



## SPIS TREŚCI NUMERU 4 (395)

Intranzytywne porządki <i>Marcin Makowski</i>	str. 1
Kwaterniony i twierdzenie Lagrange'a o sumach kwadratów liczb całkowitych <i>Edmund R. Puczyłowski</i>	str. 4
Hipoteza Waringa – ciąg dalszy twierdzenia Lagrange'a <i>Marek Kordos</i>	str. 6
Zadania	str. 6
Aktualności	str. 7
$\int$ Bez obliczeń <i>Tomasz Kwast</i>	str. 8
Budujemy tensometr oporowy <i>Stanisław Bednarek</i>	str.10
Złośliwy marynarz <i>Tomasz Früboes</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Kwiecień	str.16
$\Omega$ Współczynnik prawdomówności matek <i>Rafał Sztencel</i>	str.17

**W następnym numerze:**  
Andrzej Białynicki-Birula  
o nieskończoności

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitariski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,  
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)

internet: [www.amos.waw.pl](http://www.amos.waw.pl), e-mail: [biuro@amos.waw.pl](mailto:biuro@amos.waw.pl)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2007 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2007 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)

Cena prenumeraty w 2007 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

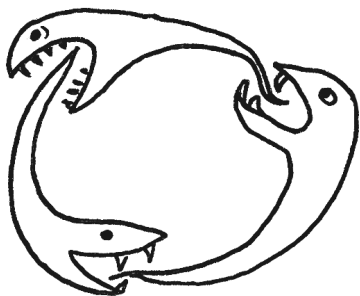
Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Intranzytywne porządki

Marcin MAKOWSKI\*

Dowolną relację  $\succ$ , zachodzącą między elementami pewnego zbioru, nazywamy tranzytywną, jeżeli dla dowolnych trzech elementów  $A, B, C$  z faktu, że  $A \succ B$  i  $B \succ C$ , wynika  $A \succ C$ . Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to relację nazywamy *intranzytywną*.

Istnieje pogląd (głównie wśród ekonomistów), iż ludzie, kierując się racjonalnymi przesłankami, powinni wybierać między odpowiadającymi im rzeczami w określonym, liniowym porządku, tzn. jeśli przedkładamy Pepsi nad Coca-colę, Coca-colę nad Lemoniadę, to wydaje się logiczne, iż powinniśmy przedkładać Pepsi nad Lemoniadę. Okazuje się jednak, że to, co w danej chwili wolimy, zależy w znacznej mierze od tego, jak zaprezentowano nam ten wybór, a decyzje często podejmujemy spontanicznie, kierując się aktualną potrzebą. Paradoks ten był prawdopodobnie niezależnie dostrzegany przez wielu myślicieli. Stanisław Ulam w swojej autobiografii „Przygody matematyka” tak oto wspomina swoje problemy przy próbie oceny owoców według „dobroci”:



*Pamiętam, że w wieku ośmiu czy dziewięciu lat chciałem ocenić lubiane przeze mnie owoce według „dobroci”. Próbowałem ustalić, że gruszka jest lepsza od jabłka, które jest lepsze od śliwki, która znów jest lepsza od pomarańczy, aż ku swemu zdziwieniu odkryłem, że ta relacja nie jest tranzytywna – to znaczy śliwki mogły być lepsze od orzechów, które były lepsze od jabłek, ale jabłka były lepsze od śliwek. Wpadłem w zaklęty krąg, co mnie wtedy zmieszało. Z ocenianiem matematyków jest trochę podobnie.*

Przyjrzyjmy się kilku ciekawym przykładom intranzytywności. Najbardziej znanym jest dziecięca gra *Kamień, Nożyce, Papier*. Relacja użyta do określenia zwycięzcy jest intranzytywna: Kamień pokonuje Nożyce, Nożyce pokonują Papier, ale Kamień przegrywa z Papierem.

Kolejnym przykładem intranzytywności są tzw. kości Efrona – ponumerowane niestandardowo kości sześciennego wynalazione przez Bradleya Efrona. Rozważmy cztery kości A, B, C, D, mające następującą liczbę oczek na sześciu ścianach:

A: 4, 4, 4, 4, 0, 0.

B: 3, 3, 3, 3, 3, 3.

C: 6, 6, 2, 2, 2, 2.

D: 5, 5, 5, 1, 1, 1.

Zdefiniujmy następującą grę dla dwóch graczy: w każdej rundzie gracz nr 1 wybiera jedną z powyższych kości, następnie gracz nr 2 wybiera jedną z pozostałych. Każdy z graczy rzuca swoją kością. Rundę wygrywa ten, na którego kości wypadła większa liczba oczek. O zwycięstwie w całej grze decyduje liczba wygranych rund.

Przy tak sformułowanych zasadach gracz nr 2, dokonując odpowiedniego wyboru kości (niezależnie od wyboru gracza nr 1), może zapewnić sobie większe prawdopodobieństwo wygranej.

Każda kość może zostać pokonana przez jedną z pozostałych z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$ :

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > D) = P(D > A) = \frac{2}{3}.$$

Wynik ten klóci się z naszą intuicją. Oczekiwalibyśmy raczej, iż „przewaga” jest tranzytywna, tzn. jeśli kość A ma przewagę nad kością B, B nad C i C nad D, to A powinna mieć przewagę nad kością D. Nasz przykład pokazuje, że nie jest to regułą.

Společnie znaczącym przykładem intranzytywności jest tzw. paradoks wyborczy Condorceta. Przypuśćmy, że mamy trzech kandydatów w wyborach

\*Nauczyciel, Masie, powiat Mońki



prezydenckich A, B i C oraz trzech wyborców o następujących, tranzytywnych, preferencjach.

**Rozwiązanie zadania F 689.**

Warunek równowagi słupa rtęci dany jest równaniem:

$$p_0 = \rho g(H - h) + p_1,$$

gdzie  $p_1$  to ciśnienie powietrza nad rtęcią. Z prawa Boyle'a-Mariotte'a mamy, że

$$p_1 = p_0 V / Sh.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy:

$$h^2 + \left( \frac{p_0}{\rho g} - H \right) h - \frac{p_0 V}{S \rho g} = 0,$$

skąd

$$h = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4p_0 V}{S \rho g (H - p_0 / \rho g)^2}} \right) \left( H - \frac{p_0}{\rho g} \right).$$

$$\text{Wyborca 1: } A \succ B \succ C \prec A.$$

$$\text{Wyborca 2: } B \succ C \succ A \prec B.$$

$$\text{Wyborca 3: } C \succ A \succ B \prec C.$$

Jeśli A zostanie wybrany jako zwycięzca, to można argumentować, że zwycięzcą powinien być kandydat C, gdyż dwóch Wyborców (2 i 3) przedkłada C nad A, a tylko jeden A nad C. Podobne rozumowanie można przeprowadzić w przypadku zwycięstwa pozostałych dwóch kandydatów. Zbiorowe preferencje wyborców tworzą cykl i są intranzytywne:  $A \succ B \succ C \succ A$ . Znow napotkaliśmy sytuację sprzeczną z intuicją. Nawet jeśli indywidualne preferencje wyborców są tranzytywne, zbiorowe preferencje mogą być intranzytywne. Rozważania na temat tego paradoksu doprowadziły K. Arrowa do udowodnienia twierdzenia, iż nie istnieje procedura wyborcza spełniająca elementarne postulaty demokratyczne.

Załóżmy, że w wyborach startuje trzech kandydatów nr 0, nr 1, nr 2. Tym razem przebiegają one dwuetapowo i rozstrzygają się w II turze, do której przechodzi dwóch kandydatów z największym poparciem z I tury. W przypadku wyborów składających się z dwóch tur duże znaczenie dla kandydatów ma to, z kim przyjdzie im się zmierzyć w drugiej turze (kandydat X może wygrać z kandydatem Y, ale przegrać z kandydatem Z). Czytelnicy pewnie pamiętają, jak w czasie ostatnich wyborów prezydenckich w Polsce kolejne gazety prześcigały się w publikowaniu sondaży przedstawiających zmieniającą się sytuację poszczególnych kandydatów, w zależności od tego, na jakiego przeciwnika trafią w II turze.

Spróbujmy stworzyć uproszczony matematyczny model takich rozważań i przyjrzeć się w tym kontekście porządkom intranzytywnym.

Oznaczmy:

$q_0$  – prawdopodobieństwo przejścia do drugiej tury pary (1,2).

$q_1$  – prawdopodobieństwo przejścia do drugiej tury pary (0,2).

$q_2$  – prawdopodobieństwo przejścia do drugiej tury pary (0,1).

Niech  $P(C_k|B_j)$  oznacza prawdopodobieństwo wygrania II tury wyborów przez kandydata  $k$ , gdy decyzja dotyczyła pary niezawierającej kandydata  $j$  ( $k, j = 0, 1, 2$ ).

Prawdopodobieństwo  $P(C_k)$  wygrania wyborów przez kandydata  $k$  określa wzór:

$$P(C_k) = \sum_{j=0}^2 P(C_k|B_j)P(B_j), \quad k = 0, 1, 2,$$

gdzie  $P(B_j) := q_j$ .

Rozważmy przypadek:

$$(1) \quad P(C_0) = P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{3},$$

gdzie każdy z kandydatów ma równe szanse na wygranie wyborów (wyborcy w równym stopniu preferują każdego z kandydatów). Wbrew pozorom nie jest to sytuacja sztuczna. Wspomnijmy choćby wybory prezydenckie w USA między G.W. Bushem i A. Gorem, które przyniosły minimalne zwycięstwo obecnemu prezydentowi Stanów Zjednoczonych. Również ostatnie wyniki wyborów parlamentarnych we Włoszech czy Niemczech cechowały się bardzo wyrównanymi wynikami rywalizujących partii.

Warunek (1), po wprowadzeniu parametrów  $P(C_k|B_j)$ , przybiera postać następującego układu równań:

$$(2) \quad \begin{cases} P(C_0|B_2)q_2 + P(C_0|B_1)q_1 = \frac{1}{3} \\ P(C_1|B_2)q_2 + P(C_1|B_0)q_0 = \frac{1}{3} \\ P(C_2|B_1)q_1 + P(C_2|B_0)q_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$



**Rozwiązanie zadania F 690.**

Układ początkowo znajduje się w stanie równowagi, zatem

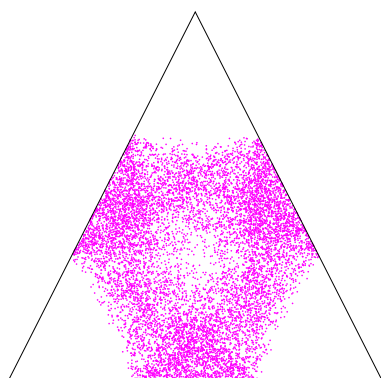
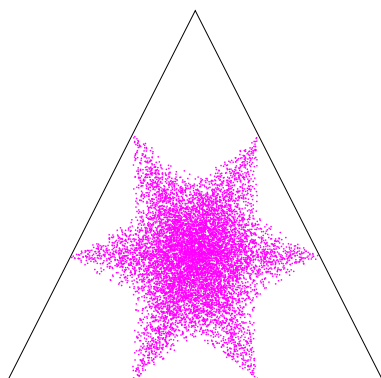
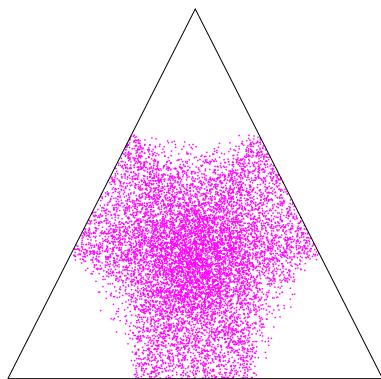
$$p_0 + \rho g H_1 = p_1,$$

gdzie  $p_1$  to początkowe ciśnienie gazu między tłokami. Z prawa Boyle'a-Mariotte'a wynika, że:

$$p_1 h S = (p_0 + \rho g H_2)(H_1 + h - x - H_2)S,$$

stąd

$$x = H_1 + h - H_2 - \frac{p_0 + \rho g H_1}{p_0 + \rho g H_2} h.$$



Optymalne strategie wyborców, kolejno od góry: wszystkie, intranzytywne, tranzytywne.

a jego rozwiązanie

$$(3) \quad \begin{aligned} q_2 &= \frac{1}{d} \left( P(C_0|B_1)P(C_1|B_0) - \frac{P(C_0|B_1)+P(C_1|B_0)}{3} \right), \\ q_1 &= \frac{1}{d} \left( P(C_0|B_2)P(C_2|B_0) - \frac{P(C_0|B_2)+P(C_2|B_0)}{3} \right), \\ q_0 &= \frac{1}{d} \left( P(C_1|B_2)P(C_2|B_1) - \frac{P(C_1|B_2)+P(C_2|B_1)}{3} \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$d = P(C_2|B_1)P(C_1|B_0)P(C_0|B_2) + P(C_2|B_0)P(C_1|B_2)P(C_0|B_1),$$

określa odwzorowanie  $\phi : D_3 \rightarrow T_2$  trójwymiarowej kostki prawdopodobieństw warunkowych ( $D_3$ ) w trójkąt ( $T_2$ ), czyli dwuwymiarowy sympleks, bowiem  $q_0 + q_1 + q_2 = 1$  i  $q_i \geq 0$ . Współrzędne barycentryczne punktu tego trójkąta odczytujemy jako prawdopodobieństwa  $q_0, q_1$  i  $q_2$ .

Każdą szóstkę prawdopodobieństw warunkowych  $P(C_j|B_k)$ , spełniających warunek (1), nazywać będziemy *optymalną strategią wyborców*.

W naszym przypadku możemy mówić o relacji

$$\text{Kandydat nr 0} < \text{Kandydat nr 1},$$

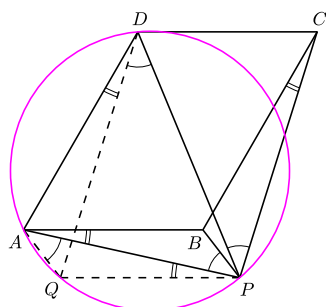
jeśli spośród pary (0, 1) większe szanse na wygraną ma Kandydat nr 1 niż Kandydat nr 0 ( $P(C_0|B_2) < P(C_1|B_2)$ ).

Z wyborem intranzytywnym mamy do czynienia, jeśli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

$$\text{lub} \quad \begin{cases} P(C_2|B_1) < \frac{1}{2}, & P(C_1|B_0) < \frac{1}{2}, & P(C_0|B_2) < \frac{1}{2}, \\ P(C_2|B_1) > \frac{1}{2}, & P(C_1|B_0) > \frac{1}{2}, & P(C_0|B_2) > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rysunek przedstawia przeciwdziedzinę interesującego nas odwzorowania  $\phi$  dla 10 000 punktów wybranych losowo względem rozkładu prawdopodobieństwa stałego na kostce. Intranzytywne strategie optymalne wyborców tworzą sześcioramienną gwiazdę, złożoną z dwóch trójkątów, z których każdy odpowiada jednemu z dwóch możliwych porządków intranzytywnych. Pokrywają one znaczną część, bo aż 4/9 powierzchni trójkąta, z czego 2/9 to obszar pokrywania się dwóch porządków intranzytywnych – centralna część rysunku. Zauważmy, że wszystkie strategie optymalne (2/3 powierzchni trójkąta) pokrywają ten sam obszar sympleksu co optymalne strategie tranzytywne, choć te ostatnie rzadziej występują w środkowej części rysunku. Oznacza to, że dla każdej optymalnej strategii intranzytywnej możemy dobrać strategię tranzytywną prowadzącą do tego samego wyniku. Na przykład, przy zrównoważonych prawdopodobieństwach  $q_0, q_1$  i  $q_2$  (tzn. w okolicy punktu  $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ , na pewnym etapie ostatniej prezydenckiej kampanii wyborczej w Polsce niemalże równoprawdopodobny był każdy z możliwych składów drugiej tury) wyborcy w równym stopniu dzielą swoją sympatię pomiędzy trzech kandydatów na trzy sposoby: tranzytywny lub jeden z dwóch intranzytywnych.

Stanisław Ulam stwierdził, że porządek intranzytywny występuje często przy ocenie matematyków. Polityków chyba trochę też. Ciekawym zadaniem jest szukanie użytecznych modeli, w których optymalne efekty da się uzyskać jedynie dzięki porządkom intranzytywnym. Sukcesy na tym polu pozwoliłyby odejść do lamusa poglądom uznającym porządki intranzytywne za paradoksalne i niepożądane.



#### Rozwiązanie zadania M 1166.

Niech  $Q$  będzie takim punktem, że czworokąt  $ABPQ$  jest równoległobokiem. Wówczas czworokąt  $DCPQ$  także jest równoległobokiem. Zatem

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB = \sphericalangle ADQ.$$

Wobec tego na czworokącie  $ADPQ$  można opisać okrąg, skąd wynika, że

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle PAQ = \sphericalangle PDQ = \sphericalangle CPD.$$

# Kwaterniony i twierdzenie Lagrange'a o sumach kwadratów liczb całkowitych

Edmund R. PUCZYŁOWSKI\*

Pierścień to struktura algebraiczna zbudowana podobnie do liczb całkowitych: w zbiorze określone jest dodawanie i mnożenie, przy czym dodawanie jest łączne i przemienne, istnieje zero (czyli element neutralny dodawania) i każdy element ma element przeciwny, zachodzą także prawa rozdzielności

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$i (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Pierścień jest łączny (jest przemienne), gdy mnożenie jest łączne (jest przemienne); jest pierścieniem z jedynką, gdy jest w nim element neutralny mnożenia; jest pierścieniem z dzieleniem, gdy każdy element niezerowy ma element odwrotny. Itd.

Przykład:

$$\begin{aligned} & (1 + 2i - 3j + 4k)(2 - i + j - 3k) = \\ & = 2 + 4i - 6j + 8k - \\ & \quad - i - 2i^2 + 3ji - 4ki + \\ & \quad + j + 2ij - 3j^2 + 4kj - \\ & \quad - 3k - 6ik + 9jk - 12k^2 = \\ & = 2 + 4i - 6j + 8k - \\ & \quad - i + 2 - 3k - 4j + \\ & \quad + j + 2k + 3 - 4i - \\ & \quad - 3k + 6j + 9i + 12 = \\ & = 19 + 8i - 3j + 4k \end{aligned}$$

Ciało reszt  $Z_p$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą, to pierścień złożony z liczb  $0, 1, \dots, p-1$ , w którym wynik działania określa się jako resztę z dzielenia standardowego wyniku przez  $p$ . Jest to pierścień łączny, przemienne z jedynką i z dzieleniem.

\*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Wydawałoby się, że pierścienie nieprzemienne (patrz margines) to abstrakcyjne obiekty, które żyją swoim własnym życiem i mają niewiele wspólnego z zagadnieniami matematyki szkolnej. Okazuje się, co pewnie dla niejednego będzie sporym zaskoczeniem, że mogą czasami ułatwiać (jeśli się dysponuje na ich temat nawet tylko bardzo podstawową wiedzą) rozwiązanie pewnych zagadnień matematyki elementarnej. Pokażemy tutaj, jak posługując się elementarną wiedzą z teorii pierścieni nieprzemiennej, można dowieść twierdzenia Lagrange'a, które mówi, że **dowolna liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb całkowitych**.

Będziemy korzystali jedynie z podstawowych pojęć i najprostszych faktów z tej teorii. Istotną rolę odegrają pierścienie kwaternionów, które okażą się „jak skrojone” do naszych celów. Oto, co trzeba o nich wiedzieć.

*Kwaterniony Hamiltona* to wyrażenia postaci  $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ , gdzie  $a_i$  są liczbami rzeczywistymi, nazywanymi współczynnikami  $q$ , natomiast  $i, j, k$  są pewnymi symbolami. Dwa kwaterniony są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich odpowiednie współczynniki są równe. Kwaterniony dodaje się „po współrzędnych”, czyli dodając odpowiednie współczynniki. Określa się też ich mnożenie, które wywodzi się z reguł

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

oraz zwyczajnego mnożenia liczb rzeczywistych i ich przemienności z  $i, j, k$ .

Zbiór kwaternionów z tak określonymi działaniami jest nieprzemienne pierścieniem łącznym.

Z każdym kwaternionem  $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$  wiąże się jego sprzężenie  $\bar{q} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$  oraz normę  $N(q) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ . Łatwo sprawdza się, że zachodzi  $q\bar{q} = \bar{q}q = N(q)$  oraz  $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ .

Z tych zależności wynika natychmiast, że  $N(q_1q_2) = N(q_1)N(q_2)$ . Rozpisując tę równość w zależności od współczynników, otrzymujemy *tożsamość Eulera*, którą w skrócie można wypowiedzieć tak: *iloczyn sumy czterech kwadratów przez sumę czterech kwadratów jest sumą czterech kwadratów*. Tożsamość ta pozwala natychmiast zredukować dowód twierdzenia Lagrange'a do wykazania, że dowolna liczba pierwsza jest sumą czterech kwadratów liczb całkowitych – zatem tym się dalej zajmujemy.

Zauważmy, że jeśli  $q \neq 0$ , to  $N(q) \neq 0$  oraz  $q \frac{\bar{q}}{N(q)} = 1$ , a więc dowolny niezerowy kwaternion jest odwracalny (czyli kwaterniony Hamiltona tworzą pierścień z dzieleniem).

Nietrudno sobie wyobrazić, że analogicznie jak kwaterniony Hamiltona można budować kwaterniony o współczynnikach innych niż rzeczywiste (nawet wziętych z dowolnego pierścienia), otrzymując także pierścienie. Dalej będziemy wykorzystywali kwaterniony  $H(Z)$  o współczynnikach całkowitych,  $H(Q)$  – o współczynnikach wymiernych i  $H(Z_p)$  – o współczynnikach z ciała reszt modulo  $p$ , gdzie  $p$  jest ustaloną liczbą pierwszą.

Nietrudno sprawdzić, podobnie jak dla kwaternionów Hamiltona, że  $H(Q)$  jest także pierścieniem z dzieleniem i zauważyć, że  $H(Z)$  nie jest pierścieniem z dzieleniem. Z następującego lematu wynika, że również  $H(Z_p)$  nie jest pierścieniem z dzieleniem.

**Lemat 1.** *Dla dowolnej liczby pierwszej  $p$  istnieją takie  $x, y \in Z_p$ , że  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .*



*Dowód.* Dla  $p = 2$  lemat jest oczywisty. Załóżmy więc, że  $p > 2$ . Zauważmy, że dla dowolnych  $a, b \in Z_p$ , jest  $a^2 = b^2$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi  $a = \pm b$ . Oczywiście,  $a = -a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = 0$ . Zatem zbiór  $Z_p \setminus \{0\}$  można rozbić na  $\frac{p-1}{2}$  par, które odpowiadają różnym kwadratam elementów  $Z_p \setminus \{0\}$ . W efekcie zbiór  $\{x^2 \mid x \in Z_p\}$  zawiera dokładnie  $\frac{p+1}{2}$  elementów. Tyle samo ma też, „przesunięty” o 1, zbiór  $A = \{x^2 + 1 \mid x \in Z_p\}$  i zbiór „przeciwny”  $B = \{-y^2 \mid y \in Z_p\}$ . Ale w  $Z_p$  jest tylko  $p$  elementów, więc  $A \cap B \neq \emptyset$ . Istnieją zatem takie  $x, y \in Z_p$ , że  $x^2 + 1 = -y^2$ , czyli  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .

Zauważmy, że z tego lematu wynika, iż istnieją takie  $x, y \in Z_p$ , że dla  $q = 1 + xi + yj$ ,  $q\bar{q} = 0$ , co w szczególności pokazuje, że to  $q$  nie ma w  $H(Z_p)$  odwrotności. Przechodząc do  $H(Z)$ , możemy na podstawie lematu powiedzieć, iż istnieją takie liczby całkowite  $x, y$ , że  $p \mid 1 + x^2 + y^2$ . Rozważmy związany z tymi liczbami kwaternion  $t = 1 + xi + yj$  i zbiór  $L = \{q \in H(Z) \mid qt \in pH(Z)\}$ . Oczywiście,  $pH(Z) \subseteq L$  oraz  $\bar{t} \in L \setminus pH(Z)$ . Zauważmy ponadto, że  $L$  jest właściwym ideałem lewostronnym  $H(Z)$  (tzn.  $L \neq H(Z)$  oraz dla dowolnych  $a, b \in L$  również  $a + b \in L$  i dla dowolnego  $q \in H(Z)$ ,  $qa \in L$ ).

Wykażemy teraz, że, podobnie jak liczby całkowite, kwaterniony  $H(Z)$  można dzielić z resztą.

**Lemat 2.** *Dla dowolnych  $x, q \in H(Z)$ , jeśli  $q \neq 0$ , to istnieją takie  $y, r \in H(Z)$ , że  $x = yq + r$ , przy czym  $N(r) \leq N(q)$ . Jeśli  $N(r) = N(q)$ , to*

$$2r = (\pm 1 \pm i \pm j \pm k)q.$$

*Dowód.* Ponieważ  $q \neq 0$  i  $H(Q)$  jest pierścieniem z dzieleniem, więc istnieje takie  $t = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H(Q)$ , że  $xq^{-1} = t$ , czyli  $x = tq$ . Niech  $b_i$ , dla  $0 \leq i \leq 3$ , będą takimi liczbami całkowitymi, że  $|a_i - b_i| \leq \frac{1}{2}$  oraz

$$y = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$$

i

$$r = (t - y)q = ((a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k)q.$$

Oczywiście,  $x = yq + r$ . Ponieważ  $x, yq \in H(Z)$ , więc również  $r = x - yq \in H(Z)$ . Teraz

$$\begin{aligned} N(r) &= N(t - y)N(q) = \\ &= ((a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2)N(q) \leq \\ &\leq (4 \cdot \frac{1}{4})N(q) = N(q) \end{aligned}$$

i  $N(q)$  jest równe  $N(r)$  wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie różnice  $a_i - b_i$  są równe  $\pm \frac{1}{2}$ , a więc gdy  $2r = (\pm 1 \pm i \pm j \pm k)q$ .

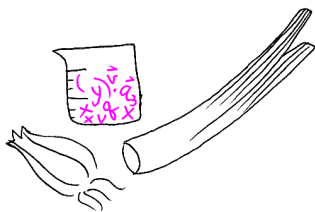
Możemy stąd uzyskać prosty dowód twierdzenia Lagrange’a. W tym celu wystarczy wykazać, że  $p = N(q)$  dla pewnego  $q \in H(Z)$ . Ponieważ dla  $p = 2$  jest to oczywiste, zakładamy, że  $p > 2$ . Wybierzmy w  $L$  kwaternion  $q \notin pH(Z)$  o możliwie najmniejszej normie. Możemy go przedstawić w postaci

$$q = w + c_0 + c_1i + c_2j + c_3k,$$

gdzie  $w \in pH(Z)$  oraz  $c_i$  są takimi liczbami całkowitymi, że

$$-\frac{p-1}{2} \leq c_i \leq \frac{p-1}{2}.$$

Teraz  $N(q - w) \leq 4 \frac{(p-1)^2}{4} < p^2$  i  $q - w \in L$ . Z minimalności  $N(q)$  wynika więc, że  $N(q) < p^2$ . Oczywiście,  $N(q) = \bar{q}q \in L$ . Ponieważ  $L \neq H(Z)$ , więc  $1 \notin L$  i, w szczególności,  $N(q) \neq 1$ . Z Lematu 2 otrzymujemy, że  $p = yq + r$  dla pewnych  $y, r \in H(Z)$ , przy czym  $N(r) \leq N(q)$ . Ponieważ  $L$  jest ideałem lewostronnym  $H(Z)$ , więc  $r = p - yq \in L$ . Zatem jeśli  $N(r) < N(q)$ , to z minimalności  $N(q)$  oraz z tego, że dla  $0 \neq a \in pH(z)$  jest  $N(a) \geq p^2$ , wynika, że  $r = 0$ , czyli  $p = yq$  i  $p^2 = N(p) = N(y)N(q)$ . Stąd, z faktu, że  $p$  jest liczbą pierwszą oraz z tego, że  $1 < N(q) < p^2$  wynika, iż  $p = N(q)$ . Załóżmy więc, że  $N(q) = N(r)$ . Wówczas, na podstawie Lematu 2, mamy  $2p = (2y \pm 1 \pm i \pm j \pm k)q$ . Zauważmy, że  $N(2y \pm 1 \pm i \pm j \pm k) = 4n$  dla pewnej liczby naturalnej  $n$ . W efekcie  $4p^2 = N(2p) = 4nN(q)$ . Ponieważ  $1 < N(q) < p^2$ , więc  $p = N(q)$  i twierdzenie Lagrange’a jest udowodnione.



## Hipoteza Waringa – ciąg dalszy twierdzenia Lagrange’a

Przytoczone w artykule Edmunda Puczyłowskiego twierdzenie Lagrange’a ma liczną rodzinę. Edmund Waring sformułował myśl, znaną do dziś jako *hipoteza Waringa*. Głosi ona, że

dla dowolnego wykładnika naturalnego  $n$  istnieje taka liczba naturalna  $m$ , że każda liczba naturalna może być przedstawiona w postaci  $m$ -składnikowej sumy  $n$ -tych potęg liczb całkowitych nieujemnych.

Dla  $n = 2$  najmniejszą taką liczbą jest 4, dla  $n = 3$  – liczba 9.

Hipoteza Waringa stała się twierdzeniem w 1909 roku, kiedy udowodnił ją David Hilbert. Pozostało jednak pytanie, jak dla danej liczby  $n$  wygląda najmniejsza liczba  $m$ . Bardzo łatwo uzyskać oszacowanie

$$(*) \quad m \geq k := 2^n + \lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^n \rfloor - 2,$$

gdzie  $\lfloor a \rfloor$  oznacza część całkowitą liczby  $a$ , czyli to, co informatycy nazywają jej podłogą.

Istotnie, można łatwo wskazać liczbę, która wymaga zsumowania  $k$   $n$ -tych potęg. Jest nią mianowicie liczba  $q = 2^n \cdot \lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^n \rfloor - 1$ . Liczba ta jest (oczywiście)

mniej od  $3^n$ , zatem aby ją otrzymać, trzeba będzie sumować jedynie  $n$ -te potęgi dwójek i jedynek. Tych pierwszych mieści się w niej (oczywiście)

$$\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^n \rfloor - 1.$$

Zatem pozostała część  $n$ -tych potęg, składających się na  $q$ , stanowią  $n$ -te potęgi jedynek, których trzeba  $2^n - 1$ . Razem  $n$ -tych potęg potrzeba więc  $k$ .

I okazuje się, że niewiele więcej można na ten temat powiedzieć. We wszystkich znanych przypadkach najmniejszą wartością  $m$  jest właśnie  $k$ , a zbadano już wykładniki (to nie pomyłka!) do  $n = 471\,600\,000$  (rok 1989). Jak się zdaje, zaprzestano dalszego bicia rekordów, bo należałoby odpowiedzieć najpierw na pytanie, jak daleko trzeba jeszcze szukać. Wiadomo bowiem, że dla dostatecznie dużych wartości  $n$  najmniejszą wartością  $m$  jest  $k$  – udowodnił to równo pięćdziesiąt lat temu Kurt Mahler.

Pozostaje wobec tego pytanie, czy 471 600 000 to już dostatecznie dużo. Może ktoś z Czytelników *Delty* potrafi znaleźć odpowiedź?

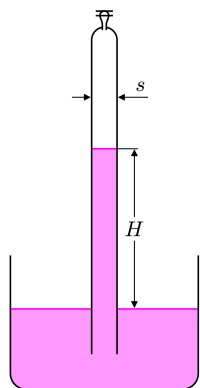
M. K.



## Zadania

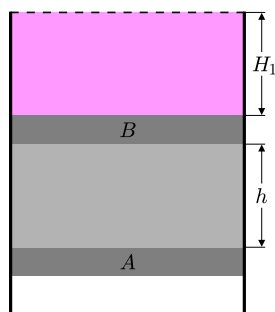
Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 689.** Do zamkniętej u góry rurki barometru wpuszczono porcję powietrza o objętości  $V$  i ciśnieniu równym atmosferycznemu  $p_0$  (rys. 1). O ile obniży się słup rtęci w rurce? Początkowa wysokość słupa rtęci wynosiła  $H$ , przekrój wewnętrzny rurki jest równy  $S$ , a gęstość rtęci można uznać za daną. Rozwiązanie na str. 2



Rys. 1

**F 690.** Mamy odkryte naczynie cylindryczne, w którym między tłokami  $A$  i  $B$  znajduje się gaz idealny, a nad tłokiem  $B$  ciecz o gęstości  $\rho$  (rys. 2). Tłok  $A$  jest utrzymywany na stałej wysokości. Wysokość słupa cieczy jest równa  $H_1$  i sięga do brzegów naczynia. Na jaką wysokość należy izotermicznie podnieść tłok  $A$ , żeby nad tłokiem  $B$  został słup cieczy o wysokości  $H_2$ ? Początkowa odległość między tłokami wynosi  $h$ , ciśnienie atmosferyczne jest równe  $p_0$ . Rozwiązanie na str. 2



Rys. 2

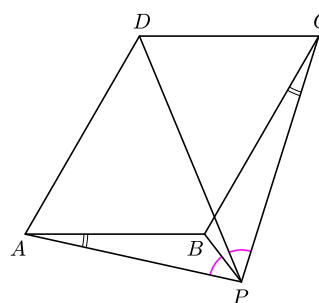
Redaguje Waldemar POMPE

**M 1165.** Dane są takie liczby naturalne  $m, n \geq 2$ , że liczba  $m^2 + n^2 - 1$  jest podzielna przez  $m + n - 1$ . Dowieść, że liczba  $m + n - 1$  jest złożona.

Rozwiązanie na str. 16

**M 1166.** Punkt  $P$  leży na zewnątrz równoległoboku  $ABCD$ , przy czym  $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$  (rys. 3). Dowieść, że  $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ .

Rozwiązanie na str. 3



Rys. 3

**M 1167.** Dana jest liczba całkowita dodatnia  $m$  oraz taka funkcja ciągła  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla każdej liczby  $x \in \mathbb{R}$  spełniona jest zależność

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{m \text{ razy}}(x) = x.$$

Wykazać, że  $(f \circ f)(x) = x$  dla każdej liczby  $x \in \mathbb{R}$ .

Rozwiązanie na str. 16

## Plastyczność języka elektrochemicznego

*W sobotnią noc Wielkanocy 1921 roku obudziłem się, zapaliłem światło i zanotowałem kilka słów na skrawku papieru. Następnie położyłem się ponownie spać. O szóstej rano zorientowałem się, że w ciągu nocy zanotowałem coś bardzo ważnego, ale nie byłem w stanie odszyfrować zapisu. Niedziela była najbardziej rozpaczliwym dniem mojej kariery naukowej. Jednakże następnej nocy ponownie obudziłem się o trzeciej w nocy, pamiętając, o co chodziło. Tym razem nie ryzykowałem: wstałem, poszedłem do laboratorium, zrobiłem eksperyment z sercem żaby i o piątej rano chemiczna transmisja impulsów nerwowych była ostatecznie udowodniona.*

Otto Loewi

Eksperyment austriackiego biologa polegał na połączeniu pojemników z dwoma bijącymi sercami żaby, pozwalającym na przepływ płynu z jednego pojemnika do drugiego. Do pierwszego serca był nadal doprowadzony nerw błędny, którego elektrostymulacja powodowała spowolnienie rytmu serca. Po chwili spowolnieniu ulegało również drugie serce. Doświadczenie to udowodniło istnienie neurotransmiterów, związków chemicznych wytwarzanych (lub, według innych, również tylko wydzielanych) przez komórki nerwowe i uwalnianych w synapsach. Substancje te są przechwytywane przez odpowiednie receptory, powodując wzbudzenie sygnału nerwowego w kolejnym neuronie lub stymulację mięśni.

Neurotransmiterem odpowiedzialnym za przekazywanie sygnałów do mięśni kręgowców jest acetylocholina. Do niedawna wydawało się, że ten swego rodzaju język porozumiewania się nerwów z mięśniami jest jedyny.

Okazało się, że natura zaskoczyła nas po raz kolejny. Mięśnie żabich płodów mają receptory wrażliwe na inne neurotransmitery niż acetylocholina. W pracy [1] dowiedziono, że zmiana stężeń jonów wapnia  $\text{Ca}^{2+}$  i sodu  $\text{Na}^+$  na wczesnym etapie rozwoju żab powoduje aktywność innych neurotransmiterów, a receptory w mięśniach, które pozostają aktywne, odpowiadają używanym przez nerwy neurotransmiterom.

Trudno w tej chwili powiedzieć, czy odkryta plastyczność może być przeniesiona na osobniki dorosłe, w szczególności na ludzi. Wiązałoby się to z nadzieją znalezienia lekarstw na choroby, takie jak schizofrenia, depresja czy choroba Parkinsona, gdyż wszystkie one wiążą się z dysfunkcją transmisji sygnałów nerwowych za pomocą neuroprzebiegów.

## Miniantywirówka

W 1926 roku Albert Einstein napisał pracę na temat dynamiki meandrowania rzek. Według jego opinii decydujące znaczenie ma tworzenie się helikalnego przepływu, którego mechanizm powstawania wytłumaczył za pomocą łatwego do przeprowadzenia eksperymentu. Jeżeli zaparzemy liściastą herbatę w szklance, to nasiąknięte listki opadną na dno. Wystarczy teraz zamieszać płyn łyżeczką, żeby zaobserwować gromadzenie się listków na środku dna szklanki. Zjawisko to przeczy intuicji, która sugeruje, że siła odśrodkowa powinna odrzucać liście na zewnątrz na zasadzie wirówki. Wyjaśnieniem tego *paradoksu liści herbaty* jest helikalna cyrkulacja, która rozwija się ze względu na tarcie płynu o ścianki. W szczególności przy dnie prędkość płynu maleje. Powyżej dna płyn odpływa do ścianek, przy nich opada, a przy dnie powraca do środka. Dzięki temu cząsteczki płynu poruszają się po toroidalnych trajektoriach, a ruch ten powoduje gromadzenie się listków w pobliżu punktu stagnacji na środku dna. W ten sposób szklanka staje się antywirówką.

Autorzy pracy [2] postanowili wykorzystać to zjawisko do opracowania taniej, szybkiej i skutecznej metody frakcjonowania krwi. Wymyślone przez nich urządzenie jest mikroskopijnym cylindrem milimetrowych rozmiarów. Sedymentacja krwinek następuje dzięki wywołaniu okrężnego ruchu krwi w cylindrze, który powoduje powstawanie przepływu helikalnego. Ruch okrężny jest wywołany bez udziału jakiegokolwiek ruchomego mechanizmu. Wykorzystywana jest minidmuchawka kierująca powietrze pod pewnym kątem do pionu przy brzegu cylindra. Minidmuchawka jest elektrodą, na której następują wyładowania koronowe pod wpływem przyłożenia zmiennego (90 kHz) napięcia około 1 kV. Dodatkowo jony są odrzucane od elektrody, inicjując ruch powietrza, który wywołuje ruch płynu.

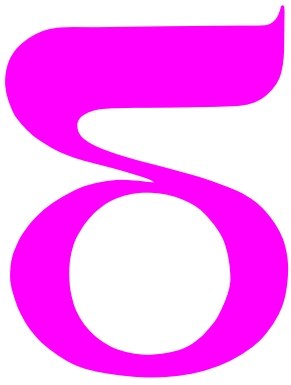
Metoda ta pozwala na przeprowadzanie analizy bardzo małej próbki krwi bez potrzeby używania kosztownych, konwencjonalnych wirówek.

Piotr ZALEWSKI

[1] Laura N. Borodinsky i Nicholas C. Spitzer, *Activity-dependent neurotransmitter-receptor matching at the neuromuscular junction*, Proceedings of the National Academy of Sciences **104** (2007) 335–340

[2] Leslie Y. Yeo, James R. Friend i Dian R. Arifin, *Electric tempest in a teacup: The tea leaf analogy to microfluidic blood plasma separation*, Applied Physics Letters **89** (2006) 103516

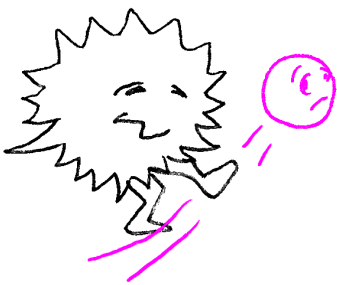




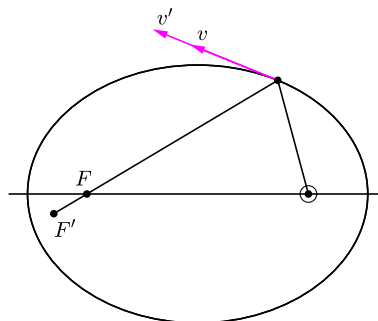
# mała delta

## Bez obliczeń

Samotna planeta (lub inne ciało) obiegałaby Słońce dokładnie w myśl praw Keplera, a elementy jej orbity byłyby niezmiennie. Elementy to szóstka parametrów określających kolejno: rozmiary orbity (półoś  $a$ ), jej kształt (mimośród), usytuowanie w przestrzeni (trzy kąty), i jako szósty – moment przejścia planety przez pericentrum. W rzeczywistości żadna planeta nie jest samotna, zatem poza Słońcem działanie (fakt, że słabe) wywierają na nią inne planety, co powoduje, że elementy jej orbity powoli, ale nieustannie się zmieniają. Mówimy, że keplerowski ruch planety jest perturbowany (zakłócany) przez działanie innych planet. Pewne jakościowe skutki perturbacji można przewidzieć, dosłownie machając rękami, jeżeli tylko podejść do sprawy metodycznie. Dlatego rozważymy osobno skutki trzech składowych dowolnej perturbacji. Przypomnijmy tylko, że: (1) suma odległości każdego punktu elipsy od jej ognisk jest stała i równa wielkiej osi  $2a$  (stąd sposób rysowania elipsy za pomocą nitki rozpiętej na dwóch gwoździach) i (2) każdy promień świetlny wysłany z jednego ogniska, po odbiciu od elipsy, trafiłby w drugie ognisko (stąd zastosowanie elips i innych stożkowych w optyce).

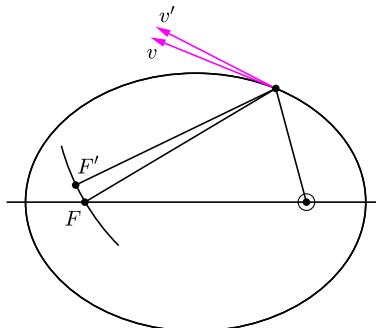


Pierwsze pytanie: jak zmieni się orbita, jeżeli planetę delikatnie trącić w kierunku ruchu, czyli jaki jest skutek perturbacji stycznej do orbity? Jasne, że wektor prędkości planety nie zmieni kierunku, a tylko długość: prędkość wzrośnie. Wzrośnie więc energia kinetyczna planety, a w konsekwencji energia całkowita  $E$ . Od niej zależy długość półosi orbity, mianowicie zachodzi  $a = -GMm/(2E)$ , gdzie  $G$  to stała grawitacji, a  $M$  i  $m$  to masy Słońca i planety. Na orbicie zamkniętej energia jest ujemna, zatem wzrost energii (czyli gdy staje się ona mniej ujemna) oznacza wzrost półosi orbity. Czyli orbita zrobi się obszerniejsza, nie zmieniając swojej płaszczyzny. A jak „przekręci się” w tej płaszczyźnie? Na to można odpowiedzieć wydedukowawszy, gdzie po perturbacji znajdzie się drugie ognisko orbity (to, w którym nie ma Słońca). Na mocy własności (1) i (2) stwierdzamy, że drugie ognisko musi oddalić się od planety w kierunku jak na rysunku 1. Bez trudu można stwierdzić, że orbita przekręca się rozmaicie w zależności od tego, w którym jej punkcie nastąpi perturbacja.



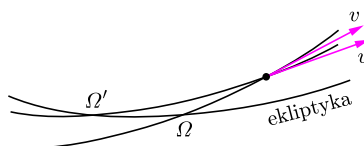
Rys. 1. Skutek perturbacji stycznej: suma odległości planety od ognisk elipsy musi wzrosnąć, zatem drugie ognisko  $F$  musi przejść do położenia  $F'$ .

Drugie pytanie: jak zmieni się orbita, gdy planetę delikatnie trącić prostopadle do kierunku ruchu (ale w jej płaszczyźnie), np. na zewnątrz orbity. Teraz wektor prędkości lekko odchyli się, nie zmieniając (w przybliżeniu) długości. Wobec tego energia planety się nie zmieni, co za tym idzie – półoś również nie. Ale nowa orbita musi być styczna do nowego wektora prędkości, co powoduje zmianę kierunku „promienia odbitego”, a więc na mocy (1) i (2) drugie ognisko musi przeskoczyć do  $F'$ , wskazanego na rysunku 2. Teraz też łatwo stwierdzić, że usytuowanie nowej orbity w jej płaszczyźnie zależy od miejsca, w którym nastąpi perturbacja.



Rys. 2. Skutek perturbacji prostopadłej: symboliczne kąty padania i odbicia muszą pozostać równe, zatem drugie ognisko  $F$  musi przejść do położenia  $F'$ .

I trzecie pytanie: jaki będzie skutek delikatnej perturbacji prostopadłej do płaszczyzny orbity (nazwijmy ją ortogonalną)? Podobnie jak w punkcie drugim, wektor prędkości zmieni tylko kierunek (a nie długość), a skoro nowa orbita musi być styczna do nowego wektora, to zmieni się jej nachylenie do płaszczyzny podstawowej, którą umownie jest płaszczyzna ekliptyki (rys. 3).



Rys. 3. Skutek perturbacji ortogonalnej: orbita musi pozostać styczna do wektora prędkości, zatem nachylenie nowej orbity może się zmienić rozmaicie, ale jej węzły zawsze się cofają, czyli  $\Omega$  musi przejść do położenia  $\Omega'$ . Na rysunku mamy rzuty orbit (dawnej i nowej) na sferę niebieską.

Punkty przecięcia się orbity z ekliptyką to tzw. węzły orbity. Z rysunku natychmiast widać, że perturbacja ortogonalna skierowana ku płaszczyźnie ekliptyki (gdzieś tam są przecież wszystkie planety), działająca zarówno przed, jak i po przejściu ciała przez węzeł swojej orbity (czyli zawsze!) powoduje przesuwanie się węzła w kierunku przeciwnym do ruchu ciała. Krótko mówi się, że węzły cofają się. Jest to efekt powszechny, a wyraźnie występuje w ruchu Księżyca. Jego okołoziemski ruch jest perturbowany głównie przez Słońce, a skutkiem jest to, że węzły orbity Księżyca obiegają ekliptykę w ciągu 18,6 roku, czyli w skali astronomicznej bardzo szybko. To z kolei ma odbicie np. w okolicy zaćmień, bowiem aby nastąpiło zaćmienie, Księżyc musi znajdować się albo w nowiu, albo w pełni i zarazem dostatecznie blisko któregoś węzła swojej orbity.

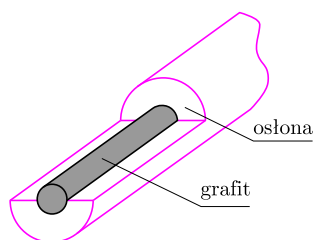
W świecie realnym perturbacja jest złożeniem tych trzech składowych, w dodatku działających ciągle i z różnym nasileniem. Skutki dają się obliczać, ale machanie rękami już do tego nie wystarcza.

*Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST*

# Budujemy tensometr oporowy

Stanisław BEDNAREK\*

Tensometry oporowe są to czujniki, które umożliwiają pomiary naprężenia lub wydłużenia ciała. Pomiary te przeprowadza się na podstawie zmian oporu elektrycznego przewodnika podlegającego odkształceniom wraz z ciałem. Badania różnych części maszyn i materiałów przy użyciu tensometrów oporowych mają ważne znaczenie praktyczne i szerokie zastosowanie w technice. Dlatego też warto zapoznać się z zasadą działania tensometru oporowego. Od pewnego czasu w sklepach z materiałami piśmiennymi można spotkać interesujący przedmiot – giętki ołówek (cena ok. 1 zł). Nadaje się on do pisania, jak zwykle ołówki, a ponadto może być na różne sposoby odkształcany. Zdolność do odkształceń giętkiego ołówka jest tak duża, że można na nim nawet zawiązać supeł. Okazuje się, że taki ołówek również dobrze nadaje się do pokazania zasady działania tensometru oporowego.



Rys. 1. Przygotowanie końcówek giętkiego ołówka.

\*Instytut Fizyki, Uniwersytet Łódzki

Wspomniane ołówki składają się z giętkiej plastikowej osłony, w której umieszczony został również giętki grafit, stanowiący element piszący. Grafit ten w rzeczywistości jest materiałem kompozytowym wykonanym z proszku grafitowego i substancji wiążącej. Oporność elektryczna takiego grafitu w typowym ołówku o długości 30 cm wynosi zwykle kilkanaście kiloomów.

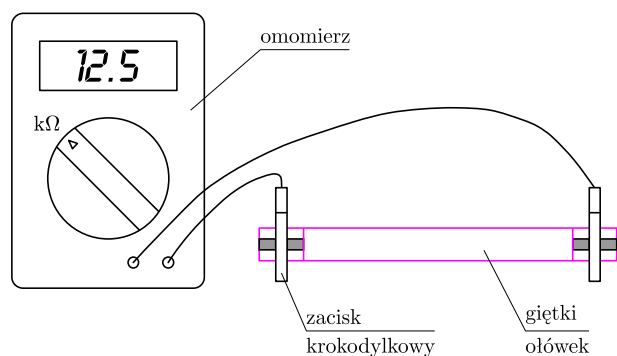
Pierwszym etapem pracy przy budowie tensometru jest przygotowanie końcówek ołówka. W tym celu usuwamy gumkę do ścierania i metalową tulejkę z jednego końca ołówka, a z drugiego odcinamy zatemperowaną stożkową część. Następnie z obu końców ścinamy do połowy osłonę na długości około 1 cm w sposób pokazany na rysunku 1. Takie przygotowanie końców ołówka pozwoli na ich połączenie za pomocą zacisków krokodylkowych z omomierzem (rys. 2).

Jako omomierz wykorzystamy cyfrowy lub analogowy miernik uniwersalny, którego przełącznik rodzaju pomiaru ustawiamy na pomiar oporności elektrycznej. Mierniki cyfrowe w ostatnim czasie bardzo potaniały i można je coraz częściej spotkać w domowych warsztatach. Jeżeli nie znajdziemy takiego miernika w domu, to pozostaje nam skorzystanie z omomierza w szkolnej pracowni fizycznej. Po połączeniu ołówka z omomierzem możemy zmierzyć oporność grafitu.

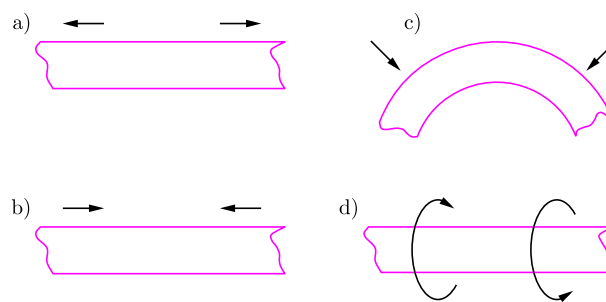
Na początku mierzymy oporność grafitu w wyprostowanym i niepoddanym naprężeniom ołówka. Następnie ołówek trzymamy rękami w pobliżu jego końców i poddajemy kolejno naprężeniom rozciągającym, ściskającym oraz zginaniu i skręcaniu (rys. 3). Okazuje się, że we wszystkich przypadkach odkształceń, oprócz ściskania, omomierz wskazuje

wzrost oporności elektrycznej grafitu o kilka do kilkunastu kiloomów. W przypadku ściskania następuje zmniejszenie oporności elektrycznej grafitu. Okazuje się również, że zmiany oporności elektrycznej wzrastają wraz ze zwiększeniem naprężenia lub odkształcenia, a po ustąpieniu sił działających na ołówek i jego wyprostowaniu oporność grafitu wraca do wartości początkowej. W ten sposób możemy jakościowo poznać działanie tensometru oporowego.

Układ do doświadczenia ilościowego z giętkim ołówkiem jako tensometrem oporowym poddanym rozciąganiu przedstawia rysunek 4. Końce giętkiego ołówka przygotowane są w taki sam sposób jak poprzednio. Ołówek poniżej górnego końca zamocowany jest do statywu lub solidnie przytwierdzonego poziomego pręta. Natomiast powyżej dolnego końca ołówka przymocowana jest do niego szalka na odważniki.

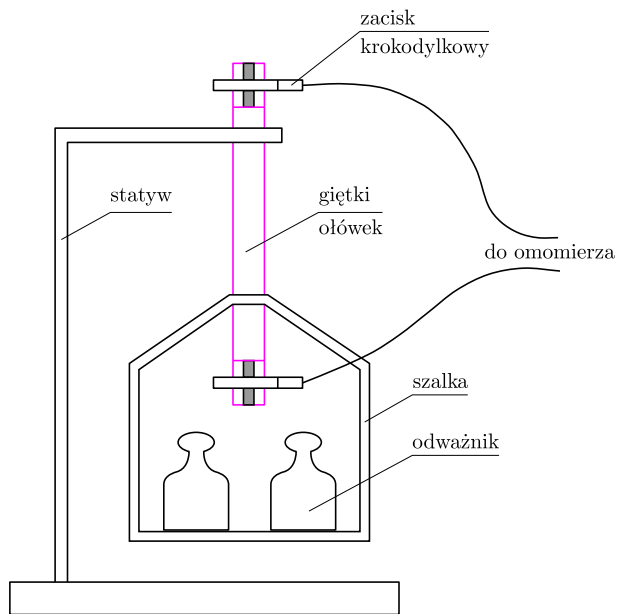


Rys. 2. Połączenie giętkiego ołówka z omomierzem.



Rys. 3. Odkształcenia giętkiego ołówka: a) rozciąganie, b) ściskanie, c) zginanie, d) skręcanie.

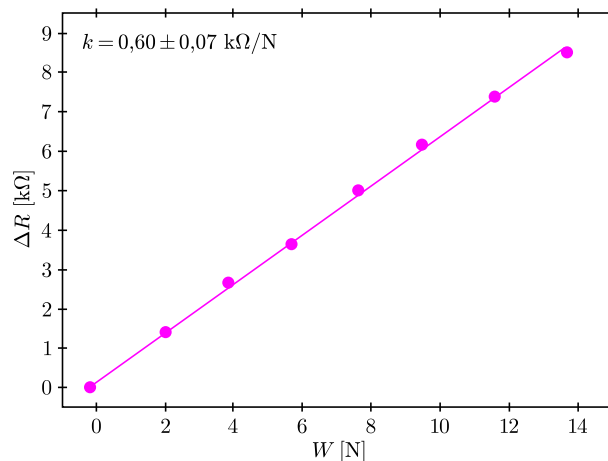
Szalę taką przy odrobinie pomysłowości można sporządzić z niewielkiej sztywnej płytki i kawałka drutu. W przeprowadzonym doświadczeniu do zamocowania ołówka wykorzystano niewielkie zaciski śrubowe od statywów. Oba końce ołówka połączone są za pomocą zacisków krokodylkowych z omomierzem w taki sam sposób jak poprzednio.



Rys. 4. Układ do badań ilościowych z wykorzystaniem giętkiego ołówka jako tensometru oporowego poddanego naprężeniom rozciągającym.

Wykonując doświadczenie, mierzymy najpierw oporność elektryczną giętkiego ołówka, kiedy szalka jest pusta. Ciężar szalki możemy z powodzeniem pominąć. Następnie na szalce umieszczamy kolejno odważniki i po każdej zmianie ich masy odczytujemy oporność giętkiego ołówka. Na podstawie wyników tych pomiarów możemy obliczyć ciężar umieszczonych na szalce odważników  $W$  oraz odpowiadający mu przyrost oporności ołówka  $\Delta R$ . Ciężar odważników wyrażony w niutonach obliczamy, mnożąc ich masę wyrażoną w kilogramach przez przyspieszenie ziemskie wynoszące  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Obliczone wartości  $W$  i  $\Delta R$  wykorzystujemy do sporządzenia wykresu. Uzyskany w ten sposób w jednym z doświadczeń wykres przedstawia rysunek 5. Jeżeli nie dysponujemy fabrycznie wykonanymi i wycechowanymi odważnikami, to możemy z dobrym skutkiem zastąpić je jednakowymi, dużymi nakrętkami lub śrubami. Masę tych przedmiotów wyznaczamy za pomocą wagi spotykanej w gospodarstwie domowym lub w szkolnej pracowni fizycznej, a następnie obliczamy, jak poprzednio, ich ciężar.

Ponieważ wykres jest linią prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych, to wartości  $W$  i  $\Delta R$  możemy wykorzystać do obliczenia współczynnika kierunkowego  $k$  tej prostej. Współczynnik kierunkowy  $k$  stanowi charakterystyczny parametr danego tensometru oporowego. Wartość współczynnika kierunkowego możemy w przybliżeniu wyznaczyć graficznie bezpośrednio z wykresu przedstawionego na rysunku 5.



Rys. 5. Zależność przyrostu oporności giętkiego ołówka  $\Delta R$  od ciężaru rozciągających go obciążników  $W$ ,  $k$  – współczynnik kierunkowy prostej.

W tym celu należy położyć na kartce z zaznaczonymi punktami linijkę i zmieniać jej położenie w ten sposób, żeby krawędź linijki przechodziła możliwie najbliżej jak największej liczby punktów. Przy tak dobranym położeniu linijki rysujemy odcinek prostej, a następnie obliczamy tangens jego kąta nachylenia, jako stosunek odczytanego z wykresu przyrostu oporności do odpowiadającego mu przyrostu ciężaru odważników.

Dokładne obliczenie współczynnika kierunkowego prostej  $k$  możemy przeprowadzić metodą najmniejszych kwadratów. Idea tej metody polega na dobraniu takiej prostej, dla której suma kwadratów odległości między punktami uzyskanymi z pomiarów i odpowiednimi punktami przewidywanymi przez równanie tej prostej jest minimalna. Pominiemy tutaj szczegóły przekształceń algebraicznych związane z wyprowadzeniem wzorów na współczynnik  $k$  oraz jego niepewność  $\Delta k$  i podamy gotowe wzory zapisane z użyciem wcześniej przyjętych oznaczeń.

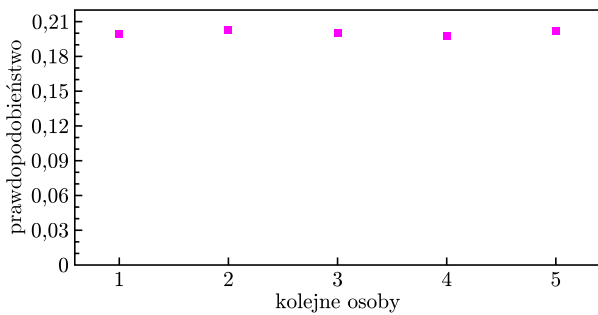
$$k = \frac{\sum_{i=1}^n W_i \Delta R_i}{\sum_{i=1}^n W_i^2}, \quad \Delta k = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta R_i - kW_i)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n W_i^2}}$$

W obu wzorach wskaźnik  $i$  numeruje kolejne pomiary, których jest  $n$ , a symbol  $\sum$  oznacza sumowanie względem wszystkich pomiarów. Dla przedstawionego na rysunku 5 wykresu metodą najmniejszych kwadratów obliczono wartość współczynnika kierunkowego  $k = 0,60 \pm 0,07 \text{ k}\Omega/\text{N}$ .

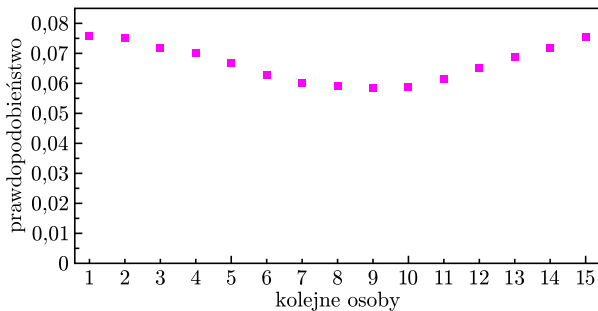
Na koniec ważna uwaga. W doświadczeniu nie należy używać odważników o zbyt dużej masie. Wystarczy kilka odważników o masie 100–200 g każdy, mających łączny ciężar w granicach kilkunastu niutonów. Zastosowanie odważników o zbyt dużej masie może spowodować wejście w zakres nieliniowej zależności  $\Delta R$  od  $W$  oraz pozostanie trwałego wzrostu oporu elektrycznego po usunięciu odważników. Nasz tensometr wykazywałby wówczas nieliniowość i histerezę.

O grze w marynarza słyszeli zapewne wszyscy. Gra może być bardzo pomocna w sytuacjach, w których potrzebujemy wybrać jedną osobę z wielu – wystarczy grupa, w której nie wiadomo, kto ma zmywać po posiłku, zjeść ostatni kawałek czekolady, czy pójść wyrzucić śmieci. Gra ta wydaje się wtedy sprawiedliwym, a przy tym prostym sposobem rozwiązania problemu. Nie jest ona jednak tak sprawiedliwa, jakby się mogło zdawać.

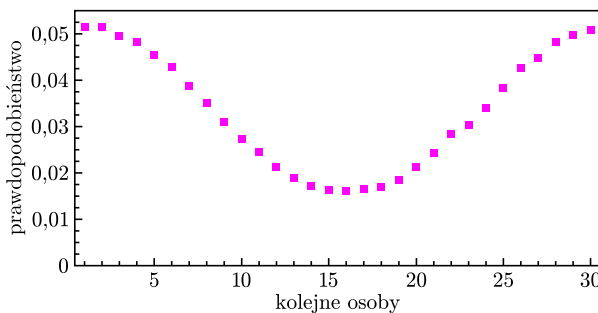
Aby się o tym przekonać, przypomnijmy sobie szybko zasady gry – każda z  $n$  osób uczestniczących w zabawie pokazuje pewną (losową) liczbę  $X_i$  ( $i$  jest numerem osoby) z ustalonego zakresu. Wskazanie liczby przez gracza polega zwykle na pokazaniu odpowiedniej liczby palców. Wylosowane liczby są następnie sumowane ( $S_n = \sum X_i$ ), po czym jedna z osób odlicza kolejno („w kółko”) uczestników gry aż do pojawienia się otrzymanej liczby  $S_n$ . W wyniku tej operacji wybrana zostaje  $k$ -ta osoba. Warto zauważyć, że opisana procedura tak naprawdę sprowadza się do brania reszty z dzielenia przez  $n$  – wybrana zostaje osoba o numerze  $k$  równym  $S_n \bmod n$  (co oznacza tę właśnie resztę).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wydawać by się mogło, że gra jest doskonale sprawiedliwa – w końcu każdy z uczestników niezależnie podaje swoją liczbę. Tak jednak nie jest – można się o tym przekonać, przyglądając się rysunkom 1–3. Przedstawiają one prawdopodobieństwo wybrania  $k$ -tej osoby w grach (czyli rozkład prawdopodobieństwa zmiennej  $k$ ), w których uczestniczy 5, 15 lub 30 osób i w której losowane są liczby z zakresu od 1 do 5. O ile dla 5 osób rozkład prawdopodobieństwa zmiennej  $k$  jest idealnie płaski, o tyle dla większej liczby uczestników w rozkładzie pojawia się centralnie umieszczone minimum.

W wytłumaczeniu tego dziwnego, jak by się zdawać mogło, zjawiska może pomóc jedno z ważnych twierdzeń matematycznych, tj. centralne twierdzenie graniczne. W najprostszej postaci mówi ono, że dla  $X_1, X_2, \dots, X_n$  niezależnych zmiennych losowych o takich samych rozkładach prawdopodobieństwa (czyli z ustaloną wartością oczekiwaną  $\mu$  i odchyleniem standardowym  $\sigma$ ) suma rozkładów  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  będzie miała wartość oczekiwaną  $n\mu$  i odchylenie standardowe  $\sigma\sqrt{n}$ . Co więcej, dla odpowiednio dużych  $n$  rozkład  $S_n$  dąży do rozkładu Gaussa. W naszym przypadku  $X_i$  oznacza rozkład prawdopodobieństwa pokazania pewnej liczby palców przez  $i$ -tego uczestnika gry. Zakładamy tutaj, że  $X_i$  są rozkładami płaskimi (tzn. prawdopodobieństwa pokazania konkretnej liczby palców przez danego gracza są równe).

Z podanego wcześniej twierdzenia wynika, że rozkład otrzymanej liczby  $S_n$  dla odpowiednio dużej liczby uczestników opisywany będzie rozkładem Gaussa. Szerokość w połowie wysokości, równą  $2,35\sigma$ , przyjmuje się za miarę jego rozpiętości. Należy oczekiwać, że jeśli szerokość będzie mniejsza od liczby uczestników, to gra nie będzie sprawiedliwa.

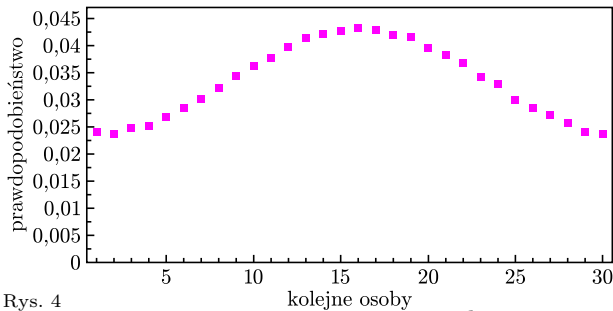
I tak dla gry z 5 uczestnikami widzieliśmy, że rozkład był zupełnie płaski. Spodziewamy się zatem, że odchylenie standardowe zmiennej  $S_5$  będzie większe niż 5. Przypomnijmy, że w rozpatrywanej grze można było losować liczby z zakresu od 1 do 5, co dla zmiennej  $X_i$  odpowiada wartości oczekiwanej

\*Student Wydziału Fizyki, Uniwersytet Warszawski



$\mu_{X_i} = 3$  oraz odchyleniu standardowemu  $\sigma_{X_i} = \sqrt{2}$ . Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, obliczamy, że szerokość rozkładu zmiennej  $S_5 = X_1 + \dots + X_5$  jest równa około 7, co rzeczywiście jest większe od liczby uczestników gry. Dla gier z 15 lub 30 uczestnikami szerokości rozkładu zmiennych  $S_{15}$  i  $S_{30}$  wynoszą odpowiednio około 13 i około 18. Liczby te są mniejsze od liczby uczestników w poszczególnych grach i w konsekwencji rozkład jest różny od płaskiego.

Na koniec spróbujemy zobaczyć jeszcze jedną ciekawą cechę gry w marynarza. Do tej pory rozważaliśmy gry, w których największa możliwa do wylosowania



Rys. 4

z liczb  $x_{\max}$  była nieparzystą (a dokładnie  $x_{\max}$  wynosiło 5). Charakterystyczną cechą gier o  $x_{\max}$  nieparzystych jest to, że minimum rozkładu wypada na gracza znajdującego się na pozycji  $k = \frac{n+1}{2}$ . Dla  $x_{\max}$  parzystych jest dokładnie odwrotnie (rys. 4) – dla graczy znajdujących się na pozycjach  $k = \frac{n+1 \pm 1}{2}$  wypada dokładnie maksimum rozkładu (a więc szanse wybrania są tu największe).

Właściwość tę można bardzo łatwo pokazać, wiedząc, że wartość oczekiwana  $S_n$  wynosi  $n\mu$  (gdzie  $\mu$  jest wartością oczekiwaną pojedynczej gry  $X_i$ ). Dla  $x_{\max}$  nieparzystych  $\mu$  jest całkowite (co pokazuje proste obliczenie). Korzystając z tego, możemy obliczyć najbardziej prawdopodobne  $k$ :

$$k = ES_n \text{ mod } n = (n\mu) \text{ mod } n = 0,$$

gdzie  $\mu$  jest liczbą całkowitą, a więc  $n\mu$  jest podzielne bez reszty przez  $n$ . Podobnie możemy obliczyć najbardziej prawdopodobne  $k$  dla  $x_{\max}$  parzystych. W takim przypadku  $\mu$  jest połówkowe (czyli równe  $\frac{7}{2}$ ,  $\frac{9}{2}$ , ...), a zatem najbardziej prawdopodobne  $k$  wypada w pobliżu  $\frac{n}{2}$ .

Jak widać, nawet tak prosta gra jak gra w marynarza może mieć ciekawe właściwości. W zależności od przyjętych zasad może faworyzować pewnych uczestników. Może (ale nie musi) być grą sprawiedliwą. To, czy nią będzie, zależy tylko od wiedzy i (dobrych) chęci osoby prowadzącej grę.

Profesor Jacek Dobaczewski przesłał nam utwór swego studenta, Dominika Łubińskiego, pod tytułem *Wykład prof. J. Dobaczewskiego, Mechanika Kwantowa, Seria V, Zadanie 2.*

Drogi Panie Profesorze,  
W ramach pracy mej domowej  
Napisałem ten poemat  
O mechanice kwantowej.

Różni ona się znacząco  
Od ujęcia klasycznego,  
Więc spróbuję tu wyjaśnić  
Czym się różni i dlaczego.

Przykładowo, gdy klasycznie  
Jakąś cząstkę opisuję,  
To podaję pęd, kierunek  
I się niczym nie przejmuję.

W mechanice zaś kwantowej  
Mam nie lada z tym zmartwienie,  
Bo nie zmierzę równocześnie  
Pędu razem z położeniem.

Również sam akt pomiarowy  
Źródłem jest kłopotów licznych,  
Bo gdy mierzę coś w układzie,  
Zmieniam jego stan fizyczny.

Dodatkowo nam dochodzą  
Elementy losowości,  
Bo (na przekór Einsteinowi)  
Bóg gra jednak z nami w kości.

Ale z czego to wynika?  
Z czego biorą się różnice,  
Że inaczej jest w kwantowej  
Niż w klasycznej mechanice?

Bo kwantowa mechanika  
Sięga na „najmniejsze kresy”  
Opisując mikroświaty,  
Gdzie nieciągle są procesy

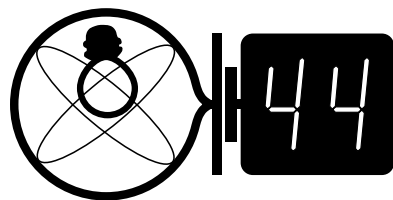
I jak po drabinie trzeba  
Skakać między poziomami,  
Bo energia nie jest płynna,  
Tylko zmienia się porcjami.

A że porcje (czyli kwanty)  
Są niewielkie, bardzo małe,  
To złudzeniom ulegamy,  
Że nasz świat jest ciągły stale.

\* \* \*

Gdy te słowa ludzie słyszą  
Wielu często mina rzednie.  
Jednym trudno w to uwierzyć,  
Inni mówią, że to brednie.

Owszem, trudna jest ta mowa  
I mimo dowodów licznych  
Człowiek z trudem ją przyjmuje,  
Bo obiektem jest klasycznym.



Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2007

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
**424** ( $WT = 3,03$ ) i **425** ( $WT = 2,37$ )  
z numeru 10/2006

Mateusz Łącki	– Kraków	42,38
Tomasz Tkocz	– Rybnik	40,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	36,46
Marian		
Łupieżowiec	– Zebrzydowice	35,00
Tomasz Wietecha	– Tarnów	31,64
Jerzy Witkowski	– Radlin	28,91
Krzysztof Magiera	– Łosiów	25,11
Andrzej		
Nowogrodzki	– Chocianów	19,64
Jacek Konieczny	– Poznań	18,39

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z fizyki nr 436, 437

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**436.** Stacja kosmiczna składa się z dwóch części o masie 10 ton każda, odległych wzajemnie o 30 m. Obliczyć siłę rozciągającą stację, gdy krąży ona wokół Ziemi na wysokości 700 km w pozycji „pionowej” (jedna część bliżej Ziemi, druga dalej).

**437.** Mamy do dyspozycji ogniwa o  $SEM = 1$  V bez oporu wewnętrznego oraz oporniki o oporze  $1 \Omega$ . Jak z tych elementów zbudować układ o dwóch końcówkach równoważny baterii o  $SEM = 0,8$  V i oporze wewnętrznym  $0,75 \Omega$ ? Należy użyć możliwie małej liczby ogniw i oporników. Najlepsze układy (o najmniejszej liczbie elementów) zostaną przedstawione w omówieniu rocznym, jednak osiągnięcie „rekordu” nie jest wymagane do uznania rozwiązania za prawidłowe.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2006

Przypominamy treść zadań:

**428.** Zegar-klepsydry stoi na precyzyjnej wadze, działającej bez żadnej zwłoki. Naskicować wykres wskazań wagi w zależności od czasu, po obróceniu klepsydry.

**429.** Cylinder o wysokości  $h = 0,5$  m i objętości  $V = 200$  cm<sup>3</sup> jest całkowicie wypełniony wodą, z wyjątkiem przyczepionego do dna pęcherzyka powietrza o objętości  $V_0 = 0,02$  cm<sup>3</sup>. Początkowo ciśnienie w górnym końcu cylindra wynosiło  $p = 10^5$  Pa. Jeśli cylinder jest sztywny (o niezmiennym kształcie), a współczynnik ściśliwości wody (zdefiniowany wzorem  $\beta = -\frac{\Delta V}{V \Delta p}$ ) wynosi  $\beta = 5 \cdot 10^{-10}$  Pa<sup>-1</sup>, to jak zmieni się ciśnienie w cylindrze, gdy pęcherzyk wypłynie na wierzch?

**428.** W chwili początkowej, gdy piasek zaczyna spadać z górnego pojemnika (a jeszcze nie spadł do dolnego), nacisk klepsydry na wagę staje się nieco mniejszy. Pod koniec efekt jest odwrotny, gdyż ostatnia porcja piasku w chwili upadku wywiera na klepsydrę siłę większą od swojego ciężaru.

Zastosowanie równania

$$ma = F_w = P - R$$

do całego piasku (gdzie  $a$  – przyspieszenie środka masy,  $P$  – ciężar całego piasku,  $R$  – siła reakcji wagi) dowodzi, że gdyby piasek spadał stale na ten sam poziom, to przez większą część czasu działania klepsydry dwa efekty wymienione wyżej równoważyłyby się i wskazanie wagi  $R$  byłoby równe ciężarowi  $P$ . Wynika to stąd, że w takim przypadku środek masy przemieszczałby się w dół ruchem jednostajnym, czyli  $a = 0$ . Jeśli jednak uwzględnimy fakt, że piasek spada z coraz mniejszej wysokości, czyli prędkość spadku, a także masa piasku będącego w danej chwili w locie maleją, to maleje też prędkość środka masy piasku. Wektor  $\vec{a}$  jest zatem skierowany w górę, więc  $R > P$ . Szukany wykres jest przedstawiony obok, z dużą przesadą co do realnej wielkości różnicy między  $R$  a  $P$ .

**429.** Dla powietrza nietrudno wyznaczyć z równania Clapeyrona współczynnik ściśliwości  $\beta_0$  – okazuje się on równy odwrotności ciśnienia. Zmiana ciśnienia powietrza w pęcherzyku  $\Delta p_0$  jest równa różnicy ciśnienia słupa wody i szukanej zmiany ciśnienia wody (którą oznaczymy jako  $\Delta p$ ):

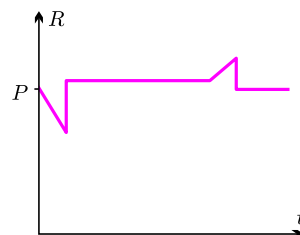
$$\Delta p_0 = \rho g h - \Delta p.$$

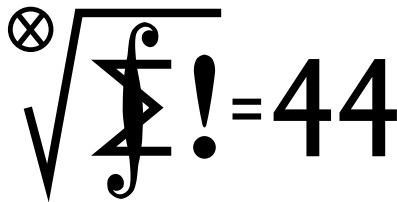
Stąd zmiana objętości pęcherzyka wynosi

$$\Delta V_0 = \beta_0 V_0 (\rho g h - \Delta p) = V_0 (\rho g h - \Delta p) / p.$$

Przyrównując ją do bezwzględnej wartości zmiany objętości wody  $\Delta V = \beta V \Delta p$ , otrzymujemy

$$\Delta p = \frac{\rho g h}{1 + \beta p V / V_0} = 3300 \text{ Pa.}$$





Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2007

**539.** Niech  $T_1, \dots, T_m$  będą trójelementowymi podzbiórmi zbioru  $n$ -elementowego  $X$ ; zakładamy, że zbiory  $T_i, T_j$  (dla  $i \neq j$ ) mają co najwyżej jeden element wspólny. Dowieść, że istnieje podzbiór  $S$  zbioru  $X$ , liczący nie mniej niż  $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$  elementów i niezawierający żadnego ze zbiorów  $T_i$ .

**540.** Wyznaczyć wszystkie pary  $(x, y)$  liczb całkowitych dodatnich, dla których każda z liczb  $x + y, 1 + xy$  jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

Zadanie 540 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2006**

Przypominamy treść zadań:

**531.** Rozważamy graf mający  $n$  wierzchołków oraz  $q$  krawędzi (każda krawędź łączy dwa różne wierzchołki; każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź). Zakładamy, że istnieje co najmniej jeden zamknięty cykl krawędzi długości nieparzystej, ale nie istnieje cykl długości 3. Dowieść, że  $4q \leq n^2 - 2n + 5$ .

**532.** Ciąg liczb rzeczywistych  $(a_n)$  jest określony wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Wyprowadzić wzór jawny, wyrażający liczby  $a_n$  jako funkcję zmiennej  $n$ .

**531.** Dowód przez indukcję. Dla  $n = 5$  graf musi być pięcioelementowym cyklem; zatem  $q = 5$  i (nie)równość zachodzi. Ustalmy  $n > 5$  i przyjmijmy słuszność dowodzonego twierdzenia „dla mniejszych  $n$ ”. Niech  $G$  będzie grafem o  $n$  wierzchołkach, mającym podaną własność, niech  $c$  będzie najmniejszą liczbą nieparzystą, dla której istnieje w  $G$  cykl długości  $c$  (więc  $c \geq 5$ ) i niech  $C$  będzie takim cyklem; z minimalności  $c$  wynika, że żadne dwa wierzchołki w  $C$ , które nie sąsiadują, nie są połączone krawędzią.

Oznaczmy przez  $B$  zbiór wierzchołków grafu  $G$  poza  $C$ , a przez  $b$  – ich liczbę ( $b = n - c$ ). W grafie  $G$  nie ma trójkątów, więc żaden punkt zbioru  $B$  nie jest połączony krawędziami z parą sąsiadujących punktów cyklu  $C$ . Zatem każdy punkt z  $B$  wysyła co najwyżej  $(c - 1)/2$  krawędzi do  $C$ , a łączna liczba krawędzi łączących  $B$  z  $C$  nie przekracza

$$\frac{b(c-1)}{2}.$$

Jeśli w zbiorze  $B$  istnieje cykl długości nieparzystej (wówczas  $b \geq 5$ ), to na mocy założenia indukcyjnego liczba krawędzi w obrębie  $B$  jest nie większa niż

$$\frac{b^2 - 2b + 5}{4}.$$

Jeśli w  $B$  nie ma cyklu nieparzystego, to graf  $G$  jest w obrębie  $B$  dwudzielny, tzn.

$$B = B_1 \cup B_2, \quad |B_i| = b_i, \quad b_1 + b_2 = b,$$

żadna krawędź nie łączy punktów z tego samego  $B_i$ ; wówczas liczba krawędzi w obrębie  $B$  jest nie większa niż

$$b_1 b_2 \leq \frac{(b_1 + b_2)^2}{4}.$$

Zatem w każdym przypadku ta liczba nie przekracza  $b^2/4$ .

W cyklu  $C$  mamy  $c$  krawędzi. Dla pełnej liczby krawędzi w grafie  $G$  otrzymujemy oszacowanie

$$q \leq c + \frac{b(c-1)}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{4c + 2(n-c)(c-1) + (n-c)^2}{4} = \frac{n^2 - 2n + 5 - (c-1)(c-5)}{4} \leq \frac{n^2 - 2n + 5}{4},$$

które zamyka krok indukcyjny i kończy rozwiązanie.

**532.** Obliczenie kilku początkowych wyrazów ciągu pozwala zgadnąć wzór ogólny

$$a_n = (n+1)2^{n-2},$$

który nietrudno udowodnić przez indukcję. Dla  $n = 1$  wzór zgadza się. Przyjmując

$$a_i = (i+1)2^{i-2}$$

dla  $i < n$ , dostajemy równość

$$4 \sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)2^i = -1 + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)2^i = -1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} 2^i,$$

gdzie  $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j \leq i, \\ 0 & \text{dla } j > i. \end{cases}$

Zmieniamy porządek sumowania,

$$4 \sum_{i=1}^{n-1} a_i = -1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=j}^{n-1} 2^i \right) = -1 + \sum_{j=0}^{n-1} (2^n - 2^j) = -1 + n \cdot 2^n - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = -1 + n \cdot 2^n - (2^n - 1) = (n-1) \cdot 2^n.$$

Stąd wynika teza indukcyjna:

$$a_n = \frac{n+1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{(n-1)2^n}{4} = (n+1)2^{n-2}.$$



### Rozwiązanie zadania M 1165.

Z danej w treści zadania podzielności oraz z tożsamości

$$(m+n-1)(m+n+1) = (m^2+n^2-1) + 2mn$$

wynika, że liczba  $2mn$  jest podzielna przez  $m+n-1$ . A zatem gdyby liczba  $m+n-1$  była pierwsza, to musiałaby być dzielnikiem jednej z liczb  $2, m, n$ . To jednak nie jest możliwe, bowiem liczba  $m+n-1$  jest większa od  $2, m$  oraz  $n$ .



### Rozwiązanie zadania M 1167.

Dla  $m=1$  lub  $m=2$  teza jest spełniona. Przyjmijmy więc, że  $m \geq 3$  oraz oznaczmy

$$f^m(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{m \text{ razy}}(x).$$

Z równości  $f(x) = f(y)$  wynika, że

$$f^{m-1}(f(x)) = f^{m-1}(f(y)),$$

czyli  $x=y$ . Zatem funkcja  $f$  jest różnowartościowa, a skoro jest ciągła, to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Przyjmijmy, że funkcja  $f$  jest rosnąca, oraz przypuśćmy, że  $f(x) > x$  dla pewnego  $x \in \mathbb{R}$ . Wtedy

$$f(f(x)) > f(x) > x,$$

skąd przez łatwą indukcję dostajemy  $f^k(x) > x$  dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $k$ . W szczególności dla  $k=m$  uzyskujemy  $f^m(x) > x$ , czyli  $x > x$  – sprzeczność. Analogicznie wykluczamy zależność  $f(x) < x$ . Zatem  $f(x) = x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

Przyjmijmy z kolei, że funkcja  $f$  jest malejąca. Wtedy  $f^2$  jest funkcją rosnącą oraz  $(f^2)^m(x) = x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Stosując rozumowanie z poprzedniego akapitu, wnioskujemy, że  $f^2(x) = x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , a więc  $f(f(x)) = x$ .



## Patrz w niebo

Wydaje się, że wśród galaktyk tzw. normalnych, tzn. z wykluczeniem karłowatych, galaktyki spiralne stanowią 75% (reszta to eliptyczne i nieregularne). Czyli fenomen spiralności musi być powszechny. I rzeczywiście, mechanika podaje mechanizm, dzięki któremu dostatecznie płaska galaktyka ma szanse stać się spiralną. Z kolei wśród galaktyk spiralnych galaktyki spiralne przegrodzone stanowią co najmniej 1/5, a może nawet 1/2, czyli też sporo. Przegroda (poprzeczka) to centralne zgęszczenie wyglądające jak dość silnie wydłużona elipsoida trójosiowa obracająca się wokół najkrótszej osi, a dopiero z jej końców rozwijają się ramiona spiralne. I znów mechanika mówi, że tak mogłaby się zachowywać elipsoida jednorodna, np. z nieściśliwej cieczy, ale poprzeczka to przecież zbiorowisko gwiazd, a więc budulec zupełnie nie ten.

Niedawne rozważania teoretyczne (zresztą mocno skomplikowane) dowodzą, że poprzeczka sprzyja przepływowi materii międzygwiazdowej z peryferyjnych obszarów galaktyki do centrum. Tam musi dojść do gwałtownych procesów gwiazdotwórczych, najmaszywniejsze gwiazdy rychło wybuchną jako supernowe itd., a w wyniku tego ogólnego zamieszania poprzeczka powinna ulec zniszczeniu. Z drugiej strony, tak wysoki procent galaktyk przegrodzonych dowodzi, że wobec tego poprzeczki powinny być strukturami odnawiającymi się. Dowodziłyby tego przykłady galaktyk mających wewnątrz dużej poprzeczki drugą małą, w dodatku inaczej zorientowaną. Jako przyczynę powstawania poprzeczek podaje się najczęściej oddziaływanie innych galaktyk. Wniosek na dziś jest taki, że samo istnienie poprzeczek jest zjawiskiem bardziej skomplikowanym, niż się zdawało i przez to nie do końca jeszcze wyjaśnionym, w szczególności poprzeczki są zapewne strukturami nietrwałymi, nieustannie niszczone i odradzające się.

Tomasz KWAST

## Kwiecień

W kwietniowe wieczory dominuje na niebie Lew. Jego najjaśniejsza gwiazda (1,34 mag), alfa – Regulus, leży niemal dokładnie na ekliptyce. Nic więc dziwnego, że dość często jest zakrywany przez Księżyc (np. dwukrotnie został zakryty w marcu). Od nas znajduje się w odległości 21 pc. Jest właściwie gwiazdą potrójną. Najjaśniejszy składnik Regulusa jest obiegany przez układ dwóch słabych gwiazd. W Lwie widać wiele galaktyk, oczywiście na zdjęciach. Z tego gwiazdozbioru wybiega w połowie listopada rój meteorów – Leonidów, pochodzący z resztek komety Tempel-Tuttle. Regulus do XVI wieku nosił nazwę Rex, czyli Król, a używane dziś zdrobnienie jako nazwę nadał mu Kopernik. Z kolei na północ od Lwa leży Mały Lew, a na południe Sekstant – oba te gwiazdozbiory wprowadził na niebo Heweliusz.

Wenus jest w Byku i widać ją wieczorami po zachodzie Słońca. Mars jest w Wodniku i wschodzi dopiero nad ranem. Jowisz jest w Wężowniku, wschodzi późnym wieczorem i widać go do rana. Saturn jest na granicy Raka i Lwa, przez co widać go w pierwszej połowie nocy. Pełnia Księżyca wypada 2 IV, a nów 17 IV. Księżyc zakryje Antaresa 7 IV, co zobaczą mieszkańcy Ameryki Południowej, Antarktydy (jeżeli tacy się znajdą) i Oceanii; Marsa 14 IV, co będzie widać we wschodniej i południowej Azji; Saturna 25 IV i to zobaczą mieszkańcy Grenlandii, północnej Kanady, Alaski i Syberii, oraz Regulusa (jak od dawna co miesiąc) 26 IV, ale to zobaczą mieszkańcy Północnej Ameryki i Arktyki. W kwietniu mamy szanse zobaczyć meteory ze średnio obfitego roju Lirydów, którego maksimum przypada około 21 IV.

T. K.

# Współczynnik prawdopodobności matek

Rafał SZTENCEL

W latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku przy dochodzeniu ojcostwa przed sądem badano grupy krwi matki, dziecka i domniemanego ojca. Znano wtedy co najmniej trzy – niezależne statystycznie – układy cech: odkryty jako pierwszy przez Landsteinerja podział na grupy 0, A, B, AB, podział M, N, MN (Landsteiner, Levine), wreszcie cechę Rh, odkrytą podczas II wojny światowej. Już pierwsi odkrywcy grup krwi ustalili prawa dziedziczenia. Żadna z wymienionych cech nie może wystąpić u dziecka, jeśli nie ma jej ani we krwi matki, ani ojca.

W świetle dzisiejszej wiedzy stwierdzenie to nie jest całkiem ściśle, m. in. w odniesieniu do rzadkiej, specyficznej grupy 0 typu Bombay [3], gdzie cechy A i B są w pewnym sensie ukryte. Nie będzie to miało jednak znaczenia dla dalszego rozumowania.

Dziś znamy ponad 20 układów cech krwi, potrafimy też badać DNA, co pozwala na prawie pewne wykluczenie ojcostwa u niesłusznie pozwanego. W latach pięćdziesiątych jednak tylko 9,1% ekspertyz orzekło wykluczenie ojcostwa, pozostawiając ponad 90% przypadków bez rozstrzygnięcia.

W pracy [1] Hugo Steinhaus dokonał analizy statystycznej 1515 spraw sądowych o ustalenie ojcostwa (materiał pochodził od Ludwika Hirszfelda, jednego z twórców nauki o grupach krwi, który występował jako ekspert przed sądem). W efekcie Steinhausowi udało się precyzyjnie ustalić, jakie jest prawdopodobieństwo *a priori* – czyli przed dokonaniem ekspertyzy – że pozwany jest ojcem dziecka. Ów współczynnik prawdopodobności matek był równy 71,3% z błędem średnim 2%. W istocie pojawił się on jako produkt uboczny obliczeń Hirszfelda, który wiedział także, że w Kopenhadze był on znacznie niższy, taki jak przed wojną na obszarze Wolnego Miasta Gdańska.

Pokażemy, jak obliczyć prawdopodobieństwo *p*, że pozwany jest ojcem dziecka. Rozpatrzmy cechę krwi *C*, której częstość w populacji wynosi *f*. Niech matka nie ma *C*, niech dziecko ma *C*. Gdy pozwany ma *C*, nie ma podstaw do wykluczenia ojcostwa, w przeciwnym razie ojcostwo zostaje wykluczone. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe

$$(*) \quad g = P(F' \cap C') = P(F')P(C') = (1 - p)(1 - f),$$

bowiem zdarzenia *F* – bycie ojcem dziecka oraz *C* – posiadanie cechy *C* można uznać za niezależne (jeśli *F* i *C* są niezależne, to *F'* i *C'* też). Znając *g* ze statystyk spraw sądowych, wyliczamy niewiadomą *p*.

## Literatura

[1] H. Steinhaus, *O dochodzeniu ojcostwa*, Zastosowania Matematyki 1 (1953–54), z. 2, ss. 67–81.

[2] H. Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*. Wrocław 2002.

[3] Wikipedia, *Grupy krwi*.

W rzeczywistości mamy do czynienia z wieloma cechami o częstościach *f<sub>i</sub>*. Wtedy równanie (\*) przybiera postać

$$g = (1 - p) \cdot \sum (1 - f_i).$$

Jeśli pozwany ma bardzo rzadką cechę krwi, można sądzić, że prawie na pewno jest ojcem dziecka.

Znajomość *p* wraz ze wzorem Bayesa pozwalają na wyznaczenie prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(F|C) = \frac{P(C|F)P(F)}{P(C|F)P(F) + P(C|F')P(F')}.$$

Jeśli np. *f* = 0,05, to

$$P(F|C) = \frac{1 \cdot 0,713}{1 \cdot 0,713 + 0,05 \cdot 0,287} = 0,98.$$

Powstaje pytanie, czy i w jakim zakresie powyższe dane mogą stanowić wsparcie dla decyzji sędziego. Już sam fakt, że ktoś został pozwany przez matkę dziecka, prowadzi do stwierdzenia, że jest on ojcem dziecka z prawdopodobieństwem 71,3%. Wykrycie rzadkiej

cechy *C* we krwi pozwanego podwyższa tę wartość do 98%. Sędzia jednak może znać dodatkowe okoliczności, które spowodują, że ulegnie ona zmianie.

W październiku 1956 roku Steinhaus przedstawił w Oddziale Wrocławskim Polskiego Towarzystwa Matematycznego propozycję sposobu wyrokowania w sprawach o alimenty [2]. Wyrok mógłby uznać ojcostwo za udowodnione, nieudowodnione lub wyłączone. W pierwszym przypadku sąd orzeka ojcostwo i alimenty, w drugim ojcostwo bez alimentów, w trzecim oddala pozew. Alimenty są stałe dla kobiety, otrzymuje je ona jednak nie od mężczyzny, a od Ubezpieczalni. Mężczyzna wpłaca do Ubezpieczalni kwotę proporcjonalną do prawdopodobieństwa ojcostwa, stanu majątkowego i sumarycznych kosztów. System taki miałby szybko wyeliminować fałszywe pozwy, jako dające kobiecie mniejszą szansę.