



SPIS TREŚCI NUMERU 5 (396)


Kolorowanie wierzchołków
kwadratu i sześciangu
Wojciech Guzicki

Uniwersalna kosmiczna
prędkość
Krzysztof Rejmer

Galaktyki Wolfa-Rayeta
Krzysztof Czar



Zadania

 O polu wieloboku
Adam Kolany

Po co matematykowi
nieskończoność?
Andrzej Białynicki-Birula


Niebieskie niebo
Ewa Czuchry

Aktualności

Klub 44

Patrz w niebo

Maj

 Martynygały
Rafał Sztencel

W następnym numerze:
Twierdzenie Szarkowskiego

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitariski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2007 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2007 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

Cena prenumeraty w 2007 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

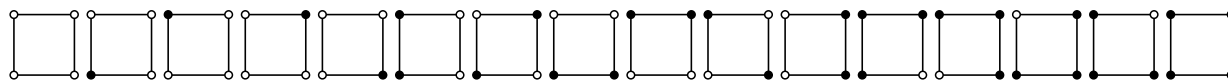
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

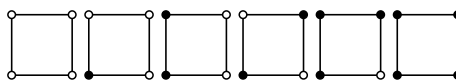
Kolorowanie wierzchołków kwadratu i sześcianu

Wojciech GUZICKI*

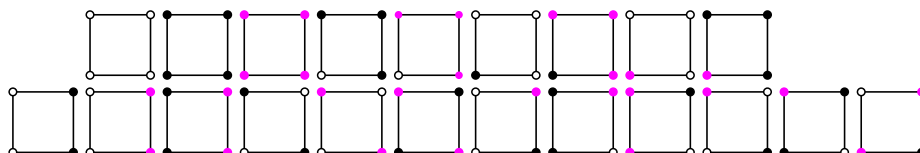
Przykład 1. Wierzchołki kwadratu można dwoma kolorami pokolorować na 16 różnych sposobów:



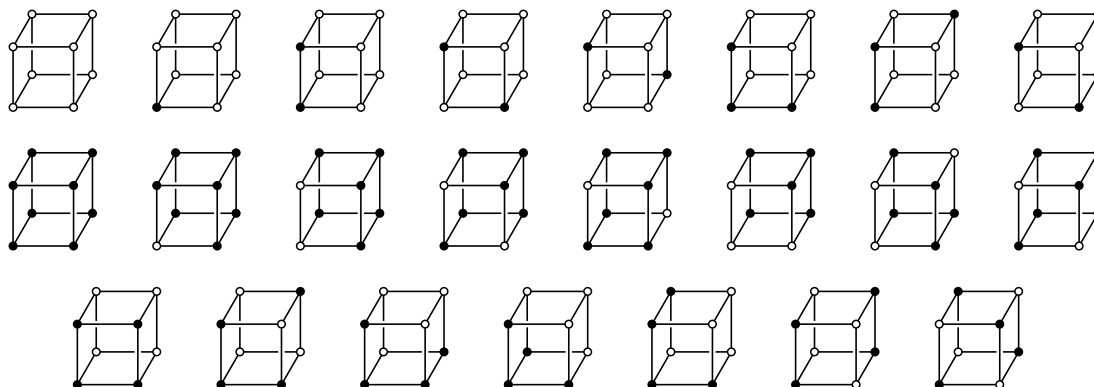
Przykład 2. Gdy za geometrycznie nierozróżnialne uznamy te pokolorowania, które różnią się jedynie położeniem kwadratu, czyli takie, dla których istnieje izometria kwadratu nakładająca jedno z nich na drugie (np. obrót o 90° nakłada drugie na trzecie narysowane wyżej pokolorowanie), to geometrycznie rozróżnialnych pokolorowań dwoma kolorami będzie 6.



Przykład 3. Używając trzech kolorów, można pokolorować wierzchołki kwadratu na 21 geometrycznie rozróżnialnych sposobów.



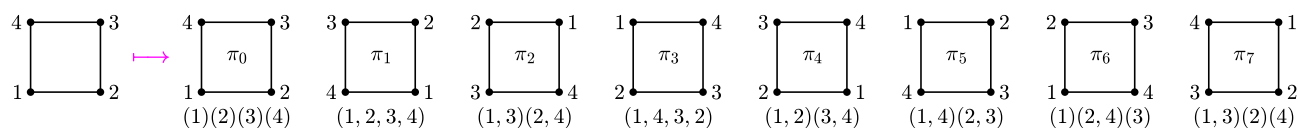
Przykład 4. Fizycznie realizowalne izometrie sześcianu, nakładające go na siebie, to jedynie obroty. Istnieją 23 fizycznie rozróżnialne pokolorowania wierzchołków sześcianu dwoma kolorami.



Izometrie sześcianu to jednak nie tylko obroty, lecz także symetrie. Dlatego też geometrycznie rozróżnialnych pokolorowań wierzchołków sześcianu jest mniej: 22. Pozostawiamy Czytelnikowi odnalezienie na rysunku tej pary pokolorowań, które fizycznie się różnią, lecz geometrycznie – nie.

Widzimy więc, że liczba rozróżnialnych pokolorowań zależy od tego, jak określimy nierozróżnialność pokolorowań. Dogodnie jest używać tu terminologii algebraicznej.

Zajmować się będziemy tylko przekształceniami zbiorów skończonych. Grupę przekształceń zbioru X na niego samego nazywamy taki (niepusty) ich zbiór G , że wraz z dwoma przekształceniami α i β należą do niego ich złożenie $\beta \circ \alpha$ i przekształcenia odwrotne α^{-1} , β^{-1} . Największa grupa przekształceń zbioru X to grupa jego *permutacji*, wszystkie inne są w niej zawarte (są jej *podgrupami*). Każda permutacja daje się przedstawić jako suma cykli – pisząc $(1, 2, 3)$, będziemy mieli na myśli cykliczną zamianę 1 na 2, 2 na 3 i 3 na 1. Oto rozkład na cykle wszystkich ośmiu elementów grupy przekształceń wierzchołków kwadratu na siebie:



*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Jeśli G jest pewną grupą przekształceń zbioru X oraz $x \in X$, to zbiór

$$O(x) := \{\pi(x) : \pi \in G\}$$

nazywamy *orbitą* x (ze względu na G). Z kolei *charakterem* przekształcenia π nazywamy liczbę jego punktów stałych w X :

$$\chi(\pi) = |\{x \in X : \pi(x) = x\}|.$$

Przyjmijmy bez dowodu następujący fakt, wiążący te pojęcia.

Lemat Burnside'a. Liczba orbit $t(G)$ w zbiorze X ze względu na grupę G jest równa

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi).$$

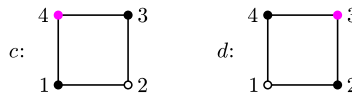
Tyle o narzędziach. Powróćmy do sprawy kolorowań.

Niech będzie dany zbiór skończony A . *Kolorowaniem* zbioru A nazwiemy dowolną funkcję $c : A \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Mówimy też wtedy, że elementy zbioru A kolorujemy za pomocą k kolorów (nawet jeśli nie wszystkie kolory zostały użyte). Niech K będzie zbiorem wszystkich kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów. Przypuśćmy następnie, że dana jest pewna grupa G przekształceń zbioru A na siebie – za jej pomocą definiujemy teraz grupę G^* przekształceń zbioru K . Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ definiujemy przekształcenie $\pi^* : K \rightarrow K$ wzorem $\pi^*(c) := c \circ \pi^{-1}$. Wreszcie przyjmujemy $G^* := \{\pi^* : \pi \in G\}$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeśli $k \geq 2$, $\pi, \sigma \in G$ oraz $\pi \neq \sigma$, to $\pi^* \neq \sigma^*$. W szczególności, że $|G^*| = |G|$.

Mówimy teraz, że dwa kolorowania c i d zbioru A są nierozróżnialne (ze względu na grupę G), jeśli istnieje takie przekształcenie $\pi \in G$, że $\pi^*(c) = d$.

Przykład 5. Popatrzmy na następujące dwa kolorowania kwadratu, c i d (dla łatwiejszego zapisu umówmy się, że kolorowi białemu odpowiada liczba 1, niebieskiemu 2 i czarnemu 3 – są to więc kolorowania $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$).



Zauważmy, że kolorowanie d powstało przez to „obrócenie” kolorowania c , które nazwaliśmy π_3 . Sprawdźmy, że rzeczywiście $d = \pi_3^*(c)$. Mianowicie

$$\begin{aligned} \pi_3^*(c)(1) &= c(\pi_3^{-1}(1)) = c(2) = 1 = d(1), \\ \pi_3^*(c)(2) &= c(\pi_3^{-1}(2)) = c(3) = 3 = d(2), \\ \pi_3^*(c)(3) &= c(\pi_3^{-1}(3)) = c(4) = 2 = d(3), \\ \pi_3^*(c)(4) &= c(\pi_3^{-1}(4)) = c(1) = 3 = d(4). \end{aligned}$$

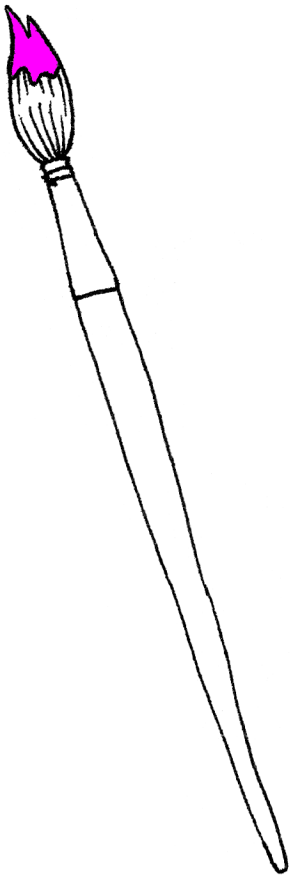
Przypuśćmy teraz, że dany jest zbiór A i pewna grupa jego przekształceń. Rozważmy zbiór K kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów i grupę G^* przekształceń zbioru K . Wówczas liczba orbit grupy G^* jest równa

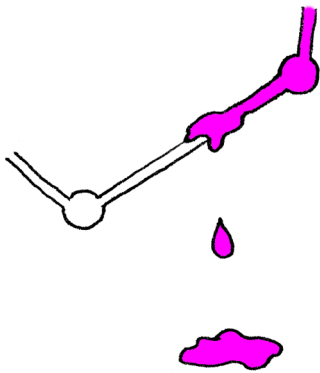
$$t(G^*) = \frac{1}{|G^*|} \cdot \sum_{\sigma \in G^*} \chi(\sigma) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi^*).$$

Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ chcemy obliczyć $\chi(\pi^*)$. Przypuśćmy zatem, że $c \in K$. Zauważmy, że następujące warunki są równoważne:

$$\begin{aligned} \pi^*(c) &= c, \\ c \circ \pi^{-1} &= c, \\ c &= c \circ \pi \\ \forall a \in A \quad (c(\pi(a)) &= c(a)). \end{aligned}$$

Ostatni warunek jest równoważny temu, że wszystkie elementy tego samego cyklu (w rozkładzie permutacji π na cykle) są pokolorowane tym samym kolorem.





Zatem, jeśli $z(\pi)$ oznacza liczbę cykli permutacji π , to

$$\chi(\pi^*) = k^{z(\pi)}.$$

Stąd otrzymujemy wzór na liczbę rozróżnialnych kolorowań – jest to przecież liczba orbit w K względem G^* :

$$t(G^*) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} k^{z(\pi)}.$$

Wniosek 1. Liczba cykli ośmiu izometrii kwadratu (patrz strona 1) to odpowiednio

$$4, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 3.$$

Zatem liczba geometrycznie rozróżnialnych kolorowań wierzchołków kwadratu za pomocą k kolorów jest równa

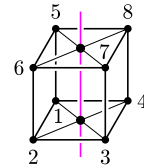
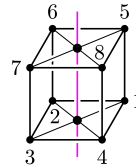
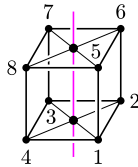
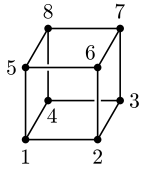
$$\frac{1}{8}(k^4 + k + k^2 + k + k^2 + k^2 + k^3 + k^3) = \frac{1}{8}(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k).$$

I (proszę sprawdzić) dla $k = 2$ otrzymujemy 6, a dla $k = 3$ mamy 21 rozróżnialnych geometrycznie kolorowań, co obliczyliśmy już poprzednio „na piechotę”. Ale teraz możemy obliczyć liczbę rozróżnialnych kolorowań dla dowolnej liczby kolorów!

Aby wyprowadzić analogiczny wzór na liczbę fizycznie rozróżnialnych kolorowań wierzchołków sześcianu, musimy przyjrzeć się jego grupie obrotów (czyli fizycznie realizowalnym izometrii).

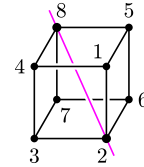
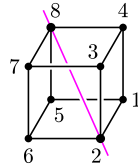
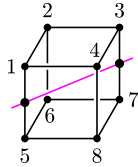
Grupa ta składa się z 24 obrotów. Pierwszym z nich jest identyczność – oczywiście ma ona osiem cykli: (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8).

Następnie mamy 3 obroty wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych ścian (są trzy takie osie).



obrót o 90° : (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8) obrót o 180° : (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8) obrót o 270° : (1, 4, 3, 2)(5, 8, 7, 6)

Z kolei mamy obrót wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych krawędzi (jest 6 takich osi) i 2 obroty wokół osi przechodzącej przez przeciwległe wierzchołki (są 4 takie osie).



obrót o 180° : (1, 5)(2, 8)(3, 7)(4, 6)

obrót o 120° : (1, 3, 6)(2)(4, 7, 5)(8)

obrót o 240° : (1, 6, 3)(2)(4, 5, 7)(8)

Wniosek 2. Dla realizowalnych fizycznie izometrii sześcianu mamy zatem jedną permutację o 8 cyklach, 6 permutacji o 2 cyklach i 17 permutacji o 4 cyklach. Stąd wynika, że liczba fizycznie rozróżnialnych kolorowań sześcianu k kolorami jest równa

$$\frac{1}{24}(k^8 + 17k^4 + 6k^2),$$

co dla $k = 2$ daje 23 (to już poprzednio ustaliliśmy), a np. dla $k = 3$ mamy 333.

Wniosek 3. Grupa wszystkich izometrii sześcianu składa się z 48 izometrii. Wśród tych permutacji zbioru wierzchołków jedna permutacja ma 8 cykli, 6 ma 6 cykli, 21 ma 4 cykle i 20 ma 2 cykle. Zatem liczba kolorowań geometrycznie rozróżnialnych jest równa

$$\frac{1}{48}(k^8 + 6k^6 + 21k^4 + 20k^2),$$

co dla $k = 2$ daje 22 kolorowania (to też ustaliliśmy), a np. dla $k = 3$ daje ich 267.

Uniwersalna kosmiczna prędkość

Krzysztof REJMER *

Szczególne teorie względności Alberta Einsteina opiera się na dwóch postulatach.

1. Zasada względności: wszystkie prawa fizyki są jednakowe w każdym inercyjnym układzie odniesienia.

2. Prędkość światła: prędkość światła jest taka sama w każdym inercyjnym układzie odniesienia.

Za „ojca” zasady względności można uznać Henri Poincarégo, natomiast (szokujący dla każdego, kto wychował się na mechanice Newtona) postulat niezależności prędkości światła od wyboru układu odniesienia pochodzi od Alberta Einsteina. Przyczyna, dla której Einstein zdecydował się zaprzeczyć pozornie oczywistym faktom, nie leżała w klasycznej mechanice, lecz w elektrodynamice klasycznej. W konsekwencji powstała nowa teoria nazwana mechaniką relatywistyczną, stara mechanika klasyczna zaś jest jedynie przypadkiem granicznym, odpowiadającym sytuacji, w której prędkości wszystkich poruszających się ciał są małe w porównaniu z prędkością światła.

Okazuje się, że istnienie uniwersalnej prędkości, niezależnej od wyboru układu odniesienia, jest konsekwencją samej zasady względności. Nazwiemy ją **uniwersalną kosmiczną prędkością**. Nie wynika z tego oczywiście, że chodzi tu akurat o prędkość światła. Pokażemy, iż szczególną teorię względności można wyprowadzić jedynie z zasady względności, nie odwołując się do drugiego postulatu. A że elektrodynamika pozwala zidentyfikować tę uniwersalną kosmiczną prędkość, to tym lepiej.

Rozważymy zatem jednorodną i izotropową przestrzeń oraz jednorodny czas. Są to naturalne założenia wspólne dla mechaniki Newtona i szczególnej teorii względności. Przyjmijmy też zasadę względności. I to są już wszystkie nasze założenia.

Rozważymy teraz dwa układy odniesienia \mathcal{U} i \mathcal{U}' . Wybieramy współrzędne kartezjańskie związane z tymi układami, tak by ich osie były równoległe, a zegary synchronizujemy w ten sposób, by w chwili, gdy początki układów współrzędnych pokrywają się, $t = t' = 0$; wielkości primowane dotyczą układu \mathcal{U} , a nieprimowane układu \mathcal{U}' . Układ \mathcal{U}' porusza się z prędkością v względem \mathcal{U} wzdłuż osi x w kierunku dodatnim, a układ \mathcal{U} porusza się z prędkością $-v$ względem \mathcal{U}' wzdłuż osi x' w kierunku ujemnym. Możemy wyrazić współrzędną x' przez x i t , oraz x przez x' i t' ,

$$x' = \frac{x}{F_v} + \frac{t}{G_v} \quad \text{oraz} \quad x = \frac{x'}{F_{-v}} + \frac{t'}{G_{-v}}.$$

Ponieważ znamy względne prędkości układów, możemy znaleźć związki między współczynnikami $F_{\pm v}$ i $G_{\pm v}$:

$$x' = 0 \implies v = \frac{x}{t} = -\frac{F_v}{G_v},$$

oraz

$$x = 0 \implies v = -\frac{x'}{t'} = \frac{F_{-v}}{G_{-v}}.$$

Z zasady względności wynika także równanie

$$F_{-v} = F_v.$$

Otrzymujemy stąd

$$t' = \frac{t - k_v x}{F_v},$$

przy czym wielkość

$$k_v = \frac{1 - F_v^2}{v},$$



Rozwiązanie zadania M 1168.

Niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb a i b . Wtedy $a = da_1$ i $b = db_1$, gdzie liczby całkowite dodatnie a_1 i b_1 są względnie pierwsze. Wówczas

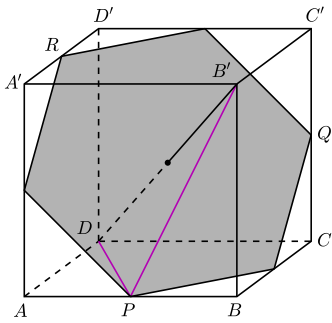
$$\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1 b_1},$$

skąd w szczególności wynika, że liczba a_1 jest dzielnikiem liczby b_1^2 . A skoro liczby a_1 i b_1 są względnie pierwsze, to $a_1 = 1$. Analogicznie wnioskujemy, że $b_1 = 1$, co w efekcie daje $a = b$.

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski w języku angielskim nazywana jest *chronocity*; polskiej nazwy brak.



Rozwiązanie zadania M 1169.
Przyjmijmy, że długość krawędzi sześciangu wynosi 2.



Wtedy $B'P = \sqrt{5} = PD$. Analogicznie, $B'Q = QD$ oraz $B'R = RD$. Zatem punkty P, Q, R leżą w płaszczyźnie będącej symetralną odcinka $B'D$.

Dodajmy teraz trzeci układ odniesienia U'' . Osie kartezjańskich układów współrzędnych, związanych z U, U', U'' , są równoległe, w pewnym momencie ich początki pokrywają się, a zegary są zsynchronizowane w ten sposób, że $t = t' = t'' = 0$ właśnie w tym momencie. Układ U' porusza się względem U w kierunku osi x z prędkością v , układ U'' porusza się względem U' w kierunku osi x' z prędkością u , natomiast przez w oznaczmy prędkość U względem U'' . Prosta algebra daje następujące wyniki:

$$(*) \quad w = -\frac{v+u}{1+vk_u} \quad \text{oraz} \quad -w = \frac{v+u}{1+uk_v}.$$

(W tym celu raz należy rozważyć prędkość U względem U'' , a raz prędkość U'' względem U .) Porównując powyższe równania, otrzymujemy

$$uk_v = vk_u, \quad \text{czyli} \quad \frac{k_v}{v} = \frac{k_u}{u} \equiv \Omega.$$

Wielkość Ω jest więc niezmiennikiem ze względu na wybór inercyjnego układu odniesienia, ma ona wymiar odwrotności kwadratu prędkości. Zauważmy, że posługując się trzema układami odniesienia U, U' i U'' , możemy tę wielkość zapisać jako

$$\Omega = -\frac{u+v+w}{uvw},$$

Jest to nowa, uniwersalna stała (o ile $\Omega \neq 0$). Łatwo sprawdzić, że

$$F_v = \sqrt{1 + \Omega v^2},$$

więc możemy zapisać transformację współrzędnych czasoprzestrzennych z układu U do U' w następujący sposób:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \Omega v^2}}, \quad t' = \frac{t - \Omega vx}{\sqrt{1 - \Omega v^2}},$$

Dla $\Omega = 0$ jest to transformacja Galileusza, natomiast dla dodatniej wartości Ω otrzymujemy transformację Lorentza, w której Ω odgrywa rolę c^{-2} (c jest prędkością światła).

Ujemne wartości Ω musimy odrzucić. Jeśli we wzorze (*) położymy $u = v$, to

$$-w = \frac{2v}{1 + v^2\Omega}.$$

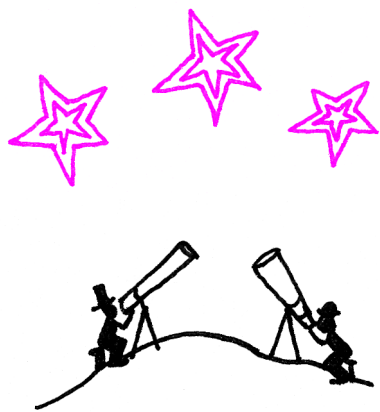
Gdyby Ω była wielkością ujemną, to dla $v = 1/\sqrt{-\Omega}$ otrzymalibyśmy wyrażenie nieokreślone. Łatwo sprawdzić, że składając trzykrotnie tę samą prędkość v (trzeba wprowadzić jeszcze jeden układ odniesienia U'''), otrzymujemy wyrażenie, które jest nieokreślone dla $v = 1/\sqrt{-3\Omega}$. To postępowanie można kontynuować, otrzymując kolejne przypadki, kiedy prędkość nie jest określona. Ale prędkość jednego układu odniesienia względem drugiego nie może być nieokreślona.

Opisane przez nas rozumowanie ujmuje mechanikę Newtona ($\Omega = 0$) i mechanikę relatywistyczną ($\Omega > 0$) w wspólnym schemacie. Fakt, że już sama zasada względności (niezależnie od elektrodynamiki) wymusza istnienie uniwersalnej prędkości, niezależnej od wyboru inercyjnego odniesienia, został odnotowany niejednokrotnie po powstaniu szczególnej teorii względności, jednak kilka artykułów poświęconych temu zagadnieniu pozostało niezauważonych.

Pierwszeństwo należy oddać rosyjskiemu fizykowi o polsko brzmiącym nazwisku, Władimirowi Ignatowskiemu. Ignatowski urodził się w Gruzji w 1875 roku, natomiast opisana powyżej idea została opublikowana w artykule zamieszczonym w *Arch. Math. Phys.* w 1910 roku. W 1942 roku podczas oblężenia Leningradu Ignatowski został skazany na śmierć za rzekome szpiegostwo na rzecz Niemiec. Zrehabilitowano go pośmiertnie w 1955 roku. Na koniec oddajmy głos samemu Władimirowi Ignatowskiemu. W wykładzie wygłoszonym w Moskwie w 1909 roku mówił w ten sposób:

Na podstawie samej zasady względności można udowodnić, że musi istnieć uniwersalna stała kosmiczna, w przeciwieństwie do metody Einsteina, który obok zasady względności przyjmuje prędkość światła a priori jako uniwersalną stałą. Dowodząc jej istnienia, nie odwołujemy się do prędkości światła, dowodzimy jej istnienia w sensie ogólnym, nie zaś na podstawie jakiegoś szczególnego zjawiska fizycznego.

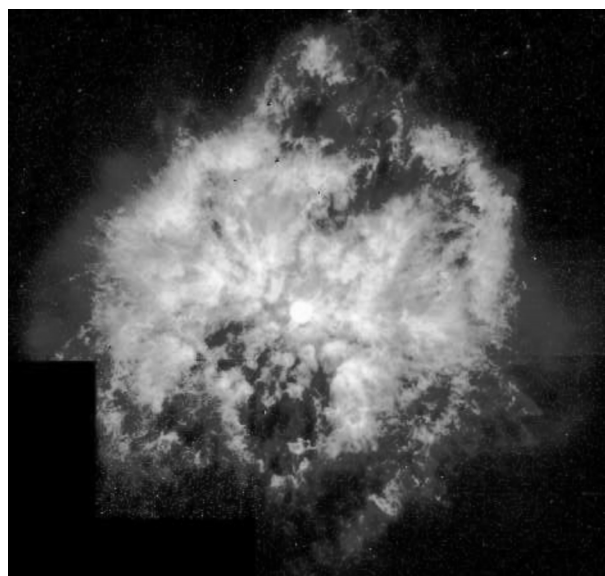




Aby móc omawiać galaktyki Wolfa–Rayeta, trzeba najpierw wyjaśnić, co to są gwiazdy Wolfa–Rayeta. Ich historia rozpoczyna się w 1867 roku, gdy dwaj francuscy astronomowie, C.J. Wolf i G. Rayet, odkryli trzy gwiazdy, wyróżniające się spośród innych znanych wtedy gwiazd obecnością silnych, szerokich linii emisyjnych w widmach. Tymi trzema gwiazdami Wolfa–Rayeta były, według dzisiejszych oznaczeń, WR 134, WR 135 i WR 137. Później opracowano system klasyfikacji takich gwiazd. System został oparty na stosunkach natężeń linii emisyjnych azotu, węgla i tlenu w zakresie optycznym. Symbolem WN oznacza się gwiazdy z dominującymi liniami azotu, WC z silnymi liniami węgla, gdy wreszcie w widmie występują szczególnie silne linie tlenu – mamy podtyp WO.

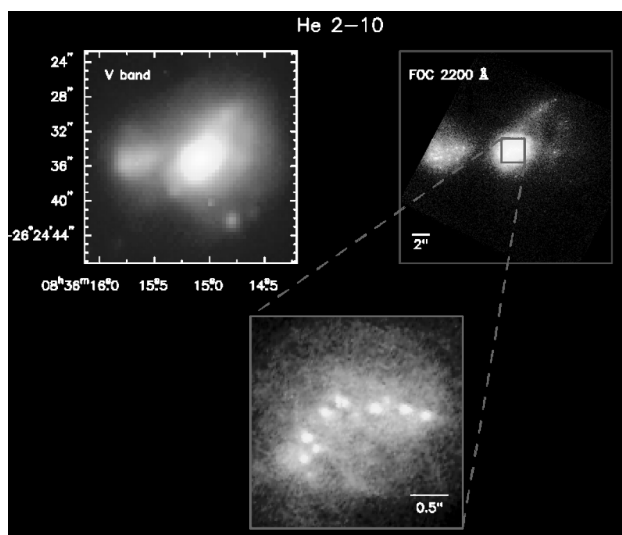
Gwiazdy WR to końcowe stadia ewolucji gwiazd o bardzo dużej masie początkowej (ponad 40 mas Słońca). Gwiazdy te ewoluują z typu widmowego O i są uznawane za poprzedniczki supernowych typów Ib i Ic. Gwiazdy WR charakteryzują się bardzo silnymi wiatrami gwiazdowymi, osiągającymi prędkość 3000 km/s i unoszącymi masę nawet 10^{-5} masy Słońca na rok. Na rysunku 1 mamy przykład gwiazdy tego typu; jest to gwiazda WR 124.

*Centrum Astronomii, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu



Rys. 1. Gwiazda Wolfa–Rayeta WR 124 (NASA, HST, WFPC2).

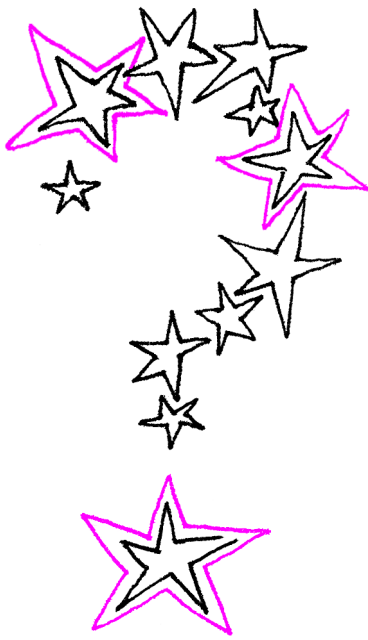
O galaktykach Wolfa–Rayeta możemy mówić od roku 1976, kiedy to Allen, Wright i Gloss zidentyfikowali linię He II (zjonizowanego helu) 468,6 nm w widmie galaktyki He 2-10. Ta linia helu występuje w widmie gwiazd WR (aczkolwiek nie tylko u nich). Kilka obrazów tej galaktyki przedstawia rysunek 2. He 2-10 to niebieska galaktyka karłowata, mająca dwa obszary gwiazdotwórcze z silnymi liniami emisyjnymi gorącego gazu międzygwiazdowego. Atomy gazu są wzbudzone przez promieniowanie dużej liczby gwiazd typu O. Jeśli narodziny gwiazd są odpowiednio liczne i obserwujemy je w odpowiednim momencie (kilka milionów lat po rozpoczęciu tych procesów), to gwiazdy WR mogą być obecne w liczbie wystarczającej do tego, aby ich linie emisyjne były silniejsze od widma ciągłego galaktyki. W roku 1991 Conti zaproponował termin „galaktyka Wolfa–Rayeta” i przedstawił listę 37 takich obiektów. Natomiast katalog z 1999 roku (Schaerer, Contini i Pindao) zawierał już 139 galaktyk Wolfa–Rayeta.



Rys. 2. Galaktyka He 2-10. Lewy górny róg: obraz w świetle widzialnym z teleskopu naziemnego. Prawy górny róg: obraz z teleskopu kosmicznego w nadfiolecie. Na dole: powiększenie rejonu gwiazdotwórczego w centrum galaktyki.

Tak więc galaktyką Wolfa–Rayeta nazywamy taką galaktykę, która wykazuje charakterystyczne cechy widma WR w zintegrowanym widmie całej galaktyki lub określonego jej regionu. Definicja ta jest prawie niezależna od jakości widma i odróżnia galaktyki odległe od pobliskich, w których gwiazdy WR można obserwować bezpośrednio. Galaktykami WR mogą być galaktyki różnych typów, np. galaktyki spiralne, niebieskie galaktyki karłowate, galaktyki Seyferta, galaktyki z aktywnym jądrem, galaktyki z nadwyżką podczerwieni. W naszej Galaktyce, według katalogu Huchta z 2001 roku, znajduje się 227 gwiazd WR. W sąsiednich galaktykach ich liczebność przedstawia się następująco: Wielki Obłok Magellana – 135, Mały Obłok Magellana – 9, M31 – 49, M33 – 141. Oprócz tego zaobserwowano pojedyncze gwiazdy WR w galaktykach IC 10, NGC 6822, IC 1613, NGC 300, NGC 55.

Sposobem na ocenę liczby gwiazd WR w galaktykach, w których nie potrafimy wyodrębnić poszczególnych



gwiazd, jest porównanie natężeń linii emisyjnych, charakterystycznych dla widma WR. Jeżeli oznaczymy przez L_{WR} jasność (ściślej – moc promieniowania) galaktyki w jednej lub kilku wybranych liniach, a przez L_{WR}^0 jasność w tej linii lub liniach dla pojedynczej gwiazdy WR, to liczbę N_{WR} tych gwiazd w galaktyce otrzymamy, oczywiście, jako $N_{WR} = L_{WR}/L_{WR}^0$. W roku 2000 Guseva i Izotov przeprowadzili takie oceny dla grupy 39 galaktyk WR. Rozrzut okazał się ogromny: od kilku do kilkunastu tysięcy gwiazd. W większości przypadków liczba gwiazd WR stanowiła kilka procent gwiazd typu O, z których gwiazdy WR powstają. Z kolei liczbę gwiazd O autorzy szacowali z natężeń linii wodorowych H_{β} . Zauważono, iż stosunek liczb gwiazd WR do O wykazuje spadek wraz ze wzrostem metaliczności galaktyki. Pod pojęciem metaliczności rozumie się zawartość w materii międzygwiazdowej pierwiastków cięższych od helu. Są one produktami przemian termojądrowych we wnętrzach gwiazd na kolejnych etapach ewolucji, a dostają się do materii międzygwiazdowej np. za pośrednictwem wiatrów gwiazdowych lub wskutek wybuchów supernowych.

W galaktykach WR mamy też do czynienia z intensywnymi procesami gwiazdotwórczymi zachodzącymi w ciągu ostatnich kilku milionów lat. Wszystkie te procesy i stworzenie spójnego modelu galaktyki WR wymagają jeszcze wielu dalszych badań i prac. Dokładniejsze poznanie galaktyk WR niewątpliwie pomoże lepiej zrozumieć procesy powstawania gwiazd i ich ewolucji.



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

1168. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b , że liczba

$$\frac{a^2 - b^2}{ab}$$

jest całkowita. Wykazać, że $a = b$.

Rozwiązanie na str. 4

1169. Dany jest sześcian $ABCD A' B' C' D'$ (rys. 1). Punkty P, Q, R są odpowiednio środkami krawędzi $AB, CC', A'D'$. Udowodnić, że płaszczyzna PQR jest prostopadła do prostej $B'D$.

Rozwiązanie na str. 5

1170. Niech M będzie 10-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, 99\}$. Dowiedź, że zbiór M ma takie dwa rozłączne niepuste podzbiory A i B , że suma elementów zbioru A jest równa sumie elementów zbioru B .

Rozwiązanie na str. 10

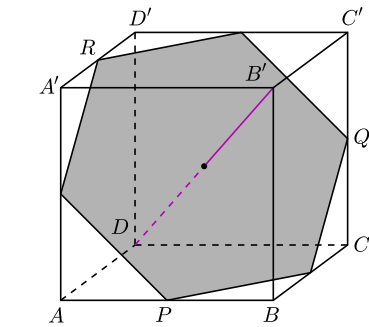
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 691. Dwa równoległe idealnie przewodzące pręty odległe o $l = 0,1$ m leżą w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego $B = 1$ T, są połączone na stałe przewodnikiem o oporze $R_0 = 3 \Omega$ oraz dwoma przewodnikami o oporach $r_1 = 1 \Omega$ i $r_2 = 2 \Omega$ (rys. 2), poruszającymi się w przeciwnych kierunkach. Oddalają się one od przewodu umieszczonego na stałe z prędkościami $v_1 = 0,3$ m/s i $v_2 = 0,2$ m/s. Znaleźć natężenie prądu w pierwszym przewodniku.

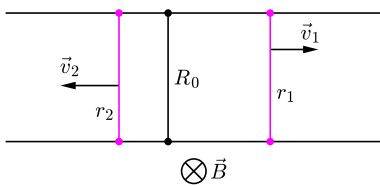
Rozwiązanie na str. 11

F 692. Pierścień przewodzący o promieniu R ma dodatkowy przewodzący łącznik biegnący wzdłuż średnicy pierścienia (rys. 3). Do lewego i prawego półokręgu zostały podłączone kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 . Cały układ został umieszczony w polu magnetycznym $B = B_0 \frac{t}{T}$, rosnącym liniowo z czasem i prostopadłym do powierzchni pierścienia. W pewnej chwili usunięto łącznik, a pole magnetyczne przestało rosnąć. Jaki ładunek indukował się na kondensatorach?

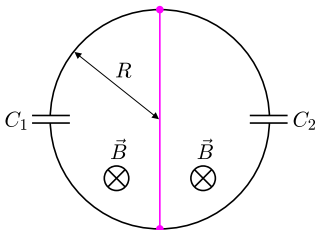
Rozwiązanie na str. 16



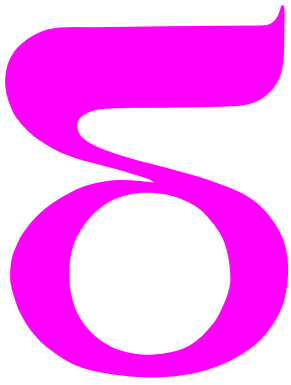
Rys. 1



Rys. 2

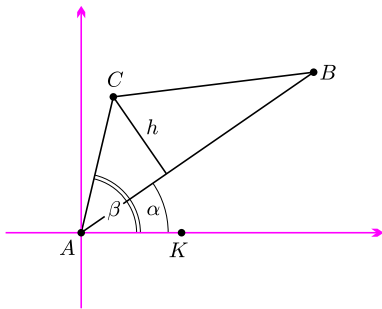


Rys. 3



mała delta

O polu wieloboku



Rys. 1

Jak dobrze wiemy ze szkoły podstawowej, pole P trójkąta ABC równe jest połowie iloczynu dowolnej z jego wysokości i długości boku, względem którego wysokość tę wyznaczono. Załóżmy dla uproszczenia, że A znajduje się w początku układu współrzędnych i że współrzędne B oraz C to odpowiednio (x, y) oraz (x', y') . Niech ponadto punkt K ma współrzędne $(1, 0)$, a α i β będą miarami kątów skierowanych KAB oraz KAC .

Wówczas

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \sin(\beta - \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| (\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) = \frac{1}{2} (xy' - x'y). \end{aligned}$$

Wyrażenie postaci $xy' - x'y$ jest znane w matematyce i nazywa się *wyznacznikiem macierzy* $\begin{bmatrix} x & y \\ x' & y' \end{bmatrix}$ – oznacza się go często $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$. Umówmy się jednak, że będziemy mówić też o *wyznaczniku pary punktów* $B = (x, y)$ i $C = (x', y')$:

$$\det(B, C) = xy' - x'y.$$

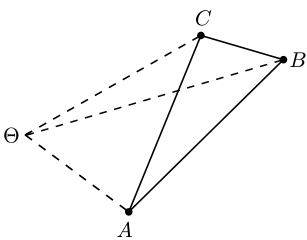
Mamy zatem wzór na pole trójkąta ABC

$$(1) \quad P = \frac{1}{2} \det(B, C).$$

Zauważmy przy tym, że jeśli punkty B i C zamienimy miejscami, to otrzymamy wynik ujemny, czyli wzór (1) daje nam wartość pola trójkąta ABC tylko wtedy, gdy punkty A , B i C ułożone są przeciwie do ruchu wskazówek zegara, czyli – jak to zazwyczaj mówimy – *prawoskrętnie*.

W przeciwnym zaś przypadku (1) będzie liczbą przeciwną co do wartości do tego pola. Z tego powodu, jeśli wzór (1) pojawia się w szkole średniej, to dodatkowo wstawia się w nim wartość bezwzględną wyznacznika.

Nie używając takich sztuczek, zobaczymy, że sytuacja, w której wynik wychodzi ujemny, może być nam na rękę.



Rys. 2

Spróbujmy zatem uwolnić się od założenia o A . Rozpatrzmy trójkąt w położeniu ogólnym i poprowadźmy odcinki łączące jego wierzchołki z Θ , początkiem układu współrzędnych.

Wówczas

$$P_{ABC} = P_{\Theta AB} + P_{\Theta BC} - P_{\Theta AC} = \frac{1}{2} (\det(A, B) + \det(B, C) + \det(C, A)).$$

Rozważmy teraz dowolny czworokąt wypukły $ABCD$. Wówczas, oczywiście, pole

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABC} + P_{ACD} = \\ &= \frac{1}{2}(\det(A, B) + \det(B, C) + \det(C, A) + \\ &\quad + \det(A, C) + \det(C, D) + \det(D, A)) = \\ &= \frac{1}{2}(\det(A, B) + \det(B, C) + \det(C, D) + \det(D, A)), \end{aligned}$$

gdyż $\det(C, A) = -\det(A, C)$.

Indukcyjnie dowodzimy, że dla dowolnego wieloboku wypukłego $A_1A_2 \dots A_n$, zachodzi

$$(2) \quad P_{A_1A_2 \dots A_n} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \det(A_j, A_{j+1}) + \det(A_n, A_1) \right).$$

Wykorzystujemy przy tym fakt, że dowolna przekątna dzieli wielobok na dwa wieloboki o mniejszej liczbie boków.

Nieco więcej zachodu sprawiają wieloboki niewypukłe, bo na pierwszy rzut oka nie widać dlaczego i w tym przypadku znajdziemy przekątną zawartą we wnętrzu wieloboku.

Przenumerujemy wierzchołki wieloboku tak, by kąt przy A_1 był mniejszy niż 180° . Jeżeli odcinek A_nA_2 zawarty jest we wnętrzu wieloboku, to jest on szukaną przekątną. W przeciwnym przypadku w trójkącie $A_nA_1A_2$ znajdują się jakieś inne wierzchołki wieloboku. Przez każdy z nich poprowadźmy prostą równoległą do prostej A_nA_2 . Niech prosta, która znajduje się najbliżej punktu A_1 , będzie wyznaczona przez punkt A_i (rys. 3). Wtedy odcinek A_1A_i jest szukaną przekątną całkowicie zawartą we wnętrzu wieloboku. Zatem wzór (2) jest prawdziwy dla dowolnego wieloboku.

Przykład. Obliczmy pole obszaru z rysunku 4.

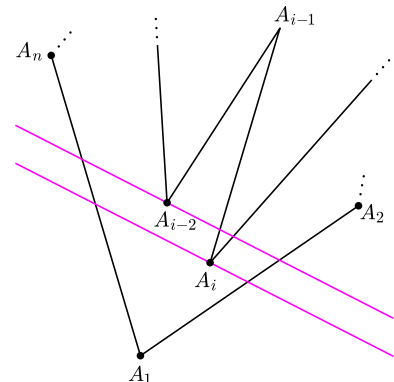
Mamy

$$\begin{aligned} P_{A_1A_2 \dots A_9} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \right. \\ &\quad + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \\ &\quad \left. + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(0 + 0 - 4 + 9 + 7 - 1 + 10 - 2 + 3) = \\ &= \frac{22}{2} = 11. \end{aligned}$$

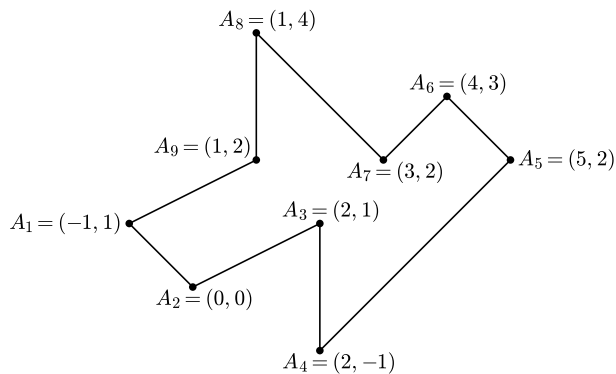
Studenci kierunków ścisłych poznają ogólny wzór na obliczanie pola powierzchni ograniczonej w miarę porządną krzywą, który – zastosowany do wieloboków – przyjmuje postać (2). Wyprowadzenie tego wzoru wymaga jednak zaawansowanych technik analizy matematycznej. Tutaj wystarczył nam prosty wzór na pole trójkąta...

Małą Deltę przygotował Adam KOLANY

PS. Autor serdecznie dziękuje za cenne uwagi Teresie Kurkowskiej i Dariuszowi Bąkowskiemu.



Rys. 3



Rys. 4

Po co matematykowi nieskończoność?

Andrzej BIAŁYNICKI-BIRULA *

Najpierw należy odpowiedzieć na pytanie: **co to jest matematyka?** Są dwie odpowiedzi: otwarty, stale uzupełniany, zasób rozumowań, albo nauka poznawcza badająca pewne abstrakcyjne twory przy użyciu rozumowań jako narzędzia badawczego. Pierwsza jest precyzyjna, bo pojęcie *rozumowanie* można zdefiniować. Druga mglista, bo trudno określić, o jakie twory chodzi. Żadna chyba nie jest zadowalająca i prawda pewnie jest gdzieś pośrodku. Matematyka rozumiana jako zasób rozumowań jest w swej istocie skończona. Dotyczy to zarówno syntaktyki (wyrażeń), jak i wnioskowań.

Wyrażenia są skończone i rozumowania też są skończone. Może trochę szkoda, że nie jesteśmy w stanie ogarnąć informacji z nieskończonej liczby danych zawartych w nieskończonej liczbie wyrażeń. Może trochę szkoda, że każde rozumowanie składa się ze skończonego ciągu elementarnych kwantów wnioskowań. Nie ma tu nieskończonych zlepków rozumowań elementarnych, chociaż takimi, ale skończonymi, zlepkami się posługujemy.

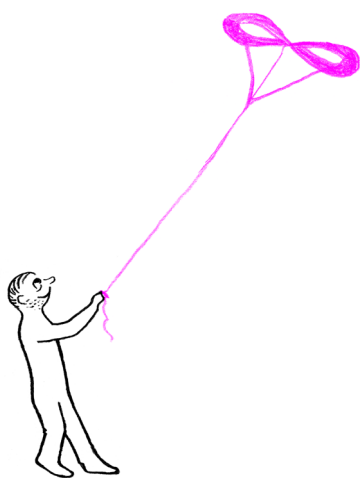
Jeśli chodzi o to drugie rozumienie matematyki, to dodajmy, że te abstrakcyjne twory: liczby, figury geometryczne itp. istnieją w naszych umysłach, a nabierają obiektywnego znaczenia przez trudną do wytłumaczenia zgodność ich rozumienia przez poszczególnych ludzi. Wobec tego matematyka może być uważana za naukę poznawczą. Tyle że przedmiotem poznania są nasze wspólne urojenia. Skąd to się bierze, jedni uważają za problem psychologii społecznej, drudzy za problem teologii.

Te matematyczne twory nie są w swej naturze skończone. Żaden twór skończony nie może być przedmiotem badań matematycznych, gdyż poznanie tworu skończonego nie wymaga rozumowania, lecz jedynie sprawdzenia.

Twór matematyczny może być, i często jest, zdefiniowany konstrukcyjnie przez podanie elementów wyjściowych oraz określenie operacji, które w obrębie tego tworu mają być wykonalne. Operacje te mogą mieć różny charakter: przedłużania, rozdrabniania, brania punktów wspólnych. Nasza matematyka uformowana przez nasze doświadczenia, doświadczenia istot średniego rozmiaru, skłania zarówno do nieograniczonego rozdrabniania, jak i nieograniczonego przedłużania. Przy tym operacje te mogą być stosowane jedynie skończoną liczbę razy, ale liczba ta nie jest ograniczona.

Wobec tego badanie takiego tworu można ograniczać do badania jedynie własności skończonych układów. Rozpatrywane tu układy są skończone, ale ich liczebność nie jest i nie może być ograniczona. Jeśli nie wychodzimy poza te ramy, to mamy do czynienia jedynie z potencjalną nieskończonością. Przykładem jest klasyczna teoria liczb i geometria euklidesowa. Wielkie Twierdzenie Fermata dotyczy czteroelementowych układów liczb, twierdzenie Pitagorasa trójelementowych układów punktów. Formalnie chodzi tu o posługiwanie się wyrażeniami ze zmiennymi dla zbiorów skończonych. Nie ma tu mowy o nieskończoności, nie używamy słowa „nieskończony”. Świat, który opisujemy, jest nieskończony, ale do jego opisu używamy jedynie zbiorów skończonych. Taka matematyka układów skończonych, tworzących świat potencjalnie nieskończony, jest już bardzo bogata i można przypuszczać, że wszelkie walory i cała użyteczność matematyki może być w ramach tej matematyki pokazana. Gdyby zatem na tym poprzestać, to na pytanie „po co matematykowi nieskończoność?”, można by odpowiedzieć wymijająco. Nieskończoność – jako pojęcie – nie jest potrzebna, jako brak więzów ograniczających rozmiary badanego świata – jest nieodzowna.

W ramach tej matematyki nie można by jednak formułować globalnych własności rozpatrywanych tworów, to znaczy własności tworów jako całości. Chodzi tu o takie własności, które nie dotyczą i nie wyrażają się przez własności żadnego skończonego układu, ale mogą, na przykład, te własności skończonych układów przybliżać, być granicznym przypadkiem, lub te własności uśredniać.



Rozwiązanie zadania M 1170.
Wszystkich niepustych podzbiorów zbioru M jest

$$2^{10} - 1 = 1023.$$

Suma elementów każdego z tych podzbiorów nie przekracza

$$90 + 91 + \dots + 99 = 945 < 1023.$$

Stąd wynika, że istnieją takie dwa niepuste podzbiory X i Y zbioru M mające taką samą sumę elementów. Tym samym zbiory $A = X \setminus (X \cap Y)$ oraz $B = Y \setminus (X \cap Y)$ są rozłączne i mają taką samą sumę elementów.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet
Warszawski



Rozwiązanie zadania F 691.
Indukowana w poruszających się przewodnikach siła elektromotoryczna wynosi

$$\mathcal{E}_{1,2} = I_{1,2}r_{1,2} \mp I_0R_0.$$

Z prawa Faradaya wiemy, że

$$\mathcal{E}_{1,2} = Blv_{1,2}.$$

Ponieważ $I_0 = I_1 - I_2$, zatem

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_1r_2 - \mathcal{E}_2r_1}{r_1r_2 + R_0r_1 + R_0r_2} = \\ = Bl \frac{v_1r_2 - v_2r_1}{r_1r_2 + R_0r_1 + R_0r_2},$$

co daje $I_0 = 3,6 \text{ mA}$.

To przejście do granicy jest znakiem wyjścia poza ramy matematyki korzystającej jedynie z potencjalnej nieskończoności badanego tworu. Faktycznym obiektem badań stają się nieskończone zbiory jako całości. Formalnie to przejście możemy określić jako dołączenie do zmiennych również tych, które przebiegają zbiory nieskończone. W tej matematyce pojawia się już słowo *nieskończony*.

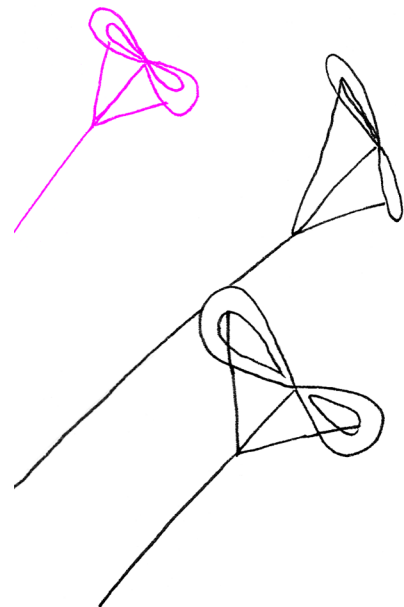
To rozszerzenie zakresu badań o własności globalne pozwala na wypowiedzenie pewnych własności niewidzialnych z perspektywy żadnego z osobna układu skończonego, ale odnoszących się z pewnym przybliżeniem do własności układów skończonych. Jako przykład weźmy funkcję zeta Riemanna zawierającą informacje o zbiorze wszystkich liczb pierwszych. Matematycy uciekli w ten sposób od trudnych do wysłowienia i uporządkowania badań układów skończonych. Jest to zatem pewien wyraz niemocy, ale takie rozszerzenie zakresu badań okazało się niezwykle owocne, rozszerzyło problematykę i przydało matematyce nowej mocy i blasku. Pojawiły się nowe rozumowania korzystające już z pojęć związanych z nieskończonością. Pozwoliły one rozwiązać wiele otwartych problemów, w tym problemów starej, jedynie potencjalnie nieskończonej matematyki (do której, na przykład, należy Wielkie Twierdzenie Fermata). Czy można by je rozwiązać starymi metodami, niekorzystającymi z nieskończoności? Chyba nie.

W zakres tej rozszerzonej problematyki weszły też badania nad samą nieskończonością. Okazało się, że nie wszystkie nieskończoności liczbowe są takie same i to, co tu najważniejsze, oprócz najłatwiejszej do zrozumienia nieskończoności przeliczalnej można rozważać nieskończoności nieprzeliczalne. Czy nie wystarczyłoby rozważanie jedynie zbiorów przeliczalnych? Formalnie, czy nie wystarczyłoby ograniczenie się do zmiennych, które przebiegają zbiory przeliczalne, by już wypowiedzieć i udowodnić wszystkie podstawowe rezultaty współczesnej matematyki?

W matematyce słowem *nieskończoność* posługujemy się przede wszystkim w znaczeniu liczebności zbioru. W teorii mnogości definiujemy zbiór nieskończony jako ten, który jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym, co jest równoważne temu, że dla każdego zbioru skończonego (to znaczy: który nie jest nieskończony) zawiera podzbiór z nim równoliczny. Oprócz tego podstawowego użycia, nieskończoność występuje w zestawieniach *punkt w nieskończoności*, *nieskończenie małe otoczenie punktu*, z reguły dla podkreślenia, że mamy do czynienia z sytuacją, w której konstrukcja omawianego obiektu wymagałaby nieskończenie wielu, w sensie liczebności, pewnych standardowych kroków. Jednakże, chociaż w matematyce wszystkie znaczenia słowa *nieskończoność* można sprowadzić do nieskończoności liczbowej, to pierwotne geometryczne intuicje, na przykład *nieskończonej rozciągłości* płaszczyzny, może nie mają liczbowych źródeł. Można jednak nadać im liczbowe uzasadnienia.

Słowo *nieskończony* spotyka się też w teologii. Nie ma ono tam tak ściśle, jak w matematyce, określonego sensu, ale zapewne intuicyjnie ma mieć te same właściwości i wobec tego nieskończoność matematyczna, jeśli jest taka potrzeba, może służyć jako model nieskończoności teologicznej.

Zwykle przy okazji nieskończoności mówi się o bardzo dużych liczbach. Zdajemy sobie jednak sprawę z tego, że pojęcie dużej liczby ma charakter względny. Zależy od skali. Ostatecznie trzy miliardy to tylko trzy, tyle że miliardy. Dla napisania tej liczby wystarczy 3 i potem już same nieznaczące zera. Obiektywne jest tu to, ile cyfr znaczących trzeba napisać, by daną liczbę określić. W naszym codziennym życiu zapewne wystarczyłoby pięć cyfr znaczących, w różnych naukach może należałoby zwiększyć tę liczbę do dziesięciu. Jednak rekordy biją tu banki. Numer w banku zawiera 26 cyfr, ale jest to raczej seria znaczków, a nie liczba. Natomiast w praktycznej, na co dzień używanej kryptografii, w bankach używa się liczb (prawdziwych liczb będących przedmiotem dodawania, mnożenia, itp.) o kilkuset cyfrach znaczących. Tak dużych liczb już w przyrodzie nie ma, wymyślili je sami ludzie. Zresztą nieskończoność też.



Niebieskie niebo

Obserwowany przez nas błękitny kolor nieba bierze się z rozpraszania światła słonecznego na cząsteczkach powietrza w atmosferze, a dokładniej na drobnych fluktuacjach gęstości powietrza. Najmocniej jest rozpraszana niebieska część widma słonecznego, zatem kawałki nieba, które widzimy w świetle rozproszonym, wydają się być błękitne. Ale dlaczego niebieskie, a nie fioletowe? Ponieważ trzeba jeszcze uwzględnić specyfikę rozróżniania kolorów przez ludzkie oko, a także dlatego, że w widmie słonecznym jest stosunkowo mało promieni fioletowych, mniej niż niebieskich.

Czy wiedząc już, dlaczego niebo jest niebieskie, potraficie odpowiedzieć na poniższe pytania?

1. Dlaczego, patrząc na góry, wydaje nam się, że te bliżej są ciemniejsze, a te dalsze jaśniejsze i niebieskawe?
2. Nalejmy do szklanki z wodą parę kropel mleka i popatrzmy przez nią na świecącą żarówkę, będzie ona miała kolor żółtoczerwony. Ale jeśli popatrzmy na promień odbity od szklanki, będzie on niebieski. Dlaczego?
3. Dlaczego nisko na tle drzew dym z ogniska wydaje się być szary, ale już wyżej, na tle jasnego nieba, będzie on żółtoczerwony?
4. Dlaczego wieczorem, koło zachodu Słońca, ludzie wydają się bardziej opaleni niż w ciągu dnia?
5. Dlaczego w zimowy, słoneczny dzień cienie widoczne na śniegu mają niebieskie zabarwienie?

E. Cz.

Odpowiedzi

1. Między górami leżącymi bliżej nas a dalszymi znajduje się gruba warstwa powietrza atmosferycznego, które w rozproszonym świetle słonecznym jest widziane w kolorze niebieskim. Dlatego też dalskie góry wydają się być jaśniejsze i nabierają niebieskiego odcienia. Podobny efekt jest obserwowany, jeśli w jasny słoneczny dzień patrzy się na daleką linię lasu (*Delta 8/2003*).
2. Cząsteczki mleka silnie rozpraszają fale świetlne o barwie niebieskiej, dlatego też, jak w przypadku koloru nieba, woda w szklance będzie wyglądać na niebieską. I odwrotnie, promień światła, który przeszedł przez wodę z mlekiem, będzie pozbawiony składnika niebieskiego, więc patrząc przez szklankę na jakieś źródło światła, będziemy je widzieć w kolorze czerwonożółtym.
3. Kolor dymu na dole jest widziany w świetle odbitym od cząsteczek dymu. Podobnie jak przy rozpraszaniu na niejednorodnościach gęstości powietrza najsilniej jest rozpraszana niebieska część widma, i w takim kolorze widzimy dym. Natomiast wyżej, nad wierchoczkami drzew, kolor dymu pochodzi od przechodzących przez niego promieni świetlnych. Ponieważ w świetle tym brakuje odbitego i rozproszonego składnika niebieskiego, więc to, co zostaje, przyjmuje barwę czerwonożółtą.
4. Rano i wieczorem, gdy Słońce znajduje się nisko nad horyzontem, promienie świetlne muszą przejść przez grubszą warstwę atmosfery niż w ciągu dnia, gdy Słońce jest wysoko nad horyzontem. To wzmacnia rozpraszanie światła słonecznego i z powodu pochłonięcia niebieskiej części widma promienie Słońca wydają się bardziej czerwone. Stąd też czerwony kolor Słońca w czasie wschodu i zachodu oraz ciemniejsza opalenizna w takim oświetleniu.
5. W ciągu dnia powierzchnia ziemi jest oświetlona zarówno bezpośrednio promieniami słonecznymi, jak i światłem rozproszonym w atmosferze. Cienie są powierchnią nieoświetlaną bezpośrednio przez Słońce i, gdyby nie światło rozprozone, byłyby one zupełnie czarne. W słoneczny jasny dzień rozprozone promienie Słońca mają niebieskie zabarwienie, takie jak kolor nieba. Na białej powierzchni śniegu, w obszarze, który nie jest bezpośrednio oświetlony, zabarwienie to nie ulega przytłumieniu i dodaje śniegowi niebieską poswiatę. Efekt ten jest tym bardziej widoczny, im czystszy i bielejszy jest śnieg.



Najskuteczniejsze naturalne borygo

Własności fizykochemiczne wody umożliwiają rozwój i podtrzymywanie życia na bardzo wiele sposobów. Anomalny współczynnik rozszerzalności cieplnej zapewnia przetrwanie zimy gatunkom wodnym w wystarczająco głębokich, niezamarzających w całości zbiornikach. Jednak ta sama cecha, która pozwala na utrzymywanie na dnie stałej temperatury około 4 stopni Celsjusza (w przypadku zbiorników słodkowodnych), może powodować śmierć osobników po obniżeniu się temperatury poniżej punktu zamarzania. Woda, zamarzając, zwiększa swoją objętość i niszczy struktury komórkowe.

Jest wiele gatunków roślin, owadów, grzybów, a nawet kręgowców (głównie ryb), które potrafią przeżyć temperaturę niższą od tej, w której woda zamarza. Jest to możliwe dzięki proteinom, które utrudniają tworzenie się lodu. Od dawna prowadzone są prace zmierzające do dokładnego zrozumienia mechanizmu ich działania. Postęp w tej dziedzinie spowodował upowszechnienie terminu *proteiny formujące lód* (ang. *ice structuring proteins*), gdyż te makrocząsteczki mają zdolność do wiązania się z określonymi płaszczyznami

krystalograficznymi powstającego lodu. W rezultacie lód tworzy tylko niewielkie kryształki o innych niż normalnie kształtach, dzięki czemu woda w komórkach nie zamarza całkowicie. Skuteczność działania tych protein zależy od tego, o ile potrafią one obniżyć efektywną temperaturę zamarzania. Większość wyodrębnionych związków tego typu powoduje powstawanie bipiramidalnych kryształków. Ostatnio okazało się [1], że substancja występująca w ciele szkodników z gatunku *Choristoneura* (ang. *spruce budworm*), niszczących północno-amerykańskie lasy, dodatkowo ogranicza rośnięcie bipiramidalnych kryształków „wzwyż” i przez to jest najbardziej skuteczną tego typu substancją.

Ekstrahowanie tego typu protein może mieć wiele potencjalnych zastosowań, od lepszej techniki przechowywania organów do transplantacji, przez ochronę upraw przed mrozem, do produkcji odtłuszczonych lodów.

Może kiedyś i płyn borygo zostanie zastąpiony nietoksycznymi produktami zawierającymi tego typu proteiny.

Kwantowa komunikacja teleskopów

Szyfrowanie kwantowe jest jedynym znanym sposobem przekazywania informacji całkowicie odpornym na podsłuchiwanie. Nawet jeżeli nie stanie się w najbliższym czasie szybkie, to ma szansę znaleźć zastosowanie przy przesyłaniu najbardziej krytycznych informacji.

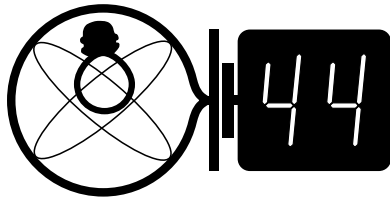
Krokiem, wiodącym do praktycznego zastosowania, jest demonstracja skutecznej komunikacji na dużą odległość.

Wydaje się, że krok ten został właśnie zrobiony [2]. Kwantowa łączność została nawiązana pomiędzy teleskopami Europejskiej Agencji Kosmicznej (ESA) zlokalizowanymi na Wyspach Kanaryjskich: La Palma i Teneryfa. Odległość między teleskopami wynosi 144 km i jest o rząd wielkości większa od poprzedniego rekordu. Doświadczenie to pokazuje, że nic nie stoi na przeszkodzie w nawiązaniu kwantowej komunikacji z satelitami. Gdyby to się udało, to do rozwiązania problemu globalnej komunikacji kwantowej pozostałyby tylko problemy inżynierskie i... finansowe. Użycie teleskopów w tym eksperymencie może wydawać się nadmiarowe, ale tylko teleskopy mają rozsądną efektywność przechwytywania pojedynczych fotonów, a właśnie na przesyłaniu pojedynczych, kwantowo splątanych fotonów, ten eksperyment polegał.

Piotr ZALEWSKI

[1] Ido Braslavsky i inni, *Fluorescence microscopy evidence of quasi-permanent attachment of antifreeze proteins to ice surfaces*, Biophys J BioFAST, luty 2007 (www.phy.ohiou.edu/~braslavs/APS2007)

[2] Anton Zeilinger i inni, *Free-Space distribution of entanglement and single photons over 144 km*, quant-ph/0607182



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2007

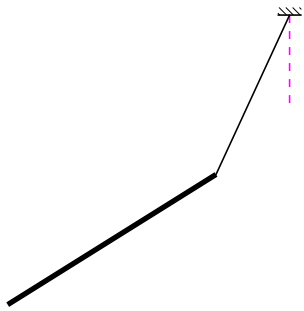
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z fizyki nr 438, 439

Redaguje Jerzy B. BROJAN

438. Jednorodny pręt wisi na bardzo lekkiej nici, której drugi koniec jest zaczepiony w nieruchomym punkcie. Wprowadzono pręt w ruch obrotowy wokół osi pionowej przechodzącej przez ten punkt, tak że w obracającym się układzie odniesienia pozostawał nieruchomy. Czy możliwe jest, że przy pewnej prędkości kątowej obrotu załączony rysunek dokładnie przedstawia położenie pręta? (Należy zmierzyć na rysunku niezbędne wielkości)



439. W fizyce jądrowej, a także w przemyśle elektronicznym, bardzo poszukiwany jest ołów wydobyty z rud w odległej historii (np. starożytności i średniowieczu). Jakie zalety może mieć taki ołów w porównaniu z „normalnym”, tzn. pochodzącym ze współczesnego procesu wydobycia i oczyszczania?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2007

Przypominamy treść zadań:

430. Oto fragment artykułu z gazety codziennej, dotyczący możliwości bezpośredniej obserwacji planet pozasłonecznych metodą zasłonięcia gwiazdy (której światło jest znacznie silniejsze):
... satelita... rozwinięte parasol o średnicy 30–50 m, który posłuży za przesłonę dla teleskopu. Żeby skutecznie wyeliminować światło gwiazdy docierające z odległości kilkudziesięciu lat świetlnych i równocześnie umożliwić obserwację układu planetarnego tej gwiazdy, przesłona musi znajdować się kilkadziesiąt tysięcy kilometrów przed teleskopem.
Skąd wynikają podane wyżej wartości średnicy przesłony i jej odległości? Czy nie mogłaby być ona np. 10 razy mniejsza i znajdować się odpowiednio bliżej? Przyjąć, że układ planetarny jest podobny do Układu Słonecznego, a obserwowany jest w świetle widzialnym.

431. Na osi betonowego walca A w dużej odległości od niego znajduje się małe źródło promieniowania gamma, a za walcem znajduje się detektor promieniowania D . Drugi z narysowanych układów różni się od pierwszego tylko większą grubością walca B . Okazało się, że natężenia promieniowania zmierzone przez detektory nie były jednakowe. Który z detektorów wskazywał większe natężenie promieniowania i dlaczego?

430. Średnica kątowa gwiazdy wielkości Słońca odległej o 50 lat świetlnych (czyli ok. $5 \cdot 10^{14}$ km) wynosi

$$1,4 \cdot 10^6 / 5 \cdot 10^{14} \text{ rad} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ rad},$$

zaś analogiczna średnica kątowa orbity „Ziemi” (planety krążącej po orbicie o promieniu równym promieniowi orbity Ziemi) wynosiłaby ok. $3 \cdot 10^{-7}$ rad. Natomiast średnica kątowa przesłony $\alpha = d/R$ (d – średnica przesłony, R – odległość do niej) wynosi wg cytowanego artykułu ok. 10^{-6} rad. Zatem obserwacja „Ziemi” jest wykluczona, ale obserwacja „Jowisza” (krążącego kilkakrotnie dalej od macierzystej planety) – owszem.

Ponadto należy wziąć pod uwagę efekty dyfrakcji na przesłonie. Jeśli ma ona skutecznie zasłaniać cokolwiek, to kąt dyfrakcji λ/d musi być znacznie mniejszy od średnicy kątowej α : $\frac{\lambda}{d} \ll \frac{d}{R}$, tzn. $d^2 \gg \lambda R$. Podstawiając $R \approx 50\,000$ km i $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m, otrzymujemy $d \gg 5$ m. Widać, że dyfrakcja nie pozwala na zmniejszenie rozmiarów przesłony – przy dziesięciokrotnie mniejszej przesłonce

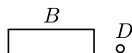
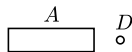
musiałaby być ona 100 razy bliżej, a wtedy zasłoniłaby nie tylko „Jowisza”, ale wszystkie planety (może z wyjątkiem „Neptuna” i „Plutona”).

Jeśli przesłona ma działać efektywnie na całej szerokości wiązki, to jej średnica musi być wyraźnie większa od apertury (średnicy wejściowej) teleskopu. Wobec podanych wyżej wartości liczbowych warunek ten nie jest dodatkowym ograniczeniem nawet dla największych istniejących teleskopów pojedynczych, natomiast mógłby wykluczyć zastosowanie kilku połączonych teleskopów (tzw. synteza apertury).

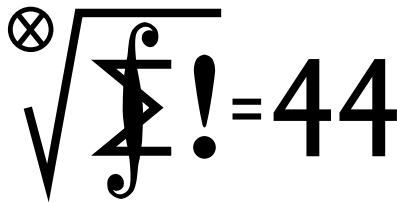
431. Promieniowanie gamma jest w materii nie tylko pochłaniane, ale i rozpraszane. Z cienkiego walca rozproszone kwanty γ wylatują przez ściany boczne, a w grubym istnieje pewne prawdopodobieństwo rozproszenia wielokrotnego, w wyniku czego kwant może jednak trafić do detektora. Większe jest wskazanie detektora za walcem B .

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
428 ($WT = 3,10$) i **429** ($WT = 1,78$)
z numeru 12/2006

Tomasz Tkocz	– Rybnik	40,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	38,99
Marian Lupieżowiec	– Zebrzydowice	35,00
Tomasz Wietecha	– Tarnów	31,64
Jerzy Witkowski	– Radlin	28,91
Krzysztof Magiera	– Łosiów	28,26
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	20,26
Jacek Konieczny	– Poznań	18,39



Redaguje Marcin E. KUCZMA



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VII 2007

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

525 (WT = 2,24) i **526** (WT = 1,75)

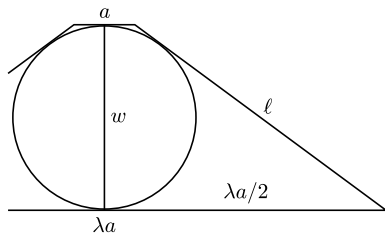
z numeru 9/2006

Jerzy Cisło	- Wrocław	47,70
Piotr Kumor	- Olsztyn	42,83
Michał Jastrzębski	- Warszawa	42,27
Krzysztof Dorobisz	- Kraków	40,36
Łukasz Garncarek	- Opole	39,94
Tomasz Wietecha	- Tarnów	35,94
Krzysztof Kamiński	- Pabianice	35,52
Dariusz Kurpiel	- Posada	

Zarszyn 34,82

I znów na czele listy dwa bardzo dobrze znane nazwiska. Jerzy Cisło zamyka swoją piątą rundę. A rzut oka na dalszy ciąg tabeli pozwala oczekiwać w nieodległej przyszłości gromadnego przekraczania „linii 44”.

533. Przypuśćmy, że podstawy są n -kąta foremnymi, podobnymi w skali $\lambda > 1$. Niech a będzie długością krawędzi mniejszej podstawy, a r promieniem koła w nią wpisanego; przez ℓ oznaczmy długość krawędzi bocznej ostrosłupa, a przez w wysokość ściany bocznej.



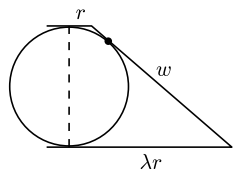
Ta ściana jest trapezem o bokach a , ℓ , λa , ℓ , więc

$$(1) \quad \ell^2 = w^2 + (\lambda - 1)^2 \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Istnieje koło wpisane w ów trapez (ślad kuli półwspisanej w wielościan), a zatem

$$(2) \quad 2\ell = (\lambda + 1)a.$$

Weźmy pod uwagę przekrój ostrosłupa półpłaszczyzną, której krawędzią jest prosta przechodząca przez środki podstaw i która prostopadłe połowi jedną ze ścian bocznych.



Punkt styczności kuli wpisanej z tą ścianą dzieli jej wysokość na odcinki o długościach r i λr , wobec czego

$$(3) \quad w = (\lambda + 1)r.$$

Podstawiając wartości (2) i (3) do równania (1), otrzymujemy zależność

$$(4) \quad a^2 = 4r^2 + \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right)^2 a^2,$$

541. Mając daną dodatnią liczbę całkowitą (w zapisie dziesiętnym), możemy dopisać na końcu 0 lub 4 (otrzymując liczbę mającą o jedną cyfrę więcej); ponadto, jeśli dana liczba jest parzysta, wolno nam podzielić ją przez 2. Dowieść, że startując od liczby 4 i wykonując opisane operacje, można uzyskać każdą liczbę całkowitą dodatnią.

542. Cztery okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 o jednakowym promieniu i różnych środkach są położone na płaszczyźnie tak, że o_1, o_2, o_3 mają punkt wspólny A , zaś o_2, o_3, o_4 mają punkt wspólny B , różny od A . Wykazać, że punkty przecięcia tych okręgów, różne od A i B , są wierzchołkami równoległoboku.

Zadanie 542 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2007

Przypominamy treść zadań:

533. Ostrosłup ścięty prawidłowy ma kulę wpisaną (styczną do wszystkich ścian) oraz kulę półwspisaną (styczną do wszystkich krawędzi). Wyznaczyć liczbę wierzchołków oraz skalę podobieństwa podstaw ostrosłupa.

534. Czy istnieje taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wykres funkcji $f \circ f \circ \dots \circ f$ (n -krotnej iteracji funkcji f) przechodzi przez dokładnie n punktów kratowych (tj. punktów o obu współrzędnych całkowitych)?

z której wynika, że $a > 2r$. Jedynym wielokątem foremnym o boku dłuższym niż średnica koła wpisanego jest trójkąt równoboczny. Tak więc $n = 3$, $a^2 = 12r^2$, i z równania (4) wyznaczamy skalę podobieństwa

$$\lambda = 5 + 2\sqrt{6}.$$

534. Istnieją takie funkcje. Oto przykład. Ustalmy liczbę niewymierną α oraz liczbę rzeczywistą β , która nie jest całkowita ani nie jest całkowitą wielokrotnością liczby α . Określamy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorami:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(\alpha) = 1; \\ f(k+1) &= f((k+1)\alpha) = k\alpha \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots; \\ f(x) &= \beta \quad \text{dla innych } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(w szczególności $f(\beta) = \beta$). Szukamy punktów kratowych na wykresie funkcji f^n (tym symbolem będziemy oznaczać n -krotną iterację funkcji f); to znaczy, pytamy: dla jakich liczb całkowitych m wartość $f^n(m)$ jest liczbą całkowitą?

Jeśli $m \leq 0$, to $f(m) = \beta$, i dalej $f^2(m) = f^3(m) = \dots = \beta$; jest to wartość niecałkowita.

Dla $m = 1$ mamy $f(1) = 1$, i dalej $f^2(1) = f^3(1) = \dots = 1$; wartość całkowita.

Dla liczb całkowitych $m > 1$ mamy

$$\begin{aligned} f(m) &= (m-1)\alpha, \\ f^2(m) &= (m-2)\alpha, \dots, \\ f^{m-1}(m) &= \alpha \end{aligned}$$

(wartości niecałkowite), po czym $f^m(m) = 1$, i dalej

$$f^{m+1}(m) = f^{m+2}(m) = \dots = 1;$$

wartość całkowita.

Reasumując: dla liczb całkowitych m, n ($n > 0$) zachodzi równoważność

$$f^n(m) \text{ jest liczbą całkowitą} \iff m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

To znaczy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wykres funkcji f^n przechodzi przez dokładnie n punktów kratowych.

Patrz w niebo



Gwiazdy normalne, czyli te zwyczajne kule wodorowe, świecące w wyniku reakcji termojądrowych prowadzących do przemiany wodoru w hel, nie mogą być ani za mało, ani za bardzo masywne. Przy zbyt małej masie nie dojdzie – podczas formowania się gwiazdy – do wystarczająco silnego ściśnięcia materii, by nastąpił zapłon tych reakcji i taka protogwiazda nigdy gwiazdą się nie stanie. Granicą jest tu 0,08 masy Słońca. Z kolei gwiazda zbyt masywna, a więc świecąca bardzo energicznie, już na etapie formowania pozbywa się nadmiaru masy, gdyż – mówiąc w uproszczeniu – ciśnienie jej własnego promieniowania nie dopuszcza do skondensowania się większej ilości materii. Tu granica jest znana o wiele mniej dokładnie. Uważa się, że gwiazd masywniejszych niż 100 Słońc nie ma.

Wyznaczenie masy gwiazdy w ogóle nie jest łatwe. Najłatwiej to zrobić, gdy gwiazda jest składnikiem układu podwójnego, ponieważ oceny mas składników można dokonać na podstawie praw mechaniki nieba. Otóż, kilka lat temu grupa amerykańskich astronomów na podstawie obserwacji wykonanych za pomocą teleskopu Hubble'a wyznaczyła masy składników układu podwójnego w gromadzie R136 w mgławicy Tarantula (30 Doradus) w Wielkim Obłoku Magellana. Ogromne znaczenie miał tu fakt, że odległość Obłoku jest już od dawna niezłe znana. W każdym razie masę jednej z gwiazd układu R136-38 oceniono na 57 mas Słońca z błędem 0,6 masy Słońca, a więc bardzo dokładnie. Kilka lat temu był to rekord masy, choć może wkrótce dowiemy się, że już jest nieaktualny. Przy okazji wyznaczono, oczywiście, rozmiary, temperatury i moce promieniowania obu gwiazd. Okazało się, że wszystkie te parametry są zgodne ze znanymi obecnie modelami gwiazd – zawsze miło słyszeć o zgodności teorii z obserwacjami! Nie można tu nie wspomnieć o od dawna podejrzanym o to, że jest rekordzistką, Eta Carinae, o masie szacowanej na 100 Słońc. Jednak słowo „szacowanej” jest w jej przypadku istotne: masa Ety Carinae jest znana z badań prowadzonych bardzo „określonymi drogami” i bardzo niedokładnie.

Tomasz KWAST

Maj

W majowe wieczory Droga Mleczna leży niemal wzdłuż horyzontu, a więc praktycznie jej nie widać i mamy przed sobą niebo z mnóstwem galaktyk, niestety, niedostępnych amatorskim obserwacjom. Za to np. dobrym ćwiczeniem w orientowaniu się na niebie może być prześledzenie przebiegu Hydry, najdłuższego gwiazdozbioru całego nieba. Hydra rozciąga się teraz dość nisko nad południowym horyzontem; jej głowa znajduje się pod Rakiem, a ogon kończy się pod Wagą. Nie jest łatwo odtworzyć jej przebieg właśnie wskutek bliskości horyzontu (większość jej obszaru leży już na południowej półkuli) oraz tego, że zawiera niezbyt jasne gwiazdy. Dysponując mapą nieba i przy czystym powietrzu, obserwator powinien jednak bez trudu zorientować się, jak beznadziejnie długi jest ten gwiazdozbiór. A mając jeszcze lornetkę...

Wenus jest w Bliźniętach i widać ją jako Gwiazdę Wieczorną. Mars jest w Rybach i wschodzi krótko przed wschodem Słońca. Jowisz jest w Wężowniku i widać go przez całą noc. Saturn jest na granicy Raka i Lwa, a więc widać go wieczorem na zachodnim niebie. Pełnia Księżyca wypada 2 V, a nów 16 V. Księżyc zakryje: Antaresa 4 V – zobaczą to mieszkańcy Nowej Zelandii, Tasmanii i Południowej Afryki; Saturna 22 V – o ile pogoda dopisze, mamy szansę zobaczyć zjawisko osobiście (około godz. 21 czasu letniego); Regulusa 23 V – to zakrycie również będzie widoczne w Europie, aczkolwiek nie będzie wtedy jeszcze całkiem ciemno (około godz. 18). Wreszcie 5 V można spodziewać się maksimum niezbyt obfitego roju eta-Akwarydów.

T. K.



Rozwiązanie zadania F 692.
Do momentu usunięcia łącznika, na mocy prawa Faradaya, mamy

$$\mathcal{E}_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{\pi R^2 B_0}{2T},$$

oraz

$$\mathcal{E}_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -\frac{\pi R^2 B_0}{2T},$$

stąd

$$q_1 = \frac{\pi R^2}{2T} B_0 C_1, \quad q_2 = -\frac{\pi R^2}{2T} B_0 C_2.$$

Po usunięciu łącznika z prawa zachowania ładunku mamy

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 = \frac{\pi R^2}{2T} B_0 (C_1 - C_2),$$

a z równości potencjałów na okładkach kondensatorów:

$$q'_1 = \frac{\pi R^2 B_0 C_1}{2T} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2},$$

$$q'_2 = \frac{\pi R^2 B_0 C_2}{2T} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}.$$

OOO	+1
OOR	+1
ORO	+1
ORR	+1
ROO	+1
ROR	-1
RRO	-1
RRR	-3

Jaś i Małgosia grają w orła i reszkę symetryczną monetą. Gdy wypadnie orzeł, Jaś wygrywa złotówkę, w przeciwnym razie złotówkę wygrywa Małgosia. Ze względu na symetrię gra jest sprawiedliwa: średnia wygrana Jasia w każdej turze jest zerowa. Co więcej, jeśli, na przykład, w pewnej chwili Jaś wygrał już 7 złotych, to średni przyrost wygranej w dalszej grze (jeśli gra się ustaloną liczbę tur) jest zerowy, jako że w każdym momencie gra niejako zaczyna się od początku i jej przebieg nie zależy od historii.

Jaś umówił się z Małgosią, że zagrają trzy razy. Postanawia jednak wykorzystać swoją przewagę fizyczną i zakończyć grę, gdy tylko jego łączna wygrana osiągnie 1 zł. Niewiele mu z tego przyjdzie. Jeśli nawet Małgosia nie obrazi się i pozwoli mu realizować opisaną taktykę, Jaś sam dojdzie do wniosku, że średnia wygrana jest nadal zerowa, chociażby wypisując (jak obok) 8 możliwości przebiegu gry.

Być może Jaś dowie się na studiach (zapewne z pożyczonych notatek Małgosi), że miał do czynienia z procesem stochastycznym zwanym martynałem, czyli ciągiem zmiennych losowych (X_n) o następującej własności:

$$E(X_{n+1}|X_n, \dots, X_0) = X_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Definicja martynału wymaga pojęcia warunkowej wartości oczekiwanej. Sens intuicyjny jest taki: jeśli znam historię procesu do chwili n , a w szczególności wiem, że wygrałem już X_n złotych, to moja średnia wygrana w chwili $n + 1$ będzie równa X_n (czyli średni przyrost wygranej będzie zerowy). Definicję tę można uważać za formalizację pojęcia gry sprawiedliwej. Zwróćmy uwagę, że z definicji martynału wynika, iż

$$EX_{n+1} = E(E(X_{n+1}|X_n, \dots, X_0)) = EX_n.$$

Taktyka Jasia polegała na zastopowaniu martynału w chwili, gdy albo wygra 1 zł, albo rozegra umówione trzy tury. Wniosek z podstawowego twierdzenia teorii martynałów – twierdzenia Dooba – mówi, że gdy moment stopu jest ograniczony, to średnia wygrana pozostanie w dalszym ciągu równa wielkości EX_n , niezależnej, jak stwierdziliśmy, od n .

Moment stopu nie może być dowolną zmienną losową. Musi on odpowiadać taktyce dającej się zrealizować. Na przykład taktyka, polegająca na wycofaniu się z gry, gdy wygrana osiągnie globalne maksimum, jest doskonała, ale wymagałaby przewidywania przyszłości.

Jeśli czas gry jest nieograniczony, to wygrana Jasia z prawdopodobieństwem 1 osiągnie dowolną wartość (np. 1000000 zł). Niestety, średni czas oczekiwania na tę chwilę jest nieskończony. Jaś musiałby mieć zatem nieograniczony kapitał (lub kredyt).

Słowo „martynał” pochodzi prawdopodobnie od miejscowości Martigues w Prowansji. Według niektórych źródeł, mieszkańcy Martigues oddawali się z upodobaniem grom hazardowym. Przypisuje im się metodę gry, zwaną *martingale* i polegającą na podwajaniu stawki po każdej przegranej. Łatwo stwierdzić, że gwarantuje to wygraną równą jednej stawce średnio w dwóch turach, ale też wymaga – średnio – nieskończonego kapitału. Istotnie, wygrana w k -tej turze jest równa $-1 - 2 - 2^2 - \dots - 2^{k-1} + 2^k = 1$, angażuje kapitał $2^k - 1$ z prawdopodobieństwem 2^{-k} , czyli niezbędny kapitał wynosi średnio

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (2^k - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2^{-k}) = +\infty.$$

Ponadto z ogólnej teorii wynika, że każda metoda obstawiania przeksztalca martynał w martynał, więc niewielka z niej korzyść.

Martingale po angielsku i francusku oznacza także element uprzęży końskiej: rzemień łączący popręg z nachrapnikiem, munsztukiem lub wędzidłem. Dzięki niemu koń nie podrzuca łbem podczas biegu. Jeden z twórców teorii, Joseph Doob, sfotografował się nawet z takim martynałem.

Czytelnik może się sfotografować z całkiem sensownym modelem fizycznym martynału. Wystarczy pojechać do Barcelony. W podziemiach bazyliki *La Sagrada Familia* jest wystawa szkieletów i modeli, wykonanych przez jej twórcę, Gaudiego, między innymi zrównoważony układ ciężarków, rozpięty na szkielecie w kształcie drzewa (na ten przykład martynału zwrócił mi uwagę prof. Stanisław Kwapien). W następnym odcinku spróbujemy zdefiniować momenty stopu i udowodnić twierdzenie Dooba za pomocą takiego właśnie modelu.