



SPIS TREŚCI NUMERU 11 (390)

O dwóch takich, co chcieli
zarobić na fluktuacjach

Jacek Miękiś

Supernowa Keplera

Irena Semeniuk

∫ O pożytkach
z trójkąta Pascala

Witold Sadowski

Lewitron

– prosta zabawka fizyczna
o nie tak prostej teorii
działania

Krzysztof Byczuk

Zadania

Aktualności

Symbole Newtona jako funkcje
wielomianowe

Włodzimierz Holsztyński

Klub 44

Patrz w niebo

Listopad

Ω Ogólna teoria
miary i całki w skrócie

Rafał Sztencel

Kropki, z których niektóre połączone są kreskami, to **graf**. Gdy z dowolnej kropki (nazywanej zazwyczaj wierzchołkiem) można do dowolnej innej przejść po tych kreskach oraz gdy powrócić można tylko dokładnie tą samą drogą, mówimy, że taki graf to **drzewko**. Dwa drzewka uważamy za takie same, gdy mają ten sam system połączeń, a różnią się tylko położeniem. Ile jest różnych drzewek o danej liczbie wierzchołków? Ogólny wzór nie jest znany, ale np. w swoim doktoracie G. Prins (w 1955 roku), między innymi, nie tylko obliczył tę liczbę dla $n \leq 12$ (okazało się, że jest ich 987), lecz także wszystkie je narysował. Oczywiście można je narysować na płaszczyźnie tak, aby ich kreski nie przecinały się (czym nie każdy graf może się pochwalić).

W numerze prezentujemy te rysunki dla $n \leq 10$, ale i tak jest ich aż 201.

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichocki, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitariski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2007 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2007 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

Cena prenumeraty w 2007 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faxem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Twierdzenie Gödla

O dwóch takich, co chcieli zarobić na fluktuacjach

Szanowna Redakcjo,

piszę ten list, aby ostrzec Czytelników *Delty* przed dwoma oszustami kręcącymi się po okolicy. Osoby te przedstawiają się jako Matematyk i Fizyk i proponują udział w przedsięwzięciach, które wyglądają niezwykle obiecująco. Tego pamiętnego dnia spotkałem najpierw Matematyka. Słuchaj – powiedział – rzucę monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, to płacisz mi złotówkę, a jeżeli reszka, to ja Tobie dam złotówkę. Jest to oczywiście gra sprawiedliwa – prawdopodobieństwo wygranej dla każdego z nas wynosi $1/2$. Ta gra szybko nas jednak znudziła. Ciekaw jestem, co sądzisz o mojej drugiej grze? – zapytał Matematyk. Oprócz uczciwej monety mam jeszcze dwie odpowiednio obciążone monety; prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dla monety drugiej wynosi $3/4$, a dla trzeciej $1/10$. Wybór rzucanej monety zależy od wysokości mojego kapitału (może to być liczba ujemna). Jeżeli jest on podzielny przez 3, to rzucam trzecią monetą, a w przeciwnym przypadku monetą drugą. Tak jak poprzednio, orzeł oznacza złotówkę dla mnie, a reszka złotówkę dla Ciebie – zakończył Matematyk i popatrzył na mnie wyczekująco. Na pierwszy rzut oka nie wyglądało to dla mnie dobrze. Pomyślałem, że średnio raz na trzy rzuty kapitał mojego przeciwnika będzie podzielny przez 3 i będziemy rzucać korzystną dla mnie monetą trzecią, w $2/3$ rzutów używana będzie moneta sprzyjająca Matematykowi. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wygranej w jednym rzucie wynosiłoby dla mnie:

$$1/3 \times 9/10 + 2/3 \times 1/4 = 7/15,$$

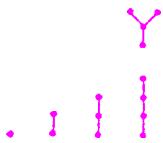
czyli mniej niż $1/2$. Matematyk upierał się, że jest to gra sprawiedliwa. Przeprosiłem go na chwilę i na boku dokonałem pewnych obliczeń. Niech reszty z dzielenia kapitału Matematyka przez 3, czyli 0, 1 lub 2, reprezentują stan naszego układu. Prawdopodobieństwo znalezienia się w danym stanie zależy tylko od stanu układu w chwili poprzedniej, a nie od całej historii naszej rozgrywki. Ewolucja naszego układu jest przykładem łańcucha Markowa. Można wykazać, że w miarę upływu czasu częstotliwości odwiedzania poszczególnych stanów układu dążą do pewnych wartości granicznych. Moje obliczenia wykazały, że graniczna częstotliwość rzucania monetą trzecią jest jednak większa od $1/3$ i wynosi $5/13$ (patrz kurs łańcuchów Markowa w Post Scriptum 1). Prawdopodobieństwo wygranej w jednym rzucie wynosi więc:

$$5/13 \times 9/10 + 8/13 \times 1/4 = 1/2.$$

Jak już się przekonałeś – kontynuował Matematyk – że ta druga gra też jest sprawiedliwa, to z pewnością zagrałbyś w obie gry, gdyby wszystkie trzy monety były obciążone tak, aby prawdopodobieństwa wyrzucenia orła $p_i, i = 1, 2, 3$, były mniejsze niż poprzednio, powiedzmy

$$p_1 = 1/2 - \varepsilon, \quad p_2 = 3/4 - \varepsilon \quad \text{i} \quad p_3 = 1/10 - \varepsilon,$$

gdzie ε jest małą ustaloną liczbą dodatnią. Wtedy przecież, jak łatwo sprawdzić (sprawdź to, proszę, Czytelniku), prawdopodobieństwa Twojej wygranej w obu grach są większe od $1/2$. Powiedziałem, że, oczywiście, bardzo chętnie zagram. I wtedy padła propozycja, którą będę długo pamiętał. Matematyk zaproponował, żeby dla urozmaicenia zmieniać gry w sposób losowy. Aby nam się nie nudziło – powiedział – z prawdopodobieństwem $1/2$ będziemy grać w pierwszą grę i z takim samym prawdopodobieństwem w drugą grę. Zaczęliśmy rozgrywkę. Po kilkuset grach stwierdziłem z przerażeniem, że mój kapitał jest mocno ujemny. Matematyk jakoś szybko się ze mną pożegnał, a ja zacząłem się zastanawiać, co jest (czy raczej było) grane. Druga gra (tak jak i pierwsza) jest dla mnie korzystna. Kiedy jednak kapitał Matematyka był podzielny przez 3, w mniej więcej połowie przypadków, zamiast rzucać bardzo korzystną dla mnie monetą trzecią, rzucał on monetą pierwszą i wtedy prawie z jednakowym prawdopodobieństwem mogłem stracić lub zyskać złotówkę. To mogło być źródłem mego problemu. Rzuciłem się do obliczeń. Przeanalizowałem łańcuch Markowa odpowiadający losowej kombinacji obu gier dla przypadku $\varepsilon = 0$. Stwierdziłem, że granicznymi częstotliwościami przebywania w stanach 0, 1 i 2



drzewka mające co najwyżej 4 wierzchołki
– nic ciekawego

są odpowiednio $245/709$, $180/709$ i $284/709$. Ostatecznie prawdopodobieństwo wygrania przeze mnie w jednym ruchu jest równe

$$\frac{245}{709} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{180}{709} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) + \frac{284}{709} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{691}{1418},$$

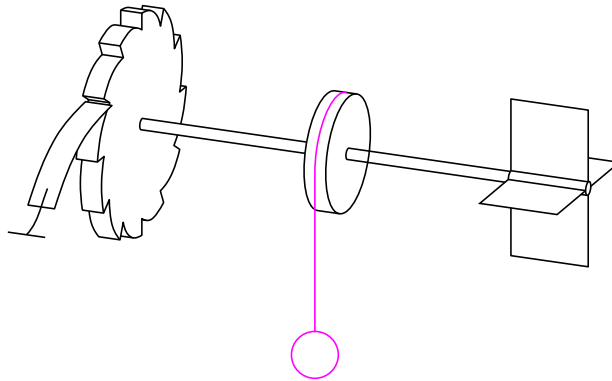
zatem jest mniejsze od $1/2$. Wartość oczekiwana mojej wygranej wynosi wtedy

$$691/1418 - 727/1418 = -36/709.$$

Oznacza to, że jeżeli będziemy grać odpowiednio długo, to mój kapitał będzie malał proporcjonalnie do upływu czasu ze współczynnikiem proporcjonalności $-36/709$. Ponieważ częstotliwości odwiedzin stanów naszego łańcucha Markowa zależą w sposób ciągły od ε , to dla odpowiednio małego ε , kiedy obie gry stają się dla mnie korzystne, ich losowa kombinacja nadal jest dla mnie zgubna. Mamy więc tutaj do czynienia z przykładem dwóch losowych dynamik, dla których wartość oczekiwana pewnej zmiennej losowej rośnie, natomiast dla losowej kombinacji tych dynamik wartość oczekiwana tej zmiennej losowej maleje z czasem.

Zachęcam do sprawdzenia powyższych rezultatów (analitycznie na kartce papieru lub symulując rzuty monetami na komputerze). Może to uodpornić na inne sztuczki probabilistycznych oszustów.

Ledwo zdążyłem ochłonąć, kiedy do moich drzwi zapukał Fizyk. Od razu przeszedł do rzeczy i pokazał mi szkic swojego nowego urządzenia (patrz rysunek). Była to oś z wiatraczkiem po jednej stronie, zębatką i zapadką po drugiej stronie i ze szpulką z nitką pośrodku.



Cząsteczki powietrza uderzają bez przerwy w łopatki wiatraczka. Wiatraczek, jak i pozostała część urządzenia, ma bardzo małe rozmiary. Losowe fluktuacje powodują, że czasem więcej cząsteczek uderzy w łopatki z jednej strony niż z drugiej. Jest to sytuacja analogiczna do ruchów Browna cząsteczki zawieszony uderzanej przypadkowo przez cząsteczki otaczającej ją cieczy. Bez zapadki, w różnych chwilach czasu wiatraczek obracałby się w różne strony. Zapadka umożliwia ruch tylko w jedną stronę. W wyniku tej asymetrii szpulka z nitką będzie w stanie podnosić mikroskopijne ciężary. Urządzenie moje – podsumował Fizyk – przekształca nieukierunkowane fluktuacje na ruch w jednym wybranym kierunku. Uzyskujemy pracę kosztem fluktuacji, mamy więc darmowe źródło energii. I to urządzenie może być Twoje, oczywiście za pewną opłatą. Tym razem byłem czujniejszy. Rozumiałem już po spotkaniu z Matematykiem, że złożenie dwóch losowych dynamik, dla których stan układu średnio się nie zmienia, może doprowadzić do ruchu w jednym kierunku. Zapadka jednak, podobnie jak wiatraczek, poddana jest takim samym uderzeniom otaczających ją cząsteczek, wykonuje analogiczne ruchy Browna i w związku z tym od czasu do czasu podnosi się przypadkowo i pozwala opaść ciężarkowi. W efekcie średnie przesunięcie ciężarka jest zerowe – sama asymetria zapadki nie wystarcza. Jeżeli natomiast temperatura powietrza wokół zapadki byłaby mniejsza od temperatury powietrza wokół wiatraczka (tak jak różne były prawdopodobieństwa wyrzucenia orła dla różnych monet), to fluktuacje zapadki byłyby mniejsze od fluktuacji wiatraczka i urządzenie Fizyka wykonywałoby rzeczywiście pracę kosztem energii pobranej z otoczenia cieplejszego, oddając



pięć wierzchołków – też brak rewelacji



jej część do otoczenia zimniejszego. Jest to przykład silnika Browna. Niestety, musielibyśmy jeszcze utrzymywać powietrze wokół wiatraczka i zapadki w stałych temperaturach, a to, oczywiście, dodatkowo kosztuje. Jeszcze jedna próba zbudowania *perpetuum mobile* (II rodzaju) okazała się bezowocna. Wizja szybkiego wzbogacenia znacznie się oddaliła.

Wieczorem rozmawiałem ze znajomym Biologiem. Opowiedziałem mu o swoich porannych matematyczno-fizycznych doświadczeniach. Biolog zasugerował, że być może Natura znalazła sposób, aby wykorzystać mikroskopowe fluktuacje ruchów cząsteczek w komórkach i zamienić energię wyzwalaną w reakcjach biochemicznych na transport użytecznych składników komórkowych. Być może molekularne motory komórkowe działają podobnie do silników Browna. Na szczęście Biolog nie chciał mi ich sprzedawać. Zajęliśmy się spożywaniem różnych smakowitości, czyli przetwarzaniem dań szefa kuchni na proste związki organiczne, czego i Wam wszystkim życzę.

Z pozdrowieniami, *Jacek MIĘKISZ*, matematyk fizyczno-biologiczny, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki UW

drzewek z sześcioma wierzchołkami jest 6

Post Scriptum 1

Krótki kurs łańcuchów Markowa

W naszej grze mamy do czynienia z układem, który może znajdować się w trzech stanach: 0, 1 lub 2, odpowiadających reszcie przy dzieleniu kapitału Matematyka przez 3. Prawdopodobieństwa przejść pomiędzy tymi stanami, $p_{ij}; i, j = 0, 1, 2$, dla drugiej gry wynoszą odpowiednio: $p_{00} = p_{11} = p_{22} = 0$, $p_{01} = 0,1$, $p_{02} = 0,9$, $p_{12} = 0,75$, $p_{10} = 0,25$, $p_{20} = 0,75$, $p_{21} = 0,25$.

Prawdopodobieństwo tego, że w chwili $t + 1$ będziemy w stanie i , zależy tylko od tego, w jakim stanie byliśmy w chwili t . Jest to tak zwana własność Markowa braku pamięci, którą krótko można scharakteryzować tak: przyszłość nie zależy od przeszłości, pod warunkiem że znana jest teraźniejszość. Niech π_i^t będzie prawdopodobieństwem znalezienia się układu w stanie i w chwili t . Wtedy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite uzyskujemy

$$\pi_i^{t+1} = p_{0i}\pi_0^t + p_{1i}\pi_1^t + p_{2i}\pi_2^t; \quad i = 0, 1, 2.$$

Powyzsza ewolucja naszego układu jest przykładem łańcucha Markowa. Zauważmy, że z każdego stanu możemy przejść, w skończonej liczbie kroków, do każdego innego stanu. Dla takich łańcuchów, w miarę upływu czasu, częstotliwości odwiedzania poszczególnych stanów układu dążą do pewnych wartości niezależnych od stanu początkowego. W naszym przypadku te graniczne częstotliwości spełniają następujący układ równań liniowych:

$$\pi_0 = 0,25\pi_1 + 0,75\pi_2$$

$$\pi_1 = 0,1\pi_0 + 0,25\pi_2$$

$$\pi_2 = 0,9\pi_0 + 0,75\pi_1$$

Układ ten ma, oczywiście, nieskończenie wiele rozwiązań, ale tylko jedno rozwiązanie,

$$\pi_0 = 5/13, \quad \pi_1 = 2/13, \quad \pi_2 = 6/13,$$

spełnia warunek

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

i daje nam częstotliwości odwiedzania stanów naszego układu. W szczególności, kapitał Matematyka jest podzielny przez 3 średnio w 5/13 wszystkich rzutów.

Post Scriptum 2

Idea urządzenia wykorzystującego ruchy Browna do wykonania użytecznej pracy została po raz pierwszy przedyskutowana w 1912 roku przez Mariana Smoluchowskiego, a potem rozwinięta przez Richarda Feynmana (Feynmana *Wykłady z Fizyki*, Tom I, Część 2, Rozdział 46).

Paradoksalne gry hazardowe zostały zaproponowane w 1996 roku przez Juana Parrondo w nieopublikowanym artykule „How to cheat a bad mathematician”.

3



Rozwiązanie zadania M 1152.
Podnosimy stronami do kwadratu dane nierówności, po czym dodajemy je stronami. W efekcie uzyskujemy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leq 0,$$

skąd

$$(a + b + c)^2 \leq 0.$$

A zatem

$$a + b + c = 0.$$

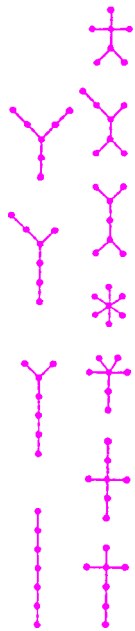


Supernowa Keplera

Irena SEMENIUK*

W październiku tego roku minęły 402 lata od pojawienia się na niebie niezwyklej gwiazdy, nazywanej dzisiaj najczęściej Supernową Keplera. 9 X 1604 roku gwiazdę zauważono niezależnie w Rzymie, Padwie i Weronie. Dzień później w Pradze dostrzegł ją (w przerwie między chmurami) Jan Brunowski, dokonujący obserwacji meteorologicznych urzędnik dworu cesarza Rudolfa II, o czym powiadomił ówczesnego cesarskiego matematyka, Johanesa Keplera. Zachmurzone niebo nad Pragą sprawiło, że sam Kepler zobaczył gwiazdę dopiero 17 X i wtedy zaczął ją systematycznie obserwować, a następnie poświęcił jej całą książkę wydaną w 1606 roku pod tytułem „De stella nova in pede Serpentarii”.

Gwiazda pojawiła się w gwiazdozbiornie Wężownika. Ta polska nazwa odpowiada greckiemu słowu *Ophiuchus* (po łacinie *Serpentarius*), co znaczy Nosićiel Węża. Gwiazdozbiór Wężownika odzwierciedla na niebie postać boskiego lekarza Asklepiosa-Eskulapa. Gwiazda rozbłysła w bliskim sąsiedztwie trzech innych jasnych obiektów: Marsa, Jowisza i Saturna. Te trzy planety górne były wtedy w koniunkcji. W chwili odkrycia gwiazda dorównywała jasnością Marsowi, a w ciągu kilku następnym dni przewyższyła jasnością Jowisza i stała się najjaśniejszym obiektem nocnego nieba. Przez kilkadziesiąt dni pozostawała w maksimum blasku, po czym zaczęła słabnąć. Ale dla ludzkiego oka była widoczna aż do wiosny 1606 roku.



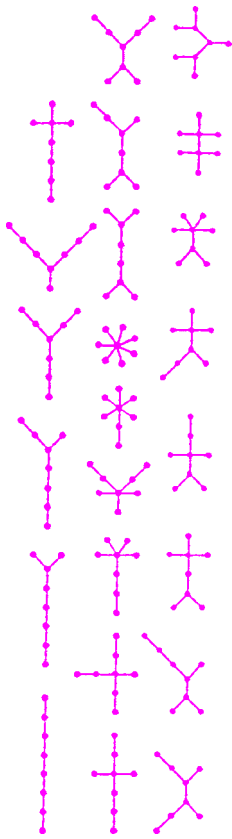
drzewka z siedmioma wierzchołkami (11)
– robi się ciekawie

W czasach Keplera gwiazdami nowymi nazywano gwiazdy, które nieoczekiwanie pojawiały się na niebie, były przez jakiś czas widoczne, a następnie zniknęły na zawsze z pola widzenia ludzkiego oka. Współczesna astrofizyka, poczynając od lat dwudziestych ubiegłego stulecia, rozróżnia gwiazdy nowe i tzw. supernowe. Jak wskazuje nazwa, supernowe pod względem samego przebiegu zjawiska wyglądają jak gwiazdy nowe, ale takie, których jasność absolutna (tzn. energia wysyłana przez gwiazdę w jednostce czasu) w maksimum blasku przekracza tysiące razy jasność zwykłych gwiazd nowych (zwanych też nowymi klasycznymi). Mechanizm ich eksplozji jest bowiem zupełnie inny niż nowych. Także spadek ich jasności po osiągnięciu maksimum, zanim znikną pod progiem widzialności oka, trwa znacznie dłużej i przebiega łagodniej. Supernowe pojawiają się znacznie rzadziej na niebie niż zwykłe nowe. W ubiegłym tysiącleciu zaobserwowano ich w okolicy Słońca, a właściwie w naszej Galaktyce, zaledwie pięć. Wszystkie rozbłysły, zanim wynaleziono teleskop. Ostatnią z nich była właśnie Supernowa Keplera. Wcześniejsze pojawiły się w latach 1006, 1054, 1181 i 1572. Pierwsze trzy były obserwowane głównie na Dalekim Wschodzie, w Chinach i Japonii. W Europie pojawienie się gwiazdy z roku 1006 odnotowały kroniki klasztorów St. Gallen w Szwajcarii i Benevento we Włoszech, ale nikt nie odnotował obserwacji gwiazd supernowych z lat 1054 i 1181. Dopiero przedostatnia, z roku 1572, była systematycznie obserwowana w Europie. Nosi ona nazwę Supernowej Tycho, gdyż to właśnie Tycho Brahe ją zauważył, a potem dokładnie obserwował. I to ona przesądziła ostatecznie o jego dalszej działalności.

Gwiazdy nowe obserwuje się znacznie częściej niż supernowe. W ubiegłym stuleciu zaobserwowano ich ponad 200, w tym 10 z nich jasnością w maksimum przekroczyło trzecią wielkość gwiazdową, a więc można je było bez trudu zobaczyć gołym okiem. Wynalezienie teleskopu, a potem zastosowanie do obserwacji astronomicznych kliszy fotograficznej i spektrografu pokazało, że nazwa „gwiazdy nowe” nie jest dobrym określeniem zjawiska, bowiem w miejscu pojawienia się nowej, zarówno przed jej rozbłysnięciem, jak i po jej zniknięciu dla oka, odkrywano zawsze słabą gwiazdę. Około pół wieku temu okazało się przy tym, że wszystkie gwiazdy, które w pewnym momencie swego rozwoju pojawiały się jako nowe, są układami podwójnymi o okresach obiegu najczęściej rzędu kilku godzin.

Techniki poszerzające możliwości obserwacyjne ludzkiego oka zastosowane do badania okolic wyżej wspomnianych gwiazd supernowych Galaktyki pokazały

* Obserwatorium Astronomiczne
Uniwersytetu Warszawskiego



drzewek z ośmioma wierzchołkami jest 23

natomiast, że w miejscu pojawienia się dwóch z nich znajdują się gwiazdy pojedyncze o bardzo osobliwych własnościach. Gwiazdy te nazwano pulsarami. Na bardziej szczegółowe omówienie zasługuje gwiazda o jasności 16 mag znajdująca się w miejscu pojawienia się supernowej AD 1054. Obserwowano ją od dawna jako gwiazdę stałą. Ale dopiero obserwacje radiowe z roku 1968, a wkrótce po nich obserwacje w zakresie widzialnym, wykonane aparaturą o dużej rozdzielczości czasowej, wykazały, że jest to gwiazda zmienna o okresie 33 ms i amplitudzie zmian blasku równej 1 mag. Oko ludzkie może rejestrować zmiany jasności o amplitudach nawet dziesięciokrotnie mniejszych, jednak jego czasowa zdolność rozdzielcza nie jest lepsza niż 0,1 s i dlatego gwiazdę znano jako obiekt o stałej jasności. Dalsze obserwacje wykazały, że gwiazda jest silnym źródłem promieniowania X i gamma, zmiennych także z okresem 33 ms. Te szybkie zmiany (pulsowanie) jasności tłumaczą nazwę pulsarów nadaną tego rodzaju gwiazdom. W roku 2001 w miejscu rozbłysku supernowej AD 1181 odkryto także pulsara o okresie 66 ms.

W miejscu pojawienia się Supernowej Keplera nie zauważono dotychczas żadnej gwiazdy. Ale wokół miejsc rozbłysku wszystkich gwiazd nowych i supernowych zaobserwowano rozszerzające się mgławice. Z tempa ich rozszerzania się, cofając się w czasie, otrzymuje się daty pojawienia się gwiazdy zgodne z zarejestrowanymi w kronikach obserwacyjnych. Jest to niewątpliwym dowódem tego, że mgławica jest genetycznie związana z rozbłyskiem gwiazdy i jest częścią materii odrzuconej przez nią w czasie rozbłysku. Szczególnie znana jest tego rodzaju pozostałość po supernowej AD 1054, zwana Mgławicą Krab. Obserwowano ją już w XVIII wieku, ale dopiero w latach dwudziestych ubiegłego stulecia zdano sobie sprawę z jej związku z supernową. Z prędkości rozszerzania się mgławic astronomowie wyznaczają też ich odległości, co pozwala im następnie obliczyć jasność absolutną gwiazd nowych i supernowych w maksimum blasku.

Sam Kepler był przekonany, że pojawienie się obserwowanej przez niego gwiazdy nowej, jej czas i miejsce, nie są zbiegiem okoliczności. Sądził, że ukazała się ona z woli Boga, jako Jego znak. Kepler miał sceptyczny stosunek do uprawianej w jego czasach w Europie astrologii i stawiania horoskopów. Mówił, że astrologia jest głupią córką szlachetnej damy astronomii, ale za pensje wypłacane matematykom matka nie wyżyłaby, gdyby córka nie zarabiała pieniędzy. Był jednak głęboko przekonany, że zjawiska zachodzące na niebie nie są przypadkowe, że są przejawem woli Bożej, a więc mają jakieś znaczenie.



Rozwiązanie zadania F 680.

Przy izotermicznym rozdrobnieniu jednej dużej kropli na dużą liczbę małych kropelek energia jest tracona tylko na wytworzenie dodatkowej powierzchni, energia wewnętrzna kropelek nie zmienia się. Zatem praca jest równa $W = \alpha \Delta S$, gdzie ΔS to powierzchnia dodatkowa równa $\Delta S = 4\pi(Nr^2 - R^2)$ (R jest promieniem dużej kropli, a N liczbą małych kropelek). Masa oliwy nie zmienia się, wobec tego:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = m = N \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad \text{zatem} \quad \sqrt[3]{N} = \frac{R}{r} \quad \text{i} \quad N = \frac{3m}{4\pi r^3 \rho}.$$

Wyznaczając stąd R i podstawiając do wzoru na ΔS , otrzymujemy

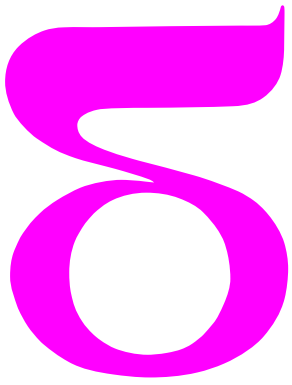
$$\Delta S = 4\pi \sqrt[3]{N^2} r^2 (\sqrt[3]{N} - 1) \approx 4\pi N r^2.$$

Podstawiając ΔS oraz N do wzoru na pracę, otrzymujemy $W = \frac{3m\alpha}{\rho r} \approx 0,06 \text{ J}$.



Rozwiązanie zadania M 1151.

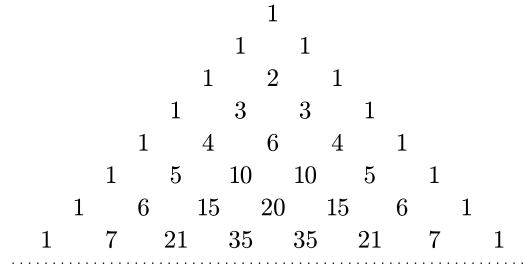
Niech k, l, m, n będą takimi liczbami całkowitymi, że $a = k(ab - cd)$, $b = l(ab - cd)$, $c = m(ab - cd)$, $d = n(ab - cd)$. Wówczas $ab - cd = (kl - mn)(ab - cd)^2$, a ponieważ $ab - cd \neq 0$, więc $(kl - mn)(ab - cd) = 1$. Oba czynniki stojące po lewej stronie ostatniej równości są liczbami całkowitymi, skąd uzyskujemy równość $|ab - cd| = 1$.



mała delta

O pożytkach z trójkąta Pascala

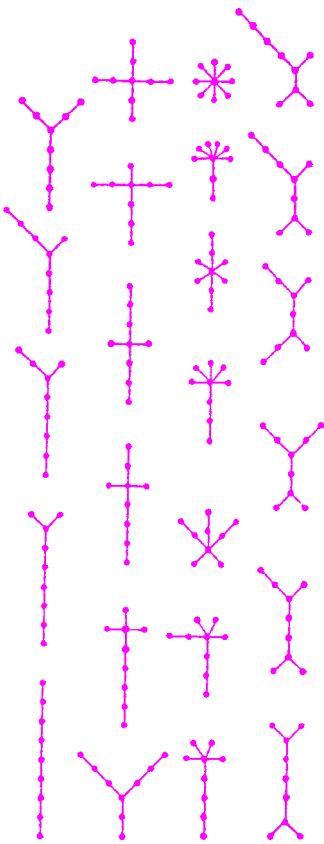
Trójkąt Pascala to, jak wiadomo, „nieskończony trójkąt”, na którego bokach stoją jedynki, a każda z pozostałych liczb jest sumą dwóch nad nią położonych.



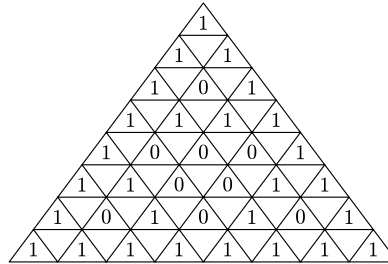
Trójkąt taki buduje się zwykle po to, by poznać współczynniki dwumianu Newtona $(a + b)^n$, ale można go użyć i w innych celach. Takim właśnie – nieco przekornym – wykorzystaniem trójkąta Pascala zajmiemy się poniżej.

Jak z trójkąta Pascala zrobić sobie sitko?

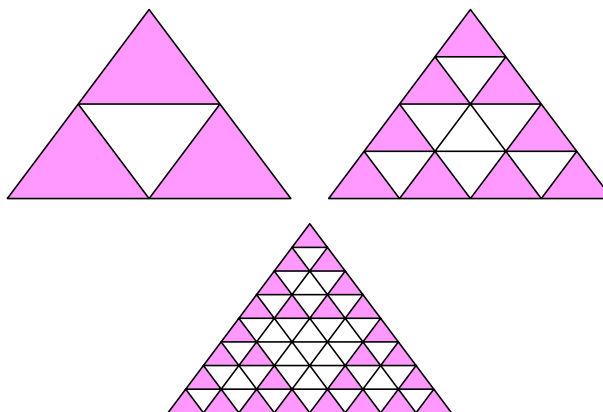
Narysujmy trójkąt Pascala na siatce złożonej z trójkącików, tak jak na rysunku poniżej. Następnie każdą liczbę parzystą zastąpmy zerem, a każdą liczbę nieparzystą – jedynką.



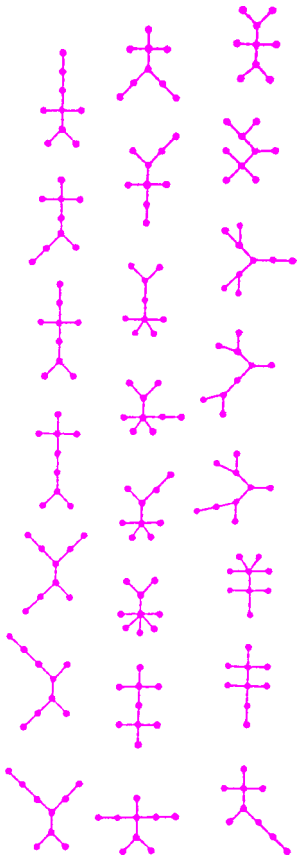
drzewka z dziewięcioma wierzchołkami – początek



Rozważmy teraz trójkąty złożone z dwóch, czterech, ośmiu, szesnastu, itd. pięter i zamalujmy w nich jakimś kolorem trójkąty, w których widnieje jedynka. Po odpowiednim przeskalowaniu otrzymamy ciąg figur, jak na rysunku poniżej.



Widać, że pierwsza figura powstaje w wyniku podziału danego trójkąta na cztery identyczne trójkąty i wycięcia środkowego trójkąta. Druga



drzewka z dziewięcioma wierzchołkami
– dokończenie; jest ich 47

przez zastosowanie identycznej procedury do każdego z trójkątów pozostałych po pierwszej wycinance, itd. Kolorowa figura, jaka pozostaje po nieskończeniu wielu cięciach, to sitko (czyli krzywa trójkątowa) Sierpińskiego. W trójkącie Pascala przedstawione są zatem kolejne etapy tworzenia takiego sitka.

Tajemnice zapisu binarnego

Opisany wyżej związek trójkąta Pascala z geometrią nie jest związkiem jedynym. Aby się o tym przekonać, spójrzmy na „zero-jedynkowy” trójkąt Pascala i wypiszmy liczby z kolejnych pięter, traktując je jako liczby zapisane w układzie dwójkowym. Mamy wtedy (poczynając od drugiego rzędu)

$$[11]_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3$$

$$[101]_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$[1111]_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

$$[10001]_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 1 = 17$$

$$[110011]_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 2 + 1 = 51$$

Liczby te na pozór mogą zdawać się nieco przypadkowe. Kiedy jednak zauważymy, że

$$2^0 + 1 = 3, \quad 2^2 + 1 = 5, \quad 2^4 + 1 = 17$$

oraz

$$15 = 3 \cdot 5, \quad 51 = 3 \cdot 17,$$

to niewątpliwie zrodzi się w nas słuszną hipotezę, że powstające w ten sposób liczby są iloczynami tzw. liczb Fermata, tzn. liczb postaci

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Fermat sądził, że wszystkie takie liczby są pierwsze. Nie jest to jednak prawda. Dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ liczby Fermata rzeczywiście są pierwsze, ale już

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$$

liczbą pierwszą nie jest (udowodnił to Euler). Do dziś poszukujemy liczb pierwszych Fermata różnych od F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 , ale – jak dotąd – bezowocnie. Tymczasem jest to ważne zagadnienie właśnie z punktu widzenia geometrii. Słynne twierdzenie Gaussa wiąże bowiem liczby Fermata z konstruowalnością wielokątów foremnych.

Twierdzenie. Wielokąt foremny o n bokach da się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków

- $n = 2^k$, gdzie $k = 2, 3, 4, \dots$,
- n jest iloczynem różnych liczb pierwszych Fermata,
- n jest iloczynem pewnej potęgi dwójki i różnych liczb pierwszych Fermata.

Okazuje się, że z trójkąta Pascala możemy odczytać wszystkie konstruowalne n -kąty foremne o nieparzystej liczbie boków. Jak to jednak możliwe, że trójkąt Pascala „zna się na geometrii”?

Pozostawiając to filozoficzne pytanie bez odpowiedzi, polecamy upewnienie się, że początkowe piętra trójkąta Pascala rzeczywiście kodują iloczyny parami różnych liczb pierwszych Fermata oraz stwierdzenie, do którego piętra zasada ta obowiązuje.

Matą Deltę przygotował Witold SADOWSKI

Lewitron – prosta zabawka fizyczna o nie tak prostej teorii działania

Krzysztof BYCZUK*

Lewitacją nazywamy stan, w którym ciało pozostaje w spoczynku, jednocześnie nie mając bezpośredniego kontaktu z żadnym innym ciałem. Osiągnięcie stanu statycznej lewitacji nie jest jednak możliwe.

Każdy wie, że jednoimienne bieguny magnesów odpychają się. Wydaje się więc, że można by umieścić wystarczająco silne magnesy, jeden nad drugim, tak aby ten na górze unosił się swobodnie w powietrzu bez żadnego bezpośredniego wsparcia. Doświadczenie jednak pokazuje, że to się nigdy nie udaje: górny magnes obraca się i zostaje przyciągnięty przez dolny.

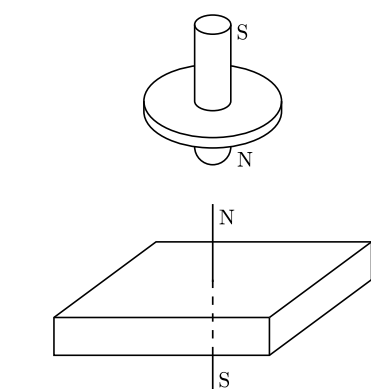
W 1842 roku Samuel Earnshaw udowodnił zaskakujące twierdzenie:

w pustej przestrzeni nie istnieje żadna statyczna (czyli niezmiennąca się w czasie) konfiguracja pól elektrycznych, magnetycznych i grawitacyjnych, dla której energia potencjalna miałaby lokalne minimum.

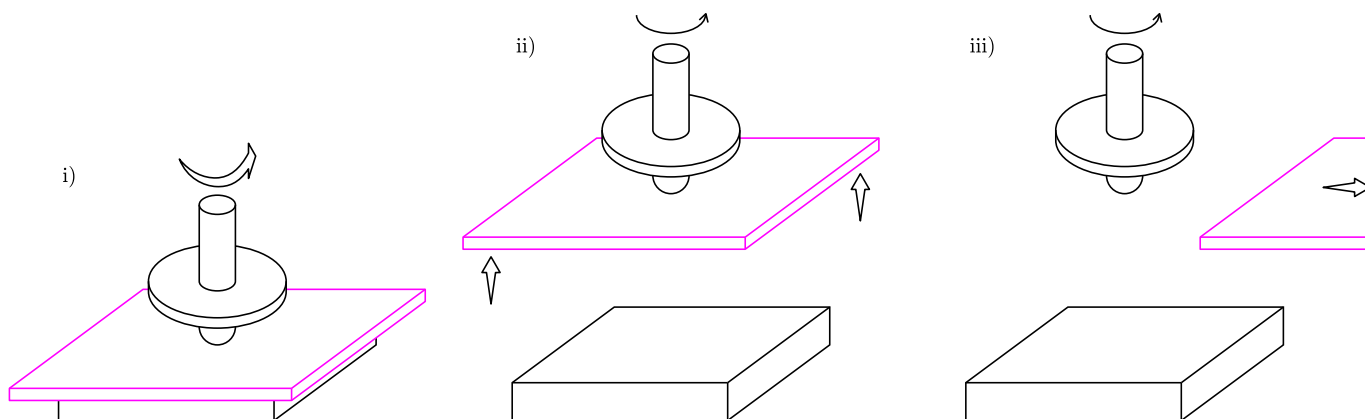
Oznacza to, że, niezależnie od sposobu wzajemnego ustawienia ładunków elektrycznych, dipoli magnetycznych i mas w obszarach pomiędzy nimi, energia potencjalna pól nie ma lokalnego minimum, a więc żadne ciało nie będzie znajdowało się w stanie równowagi trwałej. Z punktu widzenia mechaniki Newtona i elektrodynamiki klasycznej statyczna lewitacja nie jest więc możliwa. Zauważmy, że z twierdzenia Earnshawa wynika, iż stabilne molekuly chemiczne także nie powinny istnieć. Faktycznie, wyjaśnienia stabilności materii należy szukać w mechanice kwantowej.

W latach dziewięćdziesiątych XX wieku pojawiła się w sprzedaży zabawka o nazwie „lewitron”. Zabawka składa się z dużego i silnego magnesu stałego wykonanego z materiałów ceramicznych oraz małego bączka, także wykonanego z magnesu o symetrii osiowej. Masa bączka wynosi około 18 g. W zestawie jest też kilka pierścieni o masach: 3, 1, 0,4, 0,2 i 0,1 g. Dodatkowo znajduje się w komplecie plastikowa płytką oraz w niektórych wersjach mały silniczek do wprawienia bączka w ruch obrotowy.

Zabawa polega na rozkręceniu bączka na płytce umieszczonej nad magnesem stałym. Następnie umiejętnie unosimy płytkę z kręcącym się bączkiem do momentu, aż zacznie on sam unosić się w polu grawitacyjnym, wirując nad magnesem. Wtedy płytkę odsuwamy. W tym stanie *lewitacji dynamicznej* bączek pozostaje około 2 do 3 minut.



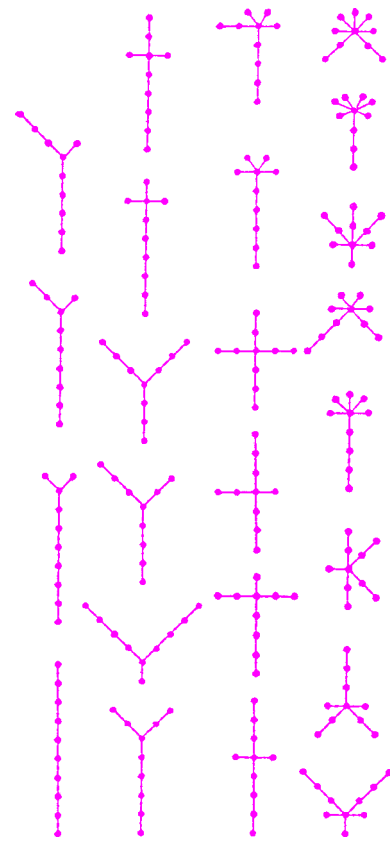
Rys. 1. Schemat budowy lewitronu. Zasadnicze elementy to duży magnes w podstawie oraz magnetyczny bączek. Bieguny magnesów muszą być przeciwnie skierowane.



Rys. 2. Kolejne etapy wprowadzania bączka w stan dynamicznej lewitacji: i) rozkręcamy bączek na plastikowej płytce, ii) unosimy płytkę do góry, iii) odsuwamy płytkę, pozostawiając bączek wirującego w powietrzu.

*Uniwersytet Augsburski (Niemcy)
i Uniwersytet Warszawski

Oczywiście, wprowadzenie bączka w stan dynamicznej lewitacji wymaga pewnej wprawy, bardzo dokładnego ustawienia magnesu trwałego w poziomie oraz



drzewka z dziesięcioma wierzchołkami – początek

dobrania ciężaru bączka za pomocą dołączonych pierścieni. Ważne też jest, aby bączek wirował z odpowiednią prędkością kątową, ani za wolno, ani za szybko.

Lewitron został wynaleziony i opatentowany przez Roya Harringa w 1983 roku w USA. Teoretyczne zrozumienie, jak działa lewitron, pojawiło się jednak dopiero w 1996 roku.

Jak lewitron (nie) działa

Aby bączek unosił się w polu grawitacyjnym, musi na niego działać siła równoważąca przyciąganie ziemskie. Jednoimienne bieguny magnesu w podstawie i w bączku muszą więc być zwrócone przeciwnie do siebie, jak na rysunku 1. Ponadto gdyby bączek nie wirował, to natychmiast odwróciłby się i spadł na podstawę. Ma jednak spory moment pędu, który jest zachowany w czasie ruchu, co uniemożliwia przewrócenie się.

Pozostaje jednak problem z istnieniem równowagi trwałej takiego układu. Bardzo dobrze to widać, gdy próbujemy dostroić zabawkę do działania. Przy nieudanych próbach zauważamy, że wirujący bączek faktycznie się nie odwraca (moment pędu jest zachowany), jednak „wypływa” z obszaru nad magnesem i spada poza podstawę.

Jeśli bączek ma moment magnetyczny $\vec{\mu}$ i masę m , to znajdując się w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}(\vec{r})$, która zależy od danego punktu w przestrzeni, oraz w polu grawitacyjnym o natężeniu g , ma energię potencjalną równą

$$U(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) + mgz,$$

gdzie z jest wysokością nad powierzchnią Ziemi. W pustej przestrzeni pola magnetyczne i grawitacyjne spełniają twierdzenie Earnshawa. Można wykazać, że energia potencjalna w tym układzie ma punkt siodłowy. W pewnym kierunku przy oddalaniu się od położenia równowagi U rośnie, ale w innym maleje. Nawet gdy bączek znajdzie punkt równowagi trwałej wzdłuż jednego kierunku, to ucieka z tego obszaru w kierunku prostopadłym, gdyż względem niego była to równowaga nietrwała.

Jak więc lewitron naprawdę działa

Lewitujący bączek wykonuje trzy rodzaje ruchów: szybki ruch obrotowy wokół własnej osi, wolniejszą precesję osi obrotu oraz powolny ruch środka masy bączka na boki. Doświadczalne oszacowanie charakterystycznych częstości tych ruchów daje dla ruchu wirowego $f_{\text{wirowy}} \approx 25 \text{ Hz}$, dla precesji $f_{\text{precesja}} \approx 5 \text{ Hz}$ i dla ruchów bocznych $f_{\text{boczny}} \approx 1 \text{ Hz}$. Skale czasowe dla tych trzech rodzajów ruchu są różne:

$$f_{\text{boczny}} \ll f_{\text{precesja}} \ll f_{\text{wirowy}}.$$

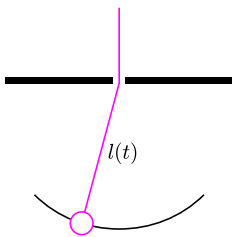
Mówimy o *separacji skal czasowych* w tym układzie. Upraszcza to zagadnienie, bo każdy z tych trzech ruchów można teraz rozpatrywać niezależnie, stosując *przybliżenie adiabaticzne*, w którym badając jeden typ ruchu, zaniedbuje się ruchy pozostałe, znacznie odeń szybsze lub wolniejsze.

Bardzo ważnymi wielkościami w fizyce są te, które nie zmieniają się w czasie, tak zwane wielkości zachowane. Przykładami są energia, pęd lub moment pędu dla izolowanego układu fizycznego. Gdy układ nie jest izolowany i oddziałuje z otoczeniem, np. jeden z parametrów układu zmienia się w czasie, wspomniane wielkości nie są już zazwyczaj zachowane. Gdy jednak jakiś parametr układu zmienia się dużo wolniej niż typowe skale czasowe innych procesów w układzie, to pewne inne wielkości fizyczne mogą być w przybliżeniu zachowane. Takie niezmienniki powolnych ruchów nazywamy *niezmiennikami adiabaticznymi*.

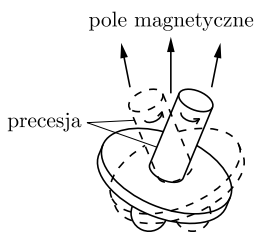
Jako przykład rozważmy wahadło matematyczne, którego długość zmienia się powoli w stosunku do okresu drgań, np. ktoś powoli wyciąga kulkę z linką w górę. Powolna zmiana długości wahadła oznacza, że

$$\frac{1}{l(t)} \frac{dl(t)}{dt} \ll \frac{1}{T},$$

gdzie l jest chwilową długością wahadła, a $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ okresem jego drgań. Energia układu E nie jest stała, ale można wykazać, że wielkości $E(t)\sqrt{l(t)}$, $T(t)/\sqrt{l(t)}$ i $E(t)T(t)$ są w przybliżeniu stałe.



Wahadło o powoli zmieniającej się długości.



Rys. 3. Precesja osi bączka wokół lokalnego kierunku pola magnetycznego.

Precesja osi lewitronu zachodzi szybciej niż ruch na boki. Efekt żyroskopowy z kolei w ciągły sposób ustawia oś precesji bączka równolegle do lokalnego kierunku zewnętrznego pola magnetycznego $\vec{B}(\vec{r})$. Dzięki temu uśredniony względem czasu moment magnetyczny bączka jest zawsze ustawiony równolegle i przeciwnie do zewnętrznego pola, więc siły magnetyczne przeciwdziałają siłom grawitacji. Można sobie wyobrazić, że bączek powoli porusza się na boki, a szybka precesja zawsze znajduje nową oś precesji dla danego położenia bączka.

W optymalnych warunkach, czyli gdy bączek jest w stanie lewitacji dynamicznej, wielkość

$$\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

jest niezmiennikiem adiabatycznym układu. Innymi słowy, dla ruchów dostatecznie powolnych w porównaniu z precesją i wirowaniem wielkość ta jest stała w czasie. Dzięki temu energię potencjalną całego układu, która jest w ogólności funkcją długości wektora indukcji pola magnetycznego \vec{B} i kąta, jaki ten wektor tworzy z momentem magnetycznym bączka $\vec{\mu}$, można zapisać jako funkcję wyłącznie długości wektora indukcji $\vec{B}(\vec{r})$, którego długość B ma lokalne ekstremum i tym samym istnieje punkt równowagi trwałej. Pozostaje to w zgodzie z przytoczonym na początku twierdzeniem Earnshawa, gdyż dotyczy ono tylko statycznych konfiguracji, a nasz układ jest dynamiczny.

Autor dziękuje za wsparcie DFG SFB 484.

Literatura

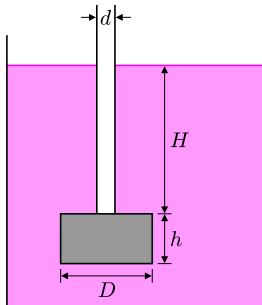
1. M.V. Berry, Proc. R. Soc. London A 452, 1207 (1996).
2. M.D. Simon, L.O. Heflinger i S.L. Ridgway, Am. J. Phys. 65, 286 (1997).
3. T.B. Jones, M. Washizu i R. Gans, J. Appl. Phys. 82, 883 (1997).
4. H.R. Dullin i R.W. Easton, Physica D 126, 1 (1999).



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 679. W zbiorniku z wodą została umieszczona długa rurka o średnicy d , do której z dołu przylega cylindryczny krążek o grubości h i średnicy D (rys. 1). Gęstość materiału krążka ρ jest większa od gęstości wody ρ_w . Rurkę powoli podnosimy do góry. Na jakiej głębokości H krążek oderwie się od rurki?
Rozwiązanie na str. 15



Rys. 1

F 680. Napięcie powierzchniowe na granicy woda–oliwa wynosi $\alpha \approx 18 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$. Jaką pracę należy wykonać, aby kroplę oliwy o masie $m = 1 \text{ g}$ rozdrobnić w wodzie na krople o promieniu $r = 10^{-4} \text{ cm}$? Przyjmujemy, że gęstość oliwy to $\rho = 0,9 \text{ g/cm}^3$.
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Waldemar POMPE

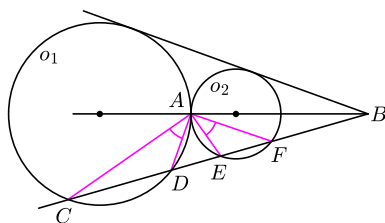
M 1150. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A (rys. 2). Wspólna styczna zewnętrzna okręgów o_1 i o_2 przecina prostą łączącą ich środki w punkcie B . Prosta przechodząca przez punkt B przecina okrąg o_1 w punktach C i D , a okrąg o_2 w punktach E i F . Udowodnić, że

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle EAF.$$

Rozwiązanie na str. 15

M 1151. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d , że każda z tych liczb jest podzielna przez liczbę $ab - cd$. Wykazać, że $|ab - cd| = 1$.
Rozwiązanie na str. 5

M 1152. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają zależności $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$, $|c| \geq |a + b|$. Dowieść, że $a + b + c = 0$.
Rozwiązanie na str. 3



Rys. 2

Medale Fieldsa 2006

22 sierpnia 2006 roku, w Madrycie, na otwarciu Międzynarodowego Kongresu Matematyków (który odbywa się co cztery lata) wręczone zostały cztery medale Fieldsa – powszechnie uznawane za matematyczne odpowiedniki Nagrody Nobla. Otrzymali je Andriej Okunkow, Grigorij Perelman, Terrence Tao oraz Wendelin Werner. (Z niektórymi wynikami dwóch z nich, Perelmana i Tao, czytelnicy *Delty* mieli okazję już się zapoznać, w numerach 1/2004 i 4/2005.)

Zanim powiemy po kilka słów o osiągnięciach każdego z nich, wspomnijmy o dwóch sprawach. Po pierwsze, wszyscy medaliści spoglądają na matematykę bardzo szeroko i we własnej pracy nie przejmują się tradycyjnymi granicami między różnymi gałęziami tej dziedziny. Najbardziej jest to widoczne w pracach Terrence'a Tao (mówi, że szczególnie lubi pracować nad problemami, które dotyczą kilku działów matematyki jednocześnie). Po drugie, większość medalistów lubi pracować zespołowo. Rekordzistą jest tu znów Tao: ponad 80 prac z ponad 30 różnymi współautorami. Wyjątkiem jest Perelman: i w pracy naukowej, i, jak się wydaje, w codziennym życiu samotnik, który cieszy się opinią człowieka skromnego i niezyciowego (niemniej, jego petersburscy znajomi po fachu mówią, że podczas rozmów o matematyce Perelman jest niezwykle komunikatywny i bezpośredni).

Sądzę zatem, że główną nagrodzoną jest taka matematyka, która nie zna wąsko postawionych granic i podziałów na ciasne specjalności; taka, że gdy nawet chodzi w niej o rozwiązanie jednego, krótko sformułowanego problemu, to jest to rozwiązanie przeprowadzone z niezwykle rozważnym, osiągnięte nieoczekiwanymi metodami i nietypową drogą.

Kwintesencję tego, co w matematyce jest najważniejsze, oddał chyba Charles Fefferman z Princeton, opowiadając w Madrycie o pracach Terrence'a Tao. Powiedział mianowicie, że matematyka uprawiana na najwyższym poziomie może wywołać (u potrafiących ją docenić osób) wiele skojarzeń – na przykład:

- Cóż za zdumiewające umiejętności techniczne!
- Jaka wspaniała synteza!
- Jakim cudem nikt wcześniej tego nie zauważył?
- Skąd, u licha, wziął się ten pomysł?

Otóż, we mnie wszystkie prace Tao, które przeglądałem, wywołują wszystkie te cztery skojarzenia naraz. Jego medal Fieldsa został przyznany za *wkład w teorię równań różniczkowych cząstkowych, kombinatorykę, analizę harmoniczną i addytywną teorię liczb*. W tej ostatniej Tao ma na koncie, wspólnie z B. Greenem, piękne twierdzenie: *istnieją dowolnie długie ciągi arytmetyczne, złożone tylko z liczb pierwszych*. Fefferman wspomniał też o pracach o nieliniowym równaniu Schroedingera oraz wielowymiarowym problemie Kakeyi, co w żadnym razie nie wyczerpuje osiągnięć Tao.

(Klasyczny problem Kakeyi to pytanie, jak małe pole może mieć podzbiór płaszczyzny, w którym odcinek

długości 1 można obrócić o kąt 360 stopni. Zaskakująca odpowiedź, podana przez Besicovitcha w latach 20. XX wieku, brzmi: może mieć dowolnie małe pole. Czytelników *Delty* odsyłamy po szczegóły do książki Jarosława Górnickiego *Okruchy matematyki*. Wielowymiarowy problem Kakeyi to analogiczne pytanie w wielu wymiarach: jak mały może być podzbiór przestrzeni n -wymiarowej, który zawiera odcinki długości 1 równoległe do wszystkich kierunków w przestrzeni? Pracowało nad tym zagadnieniem wiele osób, m.in. medaliści Fieldsa Bourgain i Gowers. Wiadomo dziś np. (Netz i Tao, 1999), że w wymiarze n taki podzbiór musi mieć wymiar Hausdorffa równy co najmniej $(4n + 3)/7$. Pełne rozwiązanie, jak się wydaje, jest jednak bardzo odległe.)

Napiszmy teraz jedno zdanie, zrozumiałe dla tych, którym żargon z poprzednich akapitów nie mówi nic. Otóż, bardzo łatwo jest wskazać czterech świętych matematyków, którzy powiedzą tak: *każdy z trzech pozostałych kolegów uprawia dział matematyki, o którym wiem niewiele, więc ich prace są dla mnie dość odległe – ale prace Terrence'a Tao to zupełnie co innego*.

Za co otrzymał medal Grigorij Perelman, wiadomo: *za wkład w geometrię i rewolucyjne pomysły dotyczące analitycznej i geometrycznej struktury potoku Riccięgo*. Wprawdzie jego prace, o których pisaliśmy w *Delcie* prawie trzy lata temu, wciąż są sprawdzane przez specjalistów, a sam Perelman, którego zapewne bardziej interesuje matematyka niż to, jak go oceniają inni, odmówił przyjęcia nagrody, ale wydaje się, że hipoteza Poincarégo i hipoteza geometryzacyjna Thurstona staną się wkrótce, dzięki niezwyklej intuicji i geniuszowi Perelmana, pełnoprawnymi twierdzeniami, a my poznamy pełny katalog form przestrzeni trójwymiarowej.

Andriej Okunkow też ma bardzo szerokie zainteresowania: poczynszy od struktury grup permutacji n przedmiotów dla bardzo dużych n i klasycznych zagadnień kombinatoryki, przez zaawansowane i abstrakcyjne problemy algebry, po używające narzędzi natury probabilistycznej modele matematyczne przemian fazowych. To bardzo szeroki obszar, ale jemu na tym nie dość: z różnymi współpracownikami napisał ostatnio serię świetnych prac z geometrii algebraicznej. Jak piszą organizatorzy Kongresu w Madrycie na zakończenie oficjalnej informacji dla prasy, *w badaniach Okunkowa prowadzonych w tej dziedzinie idee matematyczne i fizyczne cudownie ze sobą współgrają*.

Ostatni z czwórki, Wendelin Werner, został nagrodzony za prace dotyczące ruchu Browna i konforemnej teorii pola. Jego prace wiążą się jednak także z analizą zespoloną i teorią układów dynamicznych. To pierwszy w historii medal Fieldsa dla probabilisty.

O niektórych osiągnięciach medalistów można by z pewnością opowiedzieć w *Delcie* nieco dokładniej.

Paweł STRZELECKI

Symbole Newtona jako funkcje wielomianowe

Włodzimierz HOLSZTYŃSKI

Wszędobylskie symbole Newtona występują intensywnie w następujących działach matematyki (spośród tych, z których zdaję sobie sprawę): w algebrze, teorii aproksymacji, kombinatoryce, teorii kodów poprawiających błędy, przetwarzaniu sygnału i obrazu, analizie matematycznej, teorii liczb, rachunku prawdopodobieństwa i statystyce. Można je znaleźć w niezliczonych twierdzeniach, formułach, tożsamościach i nierównościach. Te z pozoru przypadkowe wystąpienia mogą nawet powodować uczucie pewnego zagubienia. Mam nadzieję, że zaprezentowane w tym artykule spojrzenie na symbole Newtona od strony wielomianów przekona Czytelników do istnienia zgrabnej teorii nimi rządzącej. Kolejną zaletą podejścia wielomianowego jest algebraiczna metoda przeprowadzanych dowodów. W porównaniu z dowodami kombinatorycznymi i indukcyjnymi jest ona często bardziej elegancka. Z drugiej strony, kombinatoryczna interpretacja tożsamości zawierających symbole Newtona czyni je jednak bardziej wymownymi i atrakcyjnymi.

Jeżeli spojrzymy na symbole Newtona jako na współczynniki występujące w rozwinięciu funkcji $f(y) = (1 + y)^x$ w szereg potęgowy wokół zera, to nie ma powodu, by ograniczać się tylko do całkowitych wartości x (Czytelników, którzy nie wiedzą, co to jest wspomniane rozwinięcie, zapewniam, że mogą czytać dalej). Dopuszczenie rzeczywistych x daje współczynnik przy y^k , oznaczany przez $\binom{x}{k}$, który jako funkcja zmiennej x jest wielomianem stopnia k . Pomimo tego faktu dominacja $\binom{x}{k}$ dla $x \in \mathbb{N}$ jest tak duża, że niewiele osób zdaje sobie sprawę z tego, że wiele tożsamości dowodzonych dla liczb naturalnych jest prawdziwych dla dowolnych liczb rzeczywistych.

Tak naprawdę, wielomiany $\binom{x}{k}$ dla $k \in \mathbb{N}$ są też określone dla liczb zespolonych. Wszystkie stwierdzenia z tego artykułu dla $x \in \mathbb{R}$ pozostają prawdziwe dla x zespolonych.

Choć wspomnieliśmy już, jak symbole Newtona można zdefiniować dla dowolnego x , to w celu lepszego poznania ich własności dojdziemy do nich trochę inną drogą. *Pierwszą różnicą* funkcji $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $DF: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną następująco: $DF(x) = F(x + 1) - F(x)$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Przez łatwą indukcję dostajemy:

$$(*) \quad F(x + n) = F(x) + \sum_{j=0}^{n-1} DF(x + j),$$

oraz

$$F(x - n) = F(x) - \sum_{j=1}^n DF(x - j)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jest zatem jasne, że *jeśli funkcja DF dla liczb całkowitych przyjmuje wartości całkowite oraz $F(0)$ jest liczbą całkowitą, to funkcja F przekształca liczby całkowite w liczby całkowite*. Odnotujmy jeszcze jedną własność DF w przypadku, gdy F jest wielomianem. Jeśli stopień F jest równy k , to DF jest wielomianem stopnia $k - 1$. Jeśli umówimy się, że stopień wielomianu tożsamościowo równego 0 wynosi -1 , to jest to prawda także dla wielomianów stałych.

Jak wiadomo, każdy wielomian stopnia k jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wartości dla $k + 1$ argumentów. Zdefiniujmy więc wielomian $\binom{x}{k}$ jako jedyny wielomian stopnia k zmiennej x , taki że

- $\binom{x}{k} = 0$ dla $x = 0, \dots, k - 1$,
- $\binom{x}{k} = 1$ dla $x = k$.

Jeśli $F(x)$ jest równe $\binom{x}{k}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to wielomian DF dany jest wzorem:

$$DF(x) = \binom{x + 1}{k} - \binom{x}{k}.$$

Zauważmy, że $DF(x) = 0$ dla $x = 0, \dots, k - 2$ oraz $DF(x) = 1$ dla $x = k - 1$. Wielomiany $DF(x)$ i $\binom{x}{k-1}$ mają stopień $k - 1$ i przyjmują takie same wartości w k różnych punktach. Dostajemy stąd

Twierdzenie 1. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}.$$

Taka sama tożsamość jest podstawą konstrukcji trójkąta Pascala. Podkreślmy jednak, że x może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Wielomian stały $\binom{x}{0} \equiv 1$ przyjmuje tylko całkowite wartości. Stosując formułę sumacyjną (*), indukcyjnie możemy udowodnić

Twierdzenie 2. Wielomiany $\binom{x}{k}$ przekształcają liczby całkowite w liczby całkowite.

Twierdzenie to nabiera znaczenia, gdy podamy bezpośredni wzór na wielomian $\binom{x}{k}$. Pierwiastkami wielomianu k -tego stopnia $F(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x-j)$ są liczby $0, 1, \dots, k-1$. Zatem $F(x)/F(k)$ przyjmuje takie same wartości jak $\binom{x}{k}$, czyli

$$\binom{x}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (x-j)$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że wprowadzona przez nas definicja $\binom{x}{k}$ zgadza się z tą podaną we wstępie, oraz że wprowadzone wielomiany są rzeczywistie uogólnieniem zwykłego symbolu Newtona.

Niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Przyporządkujemy jej ciąg wielomianów, które zgadzają się z f w coraz większej liczbie punktów. Mianowicie, zdefiniujemy rekurencyjnie ciąg złożony z wielomianów F_k postaci $F_k(x) = \sum_{j=0}^k a_j \binom{x}{j}$ następująco:

- $F_{-1} \equiv 0$,
- $a_k = f(k) - F_{k-1}(k)$,
- $F_k(x) = F_{k-1}(x) + a_k \binom{x}{k}$.

Wielomian F_k stopnia k przyjmuje te same wartości co funkcja f dla $x = 0, \dots, k$. Zauważmy, że wyrazy a_0, \dots, a_k są wyznaczone przez ten warunek jednoznacznie. Co więcej, jeśli $f(0), \dots, f(k)$ są całkowite, to również a_0, \dots, a_k są całkowite. Co się dzieje w przypadku, gdy f jest w rzeczywistości obcięciem pewnego wielomianu G stopnia k do liczb naturalnych? Wielomian F_k też ma stopień k i zgadza się z G w $k+1$ punktach, więc te wielomiany są równe. Dostajemy kolejne

Twierdzenie 3. Niech G będzie wielomianem stopnia $\leq n$. Następujące warunki są równoważne:

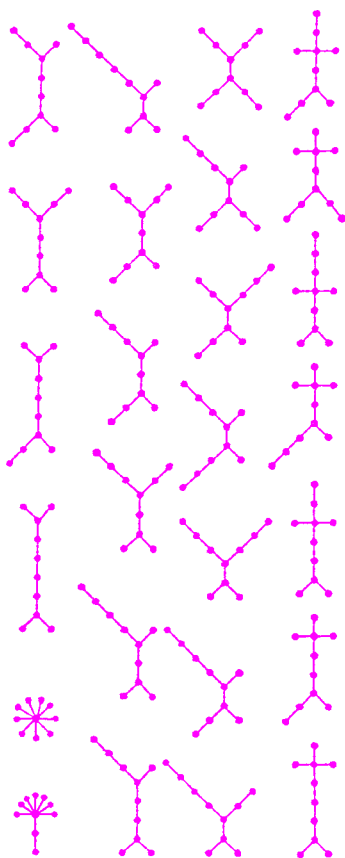
- i) G przekształca liczby całkowite w liczby całkowite,
- ii) istnieje liczba całkowita r , takie że $G(x)$ jest całkowite dla $x = r, \dots, r+n$,
- iii) $G(x)$ jest całkowite dla $x = 0, \dots, n$,
- iv) istnieje jednoznacznie wyznaczony ciąg takich liczb całkowitych a_0, \dots, a_n , że $G(x) = \sum_{j=0}^n a_j \binom{x}{j}$.

Równoważność ii) oraz iii) wynika z prostej obserwacji, że wielomiany $G(x)$ oraz $H(x) = G(x+r)$, gdzie $r \in \mathbb{Z}$, mają takie same zbiory wartości na liczbach całkowitych: $\{H(x) : x \in \mathbb{Z}\} = \{G(x) : x \in \mathbb{Z}\}$. Aby zastosować powyższą teorię, spróbujmy obliczyć sumę $PS_n^k = 0^k + 1^k + \dots + n^k$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$. Spójrzmy na ten problem bardziej ogólnie. Niech f będzie wielomianem k -tego stopnia. Istnieje wtedy jednoznacznie wyznaczony wielomian F stopnia $k+1$, taki że

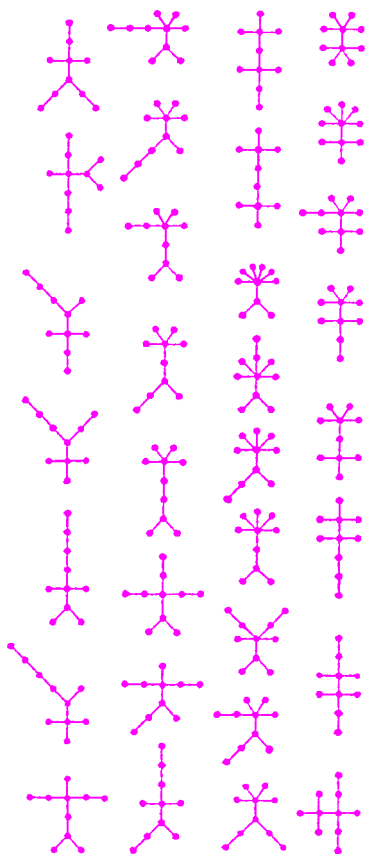
$$F(n) = \sum_{j=0}^n f(j).$$

Istotnie: zauważmy, że jeżeli taki F istnieje, to $F(0) = f(0)$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $DF(x) = f(x+1)$, bo obie strony są wielomianami k -tego stopnia i zgadzają się na liczbach naturalnych. Widać, że taki F może być co najwyżej jeden. Ponadto wiemy już, jak znaleźć współczynniki a_0, a_1, \dots, a_k , dla których

$$f(x) = \sum_{j=0}^k a_j \cdot \binom{x}{j}.$$



drzewka z dziesięcioma wierzchołkami
– ciąg dalszy 1



drzewka z dziesięcioma wierzchołkami
– ciąg dalszy 2

Wtedy F możemy po prostu wskazać:

$$F(x) = \sum_{j=0}^k a_j \cdot \binom{x+1}{j+1}.$$

Nasze zadanie sprowadza się więc do znalezienia współczynników a_j^k , takich że $x^k = \sum_{j=0}^k a_j^k \cdot \binom{x}{j}$. Dla $k=0$ mamy $x = \binom{x}{0}$, gdy zaś $k=1$, to $x = \binom{x}{1}$. Nasz rezultat zgadza się więc z dobrze znanym wzorem:

$$0^1 + 1^1 + \dots + n^1 = \binom{n+1}{2}.$$

W przypadku większych k zastosowanie metody z dowodu twierdzenia 3 pozwala stwierdzić, że

- $a_j^k = 0$ dla $j > k$,
- $a_0^0 = 1$ oraz $a_0^k = 0$ dla $k > 0$.
- $a_1^k = 1$ dla $k > 1$,
- $a_2^k = 2^k - 2$ dla $k \geq 2$.

Przez porównanie współczynników przy najwyższej potędze możemy jeszcze stwierdzić, że $a_k^k = k!$. Niestety, próby wyznaczania pozostałych współczynników prowadzą do coraz bardziej zawyłych rachunków. W tym momencie przydatna okaże się formuła

$$x \cdot \binom{x}{k} = k \cdot \binom{x}{k} + (k+1) \cdot \binom{x}{k+1},$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Dowodzimy jej standardowo – obie strony przyjmują takie same wartości dla $x = 0, 1, \dots, k+1$, co dla wielomianów stopnia $k+1$ oznacza, że są równe. W przypadku $k=2$ dostajemy

$$x^2 = x \cdot \binom{x}{1} = \binom{x}{1} + 2 \cdot \binom{x}{2},$$

a stąd

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2 \cdot \binom{n+1}{3}.$$

Podobnie z równości

$$x^3 = x \cdot \left(\binom{x}{1} + 2 \cdot \binom{x}{2} \right) = \binom{x}{1} + 6 \cdot \binom{x}{2} + 6 \cdot \binom{x}{3}$$

otrzymujemy

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \binom{n+1}{2} + 6 \cdot \binom{n+1}{3} + 6 \cdot \binom{n+1}{4}.$$

W ogólności dostajemy formułę rekurencyjną $a_j^{k+1} = j \cdot (a_{j-1}^k + a_j^k)$ dla $j \in \mathbb{N}_+$ i $k \in \mathbb{N}$. Prowadzi ona do kuzyna trójkąta Pascala, widocznego obok, w którym każdy wyraz a_j^{k+1} jest sumą wyrazów a_{j-1}^k i a_j^k stojących tuż nad nim, pomnożoną przez j .

Oznaczmy przez Sur_j^k liczbę funkcji ze zbioru k -elementowego na zbiór j -elementowy. Ponieważ $\text{Sur}_0^k = a_0^k$, a ponadto Sur_j^k spełniają taką samą zależność rekurencyjną co a_j^k , więc dostajemy

Twierdzenie 4. Dla dowolnego $k, n \in \mathbb{N}$ mamy

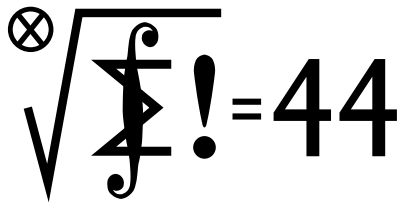
$$x^k = \sum_{j=0}^k \text{Sur}_j^k \cdot \binom{x}{j}$$

oraz

$$0^k + 1^k + 2^k + \dots + n^k = \sum_{j=0}^k \text{Sur}_j^k \cdot \binom{n}{j+1}.$$

Czytelnikom pozostawiamy podanie interpretacji kombinatorycznej tego twierdzenia w przypadku, gdy $x \in \mathbb{N}$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2007

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
517 (WT = 1,00) i 518 (WT = 3,53)
z numeru 3/2006

Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	43,55
Michał Kieza	– Warszawa	38,90
Jerzy Cisło	– Wrocław	34,63
Michał Jastrzębski	– Warszawa	32,79
Łukasz Garncarek	– Opole	32,10
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	31,66
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	31,09

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 529, 530

Redaguje Marcin E. KUCZMA

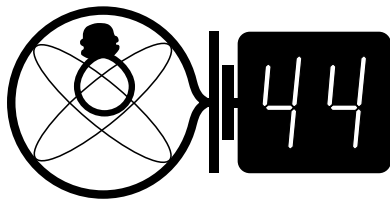
529. Dane są liczby całkowite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 oraz liczba całkowita dodatnia m , będąca dzielnikiem zarówno sumy liczb x_i , jak i sumy ich kwadratów. Wyjaśnić, czy z tych założeń wynika, że m jest także dzielnikiem liczby

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 - 5x_1x_2x_3x_4x_5.$$

530. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H . Proste poprowadzone z punktu A są styczne do okręgu o średnicy BC w punktach P i Q . Udowodnić, że punkty P, Q i H są współliniowe.

Zadanie 530 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Klub 44



Zadania z fizyki nr 426, 427

Redaguje Jerzy B. BROJAN

426. Cienki jednorodny pręt położono na poziomym stole kończącym się pionową krawędzią (rys.) w pozycji prostopadłej do tej krawędzi. Następnie powoli przesuwno pręt w stronę krawędzi, aż zaczął się przechylać i ześlizgiwać. Tarcie między prętem a stołem nie występuje, tzn. siła reakcji stołu jest stale prostopadła do pręta. Który punkt pręta jako ostatni utraci kontakt z podłożem? Ile w tym momencie będzie wynosił kąt przechyłu pręta? Dopuszczalna jest odpowiedź oparta na obliczeniach numerycznych.

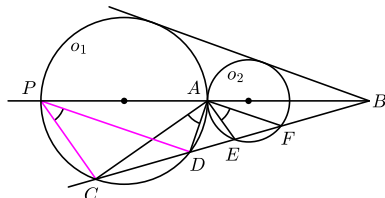
Jak zmieniłyby się odpowiedzi na powyższe pytania, gdyby wartość przyspieszenia ziemskiego g uległa podwojeniu?

427. Przypuśćmy, że masa neutronu byłaby o 0,1% mniejsza od rzeczywistej, przy niezmienionej masie protonu i elektronu. Jak wpłynęłoby to na właściwości atomu wodoru? Niezbędne dane wzięć z tablic.



Rozwiązanie zadania M 1150.

Rozpatrzmy jednokładność o środku B przekształcającą okrąg o_2 na okrąg o_1 .



Wówczas punkty E i F przechodzą przy tej jednokładności odpowiednio na punkty C i D , a punkt A zostaje przeprowadzony na pewien punkt P leżący na okręgu o_1 . Trójkąty AEF i PCD są więc jednokładne, skąd otrzymujemy: $\sphericalangle EAF = \sphericalangle CPD = \sphericalangle CAD$.



Rozwiązanie zadania F 679.

Krażek oderwie się od rurki na głębokości H , na której siły działające na krażek od góry i od dołu będą równe. Od góry w dół działają na krażek dwie siły:

$$\text{ciśnienie wody} \quad \rho_w g H \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$\text{oraz ciężar krażka} \quad \rho g \frac{\pi D^2}{4} h.$$

Od dołu do góry działa tylko

$$\text{siła wyporu wody} \quad \rho_w g \frac{\pi D^2}{4} (H + h).$$

Wobec tego

$$\rho_w g H \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) + \rho g \frac{\pi D^2}{4} h = \rho_w g \frac{\pi D^2}{4} (H + h),$$

$$\text{skąd otrzymujemy} \quad H = h \frac{D^2}{d^2} \frac{\rho - \rho_w}{\rho_w}.$$

Patrz w niebo

Obiekty należące do Pasa Kuipera, tj. drugiego pasa planetoid rozciągającego się poza orbitą Neptuna, chyba jeszcze długo będą ukrywać swoją naturę. Niewątpliwie będzie się je odkrywać masowo i będzie można wyznaczać ich orbity, nie ma natomiast jeszcze środków technicznych umożliwiających bezpośrednie wyznaczenie cech fizycznych, np. rozmiarów. W *Delcie* 4/2006 wspomnieliśmy m.in. o obiekcie 2003 UB₃₁₃, którego rozmiary – ale uzyskane drogą pośrednią i przez to mocno niepewne – oceniane są nawet na większe od rozmiarów Plutona. Stąd jego popularna nazwa „dziesiątej planety”. Nie jest to jedyne ciało, które prawdopodobnie burzy dotychczasowe rankingi wśród drobnych ciał Układu Słonecznego. W maju 2001 roku Robert Millis z Lowell Observatory odkrył kolejny obiekt należący do Pasa Kuipera, oznaczony jako 2001 KX₇₆. Obiekt ten znajdował się dużo bliżej niż 2003 UB₃₁₃, w odległości 43,2 j.a., czyli formalnie na granicy Układu Słonecznego. Taką dokładność wyznaczenia jego odległości uzyskano dzięki temu, że – jak się okazało – został on przypadkowo zarejestrowany na innych zdjęciach sięgających wstecz do roku 1982, czyli elementy jego orbity mogły być wyznaczone na podstawie łuku niemal dwudziestoletniego. Gdyby obiekt ten odbijał 7% słonecznego światła (co jest typowe dla planetoid), to jego średnica musiałaby wynosić co najmniej 1200 km, może nawet 1400 km. Byłoby to więc ciało wyraźnie większe od największej znanej dotąd planetoidy – Ceres (której średnica dość dokładnie wynosi 1000 km), a może nawet większe od Charona – satelity Plutona. Dokładniej rozmiary można by ocenić dopiero po wykonaniu stosownych obserwacji w podczerwieni.

Zważywszy na tempo, w jakim odkrywa się obiekty Pasa Kuipera, niektórzy badacze wysuwają przypuszczenie, że powinno tam być jeszcze sporo ciał większych od Ceres, Charona (1250 km średnicy), a może nawet Plutona (2350 km). Przyszłość pokaże.

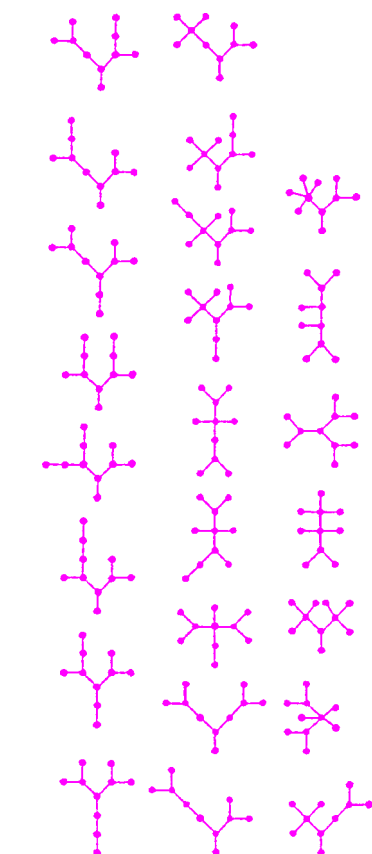
Tomasz KWAST

Listopad

W listopadowe wieczory zbliża się do górowania rozległy, ale niezbyt wyraźny gwiazdozbiór Wieloryba. Jego tau jest gwiazdą o jasności 3,7 mag i leży w odległości 3,6 pc, czyli w skali odległości międzygwiazdowych bardzo blisko. Jej typ widmowy to G8, jasność absolutna 6,2 mag, czyli właściwie niczym by się nie wyróżniała, gdyby nie fakt, że od dawna wiadomo było, iż stosunkowo powoli rotuje. Stąd powstało przypuszczenie, że przekazała swój moment pędu planetom (jak Słońce). Jej bliskość oraz ta właśnie cecha spowodowała, że stała się jednym z celów projektu Ozma, tj. szczególnie skrupulatnego nasłuchiwania i badania jej radiowych sygnałów, w celu ewentualnego stwierdzenia ich sztucznego pochodzenia. Projekt ten podjęty został w 1960 roku w amerykańskim obserwatorium radioastronomicznym w Green Bank (Zachodnia Wirginia). Obserwacjami została też objęta druga gwiazda o podobnych cechach i leżąca w zbliżonej odległości, epsilon Eridani. Badania te nie dały żadnych wyników i zostały zaniechane.

Wenus, Mars i Jowisz są wraz ze Słońcem w Wadze (Jowisz ma złączenie ze Słońcem 21 XI), a więc planet tych nie widać. Jedyne Saturn, który jest we Lwie, wschodzi koło północy. Merkury 8 XI przejdzie przed Słońcem, ale zjawisko to będzie widać w obu Amerykach, na Antarktydzie, w Australii i we wschodniej Azji. Natomiast 25 XI Merkury znajdzie się kątowno najdalej od Słońca i można próbować go odnaleźć na niebie przed wschodem Słońca. Pełnia Księżyca wypada 5 XI, a nów 20 XI. Księżyc zakryje Spikę 18 XI, co będzie widać we wschodniej Afryce i na południowym krańcu Nowej Zelandii. Dwa spodziewane roje meteorów: leonidy około 15 XI i andromedydy około 23 XI, są oceniane jako bardzo skromne.

T. K.



drzewka z dziesięcioma wierzchołkami
– dokończenie; razem jest ich 106

W poprzednich dwóch odcinkach pokazaliśmy, jak obliczać wartość oczekiwaną (czyli wartość średnią) zmiennej losowej X , całkując uogólnioną funkcję odwrotną do jej dystrybuanty. Funkcja ta jest lewostronnie ciągła i niemalejąca, więc do jej scałkowania wystarczy całka Riemanna. Do czego w takim razie przydaje się w rachunku prawdopodobieństwa ogólna teoria miary i całki?

Zauważmy, że korzystaliśmy poprzednio w sposób istotny z bardzo wygodnej własności wartości oczekiwanej:

$$(*) \quad E(X + Y) = EX + EY.$$

Należałoby ją udowodnić. Można to zrobić dość łatwo dla zmiennych losowych X i Y o rozkładach dyskretnych, istnieje też nieco trudniejszy dowód dla przypadku, gdy łączny rozkład pary (X, Y) jest ciągły. Nie wyczerpuje to jednak wszystkich rozkładów. Jak widzieliśmy, bardzo łatwo otrzymać rozkład, który nie jest ani dyskretny, ani ciągły. Co wtedy?

Ogólna teoria miary i całki pozwala na sformułowanie zwięzłej definicji wartości średniej:

$$EX = \int_{\Omega} X dP,$$

gdzie zmienna losowa X jest odwzorowaniem ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω w zbiór liczb rzeczywistych. Odwzorowanie to musi być dostatecznie regularne, tak by zbiór $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq a\}$ był dla każdego a zdarzeniem.

Za zwięzłość definicji płaci się trudnościami technicznymi przy rozwijaniu teorii. Dobrze jednak zdać sobie sprawę, że wartość średnia jest jakimś rodzajem całki, bo wtedy własność $(*)$ przysługuje każdej rozsądnej procedurze całkowania czy też uśredniania.

Z procedurami uśredniania zapoznajemy się dość wcześniej. Punktem wyjścia jest średnia arytmetyczna liczb x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Kolejny stopień komplikacji to średnia ważona

$$x_1 p_1 + \dots + x_n p_n,$$

gdzie $p_1 + \dots + p_n = 1$ i wszystkie liczby p_i (zwane wagami) są nieujemne. Rozpoznajemy tu oczywiście wzór na wartość średnią zmiennej losowej X o rozkładzie dyskretnym, która przyjmuje wartości x_i na zdarzeniach A_i , takich że $P(A_i) = p_i$. Taką zmienną losową nazywamy zmienną losową *prostą*. Mamy więc

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

Wystarczy jeden drobny krok*, żeby otrzymać ogólną definicję wartości średniej dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej X :

$$EX = \sup EZ,$$

gdzie kres górny jest brany po wszystkich zmiennych losowych prostych $Z \leq X$. A jeśli odrzucimy założenie o nieujemności, to

$$EX = EX^+ - EX^-,$$

jeśli tylko co najmniej jeden z wyrazów po prawej stronie jest skończony. Przy takiej definicji może bowiem okazać się, że $EX = \infty$.

Zamiast EX mogliśmy wszędzie pisać $\int_{\Omega} X dP$ – zdefiniowalibyśmy wtedy całkę z X względem miary probabilistycznej P .

Autor tendencyjnie pominął trudności techniczne. Należałoby, na przykład, wykazać, że dla każdej nieujemnej zmiennej losowej X istnieje ciąg zmiennych losowych prostych (Z_n) , taki że $Z_n \leq X$, $n = 1, 2, \dots$ oraz Z_n zmierza monotonicznie do X – to pozwoliłoby na udowodnienie własności $(*)$.

Nie należy też sądzić, że konstrukcja nietrywialnej miary probabilistycznej – chociażby miary Lebesgue'a – na przedziale $[0, 1]$ jest banalna. Ale znów podstawowy pomysł jest bardzo prosty: chcemy skonstruować taką miarę, by uogólniała pojęcie długości odcinka. Wiemy zatem, jaką miarę powinny mieć odcinki. Teraz definiujemy dla $A \subset [0, 1]$

$$\lambda^*(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i),$$

gdzie kres dolny jest brany po wszystkich rodzinach przedziałów $[a_i, b_i]$ pokrywających zbiór A . Funkcja λ^* nie jest miarą (jest tylko tak zwaną miarą zewnętrzną). Jeśli zawężymy ją do pewnej rodziny \mathcal{M} podzbiorów odcinka $[0, 1]$, otrzymamy prawdziwą przeliczalnie addytywną miarę λ , jako że dla parami rozłącznych zbiorów A_i będzie mieć miejsce równość:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i);$$

dla miary zewnętrznej, jak łatwo stwierdzić, lewa strona nie przekracza prawej.

Czytelnik zechce teraz obliczyć

$$\int_0^1 f(x) dx,$$

gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ niewymiernych,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych.} \end{cases}$$

* ...człowieka, ale wielki skok ludzkości (Neil Armstrong lub Juliusz Machulski, „Seksmisja” – jak kto woli).