



SPIS TREŚCI NUMERU 12 (391)

Twierdzenia Gödla –
pogadanka

Leszek Kołodziejczyk

Trzy oszustwa wirusa grypy
Agnieszka Bzowska

Zadania

∫ Na ile sposobów można
leżeć na swoim obrysie?

Marek Kordos

Ruch obrotowy Ziemi
Jolanta Nastula

Metoda probabilistyczna
Rafał Łatała

Aktualności

Klub 44

Patrz w niebo

Grudzień

Ω Entropia: nieporządek
czy fantazja?

Rafał Sztencel

W następnym numerze:
Zdegradowany Pluton

Tym razem nasza kolekcja to **powierzchnie archimedesowe**, czyli takie, które składają się z wielokątów foremnych stykających się całymi bokami w ten sposób, że we wszystkich narożach są takie same cykle wielokątów, przy czym wielokątów foremnych są co najmniej dwa rodzaje. Będziemy pisali np. (3, 4, 3, 4), gdy w narożu stykać się będą kolejno trójkąt, kwadrat, trójkąt i kwadrat. Z jednym wyjątkiem napisowi takiemu odpowiada tylko jedna powierzchnia. Piszemy *powierzchnia*, a nie *wielościanna*, bo 8 z nich to parkietaze całej płaszczyzny. Jest ich 22 plus dwie nieskończone serie.

Na rysunkach zaznaczony został sposób, w jaki powierzchnie archimedesowe można otrzymać z powierzchni platońskich (które określa się podobnie do archimedesowych, z tą różnicą, że są one złożone z wielokątów foremnych jednego rodzaju). Jak widać na stronie 16, w ostatnich dwóch przypadkach nie można tego zrobić.

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitariski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2007 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2007 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

Cena prenumeraty w 2007 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faxem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Twierdzenia Gödla – pogadanka

Leszek KOŁODZIEJCZYK*

28 kwietnia br. minęła setna rocznica urodzin Kurta Gödla, jednego z wielkich matematyków ubiegłego wieku, a zarazem „największego logika od czasów Arystotelesa”, wedle powszechnie podzielanej opinii von Neumanna. Warto z tej okazji przypomnieć najznakomitsze (choć bynajmniej nie jedyne!) osiągnięcie matematyczne Gödla, czyli dwa twierdzenia o niezupełności silnych teorii aksjomatycznych.

Aby lepiej zrozumieć znaczenie twierdzeń o niezupełności i wpływ, jaki wywarły, dobrze jest uświadomić sobie kontekst historyczny, w którym się pojawiły. Koniec XIX w. i pierwsze dziesięciolecia XX w. to w matematyce okres burzliwego rozwoju nowych metod. Coraz śmieiej stosowano zwłaszcza abstrakcyjne techniki rozwiniętej przez Georga Cantora teorii mnogości (teorii zbiorów). Metody teoriomnogościowe szybko doprowadziły do uściślenia niejasnych dotąd pojęć i uzyskania fascynujących wyników. Wyniki te bywały jednak nieintuicyjne, a czasem wysoce nieprzyjemne (np. istnienie zbioru na prostej, któremu nie da się w sensowny sposób przypisać miary). Co gorsza, beztrudnie używanie zbiorów prowadziło do paradoksów (z których najlepiej znanym jest tzw. paradoks Russella: czy zbiór wszystkich zbiorów, które nie są elementami samych siebie, jest elementem samego siebie?). Stopniowo rodziło się poczucie, że matematyka przeżywa kryzys swoich podstaw.

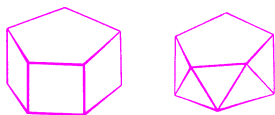
W odpowiedzi na kryzys liczni matematycy, w tym tak wybitni jak Poincaré, Brouwer czy Weyl, sugerowali ograniczenia (nieraz radykalne) zestawu dopuszczalnych w matematyce środków dowodowych. Zupełnie inny sposób wyjścia z kryzysu proponował Dawid Hilbert, bezwzględnie przeciwny wszelkim próbom okrajania matematyki. Sednem tzw. *programu Hilberta*, sformułowanego w latach 20. ubiegłego wieku, było wyodrębnienie pewnej klasy metod uznanych za bezwzględnie pewne. Całkowicie bezpieczne miały być metody finitystyczne, czyli, w uproszczeniu, odwołujące się wyłącznie do konkretnych, skończonych obiektów (takich jak liczby naturalne). Metody infinitystyczne – odwołujące się do zbiorów nieskończonych – wymagały natomiast usprawiedliwienia. Hilbert miał przy tym pomysł na to, jak je usprawiedliwić.

Według Hilberta należało, po pierwsze, sformalizować całą matematykę w postaci jednej teorii aksjomatycznej. Teoria miała być zupełna, tj. umożliwiać rozstrzygnięcie każdego problemu dającego się wyrazić w jej języku. Po drugie zaś, należało pokazać, że teoria ta jest niesprzeczna, czyli że nie można w niej udowodnić zdania wewnątrznie sprzecznego (np. $0 \neq 0$). Co więcej, dowód niesprzeczności miał być całkowicie pewny, powinien zatem używać jedynie środków finitystycznych; zwróćmy uwagę, że jest to *a priori* możliwe, jako że dowody w systemach formalnych to konkretne, skończone obiekty kombinatoryczne (skończone ciągi napisów konstruowane według pewnych reguł).

Dowód taki gwarantowałby przynajmniej tyle, że używanie wszelkich środków ówczesnej matematyki, w tym infinitystycznych, nie doprowadzi do katastrofy, jaką byłaby sprzeczność. W istocie zaś oznaczałby nawet, że wszystkie „najbardziej konkretne zdania” (w żargonie logicznym: Π_1^0 -zdania), mające dowód w ogóle, mają też dowód finitystyczny.

Hilbert pokładał w swym programie wielkie nadzieje, licząc na to, że pozwoli na „rozwiązanie problemu podstaw matematyki raz na zawsze”. Udało się zresztą poczynić pewne drobne kroki na drodze do realizacji programu. W 1931 r. ukazała się jednak praca Gödla *Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme*, która nadzieje Hilberta zniweczyła.

Praca zawierała dowód tzw. pierwszego twierdzenia o niezupełności: każda dostatecznie silna teoria aksjomatyczna jest niezupełna (nie może zatem istnieć



nieskończone serie to $(4, 4, n)$ – czyli graniastosłupy i $(3, 3, 3, n)$ – czyli antygraniastosłupy. Na rysunku oczywiście $n = 5$.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

zupelna teoria obejmujaca cala matematyke). Co gorsza, Gödel zaansował tez drugie twierdzenie o niezapelnosci: zadna dostatecznie silna teoria aksjomatyczna nie dowodzi wlasnej niesprzecznosci (skoro zaś niesprzecznosc silnej teorii nie jest nawet dowodliwa w niej samej, tym bardziej nie ma co marzyc o dowodzie finitystycznym).

Zanim powiemy kilka slow o dowodzie twierdzen o niezapelnosci, sformulujmy same twierdzenia nieco dokladniej (acz, z roznych wzgledow, nie calkiem dokladnie).

Pierwsze twierdzenie o niezapelnosci

Niech T bedzie niesprzeczną teorią aksjomatyczną zawierającą pewien ustalony fragment arytmetyki. Załóżmy ponadto, że własność bycia aksjomatem T jest algorytmicznie rozpoznawalna. Wtedy T jest niezapelna: istnieje zdanie φ w języku teorii T nierozstrzygalne w T , czyli takie, że $T \not\vdash \varphi$ i $T \not\vdash \neg\varphi$.

Drugie twierdzenie o niezapelnosci

Przy założeniach pierwszego twierdzenia, jeśli Con_T jest zdaniem w języku T wyrażającym w sposób naturalny niesprzecznosc T , to $T \not\vdash \text{Con}_T$.

Niektóre zwroty użyte w powyższych sformulowaniach wymagają zapewne wyjaśnień.

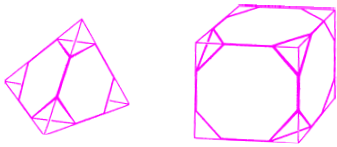
Po pierwsze, co to znaczy, że T ma zawierać pewien fragment arytmetyki? Wystarczy tyle, by w teorii T można było udowodnić pewne fakty dotyczące arytmetyki liczb naturalnych. Dziś wiemy, że może to być raptem kilka prostych faktów typu: dodawanie liczb naturalnych jest łączne, każda liczba naturalna jest zerem lub jest postaci $n + 1$, itp. Nie trzeba przy tym zakładać, że język T zawiera pojęcia arytmetyczne (wystarczy, że dają się one wewnątrz T zdefiniować).

Dalej, jaki jest sens założenia o algorytmicznej rozpoznawalności aksjomatów T i czy nie jest to istotne ograniczenie? Wymagamy tyle, by istniała mechaniczna procedura rozpoznawania, czy dany ciąg znaków jest aksjomatem T (pojęcie „mechanicznej procedury” można uściślić, używając np. teorii maszyn Turinga, ale jego intuicyjny sens powinien być w epoce komputerów dość jasny). Założenie to, spełnione przez wszystkie teorie aksjomatyczne spotykane w praktyce, jest istotne z punktu widzenia matematycznego, ale w pełni naturalne z punktu widzenia „ludzkiego”: jeśli nie wiadomo nawet, jak rozstrzygnąć, co jest aksjomatem danej teorii, a co nie, to taka teoria jest dla nas bezużyteczna.

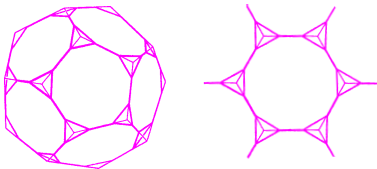
Kolejna rzecz: zakładamy tylko tyle, że T „wie” trochę na temat liczb naturalnych. W szczególności, język T może zawierać np. wyłącznie pojęcia arytmetyczne. Jakże zatem wyrazić niesprzecznosc T , czyli pewien fakt dotyczący dowodów formalnych, a nie liczb, w tymże języku? Idea jest całkiem naturalna. Obiekty syntaktyczne, takie jak zmienne, formuły, dowody w teorii aksjomatycznej itp., to skończone ciągi znaków – możemy je np. zakodować jako skończone ciągi zerojedynek. Ciąg zerojedynek można z kolei bez trudu utożsamić z liczbą naturalną (np. dopisując z przodu jedynekę i traktując go jako zapis liczby w systemie dwójkowym). Tak więc, każdemu obiektowi syntaktycznemu można w naturalny sposób przyporządkować liczbę (tzw. numer Gödla). W dodatku (co jest już faktem wymagającym nietrywialnego uzasadnienia) własności, takie jak „ x jest numerem Gödla formuły zaczynającej się od kwantyfikatora ogólnego” albo „ x jest numerem ciągu będącego dowodem zdania o numerze y ” można wyrazić formułami języka T , i to w taki sposób, że da się w teorii T o tych własnościach rozumować. Nam szczególnie potrzebna będzie formuła $\text{Pr}(x)$: „ x jest numerem zdania dowodliwego w T ”. Niesprzecznosc T , czyli Con_T , możemy teraz sformułować np. jako $\neg\text{Pr}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$.

Możemy teraz przystąpić do naszkicowania dowodu obu twierdzeń Gödla. Kluczową rolę w dowodzie gra odpowiednio zmodyfikowany paradoks kłamcy (czy zdanie „to zdanie jest fałszywe” jest prawdziwe?), w którym prawdziwość

Zapis $T \vdash \psi$ oznacza, że T dowodzi zdania ψ , a $\neg\varphi$ oznacza zaprzeczenie φ .

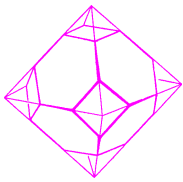


z czworościanu i sześciianu wycinamy (3, 6, 6) i (3, 8, 8)



z dwunastościanu i parkietażu sześciokątnego otrzymujemy (3, 10, 10) i (3, 12, 12)

$\ulcorner \varphi \urcorner$ to konwencjonalne oznaczenie numeru Gödla zdania φ



z ośmiościanu wycinamy czternastościan (4, 6, 6) (można go też wyciąć z sześcianu); w *Delcie* pisaliśmy o nim w numerze 9/1996 i 2/2005

W istocie nasz argument działa przy założeniu nieco wzmocnionego warunku niesprzeczności T , tzw. ω -niesprzeczności; jeśli chce się przeprowadzić dowód wyłącznie przy założeniu zwykłej niesprzeczności, trzeba nieco zmodyfikować zdanie γ .

zostaje zastąpiona dowodliwością. Aby można było go sformułować, potrzebny jest następujący fundamentalny lemat.

Lemat przekątniowy

Niech $\varphi(x)$ będzie formułą w języku teorii T z jedną zmienną wolną x . Istnieje takie zdanie ψ , że $T \vdash (\psi \iff \varphi(\ulcorner \psi \urcorner))$.

Mówiąc swobodnie: dla każdej własności wyrażalnej w języku teorii T istnieje zdanie, które „orzeka o sobie”, że ma tę własność.

Innym ważnym elementem dowodu, zwłaszcza drugiego twierdzenia, jest obserwacja, że jeśli T jest dostatecznie silna, to wprowadzona powyżej formuła $\text{Pr}(x)$, wyrażająca dowodliwość w teorii T , spełnia trzy warunki, zwane tradycyjnie *warunkami wywodliwości*:

(D1) jeśli $T \vdash \varphi$, to $T \vdash \text{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$,

(D2) $T \vdash (\text{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}(\ulcorner \text{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner))$,

(D3) $T \vdash (\text{Pr}(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \& \text{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}(\ulcorner \psi \urcorner))$.

Intuicyjnie: (D1) – jeśli jakieś zdanie jest dowodliwe w T , to T dowodzi tego faktu; co więcej, (D2) – samo (D1) jest dowodliwe w T ; wreszcie, (D3) – dowodliwość w T jest (dowodliwie w $T!$) zamknięta na pewną standardową regułę wnioskowania (tzw. *modus ponens*).

Gdy mamy już do dyspozycji lemat przekątniowy i warunki wywodliwości, reszta dowodu twierdzeń Gödla jest już stosunkowo nietrudnym rachunkiem. Rozważmy bowiem dane przez lemat takie zdanie γ , że $T \vdash (\gamma \iff \neg \text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner))$. Zdanie γ „mówi” zatem, że samo nie jest dowodliwe w teorii T . Okazuje się, że $T \not\vdash \gamma$ oraz $T \not\vdash \neg \gamma$. Tak więc, γ jest zdaniem, o którym mowa w pierwszym twierdzeniu Gödla.

Pokażmy, że $T \not\vdash \gamma$. Jeśli $T \vdash \gamma$, to na mocy warunku (D1) jest także $T \vdash \text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner)$. Ale $\text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner)$ jest równoważne $\neg \gamma$. A zatem $T \vdash \gamma$ i $T \vdash \neg \gamma$, wbrew założeniu niesprzeczności T .

Formalny dowód, że również $T \not\vdash \neg \gamma$, pominiemy, zauważając jedynie, że $T \not\vdash \neg \gamma$ musi zachodzić, jeśli tylko teoria T nie dowodzi żadnego zdania *fałszywego*. Otóż zdanie $\neg \gamma$ jest właśnie fałszywe: mówi bowiem, że istnieje dowód zdania γ w teorii T . Ale przed chwilą pokazaliśmy, że taki dowód nie istnieje!

Aby udowodnić drugie twierdzenie Gödla, wystarczy pokazać, że $T \vdash (\text{Con}_T \rightarrow \gamma)$. W tym celu użyjemy warunków wywodliwości (D1)–(D3). Mamy $T \vdash (\gamma \iff \neg \text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner))$, a zatem, na mocy (D1) i (D3), także

$$T \vdash (\text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner) \iff \text{Pr}(\ulcorner \neg \text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner) \urcorner)).$$

Z drugiej strony, (D2) daje

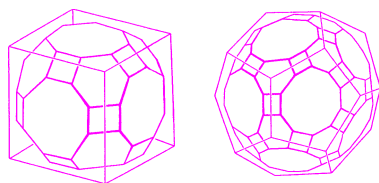
$$T \vdash (\text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner) \rightarrow \text{Pr}(\ulcorner \text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner) \urcorner)).$$

Ale dla zupełnie dowolnego zdania ψ

$$T \vdash (\text{Pr}(\ulcorner \psi \urcorner) \& \text{Pr}(\ulcorner \neg \psi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner))$$

(co wynika z (D3) oraz faktu, że T dowodzi wszystkich podstawień tautologii rachunku zdań). Ostatecznie zatem dostajemy $T \vdash (\text{Pr}(\ulcorner \gamma \urcorner) \rightarrow \text{Pr}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner))$, czyli $T \vdash (\text{Con}_T \rightarrow \gamma)$. Szkic dowodu twierdzeń o niezupełności został więc zakończony.

Jak już wspominaliśmy, wyniki Gödla obaliły nadzieje (oddaliły obawy?), że całą matematykę da się sprowadzić do rozumowania wewnątrz jednego ustalonego systemu aksjomatycznego. Zrodziły także dalsze pytania. Przykładowo: czy dałoby się może zaksjomatyzować całą „spotykaną w praktyce” matematykę bądź „matematykę stosowaną w naukach przyrodniczych”? Albo: jak dalece trzeba wykroczyć poza daną teorię aksjomatyczną, aby móc udowodnić jej niesprzeczność? Te i inne pytania inspirowały następnie bujny rozwój nowych gałęzi logiki matematycznej. To już jednak tematy na inne pogadanki.



z sześcianu i dwunastościanu wycinamy, choć w bardziej skomplikowany sposób (4, 6, 8) i (4, 6, 10)

Grypa jest chorobą wirusową. Jednak dowiedzieliśmy się o tym stosunkowo niedawno. Kiedy w 1898 roku panowała pandemia nazywana „rosyjskim katarem”, uważano, że chorobę tę powoduje bakteria – *Haemophilus influenzae* i temu przekonaniu grypa zawdzięcza swoją nazwę w niektórych językach, np. w angielskim „influenza”. Okazało się jednak, że to nie bakteria *Haemophilus influenzae* jest przyczyną grypy, choć często jej obecność towarzyszy chorobie. W latach 30. ubiegłego wieku zidentyfikowano prawdziwego sprawcę choroby – wirusa grypy.

Wirusy to bardzo specyficzne twory chemiczne. W zasadzie trudno nawet nazwać je żywymi, bowiem samodzielnie nie mogą się rozmnażać. Do wytworzenia organizmów potomnych potrzebują komórek gospodarza – zwierzęcia, rośliny czy bakterii. Wirusy są skrajnymi pasożytami: podrzucają swoje geny komórce i zmuszają jej molekularną maszynę do wytworzenia, w oparciu o zapasy komórki, potomnych wirusów. Cykl życiowy wirusa jest bardzo prosty: wtargnięcie do komórki gospodarza, podrzucenie komórce nielicznych własnych genów – te geny to przepisy na produkcję kilku białek wirusowych, namnożenie genów i białek wirusa, połączenie ich w wirusy potomne, uwolnienie nowych wirusów z komórki gospodarza. Celem wirusa nie jest zabicie komórki, a „tylko” zmuszenie jej do produkcji nowych wirusów.

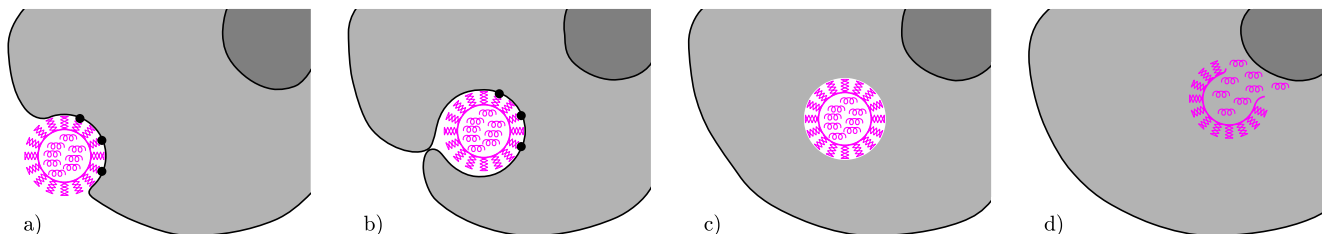
Wirus grypy ma kształt zbliżony do kuli, a wielkość – około 100 nm (rys. 1). Składa się z genów w postaci kwasu RNA, otoczonych nielicznymi białkami oraz błoną lipidową (czyli tłuszczową), z powierzchni której sterczą jak kolce dwa białka – hemaglutynina i neuramidaza. Są one odpowiedzialne, odpowiednio, za wniknięcie wirusa do komórki i uwolnienie z niej wirusów potomnych. Symbol szczepu wirusa, np. H5N1 w przypadku grypy ptasiej oznacza, że na powierzchni znajduje się hemaglutynina typu 5 i neuramidaza typu 1.



Rys. 1. Wirus grypy widziany w mikroskopie elektronowym (źródło: Ross Hamilton, <http://www.influenzacentre.org/images.htm>). Widoczne na powierzchni pałeczki to wspomniane w tekście białka: hemaglutynina i neuramidaza.

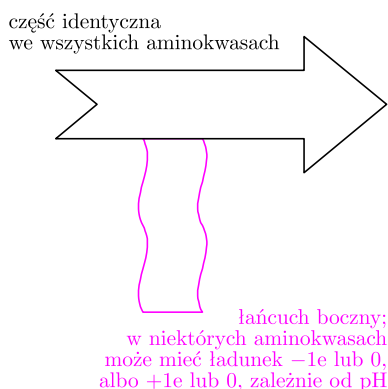
Przyjrzyjmy się teraz, jak wirus grypy sprytnie oszukuje komórkę w celu wtargnięcia do jej wnętrza i podrzucenia jej swoich genów. W procesie infekcji hemaglutynina wiąże się z cząsteczką cukru – tzw. kwasem sjałowym – będącą receptorem na powierzchni błony komórek gospodarza. Komórka broni się przed niepożądanym „gościem” metodą tzw. endocytozy, tj. wpuklenia błony i odcięcia z niej pęcherzyka, tzw. endosomu.

*Zakład Biofizyki, Instytut Fizyki Doświadczalnej, Uniwersytet Warszawski



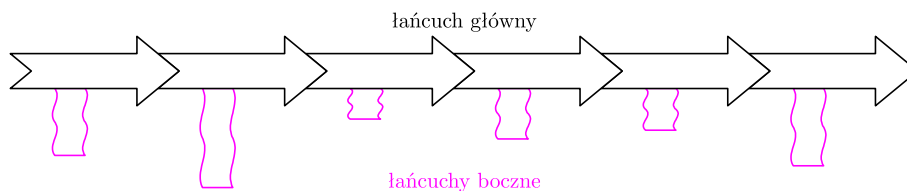
Rys. 2. Pierwsze etapy cyklu życiowego wirusa grypy: a) połączenie hemaglutyniny (pałeczki na powierzchni wirusa) z receptorem – kwasem sjałowym (czarne kropki), b) wniknięcie do komórki drogą endocytozy, c) ucieczka z endosomu i d) podrzucenie komórce genów wirusowych (kolorowe spiralki).

Kolejnym krokiem jest przygotowanie intruza do strawienia przez obniżenie pH wewnątrz endosomu z pH 7 do pH 5 (czyli zwiększenie stężenia protonów z 10^{-7} do 10^{-5} [mol/dm³]; dokonuje tego specjalny enzym), a następnie przyłączenie do endosomu lizosomu dostarczającego enzymy trawienne (tego nie pokazano na rysunku) i wreszcie strawienie wirusa. I właśnie ten pierwszy etap – zwiększenie zakwaszenia – „sprytny” wirus grypy wykorzystuje, aby wymknąć się z pułapki zastawionej na niego przez komórkę. Powstaje wyścig – kto będzie pierwszy: komórka w trawieniu wirusa czy wirus w dokonaniu fuzji i podrzuceniu genów.



Rys. 3. Pojedynczy aminokwas.

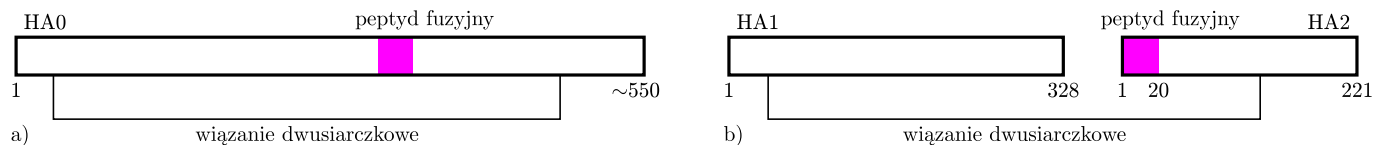
Zanim jednak pokażemy, jak wirus może zwyciężyć w tym wyścigu, przypomnijmy, że białka to długie polimery zbudowane z 20 rodzajów klocków – aminokwasów. Każdy z klocków ma część identyczną jak inne klocki oraz część dla siebie charakterystyczną – tzw. łańcuch boczny (rys. 3). Klocki pasują do siebie, tzn. mogą łączyć się w długie łańcuchy dzięki połączeniu między częściami identycznymi we wszystkich klockach (rys. 4) – powstaje wówczas tzw. wiązanie peptydowe.



Rys. 4. Łańcuch aminokwasów.

Ponieważ każdy z klocków ma dwa stopnie swobody w łańcuchu głównym, powstający polimer nie jest sztywny i teoretycznie może niemal dowolnie związać się w przestrzeni. Okazuje się jednak, że aktywne biologicznie łańcuchy (czyli białka) przyjmują w danych warunkach tylko jedno konkretnie ułożenie, zwane przez biologów konformacją natywną. Pod wpływem zmiany pewnego parametru, np. zmiany zakwaszenia środowiska, w pewnych fragmentach łańcucha może dojść do zmiany tego ułożenia na inne. Mówimy wtedy o dużej zmianie konformacyjnej w strukturze białka.

Wiele białek w formie aktywnej składa się z kilku łańcuchów połączonych słabymi wiązaniami (tzw. niekowalencyjnymi). Hemaglutynina (od tej chwili będziemy ją w skrócie nazywać HA) składa się z trzech identycznych łańcuchów, a każdy z tych łańcuchów zawiera około 550 klocków (rys. 5a).



Rys. 5. Schemat budowy hemaglutyniny: a) w formie nieaktywnej tzw. HA0, b) w formie nieaktywnej po przecięciu na dwa fragmenty HA1 i HA2 przez proteazę gospodarza.

W formie, w której znajduje się na powierzchni wirusa, tzw. HA0, hemaglutynina jest nieaktywna – nieszkodliwa dla komórki. Możemy ją porównać do noża ze złożonym ostrzem, zamkniętego w futerał. Aby wirus mógł uciec z endosomu, HA0 musi zostać aktywowana, i to dwukrotnie, tj. w dwóch etapach („wyjęcie z futerału”, „otwarcie ostrza”). Po aktywacji, HA umożliwia połączenie otoczki wirusa z błoną endosomu i wydostanie się materiału genetycznego wirusa z endosomu do wnętrza komórki.

Dzięki czemu dokonuje się owa fuzja, zanim dojdzie do strawienia wirusa? Zrozumienie tego procesu zawdzięczamy połączeniu wielu eksperymentalnych i teoretycznych badań biofizycznych białka HA, a konkretnie rozszyfrowaniu jego atomowej struktury przy zastosowaniu rozpraszania promieniowania rentgenowskiego na kryształach białka oraz zastosowaniu technik molekularnego modelowania do określenia zmian tej struktury pod wpływem zwiększenia zakwaszenia z pH 7 do pH 5.

Rentgenografia i towarzyszące jej badania biochemiczne wykazały, że każdy z trzech łańcuchów białka HA0 jest przecinany na dwa kawałki przez proteazy – enzymy, których rolą jest właśnie rozcinanie łańcuchów białkowych. „Spryt” wirusa polega na tym, że do przecięcia wykorzystuje on proteazę organizmu, który infekuje. Po takim przecięciu powstają dwa fragmenty białkowe – HA1 i HA2 – połączone jednym wiązaniem chemicznym, tzw. mostkiem dwusiarczkowym (rys. 5b). Jeden z końców fragmentu HA2 (ten uwolniony dzięki cięciu – „wyjęcie noża z futerału”) nazwano peptydem fuzyjnym, bowiem badania biochemiczne i biologiczne jego właściwości udowodniły, że skutecznie może łączyć się z błoną endosomu. Jednak w hemaglutyninie, po przecięciu jej na dwa fragmenty, peptyd fuzyjny ukryty jest nadal głęboko w strukturze przestrzennej białka – ostrze noża jest złożone, co ilustruje rysunek 6 na okładce.

Do tej pory nie udało się uzyskać kryształów całej hemaglutyniny w pH 5, które mogłyby posłużyć do wyznaczenia atomowej struktury HA w pH panującym w endosomie po zakwaszeniu. Co więcej, atomy wodoru są za lekkie, aby można je było zobaczyć w klasycznej rentgenografii. W tym miejscu należy przypomnieć, że klocki tworzące białka różnią się łańcuchami bocznymi.

Niektóre z tych łańcuchów mają łatwo odłączające się od cząsteczki protony lub miejsca łatwo przyłączające protony. Dlatego też niektóre z łańcuchów bocznych mogą być w określonych warunkach pH obdarzone ładunkiem $+1e$ lub 0 , a inne $-1e$ lub 0 . Właściwości elektrostatyczne białka zależą więc silnie od tego, ile ruchliwych protonów jest przyłączonych do białka.

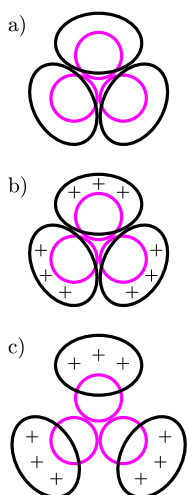
Na podstawie znanej struktury atomowej HA w pH 7 obliczono (dla temperatury 25°C , tj. 300 K) ilość przyłączonych protonów ruchliwych, miejsca ich przyłączenia oraz potencjał elektrostatyczny białka (okładka, rys. 7).

Okazało się, że HA1 ma potencjał dodatni w zasadzie na całej powierzchni cząsteczki, podczas gdy HA2 przeciwnie – potencjał ujemny. Cząsteczki HA1 mają w pH 7 w 25°C około 120 ruchliwych protonów, które dają im wypadkowy ładunek $+12e$. Natomiast wypadkowy ładunek HA2 to $-16e$. Trzy łańcuchy HA1 i trzy łańcuchy HA2 odpychają się, ale trzymają się razem – odpowiada za to silne elektrostatyczne przyciąganie HA1 z HA2 (rys. 8a). Jest to jednak stan słabo stabilny (tzw. metastabilny).

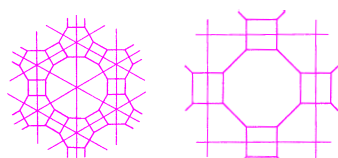
Co zdarzy się, gdy zakwaszenie wzrośnie o dwie jednostki do pH 5, czyli stężenie protonów w otoczeniu białka wzrośnie z 10^{-7} do 10^{-5} [mol/dm^3]? Otóż modelowanie pokazuje, że z ładunkiem białka HA2 nie zdarzy się nic szczególnego, ponieważ ukryte jest we wnętrzu HA1 i nie może wymienić protonów z otaczającym roztworem. Ale HA1 ma kontakt z roztworem i kiedy pojawi się w nim więcej protonów, HA1 przyjmie dodatkowo 7 z nich – wypadkowy ładunek wzrośnie do $+19e$ (rys. 8b).

Ta zmiana narusza równowagę między HA1 i HA2. Trzy łańcuchy HA1 będą się teraz odpychały na tyle mocno, że nie zrównoważy tego ujemny ładunek HA2. W rezultacie trzy łańcuchy HA1 będą się oddalały od siebie (jak płatki rozwijającego się kwiatu), aż ustali się nowa równowaga między HA2 a HA1 (rys. 8c). W wyniku tego w środku białka tworzy się kanał (co potwierdzają zdjęcia z mikroskopu elektronowego), a ukryty do tej pory we wnętrzu cząsteczki peptyd fuzyjny uzyskuje możliwość wydostania się na zewnątrz. Obliczenia pokazują (a potwierdza je struktura przestrzenna fragmentu białka HA2 wyznaczona metodą dyfrakcyjną), że przemieszcza się on o około 10 nm w kierunku błony endosomu, z którą może dokonać fuzji (okładka, rys. 9). Zatem fuzja umożliwiająca wirusowi wydostanie się z pułapki następuje jako nieuchronny skutek walki komórki z wirusem – zakwaszenia wnętrza endosomu. Ale na tym nie kończy się spryt i przebiegłość wirusa.

Obliczenia, które opisano powyżej, wykonane zostały dla 25°C . Temperatura ciała zdrowego człowieka to $36,6^{\circ}\text{C}$, natomiast organizmu walczącego z infekcją wirusem – zwykle kilka stopni więcej. Obliczono (rys. 10), ile ruchliwych protonów przyłączy HA1 w temperaturach wyższych od 25°C przy różnych wartościach pH roztworu. I jaki jest wynik? Im wyższa temperatura, tym

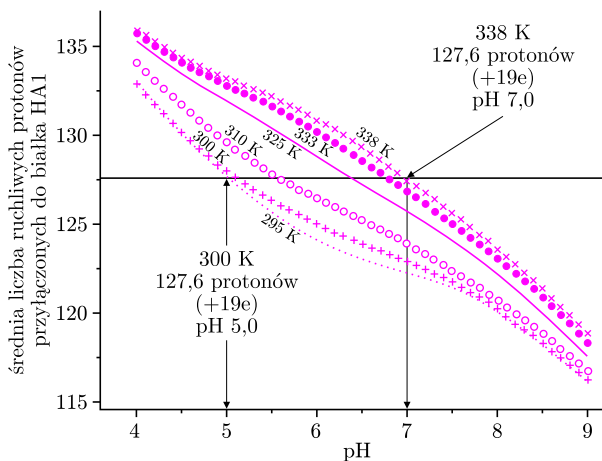


Rys. 8. a) równowaga między HA1 i HA2 w pH 7, b) zakłócenie równowagi po zakwaszeniu do pH 5 (odpychanie większe od przyciągania), c) nowa równowaga ustalająca się w pH 5.



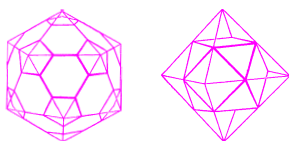
z parkietu trójkątnego powstaje parkiet (4, 6, 12), a z kwadratowego (4, 8, 8)

niższe zakwaszenie wystarczy do przyłączenia owych 120 ruchliwych protonów, które umożliwiają otwarcie noża. A więc podniesienie temperatury ciała pozwala skalpelowi otwierać się łatwiej.



Rys. 10. Zależność średniej liczby protonów przyłączonych do białka HA1 od pH i temperatury (z pracy Huang et al., *Biophys. J.* 82, 2002, str.1050).

Wdzieranie się wirusa grypy do komórki można więc podsumować następująco: wirus używa otwieranego elektrostatycznie molekularnego noża – hemaglutyniny. Otwarcia ostrza noża, czyli peptydu fuzyjnego, dokonuje nie wirus, lecz sama zainfekowana komórka, próbując unieszkodliwić wirusa poprzez strawienie go w endosomie. Co więcej, nóż otwiera się łatwiej w wyższej temperaturze, a więc typowa walka organizmu z grypą poprzez podniesienie temperatury ciała pomaga wirusowi uciec z pułapki. Tak więc wirus oszukuje komórkę trzy razy: zaprzęgając ją do wyjęcia noża, otwarcia go i wykorzystując element jej obrony, czyli podniesienie temperatury, do ułatwienia tegoż otwarcia.



z dwudziestościanu wycinamy (5, 6, 6), czyli dawną piłkę nożną, a z ośmiościanu (3, 4, 3, 4)



Zadania

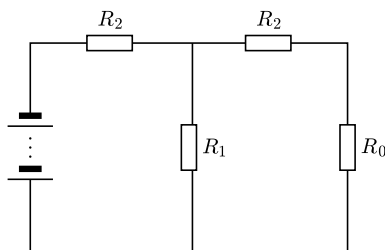
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 681. Jedna płytki kondensatora płaskiego jest umocowana na stałe, a druga jest zawieszona na sprężynie o współczynniku sprężystości k . Powierzchnia każdej płytki jest równa S . O ile wydłuży się sprężyna, jeśli na płytki wprowadzi się równe co do wartości, lecz o przeciwnych znakach ładunki?

Rozwiązanie na str. 16

F 682. Jakie opory R_1 i R_2 należy zastosować w schemacie (rys. 1), aby napięcie na oporze R_0 było α razy mniejsze od napięcia na tym samym oporze podczas bezpośredniego podłączenia go do zacisków baterii i aby moc tracona przez baterię była w obu przypadkach jednakowa?

Rozwiązanie na str. 15



Rys. 1

Redaguje Waldemar POMPE

M 1153. Na okręgu napisano, w dowolnej kolejności, liczby $1, 2, \dots, 100$. Dla każdej trójki sąsiednich liczb obliczono sumę tych liczb. Wykazać, że różnica pewnych dwóch uzyskanych sum nie przekracza 2.

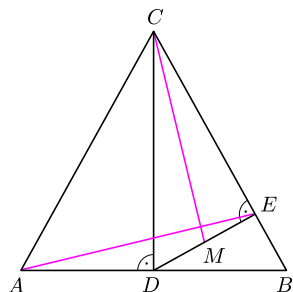
Rozwiązanie na str. 12

M 1154. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt D jest środkiem boku AB , a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Punkt M jest środkiem odcinka DE (rys. 2). Dowieść, że proste AE i CM są prostopadłe.

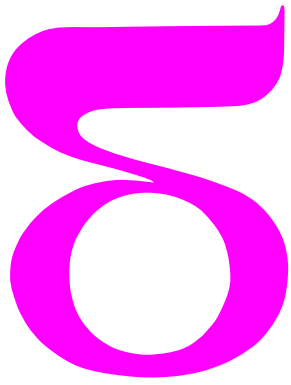
Rozwiązanie na str. 12

M 1155. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ istnieją takie różne liczby naturalne a, b, c należące do przedziału $(n^2, (n+1)^2)$, że liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez c .

Rozwiązanie na str. 16



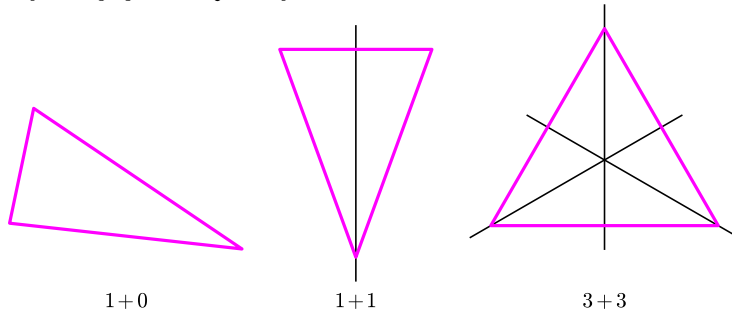
Rys. 2



mała delta

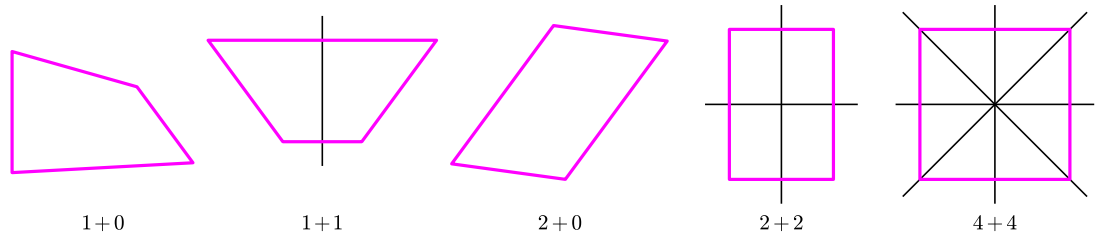
Na ile sposobów można leżeć na swoim obrysie?

Obrysujmy położony na kartce trójkąt wycięty z tekturki. Na ile sposobów można ten trójkąt położyć na jego obrysie? Oczywiście, zależy to od trójkąta. Trójkąt „byle jaki” można położyć na obrysie tylko na jeden sposób, równoramienny na dwa sposoby: tak jak leżał, albo też obracając go na drugą stronę względem jego osi symetrii. Trójkąt równoboczny da się położyć na swoim obrysie na sześć sposobów. Różnych sytuacji jest więc trzy.

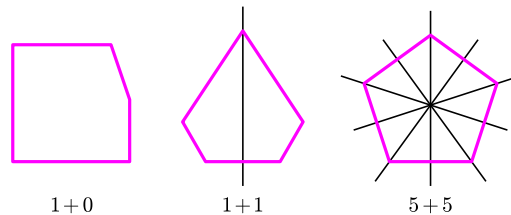


Symbole napisane pod rysunkami wskazują, ile jest położeń bez odwracania na drugą stronę i ile z odwracaniem.

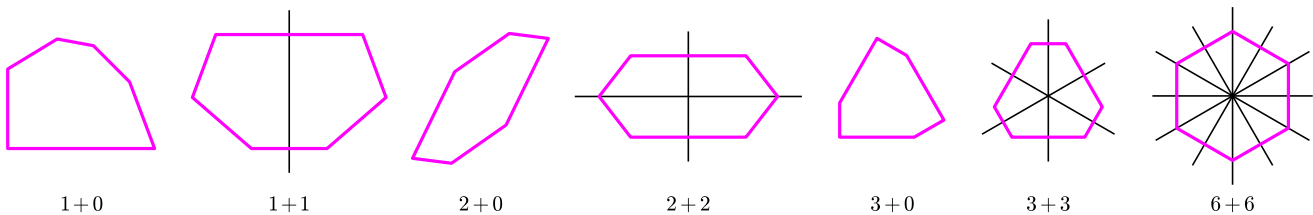
Dla czworokąta różnych sytuacji będzie pięć



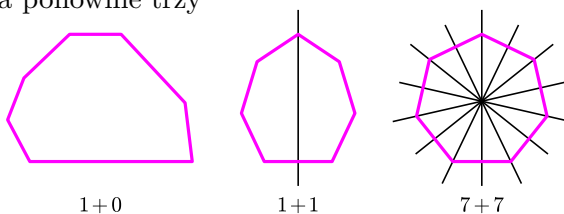
dla pięciokąta znów trzy



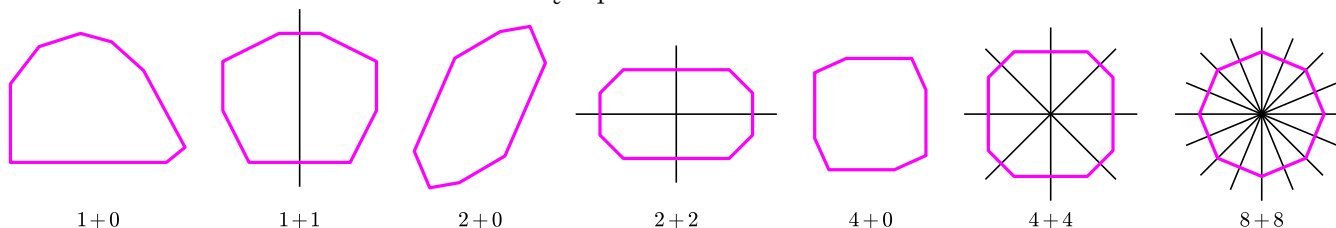
dla sześciokąta siedem



dla siedmiokąta ponownie trzy



dla ośmiokąta ponownie siedem



Zastanówmy się, jaka funkcja opisuje liczbę różnych sytuacji:

$$3 \rightarrow 3, \quad 4 \rightarrow 5, \quad 5 \rightarrow 3, \quad 6 \rightarrow 7, \quad 7 \rightarrow 3, \quad 8 \rightarrow 7, \dots?$$

Jak zgadnąć, co jest dalej?

Aby odpowiedzieć na te pytania, trzeba poczynić kilka obserwacji. Np.

- położenia bez odwracania to obroty (razem z tym o 0°), ile ich jest, opisuje pierwsza liczba;
- położenia z odwróceniem na lewą stronę to symetrie osiowe, ile ich jest, opisuje druga liczba;
- jeśli są osie symetrii, to jest ich tyle, ile obrotów;
- jeśli obrotów jest tyle, ile boków ma wielokąt, to wtedy muszą być osie symetrii;
- wszystkie niezerowe wypisane liczby to dzielniki liczby boków wielokąta.

Pozostawiając Czytelnikom przyjemność uzasadnienia pierwszych czterech spostrzeżeń, spróbujmy uzasadnić piątą.

Przyjrzyjmy się n -kąтови, który można nałożyć na jego obrys przez k obrotów (z zerowym włącznie). Weźmy A , jeden z jego wierzchołków – obroty przeprowadzają go na k różnych wierzchołków obrys (z nim włącznie). Jeśli zostały jeszcze jakieś wolne wierzchołki, to weźmy B , jeden z nich. On także jest przeprowadzany na k różnych wierzchołków, co więcej – różnych od wszystkich miejsc, w jakie mógł trafić wierzchołek A . Jeśli jeszcze pozostały jakieś wolne wierzchołki, to... i tak powtarzamy opisaną operację, angażując coraz więcej wierzchołków – za każdym razem dołączamy nowe k z nich. Ale n jest liczbą skończoną, więc po m krokach zasób wolnych wierzchołków się wyczerpie. Oznaczać to będzie, że $n = k \cdot m$, czego mieliśmy dowieść.

Gdy wszystkie wyliczone spostrzeżenia uzasadnimy, natychmiast odgadniemy, co to za funkcja pojawiła się w naszym doświadczeniu:

jeśli k jest liczbą dodatnich dzielników liczby n , to liczba różnych sytuacji, jakie można napotkać, kładąc n -kąt na jego obrysie, jest równa $2k - 1$.

Istotnie, różnych liczebności obrotów jest k i każdej z nich – oprócz n – odpowiada sytuacja, w której są same obroty oraz gdy są obroty i symetrie.

Teraz bez trudu możemy obliczyć, że dla 12-kątów różnych sytuacji jest możliwych 11 (jako że 12 dzieli się przez 1, 2, 3, 4, 6 i 12) – proszę zaprojektować i narysować dwunastokąty odpowiadające każdej z tych sytuacji.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Dowodzone spostrzeżenie w istocie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a o rzędzie podgrupy, ale to już inna historia.

Ambitnym Czytelnikom polecam zbadanie sytuacji dla wielościanów. Upprzedzam jednak, że tam obok obrotów i symetrii pojawiają się jeszcze inne przekształcenia, co można zobaczyć, np. obserwując wszystkie z 24 sposobów, na jakie czworościan foremny (również „obracany na nice”) można umieścić w zajmowanym przez niego miejscu.

Drgająca Ziemia

Powszechnie wiadomo, że nasza planeta obraca się, nie każdy jednak wie, jak skomplikowany jest ten ruch. Ziemia zwalnia lub przyspiesza obrót wokół swojej osi, co powoduje zmiany długości doby. Kierunek osi ziemskiej względem gwiazd ulega zmianie, chwilowa oś obrotu zmienia położenie względem osi średniej, a Ziemia, chwiejąc się i kołysząc, wykonuje ruch podobny do ruchu wirującego bączka–zabawki. Zmiany ruchu obrotowego Ziemi odbywają się z okresami od godzin, tygodni, miesięcy itd., a sięgają tysięcy lat. Następstwo dnia i nocy oraz precesja osi obrotu znane były od Starożytności, ale wykrycie większości subtelnych zjawisk nastąpiło w ostatnim stuleciu i wymagało wykorzystania nowoczesnych technik obserwacyjnych. Ruch obrotowy Ziemi jest monitorowany w sposób ciągły od końca XIX w. przez liczne organizacje międzynarodowe. Pozwoliło to na zwiększenie dokładności wyznaczeń długości doby do poziomu ułamka milisekundy, oraz współrzędnych bieguna do 0,1 milisekundy łuku, czemu odpowiadają 3 mm na powierzchni Ziemi.

Precesja – nutacja

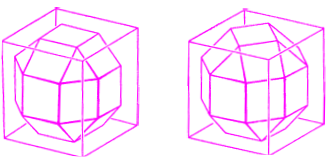
W czasach, gdy Babilończycy nadawali nazwy gwiazdozbiorom, punkt równonocy wiosennej, czyli punkt Barana, znajdował się rzeczywiście w Baranie. Obecnie punkt ten leży w Rybach i przesuwa się w stronę Wodnika. Zmiana ta jest wynikiem tzw. precesji astronomicznej, czyli jednostajnego ruchu osi obrotu Ziemi po powierzchni stożka o kącie rozwarcia $2 \times 23,5$ w okresie 25 400 lat. Na skutek precesji punkty przecięcia się równika niebieskiego z ekliptyką (czyli punkty równonocy) przesuwały się wzdłuż ekliptyki o około $50''/291$ na rok, czyli o 30° w ciągu 2150 lat. Precesję opisał żyjący w II w. p.n.e. grecki astronom Hipparch.

Na powolny ruch precesyjny osi obrotu Ziemi nakładają się ruchy „eliptyczne” zwane nutacjami o podstawowym okresie 18,6 roku (jest to okres precesji orbity Księżyca) i amplitudzie $9''/2$. Precesję i nutację wywołuje oddziaływanie grawitacyjne Księżyca, Słońca i planet na glob ziemski, którego kształt odbiega nieco od kuli. Swój wkład mają tu też pływy oceaniczne oraz zaburzenia w cyrkulacji atmosferycznej i oceanicznej.

Ruch biegunów

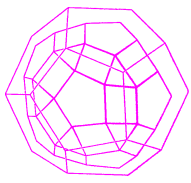
Bieguny geograficzne również poruszają się względem powierzchni Ziemi, co pociąga za sobą zmiany współrzędnych geograficznych każdego jej punktu. Biegun chwilowy zakreśla wokół bieguna średniego krzywą przypominającą skręcającą się i rozkręcającą spiralę. Ruch ten charakteryzują głównie dwie składowe: swobodna i wymuszona.

Składowa swobodna nazywana jest od nazwiska odkrywcy chandlerowską. Przesuwanie się bieguna po powierzchni Ziemi przewidział już Euler w końcu XVIII w. dla Ziemi jako elipsoidalnej bryły sztywnej. Okres tego ruchu według Eulera powinien wynosić 305 dni. Jego teoria znalazła obserwacyjne potwierdzenie dopiero, gdy w latach 1891–1892 amerykański astronom-amator Seth Carlo Chandler, analizując obserwacje zmian szerokości geograficznej w Harvardzie, wykrył zmiany szerokości o okresach 14- i 12-miesięcznych. Z czasem ustalono, że za okres 14-miesięczny, niezgadający się z przewidywaniami Eulera, odpowiedzialna jest skomplikowana budowa naszej planety, w szczególności brak sztywności. Obecnie oscylacje Chandlera opisuje się jako ruch bieguna po owalu o średnicy zmieniającej się od 3 do 10 m i okresie 435 dni. W roku 1891 zorganizowano specjalną kampanię obserwacyjną, podczas której przeprowadzono pomiary szerokości geograficznej jednocześnie w Berlinie, Pradze, Strasburgu i Honolulu. Jednoczesne obserwacje na południkach różniących się w długości geograficznej o około 180°

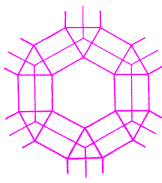


(3, 4, 4, 4) to jedyny napis, któremu odpowiadają dwie nieprzystające powierzchnie; warto się zastanowić nad tym, czym różni się sposób ich wycięcia z sześcianu

* Centrum Badań Kosmicznych PAN, Warszawa



z dwunastościanu otrzymujemy (3, 4, 5, 4), a z parkietażu sześciokątnego (3, 4, 6, 4)



rzeczywiście wykazały, że zmiany szerokości w Honolulu mają znaki przeciwne do zmian w Europie.

Ruch bieguna geograficznego po powierzchni Ziemi tłumaczy się przede wszystkim niepokrywaniem się chwilowej osi obrotu z jej osią głównego momentu bezwładności. Gdyby nawet w pewnym momencie osie te były zgodne, to przemieszczenia mas w ziemskim globie doprowadziłyby do ich rozsunienia. A są nimi przepływy w oceanach, hydrosferze lądowej i w atmosferze, dające w przybliżeniu okresowe wymuszone oscylacje bieguna o amplitudzie rzędu 3 m. Wykryto również oscylacje o amplitudach nawet milimetrycznych o okresach od godzin do miesięcy, spowodowane zmianami ciśnienia atmosferycznego i prądami oceanicznymi. Biegun ziemski wykonuje również powolny ruch systematyczny rzędu $0''0003/\text{rok}$ w kierunku długości geograficznej zachodniej około 70° , czego przyczyną jest najprawdopodobniej ustąpienie zlodowacenia. Chwianiu (nutacjom) podlegają również osie zewnętrznego i wewnętrznego jądra naszej planety.

Zmiany długości doby

Ruch obrotowy Ziemi był od wieków podstawą pomiarów czasu i definicji jednostki czasu. Do połowy ostatniego stulecia obrót Ziemi uważano za zjawisko przebiegające jednostajnie i związany z nim czas za upływający też jednostajnie. Wprawdzie już w drugiej połowie XX wieku zauważono systematyczne przesunięcie położenia Księżyca względem położen przewidzianych rachunkiem, lecz początkowo nie wiązano tego z zaburzeniami ruchu obrotowego Ziemi. Analiza obserwacji Księżyca, Słońca, Merkurego, Wenus (dostępnych po roku 1968) oraz informacji o zaćmieniach Słońca (od 1000 r. p.n.e.) potwierdziła, że Ziemia zwalnia swój obrót. Zjawisko to potwierdzają również badania ilości i grubości dziennego przyrostu osadów kopalnych i muszli zwierząt bezkręgowych. Stało się jasne, że czas wskazywany przez obracającą się Ziemię biegnie coraz wolniej, a doba wydłuża się średnio o $0,0016 \text{ s}/\text{wiek}$. Przyczyną tego jest przede wszystkim utrata energii w wyniku pływów oceanicznych wywołanych oddziaływaniem Księżyca i Słońca.

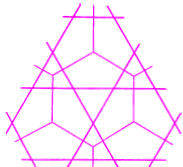
W latach 30. XX wieku dzięki analizie wskazań zegarów (jeszcze) wahadłowych wykryto zmiany sezonowe prędkości obrotowej Ziemi. Potwierdziło się to po wprowadzeniu zegarów kwarcowych. Stało się więc konieczne zrezygnowanie z obracającej się Ziemi jako wzorcowego zegara. W 1969 r. za podstawową skalę czasu przyjęto Międzynarodowy Czas Atomowy. Obecnie w zaburzeniach prędkości obrotowej Ziemi wyróżniamy kilka podstawowych składowych, od wiekowego wydłużania się doby, przez zaburzenia pływowe o okresach od kilku godzin do 18,6 lat, nieregularne zmiany trwające od 5 do 300 lat, kończąc na zmianach krótkookresowych. Te ostatnie, o amplitudzie poniżej $0,6 \text{ ms}$, są wywoływane przez zmiany cyrkulacji wiatrów strefowych.

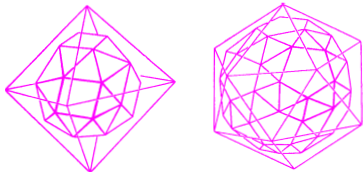
Ruch mas

Dlaczego ruch obrotowy naszej planety jest tak skomplikowany? Otóż Ziemia nie jest jednorodnym ciałem sztywnym, lecz ma złożoną budowę wewnętrzną (skorupa, płaszcz, ciekłe i stałe jądro). Jaki to ma wpływ na ruch obrotowy, wie każdy, kto porównywał wirowanie jajka na twardo i jajka surowego. Ponadto na powierzchni Ziemi znajdują się morza i oceany, nad nimi atmosfera, sam kształt Ziemi nie jest dokładnie kulisty, a planeta podlega grawitacyjnym oddziaływaniom ze strony Słońca, Księżyca i pozostałych planet. Okazuje się wreszcie, że wiatry, pływy i prądy oceaniczne oraz przemieszczenia mas we wnętrzu globu wpływają na ruch naszej planety. Żeby to zrozumieć, wystarczy uciec się do znanej analogii z łyżwiarką wykonującą piruet. Dlatego do zrozumienia i przewidywania tych zaburzeń potrzebne są informacje o cyrkulacji wiatrów, prądów morskich, o masach lodu, a nawet o wodach gruntowych i śródlądowych. Za miarę przemieszczenia mas można uznać stosunek przesuwanej masy do masy Ziemi lub stosunek przesunięcia



z dwudziestościanu powstaje (3, 5, 3, 5), a z parkietażu sześciokątnego (3, 6, 3, 6)





zdecydowanie najbardziej skomplikowane cięcia prowadzą z ośmiościanu do (3, 3, 3, 3, 4), a z dwudziestociąnu do (3, 3, 3, 3, 5)

do ziemskiego promienia. Wiele procesów geofizycznych wywołuje przemieszczenie masy nie większe niż 10^{-10} . Do najbardziej znaczących należą efekty pogodowe zależne od promieniowania słonecznego.

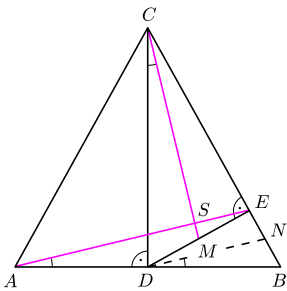
Zauważono, że fenomen klimatyczny El Niño również zakłóca ruch obrotowy Ziemi. Podczas pojawienia się „diabelskiego prądu” nasza planeta zwalnia obroty, co powoduje wydłużenie się doby o 0,0004 do 0,0008 s. Naukowcy mają nadzieję, że badania ruchu obrotowego Ziemi dostarczą informacji, dzięki którym będzie można przewidzieć wystąpienie i skalę zjawiska El Niño. W ostatnim dziesięcioleciu opracowano po raz pierwszy modele określające wkład oceanów do ziemskiego momentu pędu.

Przemieszczenie mas wody zachodzi również na obszarach lądowych w bardzo różnych skalach czasowych. Zmiany sezonowe i krótsze wywoływane są przez parowanie, skraplanie, zmiany ilości wody w jeziorach, zmiany wilgotności gleby i zmiany biomasy. W dłuższych skalach czasowych dominują zmiany pokrywy lodowej i poziomu wód gruntowych.

Przemieszczenia mas zachodzą również w ciekłym jądrze Ziemi (ich skutkiem jest m.in. ziemskie pole magnetyczne). Ciekłe jądro jest niewątpliwie źródłem fluktuacji długości doby o okresach od kilku do kilkudziesięciu lat, a jego spłaszczenie wpływa na ruch biegunów i nutację osi ziemskiej. Dlatego na podstawie modelu obserwowanej precesji i nutacji można uzyskać informacje o geofizycznych parametrach wnętrza Ziemi. W szczególności dokładność tak wyznaczonego spłaszczenia jądra jest znacznie wyższa niż ta, jaką można osiągnąć na podstawie obserwacji sejsmologicznych. Ruchy mas w płaszczu otaczającym jądro zewnętrzne Ziemi mogą być wywoływane oddziaływaniem pływowym, naciskiem ze strony atmosfery i oceanu, konwekcją (której towarzyszą ruchy płyt tektonicznych), czy też reakcją na ustąpienie zlodowacenia. I tak wiele procesów geofizycznych znajduje się poniżej progu wykrywalności wskutek małej masy biorącej w nich udział lub małych przesunięć masy. Należą do nich erupcje wulkaniczne, osuwiska ziemi, powodzie, wydobywanie ropy, zmiany biomasy.



Rozwiązanie zadania M 1154.
Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych AE i CM oraz niech N będzie środkiem odcinka BE .



Skoro punkt D jest środkiem odcinka AB , to proste AE i DN są równoległe. A zatem $\sphericalangle BDN = \sphericalangle DAE$.

Trójkąty prostokątne BDE i DCE są podobne. Ponieważ punkty N i M są odpowiednio środkami odcinków BE i DE , to trójkąty BDN i DCM są podobne. Stąd $\sphericalangle BDN = \sphericalangle DCM$.

Łącząc uzyskane równości, otrzymujemy $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DCM$, czyli $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCS$, skąd wynika, że punkty A, D, S, C leżą na jednym okręgu. Stąd $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$.

Komu to potrzebne?

Prowadzenie ciągłych, możliwie najdokładniejszych obserwacji ruchu obrotowego Ziemi jest niezbędne na potrzeby nawigacji kosmicznej i geodezji satelitarnej. Przykładowo, w latach 60. w trakcie przygotowań misji Apollo okazało się, że uwzględnienie ruchu biegunów Ziemi i zakłóceń czasu uniwersalnego jest niezbędne dla nawigacji pojazdu okołoksiężycowego. Badania tych zjawisk dostarczają informacji dotyczących globalnego rozkładu i transportu mas w Ziemi oraz jej budowy i własności dynamicznych. W badaniach tych biorą udział uczeni z Polski, w szczególności z Centrum Badań Kosmicznych PAN. Jednym z ciekawszych ich wyników naukowych jest wyjaśnienie źródeł pochodzenia słynnej oscylacji chandlerowskiej za pomocą modelu cyrkulacji oceanicznej. Polscy badacze, jako jedni z pierwszych, wyznaczyli krótkookresowe (centymetrowe) oscylacje położenia bieguna. Wśród twórców modelu tego zjawiska znalazł się prof. Aleksander Brzeziński z Centrum Badań Kosmicznych PAN, który w roku 2003 został pierwszym polskim laureatem Nagrody Kartezjusza, przyznawanej przez Unię Europejską.

Można więc powiedzieć: Tak, nasza Ziemia kręci się, ale to skomplikowane zjawisko.



Rozwiązanie zadania M 1153.

Niech $s_1 < s_2 < \dots < s_{100}$ będą rozpatrywanymi sumami i przypuśćmy, że $s_{i+1} - s_i \geq 3$ dla $i = 1, 2, \dots, 99$. Wówczas

$$s_{100} - s_1 = (s_{100} - s_{99}) + (s_{99} - s_{98}) + \dots + (s_2 - s_1) \geq 3 \cdot 99 = 297.$$

Ponieważ $s_1 \geq 1 + 2 + 3 = 6$, więc $s_{100} \geq 297 + 6 = 303$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż $s_{100} \leq 98 + 99 + 100 = 297$. A zatem różnica pewnych dwóch sum s_i nie przekracza 2.

Jak pokazać, że istnieje obiekt o pewnych własnościach? Najprościej jest podać bezpośrednią konstrukcję, jednak często jest to bardzo trudne (a czasem w ogóle niewykonalne). Jednym ze sposobów ominięcia tego problemu jest tak zwana metoda probabilistyczna. Polega ona na tym, że w celu wykazania, iż zbiór poszukiwanych obiektów jest niepusty, dowodzimy, że ma dodatnie prawdopodobieństwo. W praktyce często się wykazuje, że to prawdopodobieństwo jest bliskie 1, czyli „typowy” obiekt ma poszukiwaną własność.

Spróbujmy na początek dowieść istnienia funkcji ciągłej na pewnym przedziale i nieróżniczkowalnej w żadnym punkcie dziedziny. W tym przypadku można podać wzór, jednak nie będzie on ani łatwy do zweryfikowania, ani specjalnie przyjemny. Prościej jest zauważyć, że takie funkcje są znane każdemu probabiliscie – to trajektorie procesu Wienera. Okazuje się, że wszystkie są ciągłe, a z prawdopodobieństwem 1 nigdzie nieróżniczkowalne.

Rozważmy następujący problem: dla jakich N i $k \geq 2$ zbiór $I = \{1, \dots, N\}$ da się podzielić na dwa podzbiory A i B , z których żaden nie zawiera k -elementowego podciągu arytmetycznego? Dokładna odpowiedź na to pytanie nie jest znana, wykażemy tutaj, że dla $N \leq 2^{k/2}$ taki podział istnieje. Rozważmy losowy podział – wyobraźmy sobie, że rzucamy N symetrycznymi monetami i jeśli na i -tej monecie wypadł orzeł, to liczbę i przydzielamy do zbioru A , a jeśli reszka, to do zbioru B . Prawdopodobieństwo tego, że ustalony ciąg arytmetyczny n_1, \dots, n_k jest zawarty w zbiorze A , wynosi 2^{-k} . Wszystkich k elementowych ciągów arytmetycznych o wartościach w I jest mniej niż $N^2/2$, stąd prawdopodobieństwo tego, że A zawiera *pewien* ciąg arytmetyczny długości k , jest mniejsze niż $2^{-k} N^2/2 \leq 1/2$. Podobnie możemy rozumować dla zbioru B . Czyli z dodatnim prawdopodobieństwem oba zbiory A i B nie zawierają ciągu arytmetycznego! Ambitny Czytelnik może spróbować skonstruować deterministyczny podział, np. dla $k = 100$.

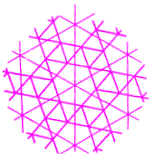
W podanym wyżej przykładzie moglibyśmy jeszcze obejść się bez rachunku prawdopodobieństwa, wykorzystując tylko zliczanie elementów. Jednak w bardziej zaawansowanych problemach jest to niemożliwe. Obszerny i burzliwie rozwijający się dział kombinatoryki poświęcony jest badaniu grafów losowych. Tutaj konstrukcje probabilistyczne prowadzą do budowania grafów o rozmaitych ciekawych własnościach. Grafów o podobnych własnościach w wielu przypadkach nie można opisać w bezpośredni sposób. Najciekawsze konstrukcje bazują na podejściu łączącym elementy losowe i deterministyczne.

Metoda losowa znajduje zastosowanie nie tylko w kombinatoryce. Za jej pomocą Dvoretzky wykazał zaskakujące twierdzenie dotyczące wysokowymiarowych ciał wypukłych. Mianowicie, każdy n -wymiarowy, środkowosymetryczny wielościan ma co najmniej $\lceil \log n \rceil$ -wymiarowy centralny przekrój bliski kuli (tzn. stosunek promieni kuli wpisanej i opisanej na tym przekroju jest nieduży). Podobnie każdy n -wymiarowy wielościan ma prawie kulisty k -wymiarowy rzut. Co więcej, dla wielu brył można znacząco zwiększyć wymiar takiego przekroju czy rzutu. Kashin wykazał, że losowy $\lceil n/2 \rceil$ -wymiarowy rzut n -wymiarowej kostki jest z ogromnym prawdopodobieństwem bliski kuli. Jednak, mimo że wiadomo, iż rzuty kostki na „typową” $\lceil n/2 \rceil$ wymiarową przestrzeń są kuliste, nie jest do dzisiaj znana żadna deterministyczna konstrukcja takich rzutów.

Argumenty losowe są obecne również w dowodzie niedawno wykazanego przez Greena i Tao twierdzenia, mówiącego, że istnieją dowolnie długie ciągi arytmetyczne złożone z liczb pierwszych.

Powyższa lista, mimo iż bardzo wybiórcza, powinna zasygnalizować Czytelnikowi, że losowe konstrukcje coraz częściej występują w dowodach rezultatów z kombinatoryki, analizy, geometrii czy teorii liczb. Są także inne ważne, niekonstruktywne sposoby dowodzenia, że zbiory są duże, np. z użyciem aparatu topologicznego zamiast probabilistycznego. Ale to temat na inną opowieść.

Twierdzenie van der Waerdena mówi, że dla $N \geq N(k)$ taki podział nie istnieje. Optymalne wartości $N(k)$, znane tylko dla małych k , to $N(2) = 3$, $N(3) = 9$, $N(4) = 35$ i $N(5) = 178$. Rozumowanie obok pokazuje, że $N(k) > 2^{k/2}$.



z parkietażu trójkątnego można też uzyskać (3, 3, 3, 3, 6)

Pisał o tym Paweł Strzelecki w *Delcie* 4/2005.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

COBE – Nobel 2006

W marcu bieżącego roku zespół eksperymentu WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) opublikował wyniki trzech lat zbierania danych [1] (o rezultatach po pierwszym roku pisaliśmy w Aktualnościach w *Delcie* 6/2003). Tegoroczne publikacje nie tylko potwierdzają poprawność modelu ewolucji Wszechświata z ciemną energią i ciemną materią (model Λ CDM) z mogącą wzbudzać podziw precyzją, ale zaczynają rozróżniać między różnymi scenariuszami inflacji dzięki wrażliwości (na razie nie do końca wystarczającej) na formę fal grawitacyjnych pozostałych po epoce inflacji.

Dlatego dla nikogo nie powinno być zaskoczeniem, że John C. Mather i George F. Smoot, promotorzy sukcesu eksperymentu... COBE (Cosmic Background Explorer), otrzymali tegoroczną Nagrodę Nobla z Fizyki za „odkrycie, że mikrofalowe promieniowanie tła ma formę promieniowania ciała doskonale czarnego i jest anizotropowe”.

Brak zaskoczenia nie zmienia faktu, że lista pominiętych jest jak zwykle długa. Oprócz WMAPa należy przynajmniej wspomnieć zespoły eksperymentów balonowych BOOMERANG i MAXIMA, które jako pierwsze pokazały, że promieniowanie mikrofalowe wskazuje na euklidesowość Wszechświata (*Delta* 11/2000).

Wróćmy jednak do osiągnięć nagrodzonych. Niewątpliwie to ich zasługą było ostateczne przeniesienie kosmologii ze sfery spekulacji na grunt precyzyjnej nauki. Możliwość ta pojawiła się wraz z ogłoszeniem przez NASA w 1974 roku zaproszenia do przygotowania eksperymentu w przestrzeni kosmicznej. Wśród zgłoszonych projektów trzy dotyczyły badania mikrofalowego tła. Tak duża liczba chętnych wiązała się z faktem, że promieniowanie reliktove jest pochłaniane przez atmosferę w trudny do dokładnego przewidzenia sposób. Żeby je zobaczyć w pełnej krasie, trzeba było wyjść poza atmosferę. Dwa lata później NASA nakłoniła proponentów do połączenia i ostatecznie w 1977 roku pojawiła się propozycja eksperymentu COBE.

Rok później Nagrodę Nobla z Fizyki, za odkrycie promieniowania reliktove (w 1964 roku), otrzymali Arno Penzias i Robert Wilson. Lista pominiętych była wtedy jeszcze bardziej imponująca niż w tym roku, ale zostawmy to historykom nauki. Może tylko wspomnimy, że nagrody nie dostali ani ci, którzy wymyślili, że takie promieniowanie powinno istnieć, ani ci, którzy go specjalnie szukali (i nieopatrznie poinformowali nagrodzonych, co znaleźli), ani ci, którzy to promieniowanie znaleźli jako pierwsi.

Sonda COBE została ostatecznie wyniesiona na geocentryczną polarną orbitę heliosynchroniczną w listopadzie 1989 roku. Trzy lata później opublikowano wyniki, za które przyznano tegoroczną Nagrodę.

COBE była wyposażona w trzy instrumenty. Pierwszy, Diffuse Infrared Background Experiment (DIRBE), rejestrował kosmiczne podczerwone promieniowanie tła. Drugi, Far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS) służył do sprawdzenia, czy kosmiczne mikrofalowe promieniowanie tła (CMB) ma rozkład zgodny

z promieniowaniem ciała doskonale czarnego. Okazało się, że zgodność jest doskonała – jest to najlepszy znany przykład promieniowania termicznego, a wyznaczona temperatura wyniosła $2,725 \pm 0,002$ K w idealnej zgodzie z hipotezą gorącego Wielkiego Wybuchu. Odpowiedzialnym za FIRAS i za całość eksperymentu COBE, w którym ostatecznie zostało zaangażowanych ponad 1000 naukowców i inżynierów, był John Mather.

I wreszcie trzeci instrument, Differential Microwave Radiometer (DMR), posłużył do znalezienia oczekiwanej anizotropii CMB, która (według naszego obecnego stanu wiedzy) zapoczątkowała grawitacyjne różnicowanie się Wszechświata. Odpowiedzialnym za ten instrument był George Smoot.

Pomiar anizotropii okazał się najtrudniejszy. Początkowo oczekiwano, że jej względna amplituda powinna wynosić 10^{-3} , ale w trakcie przygotowań przewidywania te stawały się coraz mniej pomyślne. Związane to było przede wszystkim z poprawnym uwzględnieniem ciemnej materii. Im więcej ciemnej, oddziałującej tylko grawitacyjnie materii, tym mniejsze początkowe fluktuacje są potrzebne do wyjaśnienia obecnego rozkładu materii we Wszechświecie. Ostatecznie znaleziono anizotropię na poziomie 10^{-5} . Jej wiarygodność wzmocniono, dostrzegając korelację z wynikami eksperymentów balonowych.

Potwierdzonym przewidywaniem była niezależność anizotropii od skali dla rozmiarów kątowych mierzonych przez COBE (maksymalna rozdzielczość kątowa DMR wynosiła 7°).

Wyniki ogłoszone 15 lat temu zostały przyjęte entuzjastycznie przez specjalistów oraz rozpropagowane wśród szerokiej publiczności. Praca nad uzyskaniem jak najlepszej rozdzielczości najstarszego zdjęcia Wszechświata stała się ulubionym zajęciem kosmologów.

Za dwa lata Europa ma się włączyć na serio do gry, wysyłając satelitę Planck. W tej chwili chodzi przede wszystkim o wykrycie odcisków fal grawitacyjnych w mikrofalowym zdjęciu.

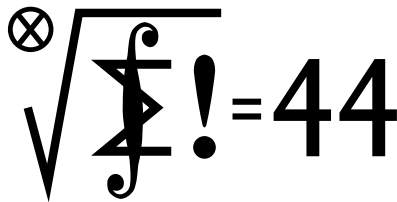
Na koniec spróbujmy zastanowić się, czy to rzeczywiście jest najstarsze możliwe zdjęcie. Zostało ono „zrobione” prawie 400 tysięcy lat po Wielkim Wybuchu i choć uważamy, że zapisane jest w nim to, co działo się dużo wcześniej, nie jest to obserwacja bezpośrednia.

A wcześniejszy obraz Wszechświata jest na wyciągnięcie ręki. Przenika nas w każdej chwili naszego życia, a atmosfera nie stanowi dla niego żadnej przeszkody. Ten wcześniejszy obraz zachowany jest w kosmicznym neutrinowym promieniowaniu tła. Jego wykrycie wydaje się jednak dzisiaj kompletną utopią. Podobnie myślano o sporej części zjawisk, za zbadanie których później przyznano Nagrodę Nobla.

Piotr ZALEWSKI

[1] Najnowsze wyniki WMAP najwygodniej jest oglądać poprzez stronę archiwum LAMBDA (Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis) <http://lambda.gsfc.nasa.gov/>, zawierającego praktycznie całą spuściznę pomiarów mikrofalowego promieniowania tła.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

28 II 2007

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

519 ($WT = 1,18$) i **520** ($WT = 3,49$)

z numeru 4/2006

Marian Łupieżowicz	– Zebrzydowice	43,55
Michał Kieza	– Warszawa	40,08
Michał Jastrzębski	– Warszawa	36,28
Jerzy Cisło	– Wrocław	35,81
Łukasz Garncarek	– Opole	33,28
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	32,84
Dariusz Kurpiel	– Posada	
Zarszyn		32,27

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 531, 532

Redaguje Marcin E. KUCZMA

531. Rozważamy graf mający n wierzchołków oraz q krawędzi (każda krawędź łączy dwa różne wierzchołki; każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź). Zakładamy, że istnieje co najmniej jeden zamknięty cykl krawędzi długości nieparzystej, ale nie istnieje cykl długości 3. Dowiść, że $4q \leq n^2 - 2n + 5$.

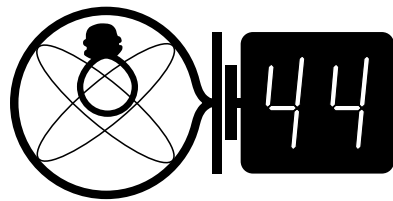
532. Ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Wyprowadzić wzór jawny, wyrażający liczby a_n jako funkcję zmiennej n .

Zadanie 532 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Klub 44



Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

416 ($WT = 2,80$), **417** ($WT = 1,30$),

418 ($WT = 1,47$) i **419** ($WT = 2,80$)

z numerów 4/2006 i 5/2006

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	48,78
Tomasz Tkocz	– Rybnik	32,58
Konrad Kapcia	– Częstochowa	32,13
Marian Łupieżowicz	– Zebrzydowice	31,21
Jerzy Witkowski	– Radlin	22,65
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,24
Krzysztof Magiera	– Łosiów	16,03
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	13,70

Pan Idzik zakończył właśnie siódme okrążenie! Teraz może się ścigać już tylko z uczestnikami ligi matematycznej, wśród których jest czterech, którzy mogą się poszczycić podobnym (lub nieco lepszym) osiągnięciem. A gdyby dodać punktację fizyczną do matematycznej, to wszystkich wyprzedza Tomasz Wietecha, łącznie 11 razy po 44 punkty!

Zadania z fizyki nr 428, 429

Redaguje Jerzy B. BROJAN

428. Zegar-klepsydry stoi na precyzyjnej wadze, działającej bez żadnej zwłoki. Naszkicować wykres wskazań wagi w zależności od czasu, po obróceniu klepsydry.

429. Cylinder o wysokości $h = 0,5$ m i objętości $V = 200$ cm³ jest całkowicie wypełniony wodą, z wyjątkiem przyczepionego do dna pęcherzyka powietrza o objętości $V_0 = 0,02$ cm³. Początkowo ciśnienie w górnym końcu cylindra wynosiło $p = 10^5$ Pa. Jeśli cylinder jest sztywny (o niezmienniej objętości), a współczynnik ściśliwości wody (zdefiniowany wzorem $\beta = -\frac{\Delta V}{V \Delta p}$) wynosi $\beta = 5 \cdot 10^{-10}$ Pa⁻¹, to jak zmieni się ciśnienie w cylindrze, gdy pęcherzyk wypłynie na wierzch?



Rozwiązanie zadania F 682.

Zgodnie z warunkami zadania moc wytworzona przez baterię w obu przypadkach jest jednakowa, zatem opory obwodów zewnętrznych muszą być takie same:

$$R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0 + R_2}} = R_0, \quad \text{stąd} \quad R_2^2 + 2R_1 R_2 = R_0^2.$$

Zgodnie z drugim warunkiem spadku napięcia U_1 na oporze R_0 w pierwszym przypadku jest α razy mniejszy od spadku napięcia U_2 na oporze R_0 podczas bezpośredniego włączenia, tj. $U_1 = \frac{U_2}{\alpha}$, inaczej:

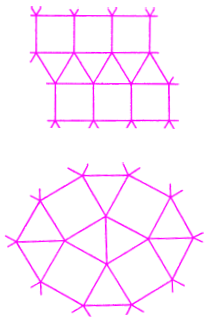
$$IR_0 = \alpha R_0 \frac{R_1(R_0 + R_2)I}{(R_0 + R_1 + R_2)(R_0 + R_2)},$$

stąd

$$R_0 + R_1 + R_2 = \alpha R_1.$$

Z powyższych dwóch równań otrzymujemy

$$R_1 = \frac{2R_0}{\alpha^2 - 1}, \quad R_2 = R_0 \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}.$$



parkietaże (3, 3, 3, 4, 4) i (3, 3, 4, 3, 4) nie mają swoich platońskich odpowiedników

Patrz w niebo

Jedną z najbardziej frapujących zagadek astronomicznych i generalnie poznawczych jest, czy stałe fizyczne są rzeczywiście stałe. Tymi najważniejszymi stałymi są prędkość światła c , stała Plancka h , stała Boltzmanna k , stała grawitacji G , ładunek e i masa elektronu m , oraz szereg innych i mnóstwo ich kombinacji. Jak dotąd, w teoriach fizycznych postuluje się, że są one takie same zawsze i wszędzie, co nie przeszkadza, że badacze szukają sposobów sprawdzenia słuszności tych postulatów.

Obserwując odległe obiekty Wszechświata, widzimy je takimi, jakimi były przed miliardami lat. Jak sprawdzić, czy stałe przyrody były wtedy takie jak dziś? Jeden z testów zaproponowany i przeprowadzony kilka lat temu przez astronomów australijskich dotyczył tzw. stałej struktury subtelnej $\alpha = 2\pi e^2 / (hc)$. Występuje ona we wszelkich formułach na energię elektronów w atomach. Na przykład, poziomy energii E_n jedynego elektronu w atomie wodoru podaje wzór

$$E_n = -\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 / n^2,$$

gdzie $n = 1, 2, 3 \dots$. Przejściu elektronu z jakiegoś poziomu na inny towarzyszy emisja lub absorpcja kwantów światła należących do określonych linii widmowych. Różnice zaś między długościami fal różnych linii, tj. odstępów linii w widmie, są już łatwo mierzalne, a zależą od α jak w powyższym wzorze.

W widmach odległych kwazarów często obserwuje się absorpcyjne linie pochodzące od obłoków częściowo neutralnego wodoru, przypadkowo znajdujących się na linii widzenia. Im odleglejszy jest obłok (odległość ocenia się na podstawie prawa Hubble'a), tym młodszym go widzimy, a z pomiarów odstępów produkowanych przezeń linii widmowych (nie tylko wodoru, bo zasada obserwacji jest taka sama dla innych pierwiastków, znajdujących się w tych obłokach w śladowych ilościach) dało się ocenić, jaką wtedy wartość miała stała struktury subtelnej α . Według australijskich astronomów, gdy Wszechświat miał 5 mld lat, stała α była o 1/100 000 mniejsza niż obecnie z dokładnością do 25%! Na razie jest to wynik, w który można jedynie wierzyć lub nie, natomiast nie wiadomo, jak go wykorzystać we współczesnej nauce (o ile, oczywiście, jest prawdziwy).

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania F 681.

Natężenie pola elektrycznego między płytkami kondensatora płaskiego, na których znajduje się ładunek Q , wynosi

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},$$

gdzie S to powierzchnia płytki. Pole to powstaje w wyniku nałożenia się dwóch pól wytworzonych przez każdą z płytek kondensatora. Jeżeli płytki są jednakowe, to natężenie pola od jednej płytki jest dwukrotnie mniejsze: $E_1 = E/2$. Zatem siła, z jaką jedna płytka przyciąga drugą, jest równa

$$F = E_1 Q = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Siła ta jest równa sile sprężystości $F = kx$, stąd

$$x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 k S}.$$



Rozwiązanie zadania M 1155.

Niech $c = n^2 + 1$, $a = n^2 + 2$ oraz $b = n^2 + n + 1$. Wówczas każda z tych liczb należy do przedziału $(n^2, (n+1)^2)$ i są one różne. Ponadto liczby a i b dają odpowiednio reszty 1 i n z dzielenia przez c , a zatem $a^2 + b^2 \equiv 1 + n^2 \equiv 0 \pmod{c}$.

Grudzień

W grudniowe wieczory Droga Mleczna przecina niebo ze wschodu na zachód. W pobliżu zenitu, w Andromedzie i w Trójkacie, czyli bardzo blisko Drogi Mlecznej, znajdują się dwie galaktyki, sąsiadki naszej Galaktyki: M31 i M33. Pierwszą widać bez trudu gołym okiem, drugiej praktycznie nie widać. Chyba jednak mało kto zdaje sobie sprawę z tego, że właściwie dziwne jest, iż widać którąkolwiek z nich. W płaszczyźnie Drogi Mlecznej skupia się bowiem materia międzygwiazdowa, skutecznie przesłaniająca odleglejsze gwiazdy, a tym bardziej galaktyki. Nic dziwnego, że ten pas nieba był kiedyś zwany strefą unikania. Niemniej w samej Drodze Mlecznej dało się stwierdzić obecność kilku galaktyk, co prawda dopiero dość wymyślnymi metodami.

Wenus jest w Strzelcu i nie widać jej z powodu bliskości Słońca. W Wadze, a więc też blisko Słońca, znajdują się Mars i Jowisz. Można próbować szukać ich przed wschodem Słońca. Jedynie Saturn, który jest we Lwie, wschodzi przed północą i widać go do rana. Pełnia Księżycy wypada 5 XII, now 20 XII. Księżyc zakryje Saturna 10 XII (co będzie widać w północnej Norwegii, północnej Anglii, Islandii i Grenlandii), Spikę 15 XII (widać będzie w południowej części Ameryki Południowej) i Antaresa 19 XII (a to zobaczą mieszkańcy wschodniej Afryki, Australii i Nowej Zelandii). Około 12 XII można spodziewać się dość obfitego roju Geminidów, a 22 XII słabego roju Ursydów. O północy 21/22 XII nastąpi przesilenie zimowe, czyli formalnie zacznie się zima, ale dni zaczną się już pomału wydłużać.

T. K.

Entropia: nieporządek czy fantazja?

Rafał SZTENCEL*

Termin „entropia” występuje w tak wielu dziedzinach nauki, że nie mogło zabraknąć go i w rachunku prawdopodobieństwa. Na ogół dużą entropię kojarzymy słusznie z nieporządkiem, wręcz bałaganem (który ma jedną miłą cechę – jest stanem stabilnym, co nie powinno dziwić, bo w pobliżu maksimum entropii żadne wysiłki już jej znacząco nie zwiększą).

W teorii prawdopodobieństwa może lepiej mówić o niepewności lub różnorodności, związanej z rozkładem. Dla prostoty zajmijmy się rozkładami dyskretnymi: niech liczby p_1, p_2, \dots, p_n wyznaczają rozkład prawdopodobieństwa (zatem $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, $p_i > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$). Wartości liczbowe skojarzone z prawdopodobieństwami p_i są zupełnie nieistotne; zresztą nie muszą to być liczby, a mogą to być, na przykład, imiona pań, które pojawiły się na pewnym protokole egzaminacyjnym. Imion tych było $n = 45$.

Gdybyśmy chcieli odgadnąć, jak ma na imię losowo wybrana dziewczyna, znając możliwe imiona i zadając pytania, na które można odpowiedzieć tak/nie, to 5 pytań mogłoby nie wystarczyć ($2^5 = 32$), ale 6 pytań wystarczy na pewno, bo wszystkich możliwych ciągów odpowiedzi jest $2^6 = 64$. Czytelnik na pewno wie, jak rozsądnie zadawać pytania, żeby ich średnia liczba mieściła się pomiędzy 5 i 6.

Kluczową rolę w tym rozumowaniu odgrywała nierówność

$$32 < 45 < 64,$$

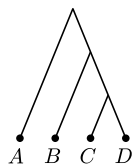
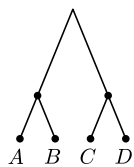
równoważna z

$$\log_2 32 < \log_2 45 < \log_2 64,$$

czyli

$$5 < \log_2 45 = 5,49 < 6.$$

Można zatem podejrzewać, że logarytm dwójkowy z liczby możliwości n faktycznie jakoś mierzy różnorodność. Ale przecież nie wzięliśmy pod uwagę tego, że imiona występują z różnymi częstościami. W naszym protokole cztery najczęstsze imiona to Anna – 14%, Joanna, Katarzyna i Magdalena – po 8%. Jak można z tego skorzystać przy zadawaniu pytań?



Rozważmy prostszą sytuację. Jeśli są tylko cztery imiona: Agnieszka, Barbara, Celina i Dorota, pojawiające się jednakowo często, to średnio (i zawsze) potrzebne są 2 pytania. Niech teraz A. ma częstość 50%, B. – 25%, C. i D. – po 12,5%. Każdy widzi, że z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ wystarczy jedno pytanie, $\frac{1}{4}$ – dwa, $\frac{1}{4}$ – trzy. Średnio jest $1\frac{3}{4}$ pytania.

Zapiszmy tę średnią tak:

$$q = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 3 =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \log_2 \frac{1}{8} = 1\frac{3}{4}.$$

Średnia liczba pytań okazała się równa

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i,$$

i to jest właśnie entropia rozkładu prawdopodobieństwa. Można udowodnić, że

$$(*) \quad H \leq q < H + 1,$$

zatem entropia H jest dolnym ograniczeniem średniej liczby pytań q .

Entropia jest największa, gdy wszystkie p_i są równe. Wynika to z wklęsłości funkcji $f(x) = -x \log_2 x$ i nierówności Jensena:

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n) \leq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n),$$

gdzie liczby t_i są dodatnie i dają w sumie 1.

W takim razie

$$\begin{aligned} H &= f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n) = \\ &= n \left(\frac{1}{n} f(p_1) + \frac{1}{n} f(p_2) + \dots + \frac{1}{n} f(p_n) \right) \leq \\ &\leq n f \left(\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \right) = n f \left(\frac{1}{n} \right) = \log_2 n. \end{aligned}$$

Jasne jest, że $H = \log_2 n$, gdy $p_i = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

W przypadku 45. imion z protokołu faktyczna entropia jest równa 4,76, podczas gdy maksymalna możliwa to $\log_2 45 = 5,49$; niewielka różnica obu liczb świadczy o dużej fantazji rodziców przy nadawaniu imion dziewczynkom.

Pozostaje pytanie, czy jest prosty sposób na zadawanie pytań tak, by spełniona była nierówność (*). O tym za miesiąc – doprowadzi nas to do tak zwanego kodu Huffmana (dajemy słowo honoru, że Leonardo da Vinci nie mógł go znać).

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski