator Neutrino Detector) w Los Alamos, z którym od początku był problem.

Skoro w obu rozwinięciach akronimów występuje neutrino, to wiadomo, że chodzi właśnie o te bardzo słabo oddziałujące z materią, prawie bezmasowe cząstki. Znamy trzy rodzaje neutrin odpowiadające wszystkim trzem rodzajom naładowanych leptonów: elektronom, mionom i taonom. Wiemy, że bardzo lekkich rodzajów neutrin więcej nie ma, bo udało nam się, głównie w zderzaczu LEP (Large Electron Positron collider) w CERN, zmierzyć prawdopodobieństwa rozpadu bozonu Z^0 na cokolwiek, które musi zgadzać się z sumą prawdopodobieństw rozpadu na wszystkie pary cząstek materii lżejszych niż połowa jego (bardzo dużej) masy. Neutrina do niedawna uważano za całkowicie bezmasowe. Pogląd ten trzeba było jednak zrewidować, gdyż okazało się, że mogą one zamieniać się jedne w drugie – gdyby nie miały masy (lub miały masy takie same), to rozróżniałyby je tylko oddziaływania słabe, a w konsekwencji nie byłoby jak stwierdzić ich tzw. oscylacji.

Dzięki oscylacjom neutrina powstające w wyniku rozpadu mionu rejestruje się jako elektronowe – w wyniku ich (bardzo rzadko zdarzającego się) oddziaływania z materią pojawia się elektron. Każdy rodzaj oscylacji wskazuje na określoną różnicę kwadratów mas zaangażowanych neutrin i na określony tzw. kąt mieszania, który jest związany ze stopniem niepokrywania się stanów masowych ze stanami biorącymi udział w oddziaływaniach słabych.

Wynik LSND wskazuje na dodatkowy sposób zamiany neutrin mionowych na elektronowe, który nie zgadza się z dużo lepiej udokumentowanymi oscylacjami. W celu wyjaśnienia tego wyniku trzeba było zapostulować istnienie dodatkowego rodzaju neutrina, które musiałoby być sterylne, tzn. nie oddziaływać nawet słabo. Takie neutrino nie mogłoby być produktem rozpadu bozonu Z^0, a więc wyżej wspomniane ograniczenie by go nie dotyczyło. Taki dziwny obiekt może istnieć, ale spodziewamy się raczej, że ma on bardzo dużą masę (gdyż tylko wtedy może być użyty do wyjaśnienia bardzo małych mas pozostałych neutrin, to jednak osobna historia).

Krótko mówiąc, sterylne neutrino LSND, umożliwiające oscylacje neutrina mionowego w sterylne, a następnie w elektronowe, byłoby dość kłopotliwym prezentem, co nie zmienia faktu, że gdyby jego istnienie się potwierdziło, byłaby to prawdziwa sensacja.

Parametry eksperymentu MiniBooNE zostały tak dobrane, żeby tę kwestię rozstrzygnąć. Eksperymenty neutrinowe są jednak bardzo subtelne. Nawet niechcący można poprowadzić analizę w taki sposób, że wyniki potwierdzą rozwiązanie, które „podświadomie” uważamy za lepsze. Dlatego analizę zdecydowano się przeprowadzić na ślepo. Przygotowano „pudełko”, w którym schowano dane dotyczące interesującego obszaru. Za pomocą pozostałych danych wykonano skomplikowaną kalibrację. Po zamrożeniu kalibracji otworzono pudełko, żeby sprawdzić, jak wygląda prezent od LSND. Okazało się, że obserwowanego przez poprzedni eksperyment efektu nie ma. W ten sposób wykluczono, przynajmniej najprostsze, wyjaśnienie poprzedniego wyniku. Rozwiązania bardziej skomplikowane pozostają niewykluczone (trudno jest udowodnić, że nie ma nie wiadomo czego), ale wynik LSND staje się coraz mniej przekonujący.

Przy okazji zaobserwowano jednak pewną istotną niezgodność w innym miejscu. Wyniki dla najniższych energii neutrin nie odpowiadają przewidywaniom. Po raz kolejny okazało się, że rozwiązanie jednej zagadki może prowadzić do innej. Możliwe, że ostateczne rozwiązanie zostanie znalezione w ramach MiniBooNE po dokładniejszej analizie tego niczego, które znaleziono.

Piotr ZALEWSKI

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
531 ($WT = 3{,}28$) i **532** ($WT = 1{,}23$)
z numeru 12/2006

Janusz Olszewski	– Suwałki	43,42
Andrzej Jóźwik	–Warszawa	42,67
Tomasz Warszawski	– Kraków	41,41
Andrzej Daniluk	– Warszawa	39,09
Tomasz Wietecha	– Tarnów	39,00
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	37,05
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	36,52

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2007

Przypominamy treść zadań:

539. Niech $T_1, \ldots, T_m$ będą trójelementowymi podzbiorami zbioru n-elementowego X; zakładamy, że zbiory T_i, T_j (dla $i \neq j$) mają co najwyżej jeden element wspólny. Dowieść, że istnieje podzbiór S zbioru X, liczący nie mniej niż $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ elementów i niezawierający żadnego ze zbiorów T_i.

540. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych dodatnich, dla których każda z liczb $x+y$, $1+xy$ jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

539. Wystarczy określić S jako podzbiór zbioru X, który nie zawiera żadnego ze zbiorów T_i oraz ma maksymalną liczbę elementów (wśród wszystkich podzbiorów o tej własności). Taki zbiór S nie musi być jedyny – jeśli jest ich więcej, wybieramy i ustalamy dowolny z nich jako zbiór S. Przyjmijmy, że ma on s elementów; mamy wykazać, że $s \geqslant \lfloor\sqrt{2n}\,\rfloor$.

Weźmy dowolny element $x \in X$, który nie należy do S. Zbiór $S \cup \{x\}$, jako większy od S, musi zawierać któryś ze zbiorów T_i. Znów: niekoniecznie jedyny – wybierzmy więc zbiór T_i (zawarty w $S \cup \{x\}$) o najmniejszym numerze i oznaczmy ten numer przez $i(x)$. Część wspólną zbiorów $T_{i(x)}$ oraz S oznaczmy przez S_x.

Sam element x należy, rzecz jasna, do zbioru $T_{i(x)}$. Zbiór S_x składa się z dwóch pozostałych elementów zbioru $T_{i(x)}$.

Różne elementy $x, y \in X \setminus S$ wyznaczają zbiory S_x, S_y, które nie są identyczne (bo różne zbiory T_i, T_j mają przecięcie co najwyżej jednoelementowe). Zatem przyporządkowanie $x \mapsto S_x$ jest różnowartościową funkcją ze zbioru $X \setminus S$ do zbioru wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru S. Otrzymujemy nierówność $n - s \leqslant \binom{s}{2}$, którą przepisujemy jako $2n \leqslant s^2 + s$. Stąd

$$\sqrt{2n} \leqslant \sqrt{s^2+s} < s+1,$$

wobec czego

$$\lfloor\sqrt{2n}\,\rfloor \leqslant s.$$

540. Niech (x, y) będzie jedną z szukanych par. Dla pewnej pary wykładników naturalnych (k, ℓ) spełniony jest układ równań

$$x + y = 2^k,$$
$$1 + xy = 2^\ell.$$

Odejmując oraz dodając te równania stronami, dostajemy nowy układ

$$(x-1)(y-1) = 2^\ell - 2^k, \tag{1}$$
$$(x+1)(y+1) = 2^\ell + 2^k; \tag{2}$$

widać, że $\ell \geqslant k \geqslant 1$ i że liczby x, y są nieparzyste.

Jeżeli $k = \ell$, to z równania (1) mamy $x = 1$ lub $y = 1$; pozostała niewiadoma ma wtedy wartość $2^k - 1$, w myśl równania (2). Każda z par (x, y) postaci

$$(1\ ,\ 2^k - 1) \quad \text{lub} \quad (2^k - 1\ ,\ 1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots\ ,$$

spełnia warunek zadania.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $k < \ell$. Czynniki iloczynu po lewej stronie równania (1) są wówczas dodatnimi liczbami parzystymi. Niech α i β będą największymi wykładnikami naturalnymi, dla których (odpowiednio) $x - 1$ dzieli się przez 2^α, zaś $y - 1$ dzieli się przez 2^β; z równania (1) widać, że $\alpha + \beta = k$.

Gdyby oba wykładniki α, β były większe od 1, to liczby $x + 1$ i $y + 1$, czyli czynniki lewej strony równania (2), byłyby liczbami parzystymi niepodzielnymi przez 4, wbrew temu, że prawa strona (2) dzieli się przez 2^k (a w tym przypadku $k = \alpha + \beta \geqslant 4$).

Gdyby oba wykładniki α, β były równe 1, to czynniki lewej strony równania (2) byłyby podzielne przez 4, wbrew temu, że prawa strona (2) nie dzieli się przez 2^{k+1} (a w obecnym przypadku $k = \alpha + \beta = 2$).

Pozostaje możliwość, że dokładnie jedna z liczb α, β jest równa 1. Niech np. $\alpha \geqslant 2$, $\beta = 1$; tak więc $k \geqslant 3$, $\alpha = k - 1$. Wtedy $x + 1$ dzieli się przez 2^1, ale nie przez 2^2, i z równania (2) wynika, że $y + 1$ dzieli się przez 2^{k-1}, ale nie przez 2^k. Możemy więc napisać

$$x - 1 = 2^{k-1}u, \qquad y + 1 = 2^{k-1}v\,; \qquad u,\ v \text{ – liczby nieparzyste.}$$

Zatem

$$2^k = x + y = 2^{k-1}(u + v),$$

skąd $u = v = 1$, i ostatecznie

$$x = 2^{k-1} + 1, \qquad y = 2^{k-1} - 1.$$

Oznaczając $k - 1 = j$ oraz uwzględniając możliwość zamiany ról α i β (czyli x i y), dostajemy drugą serię par (x, y):

$$(2^j + 1\ ,\ 2^j - 1) \quad \text{lub} \quad (2^j - 1\ ,\ 2^j + 1), \qquad j = 2, 3, 4, \ldots\ ;$$

również i one spełniają wymagany warunek.

Klub 44

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2007

Przypominamy treść zadań:

436. Stacja kosmiczna składa się z dwóch części o masie 10 ton każda, odległych wzajemnie o 30 m. Obliczyć siłę rozciągającą stację, gdy krąży ona wokół Ziemi na wysokości 700 km w pozycji „pionowej” (jedna część bliżej Ziemi, druga dalej).

437. Mamy do dyspozycji ogniwa o SEM $= 1\,\mathrm{V}$ bez oporu wewnętrznego oraz oporniki o oporze $1\,\Omega$. Jak z tych elementów zbudować układ o dwóch końcówkach równoważny baterii o SEM $= 0{,}8\,\mathrm{V}$ i oporze wewnętrznym $0{,}75\,\Omega$? Należy użyć możliwie małej liczby ogniw i oporników. Najlepsze układy (o najmniejszej liczbie elementów) zostaną przedstawione w omówieniu rocznym, jednak osiągnięcie „rekordu” nie jest wymagane do uznania rozwiązania za prawidłowe.

436. Oznaczmy promień orbity wewnętrznej jako R_1, zewnętrznej jako R_2, masę każdej części jako m, szukaną siłę ich wzajemnego oddziaływania jako F, masę Ziemi jako M, a prędkość kątową zespołu jako ω. Z równań ruchu

$$m\omega^2 R_1 = \frac{\mathrm{G}Mm}{R_1^2} - F, \qquad m\omega^2 R_2 = \frac{\mathrm{G}Mm}{R_2^2} - F$$

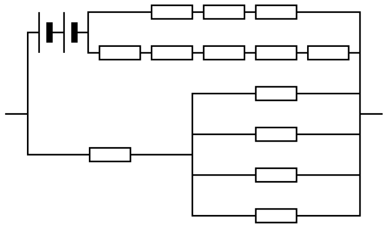
należy wyeliminować ω i wyznaczyć F

$$F = \frac{\mathrm{G}Mm}{R_1 + R_2}\left(\frac{R_2}{R_1^2} - \frac{R_1}{R_2^2}\right).$$

Aby uprościć to wyrażenie, trzeba uwzględnić, że wielkość $\Delta R = R_2 - R_1$ jest znacznie mniejsza od samych R_2 i R_1 (oznaczmy $R_2 \approx R_1 \approx R$). Ponadto wygodne jest podstawienie $\mathrm{G}M = \mathrm{g}R_z^2$ (gdzie R_z – promień Ziemi). Po tych przekształceniach otrzymujemy

$$F = \frac{3}{2}m\mathrm{g}\frac{R_z^2 \Delta R}{R^3} = 0{,}51\,\mathrm{N}.$$

437. Na rysunku przedstawiono jedno z możliwych rozwiązań, składające się z 2 ogniw i 13 oporników.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
432 ($WT = 2{,}10$) i **433** ($WT = 3{,}20$)
z numeru 2/2007

Tomasz Tkocz	– Rybnik	42,68
Konrad Kapcia	– Częstochowa	38,99
Krzysztof Magiera	– Łosiów	35,16
Jerzy Witkowski	– Radlin	29,55
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	23,63
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	21,18
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	17,04

W poprzedniej serii dobre rozwiązania przysłał także p. Tomasz Wietecha. Nie zostały one jednak – niestety – uwzględnione w punktacji z powodu spóźnienia. Prosimy przestrzegać podawanych terminów!

Rozwiązanie zadania M 1077.
Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ będą takimi rozłącznymi podzbiorami zbioru S, że $A \cup B = S$ oraz

$$(*) \qquad n = a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_l\,.$$

Gdyby w zbiorze S istniała liczba podzielna przez 19, to taka liczba byłaby tylko jedna w tym zbiorze i w konsekwencji jedna strona równości $(*)$ byłaby podzielna przez 19, a druga nie.

Zatem zbiór S składa się z 18 liczb całkowitych, które dają odpowiednio reszty $1, 2, \ldots, 18$ z dzielenia przez 19. Wtedy wykonując prosty rachunek (lub na mocy twierdzenia Wilsona) mamy

$$n^2 = (a_1 a_2 \ldots a_k) \cdot (b_1 b_2 \ldots b_l) \equiv 18! \equiv 18 \equiv -1 \pmod{19}\,.$$

Bezpośrednie sprawdzenie dowodzi jednak, że kwadrat liczby całkowitej nie może dawać reszty 18 z dzielenia przez 19. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że opisany w treści zadania podział zbioru S nie istnieje.

Rozwiązanie zadania M 1078.
Taki wielomian $f(x)$ istnieje.

Niech $g(x)$ będzie wielomianem stopnia 98 o współczynnikach całkowitych. Wykażemy, że wielomian $f(x) = x(x-1)g(x) + 1$ spełnia warunki zadania.

Oznaczmy: $f^k(x) = f(f \ldots f(x) \ldots)$ (k-krotne złożenie funkcji f). Wystarczy dowieść, że dla każdej liczby całkowitej n liczby $f(n)$ i $f^k(n)$ dla $k \geqslant 2$ są względnie pierwsze.

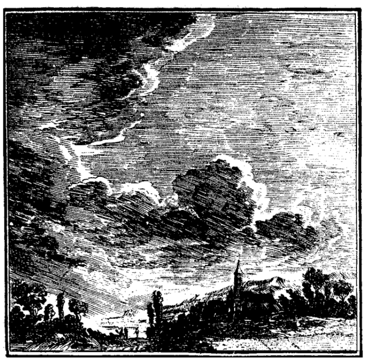
Niech p będzie dzielnikiem liczby $f(n)$. Wykażemy indukcyjnie, że $f^k(n) \equiv 1 \pmod{p}$ dla $k \geqslant 2$, a stąd bezpośrednio wynika, że liczby $f(n)$ i $f^k(n)$ (dla $k \geqslant 2$) są względnie pierwsze. Dla $k = 2$ mamy

$$f(f(n)) = f(n)(f(n)-1)\,g(f(n)) + 1 \equiv 1 \pmod{p}\,.$$

Jeśli z kolei $f^k(n) \equiv 1 \pmod{p}$, to

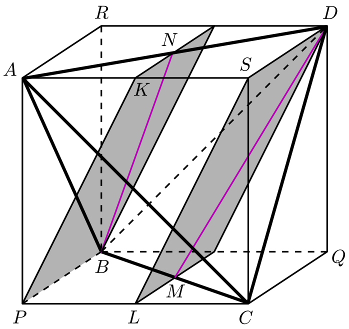
$$f^{k+1}(n) = f(f^k(n)) = f^k(n)(f^k(n)-1)\,g(f^k(n)) + 1 \equiv 1 \pmod{p}\,,$$

co kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.



Rozwiązanie zadania F 697.
Niech l oznacza wysokość, na którą korek wystaje ponad otwór. Z zależności geometrycznych mamy, że $l^2/h^2 = S_0/S$, gdzie h jest wysokością stożkowatego korka. Maksymalna siła wyporu pojawia się, gdy woda sięga do końca korka. Wtedy
$$(\rho_0-\rho)g\frac{hS}{3}-\rho_0 g\frac{lS_0}{3}-\rho_0 g(h-l)S_0=0,$$
gdzie ρ_0 jest gęstością wody. Zatem
$$\rho=\rho_0\left(1+2\left(\frac{S_0}{S}\right)^{2/3}-3\frac{S_0}{S}\right).$$

Rozwiązanie zadania M 1079.
Umieśćmy czworościan $ABCD$ w sześcianie $BPCQ\,RASD$.



Długość krawędzi tego sześcianu wynosi $a=1/\sqrt{2}$.

Płaszczyzna π_1, przechodząca przez punkty B, P, N, jest równoległa do płaszczyzny π_2 przechodzącej przez punkty D, S, M. Ponadto płaszczyzny π_1 i π_2 zawierają odpowiednio proste BN i DM, zatem odległość między tymi prostymi jest równa odległości d między płaszczyznami π_1 i π_2. Odległość d jest z kolei równa odległości między prostymi PK i SL, gdzie punkty K i L oznaczają odpowiednio środki krawędzi AS i PC. Wobec tego
$$\frac{a}{2}\cdot a=\text{pole}(PLSK)=PK\cdot d=$$
$$=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}\cdot d=\frac{ad\sqrt{5}}{2},$$
skąd bezpośrednio obliczamy
$$d=\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Patrz w niebo

Teoretycy od fizyki cząstek elementarnych wysunęli w latach 80. XX wieku hipotezę o istnieniu tzw. gwiazd kwarkowych, tj. zbudowanych z materii kwarkowej! Do pojęcia materii kwarkowej można dojść na drodze następującego naiwnego rozumowania. Ogromna większość gwiazd, czyli gwiazdy normalne, zachowują stabilność dzięki równoważeniu się w ich wnętrzach ciężaru materii i ciśnienia gorącego gazu doskonałego, określonego przez równanie Clapeyrona. Białe karły to gwiazdy tak gęste, że ciśnienie w nich pochodzi od elektronów nietrzymających się już atomów, lecz tworzących tzw. gaz elektronowy. Gwiazdy neutronowe są o „oczko” gęstsze, co powoduje, że jądra atomowe nie mają już swojej indywidualności, a ciśnienie pochodzi od uwolnionych tam neutronów. Wreszcie materia kwarkowa byłaby o następne „oczko” gęstsza, wskutek czego neutrony byłyby w niej tak sprasowane, że uwolniłyby swoje cząstki składowe, mianowicie kwarki, odpowiedzialne tu za ciśnienie. Rzecz jasna, hipotezę taką należało sprawdzić obserwacyjnie.

Kilka lat temu dwa zespoły badawcze w USA zaobserwowały za pomocą rentgenowskiego satelity Chandra dwie gwiazdy podobne do gwiazd neutronowych, lecz – przy bliższym zbadaniu – zbyt małe i zbyt chłodne jak na gwiazdy neutronowe. Na przykład jedna z nich, jądro pozostałości po wybuchu supernowej w Kasjopei w roku 1181, emituje promieniowanie rentgenowskie z mocą świadczącą o temperaturze rzędu miliona stopni. Jako tak młoda gwiazda neutronowa powinna mieć przynajmniej półtora miliona stopni, natomiast jako gwiazda kwarkowa teoretycznie miałaby prawo już wystygnąć do obserwowanego poziomu wskutek emisji neutrin. Nie wszyscy zainteresowani zgadzają się z taką interpretacją obserwacji i proponują inne, według których obserwowanym obiektem mogłaby być nie całkiem typowa, ale jednak gwiazda neutronowa. Rozważa się też modele z obecnością kwarków dziwnych, zapewniających materii kwarkowej lepszą stabilność. W jeszcze innych modelach gwiazda kwarkowa stanowiłaby jądro gwiazdy neutronowej itd. Krótko mówiąc, badania gwiazd kwarkowych ruszyły.

Tomasz KWAST

Sierpień

W sierpniowe wieczory niewątpliwie najwyraźniejszym i najokazalszym układem gwiazd jest tzw. trójkąt letni utworzony przez najjaśniejsze gwiazdy Łabędzia (Deneb), Lutni (Wega) i Orła (Altair). Od Łabędzia na południowy zachód ciągnie się w Drodze Mlecznej pasmo wyraźnie ubogie w gwiazdy, zwane nieco przesadnie Ciemną Szczeliną. Jest to, jak łatwo zgadnąć, w rzeczywistości mocno nieostre pasmo ciemnych obłoków materii międzygwiazdowej przesłaniających światło odległych gwiazd. Obłoki te, jak większość materii międzygwiazdowej, grupują się właśnie w płaszczyźnie Galaktyki i znajdują się w odległości w przybliżeniu 1 kpc. Brzmi to poważnie, lecz jest to zaledwie 1/10 odległości do centrum naszej Galaktyki, znajdującego się akurat nisko nad południowym horyzontem, na granicy Skorpiona i Strzelca.

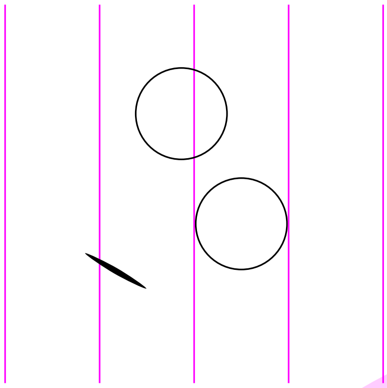
Wenus jest we Lwie, czyli jej nie widać, gdyż jest zbyt blisko Słońca. Mars jest w Byku i widać go w drugiej połowie nocy. Jowisz jest w Wężowniku i widać go w pierwszej połowie nocy w zachodniej stronie nieba. Wreszcie Saturn jest też we Lwie (jak Wenus), a więc również go nie widać. Nów Księżyca wypada 12 VIII, a pełnia 28 VIII i wtedy nastąpi jego całkowite zaćmienie. Niestety, w Europie będzie wtedy dzień, a więc Księżyc będzie pod horyzontem. Księżyc 22 VIII zakryje Antaresa, co zobaczą mieszkańcy Antarktydy i okolic – będzie to jedyne zakrycie jasnego obiektu w tym miesiącu. Aż dziwne, bo w ubiegłych i przyszłych miesiącach tego roku zakryć było i będzie po kilka. Jak co rok można w tym miesiącu spodziewać się dość obfitego roju Perseidów, którego maksimum występuje około 12 sierpnia. Być może da się wtedy zauważyć (średnio) jeden błysk meteoru na minutę.

T. K.

O igle Buffona nieco inaczej

Rafał SZTENCEL

Georges Louis Leclerc, hrabia de Buffon (1707–1788) jest dziś znany głównie za sprawą następującego zadania [4] o igle:



Jaka jest szansa, że igła o długości l, upuszczona na papier poliniowany prostymi równoległymi, poprowadzonymi w równych odstępach d, przetnie jedną z linii? Dla wygody zakładamy, że $l \leqslant d$.

Każdy, kto wykłada rachunek prawdopodobieństwa, ma po pewnym czasie dość standardowego rozwiązania. Niestety, nie każdy wie, że w niespełna 100 lat od sformułowania zadania znaleziono ([2], ostatnio opublikowane w [1]) rozwiązanie niewymagające tzw. prawdopodobieństwa geometrycznego, całek, itp.

Oto ono. Jeśli $l \leqslant d$, to możliwe jest co najwyżej jedno przecięcie linii igłą. Dlatego prawdopodobieństwo p przecięcia jest równe $1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)$, czyli średniej liczbie przecięć. Ale średnia zależy liniowo od długości igły. Żeby to zobaczyć, oznaczmy przez $e(l)$ średnią liczbę przecięć, spowodowaną przez igłę o długości l. Jeśli igłę podzielimy na odcinki o długościach x i y, to oczywiście

$$e(x+y) = e(x) + e(y), \quad x, y \geqslant 0.$$

Z tego równania funkcyjnego otrzymamy bez trudu $e(nx) = ne(x)$ dla n naturalnych, a następnie z zależności

$$me\Big(\frac{n}{m}x\Big) = e\Big(m\frac{n}{m}x\Big) = e(nx) = ne(x), \quad m, n \in \mathbb{N}$$

wyniknie, że $e(rx) = re(x)$ dla r dodatnich i wymiernych. Ponieważ ponadto e jest niemalejąca, więc jest liniowa, czyli $e(tx) = te(x)$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. W szczególności $e(x) = e(1)x = cx$, i wystarczy wyznaczyć c.

Dowód tego faktu nie jest trudny, nie jest też całkiem oczywisty.

W tym celu zauważmy, że igła nie musi być wcale prosta, by powyższa argumentacja miała sens. Igła w kształcie okręgu o średnicy d zawsze (no, prawie zawsze) przecina linie w dokładnie dwóch punktach. Zatem

$$2 = e(d\pi) = cd\pi,$$

skąd $c = 2/\pi d$. Zatem $p = e(l) = \frac{2l}{\pi d}$.

Wynik ten sugeruje, że liczbę π można by wyznaczać doświadczalnie. W 1901 roku Lazzarini rzucił patyczkiem 3408 razy, uzyskując 1808 przecięć, co przy $\frac{l}{d} = \frac{5}{6}$ dało

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3408}{1808} = 3{,}1415929\ldots$$

Taka dokładność jest mocno podejrzana, tym bardziej że $2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3408}{1808} = \frac{355}{113}$, i rozpoznajemy klasyczne przybliżenie π.

Niezależnie od tego rodzaju głupich żartów nieodpowiedzialnych uczonych Buffon może być uważany za prekursora tak zwanych metod Monte Carlo, czyli metod probabilistycznego szacowania wielkości, których analityczne wyznaczenie byłoby trudne, jeśli nie niemożliwe. Ostatnio w ten sposób wycenia się na przykład tzw. opcje egzotyczne – są to instrumenty finansowe, których sam opis jest zniechęcający.

Buffon próbował stosować argumentację probabilistyczną, by uzasadnić, że Układ Słoneczny powstał za sprawą jednej przyczyny. Miało być nią zderzenie Słońca z kometą. W tym celu szacował prawdopodobieństwo, że losowo puszczone w ruch planety będą krążyć wokół Słońca w tym samym kierunku i prawie w tej samej płaszczyźnie.

Propagował także pogląd, że prawdopodobieństwa rzędu 0,0001 należy uważać za zerowe, ponieważ każdy zdrowy 56-letni człowiek jest głęboko przekonany, że przeżyje jeszcze 24 godziny, choć – zgodnie z ówczesnymi statystykami – szansa zgonu 56-latka w ciągu doby była równa 0,0001. Obecnie jest ona (dla 56-letnich mężczyzn) dwukrotnie mniejsza [3].

Literatura

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z księgi*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[2] E. Barbier, *Note sur le problème d'aiguille et le jeu du joint couvert*, J. Math. Pures et Appliquées (2) **5** (1860), ss. 273–286.

[3] B. Błaszczyszyn, T. Rolski, *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa 2004

[4] G. L. Leclerc, Comte de Buffon, *Essai d'arithmétique morale*, dod. do „Histoire naturelle générale et particulière", vol. IV, 1777