

SPIS TREŚCI NUMERU 7 (386)

Dwadzieścia lat później <i>Michał Jastrzębski</i>	str. 1
Sześć w jednym, czyli jak działa lampa awa <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 2
SALT – nowe oko dla polskich astronomów <i>Paweł Pietrukowicz</i>	str. 4
Zadania	str. 5
O średnich w trapezie <i>Janusz Matkowski</i>	str. 6
Mała Delta:	
Teoria liczb a opór zastępczy <i>Ewa Czuchry</i>	str. 8
Lepsze ułamki <i>Marek Kordos</i>	str.10
Hipoteza Beala <i>Michał Adamaszek</i>	str.12
Aktualności	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Lipiec	str.16
Czy losowa liczba jest duża czy mała? <i>Rafał Sztencel</i>	str.17

W następnym numerze:
Liczydła japońskie

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: 022-5328-731, lub -820, lub -816, fax: -732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

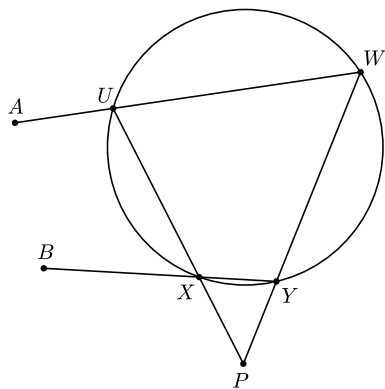
Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.
Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Dwadzieścia lat później



W numerze 1/1982 rozpoczęliśmy serię *Zadań, których nie umiemy rozwiązać* następującym:

Dany jest okrąg o i trzy punkty A , B i P . Narysować proste przez A i B wyznaczające na okręgu takie cięciwy UW i XY , żeby proste UX i WY przecinały się w punkcie P .

Po upływie prawie pół roku otrzymaliśmy rozwiązanie od naszego Czytelnika, Karola Kamińskiego (wówczas ucznia V klasy Technikum Mechanicznego w Piotrkowie Trybunalskim) zawierające opis konstrukcji (samą linijką!), ale bez dowodu poprawności. Nasz Czytelnik na nasze monity odpisał, że tak wychodzi i już. Musieliśmy sami przeprowadzić ten dowód, co się w końcu udało i zamieściliśmy go wraz z konstrukcją w numerze 1/1983.

Dzisiaj, po ponad 20 latach, przedstawiamy nowe, zupełnie inne rozwiązanie tego problemu. Znalazł je Michał Jastrzębski z XIV LO w Warszawie. Jak widać, uczniowie przez te 20 lat nic nie stracili ze swoich talentów.

Redakcja

* * *

Powyższe zadanie rozwiązałem w następujący sposób.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, w którym zarówno A , jak i P leżą na zewnątrz okręgu o . Załóżmy, że dane mamy punkty: U , W , X , Y , spełniające warunki zadania. Rozważmy inwersję I_P o środku w punkcie P względem okręgu prostopadłego do o , czyli taką w której okrąg o pozostanie stały. W inwersji tej obraz punktu Q będziemy oznaczać przez Q' . Wówczas $W = Y'$ oraz $U = X'$. Niech l będzie prostą przechodzącą przez punkty: X , Y , B . Jej obrazem w inwersji I_P będzie okrąg l' przechodzący przez punkty: X' , Y' , B' oraz P (jako środek inwersji). Oznacza to, że okrąg l' przechodzi przez punkty: U , W , B' oraz P .

Punkt A leży na prostej UW , a tym samym na osi potęgowej okręgów o i l' . Rozważmy teraz inwersję I_A o środku w punkcie A zachowującą okrąg o . W inwersji tej obraz punktu Q oznaczamy będziemy przez Q'' . Ponieważ A ma równe potęgi względem o i l' , więc inwersja I_A zachowa również okrąg l' . Tym samym, ponieważ $P \in l'$, więc również $P'' \in l'$. Ostatecznie widzimy, że okrąg l' przechodzi przez punkty P , B' oraz P'' , które jednoznacznie go wyznaczają. Na okręgu tym leżą również punkty U i W .

Konstrukcję szukanych punktów możemy więc przeprowadzić w następujący sposób. Konstruujemy punkty B' oraz P'' , a następnie opisujemy na trójkącie $PB'P''$ okrąg. Punkty przecięcia tego okręgu z okręgiem o będą punktami U i W . Znając punkty

U i W , bez problemu znajdujemy brakujące punkty X i Y . Dowód poprawności konstrukcji przeprowadzamy, rozumując w drugą stronę.

Podana konstrukcja „nie zadziała”, jeżeli punkt P lub punkt A leży wewnątrz okręgu o . Rzeczywiście, jeżeli np. punkt P leży wewnątrz okręgu o , to nie istnieje inwersja o środku w punkcie P , zachowująca okrąg o . W takim przypadku rozpatrujemy przekształcenie

$$H_P = S_P \circ I_P,$$

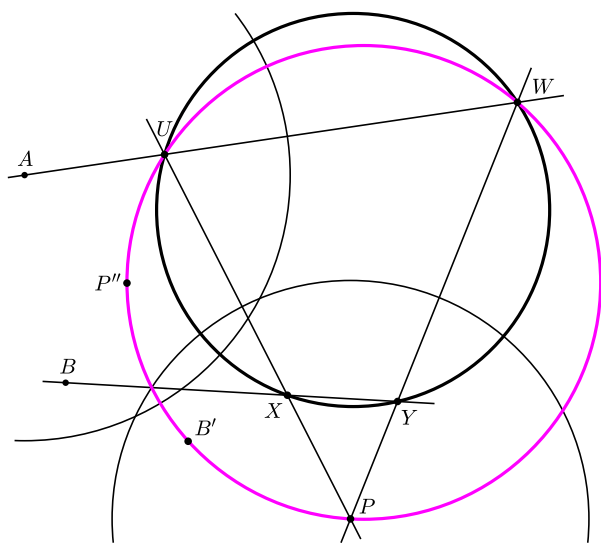
będące złożeniem inwersji o środku w punkcie P i promieniu równym pierwiastkowi z wartości bezwzględnej potęgi punktu P względem okręgu o , z symetrią środkową względem punktu P .

Przekształcenie to zachowuje okrąg o . Analogicznie, jeżeli punkt A leży wewnątrz okręgu o , zamiast inwersji I_A będziemy rozpatrywać przekształcenie

$$H_A = S_A \circ I_A.$$

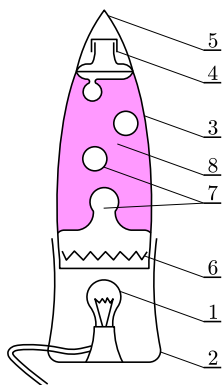
Przy przekształceniu H_P prosta nieprzechodząca przez punkt P przejdzie na okrąg przechodzący przez P . W szczególności, prosta XYB przejdzie na okrąg l' przechodzący przez punkty: U , W , P , B' , gdzie przez Q' oznaczamy obraz punktu Q w przekształceniu H_P . Jeśli teraz punkt A leży na zewnątrz okręgu o , to przeprowadzamy takie rozumowanie, jak na początku rozwiązania. W przeciwnym przypadku rozpatrujemy przekształcenie H_A zachowujące okrąg o . Ponieważ punkt P leży na osi potęgowej okręgu o i okręgu l' , więc H_A zachowuje również okrąg l' . Dalszą część rozumowania prowadzimy tak, jak w pierwszym przypadku.

Michał JASTRZĘBSKI



Sześć w jednym, czyli jak działa lampa lawa

Stanisław
BEDNAREK*



Rys. 1. Budowa lampy lawa:

- 1 - żarówka,
- 2 - podstawa,
- 3 - naczynie szklane,
- 4 - korek,
- 5 - kołpak,
- 6 - spiralka,
- 7 - wosk lub parafina,
- 8 - mieszanina wody i alkoholu lub alkoholu i gliceryny.

W sklepach z artykułami elektrotechnicznymi lub w sklepach z gadżetami można znaleźć lampę o bardzo interesującym działaniu, dającą niepowtarzalne efekty podczas obserwacji, znaną pod nazwą lampa lawa. Lampa ta została po raz pierwszy skonstruowana przez Edwarda Cravena Walkera w 1963 r. i opatentowana w Anglii 16 marca 1964 r. Właścicielem patentu na lampę lawa jest również firma Haggerty Enterprises Inc. ze Stanów Zjednoczonych.

Budowa lampy lawa przedstawiona jest na rysunku 1. W dolnej części lampy znajduje się niewielka żarówka o mocy 25–40 W zasilana z sieci elektrycznej o napięciu 230 V. Żarówka umieszczona jest w otwartej od góry, cylindrycznej, nieprzezroczystej obudowie będącej podstawą, i stanowi źródło światła oraz ciepła zapewniające działanie lampy. Na podstawie nad żarówką ustawione zostało zamknięte od góry korkiem szklane naczynie, przypominające kształtem butelkę lub kadłub rakiety. Korek zamykający naczynie nakryty jest nieprzezroczystym kołpakiem w kształcie stożka lub dziobu rakiety. Wewnątrz butelki w jej dolnej części znajduje się zabarwiony wosk lub parafina. Pozostała część wnętrza butelki wypełniona jest prawie w całości cieczą o odpowiednio dobranej gęstości. Może to być np. mieszanina wody i alkoholu lub alkoholu i gliceryny. Dla poprawy skuteczności działania lampy na dnie naczynia umieszcza się często metalową spiralkę tworzącą okrąg.

Zasada działania lampy lawa jest następująca. Zabarwiony wosk lub parafina początkowo znajduje się na dnie naczynia w postaci ciała stałego. Ich gęstość jest większa od gęstości mieszaniny cieczy znajdującej się w naczyniu. Tylko niewielka część energii elektrycznej pobieranej z sieci przez żarówkę (poniżej 1%) zmienia się w energię świetlną. Prawie cała energia elektryczna ulega przemianie na energię wewnętrzną włókna żarówki, które w wyniku tego rozżarza się do czerwoności. Gorące włókno wypromieniowuje energię wewnętrzną w postaci ciepła. Ciepło to pochłaniane jest przez wosk lub parafinę i przez podstawę lampy. Temperatura wosku lub parafiny wzrasta, osiągając po pewnym czasie zakres temperatur topnienia. Dla ścisłości należy tu dodać, że ciała o bezpostaciowej budowie wewnętrznej – ciała amorficzne, np. wosk lub szkło, w odróżnieniu od ciał krystalicznych, np. lodu, nie mają dokładnie określonej temperatury topnienia. Ciała amorficzne zmieniają się w ciecz w pewnym zakresie temperatur, stając się początkowo miękkie, następnie ciągliwe, a w końcu ciekłe, np. dla parafiny zakres ten wynosi 38–55 °C. Ponieważ wosk lub parafina są złymi przewodnikami ciepła, dodana została metalowa spiralka w kształcie okręgu, która ułatwia rozproszczenie ciepła w całej objętości tych substancji.

Wraz ze wzrostem temperatury zwiększają się objętości wosku lub parafiny i mieszaniny cieczy w naczyniu. Ponieważ masy tych substancji pozostają stałe, to ich gęstości ulegają zmniejszeniu. Gęstość wosku lub parafiny maleje jednak szybciej ze wzrostem temperatury niż gęstość mieszaniny cieczy. Szybkość tych zmian charakteryzują ilościowo współczynniki rozszerzalności objętościowej, które dla wody i alkoholu etylowego wynoszą odpowiednio $2,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ oraz $11,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, natomiast dla parafiny współczynnik ten równa się $43,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Dlatego też w pewnej temperaturze ich gęstość staje się mniejsza od gęstości tej mieszaniny. Jak wiadomo, na każde ciało zanurzone w cieczy – w tym również na inną ciecz, działa siła wyporu skierowana pionowo w górę. Jeżeli gęstość tego ciała jest mniejsza od gęstości cieczy, to wówczas siła wyporu, działająca na ciało, jest większa od jego ciężaru i ciało pod wpływem tej siły wypływa z cieczy ku górze. Taka sytuacja ma właśnie miejsce w rozgrzanej lampie lawa. Zjawisko transportu ciepła połączone z transportem masy, które tu zachodzi, nazywa się konwekcją.

Ciekły wosk lub parafina unosi się ku górze w postaci kul odrywających się majestatycznie od wosku lub parafiny znajdujących się w dolnej części naczynia (fot.). Kulisty kształt odrywających się porcji wosku lub parafiny spowodowany jest siłami napięcia powierzchniowego. Siły te zakrzywiają



Fot. Lampa lawa w akcji.

*Instytut Fizyki Uniwersytetu Łódzkiego

powierzchnię cieczy, starając się nadać jej taki kształt, przy którym pole tej powierzchni osiąga wartość minimalną – takim właśnie kształtem jest kształt kulisty. Powolne tworzenie się kul cieczy i ich powolny ruch ku górze spowodowane są z kolei siłami lepkości, skierowanymi przeciwnie do kierunku ruchu. Wartość tych sił wzrasta wprost proporcjonalnie do wartości prędkości i promienia kul. Dlatego siły te ograniczają prędkość ruchu kul, które poruszają się w przybliżeniu ruchem jednostajnym.

Górna część naczynia znajduje się dalej od żarówki i jej temperatura jest niższa niż części dolnej. Kiedy kule wosku lub parafiny dotrą do wierzchołka naczynia, oddają swoją energię wewnętrzną w postaci ciepła, ulegają ochłodzeniu i krzepną. Skrzepnięte kule mają większą gęstość niż otaczająca je mieszanina cieczy i zaczynają poruszać się w kierunku dolnej części naczynia. Tu znowu ogrzewają się, topnieją i zaczynają poruszać ku górze. W ten sposób cały proces powtarza.

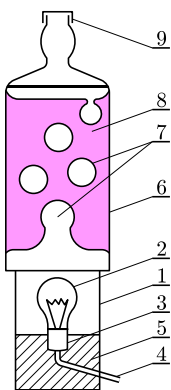
Podsumowując przeprowadzone dotychczas rozważania, łatwo zauważyć, że w działaniu lampy lawa wykorzystanych zostało sześć umiejętnie powiązanych zjawisk fizycznych. Są to: rozszerzalność cieplna, topnienie, tworzenie się kropli, konwekcja, ruch w ośrodku lepkiem, krzepnięcie. Zawarte tutaj stwierdzenie tłumaczy tytuł tego artykułu. Lampę lawa można również traktować jako pewnego rodzaju silnik cieplny, w którym energia wewnętrzna włókna żarówki zmienia się częściowo na pracę wykonywaną podczas unoszenia się kropli wosku lub parafiny.

Jak wspomniano na początku, lampę lawa można kupić w sklepie z artykułami elektrycznymi lub w sklepie z gadżetami. Nie jest ona jednak tania i kosztuje od kilkudziesięciu do ponad stu złotych. Dlatego też celowe jest samodzielne zbudowanie takiej lampy. Do wykonania tego zadania potrzebne będą następujące przedmioty i materiały: żarówka o mocy 25–40 W na napięciu 230 V z oprawką, około 1,5 m dwużyłowego przewodu, wtyczka sieciowa, blaszana puszka o wysokości około 10–12 cm, np. od groszku konserwowego, szklana butelka o pojemności 0,5 l z metalową nakrętką, gips, woda, denaturat i parafina z 2–3 świeczek.

W pobliżu dna puszki robimy niewielki otwór i przekładamy przez niego przewód (rys. 2). Końce przewodu podłączamy do oprawki żarówki i wtyczki sieciowej. Przygotowujemy mieszaninę gipsu z wodą i wlewamy ją do puszki, a oprawkę żarówki ustawiamy na dnie w równej odległości od bocznej ściany puszki. Kiedy po kilku minutach gips stwardnieje, będziemy mieli oprawkę zamocowaną w puszcze. Odstawmy puszkę na kilka godzin aż do wyschnięcia gipsu, wtedy do oprawki będziemy mogli wkręcić żarówkę i bezpiecznie włączyć ją do sieci elektrycznej. Bańka wkręconej żarówki nie powinna wystawać ponad górną krawędź puszki. W ten sposób wykonaliśmy podstawę lampy.

Następnie ostrożnie roztopiamy świece i uzyskaną parafinę wlewamy do butelki. Butelkę ustawiamy na puszcze stanowiącej podstawę lampy i włączamy żarówkę do sieci elektrycznej. Do butelki nalewamy wody, wypełniając nią około 0,6 objętości. Stopiona parafina powinna zacząć wypływać ku górze. Wtedy do butelki dolewamy powoli denaturatu, aż kulki stopionej parafiny zaczną opadać. Obserwujemy jeszcze przez pewien czas zachowanie się parafiny. Jeżeli jej obieg jest prawidłowy, to zakręcamy butelkę i mamy gotową lampę lawa. Gdyby kulki parafiny zbyt szybko opadały, nie wznosząc się do górnej powierzchni mieszaniny wody i denaturatu, wówczas dolewamy wody. Należy jednak uważać, żeby nie wypełnić mieszaniną całej objętości butelki, ponieważ po zakręceniu ogrzana ciecz będzie wyciekać lub butelka może pęknąć.

Na zakończenie warto dodać, że spotyka się również uproszczone wersje lampy lawa, w których nie zachodzi zjawisko topnienia i krzepnięcia. W lampach tych stosuje się dwie niemieszające się cieczy o różnych gęstościach i współczynnikach rozszerzalności objętościowej, np. alkohol benzylový i wodny roztwór soli kuchennej.



Rys. 2. Samodzielnie wykonana lampa lawa:

- 1 – puszka po konserwie,
- 2 – żarówka,
- 3 – oprawka żarówki,
- 4 – przewód dwużyłowy,
- 5 – gips,
- 6 – butelka szklana,
- 7 – parafina,
- 8 – mieszanina wody i denaturatu,
- 9 – nakrętka.

SALT – nowe oko dla polskich astronomów

Paweł
PIETRUKOWICZ*



Akronim w tytule pochodzi od angielskiej nazwy Southern African Large Telescope – Wielkiego Teleskopu Południowoafrykańskiego, który po pięciu latach budowy został oficjalnie oddany do użytku 10 listopada 2005 roku. Ten 10,5-metrowy gigant stoi w Republice Południowej Afryki na płaskowyżu Karoo na wysokości 1759 m n.p.m., około 370 km na północny-wschód od Kapsztadu. Został zbudowany przez konsorcjum 11 instytucji naukowych z sześciu krajów: Republiki Południowej Afryki, Polski, Niemiec, Wielkiej Brytanii, Nowej Zelandii i Stanów Zjednoczonych. Polacy mają ponad 10-procentowy udział finansowy w przedsięwzięciu i dlatego będziemy mogli wykorzystać około 10% czasu obserwacyjnego. Uwzględniając warunki pogodowe, jest to około 20–25 nocy w roku.

Teleskop SALT został skonstruowany na podstawie doświadczeń zebranych przy budowie i eksploatacji bliźniaczego teleskopu HET (Hobby-Eberly Telescope), który działa od 1999 r. w Teksasie w USA. Zasadniczą cechą tych teleskopów jest ich stosunkowo niska cena. SALT kosztował 28 milionów dolarów, czyli około 20% wartości standardowego teleskopu tej samej wielkości (np. 10-metrowego teleskopu Kecka na Hawajach).

Na czym polegają owe oszczędności? Otóż, przede wszystkim chodzi o sposób poruszania się całego teleskopu. Jest on bowiem nachylony do horyzontu pod stałym kątem 53° i może obracać się tylko wokół osi pionowej. Co ciekawe, podczas obserwacji sam teleskop jest nieruchomy, a wybrany obiekt na niebie śledzą detektory umieszczone w kontenerze poruszającym się na szynach wysoko nad lustrem teleskopu. Samo lustro ma kształt sferyczny i składa się z 91 sześciokątnych elementów. Przy takiej konstrukcji wszystkie elementy są jednakowo wyszlifowane, mają małą grubość i są lekkie. Pod względem całkowitej powierzchni lustro teleskopu SALT jest największe na świecie i odpowiada jednemu 10,5-metrowemu zwierciadłu.

Obok głównego budynku teleskopu (wysokości 60 m i zwieńczonego kopułą o średnicy 25 m) stoi wieża z kulą na szczycie. Znajdujący się tam laser służy do precyzyjnego ustawiania każdego elementu lustra tak, by całe zachowało sferyczny kształt. Laser bowiem znajduje się w geometrycznym środku sferycznej powierzchni lustra, a operację korekcji wykonuje się o zmierzchu przed obserwacjami.

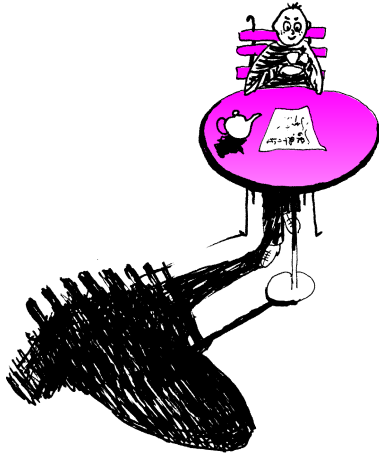
Obserwacje SALTem są dokonywane w efektywnym systemie kolejkowym. Mianowicie raz na kilka miesięcy astronomowie składają ściśle propozycje obserwacyjne, komisja zaś decyduje o przyznaniu czasu i nadaje priorytety wybranym projektom. Później lokalna obsługa przy teleskopie wykonuje obserwacje, a następnie wysyła dane wnioskodawcom. W takim systemie bardzo równomiernie wykorzystywany jest czas na teleskopie. Przykładowo w noc o nienajlepszej pogodzie wykonywane są obserwacje, które nie wymagają nadszyczej dobrych warunków pogodowych i zazwyczaj mają niższy priorytet. Ponadto w takiej strategii możliwe jest przerwanie normalnego trybu obserwacji i nastawienie teleskopu na nagle pojawiający się obiekt w celu monitoringu krótkotrwałego zjawiska. Do tego typu zjawisk należą wybuchy supernowych (które trwają kilka tygodni), a także błędące w ciągu kilku godzin poświaty po błyskach gamma (rejestrowanych w tym zakresie przez satelity).

Obecnie teleskop zaopatrzony jest w dwa detektory. Jednym z nich jest kamera SALTICAM, która służy do dokładnego nastawiania teleskopu na wybrany obiekt na niebie, a także uzyskiwania obrazów obiektów. Pole widzenia kamery wynosi 8×8 minut kwadratowych, czyli jest 11 razy mniejsze niż tarcza Księżyca w pełni. Drugim instrumentem jest spektrograf średniej rozdzielczości PFIS, umożliwiający rejestrowanie widm w zakresie długości fal od 320 nm do 900 nm. Planuje się, że w 2007 roku do teleskopu zostanie podłączony spektrograf wysokiej rozdzielczości HRS, który pozwoli mierzyć prędkości radialne źródeł światła z dokładnością kilku m/s. Tak precyzyjne pomiary

* Centrum Astronomiczne
im. M. Kopernika PAN

pomogą w poszukiwaniach planet okrążających inne gwiazdy, gdyż w takich układach stosunkowo małe planety wywołują bardzo niewielkie ruchy macierzystej gwiazdy wokół wspólnego środka masy.

Poza poszukiwaniem planet pozasłonecznych astronomowie chcą określać parametry gwiazd podwójnych w gromadach gwiazdowych, co umożliwi wyznaczenie ich odległości. Interesujące są również badania nad ewolucją układów kataklizmicznych – podwójnych układów gwiazd, w których biały karzeł ściąga na siebie materię z towarzyszącej mu chłodnej gwiazdy w sposób często prowadzący do wybuchów. Analiza widmowa umożliwi także badanie składu chemicznego małych ciał Układu Słonecznego. Szczególne zainteresowanie budzą tu słabe planetoidy, okrążające Słońce poza orbitą Neptuna i reprezentujące cegiełki pierwotnej materii, z której zrodził się nasz układ planetarny. Innym niezmiernie ciekawym tematem jest badanie dynamiki pobliskich galaktyk w celu wyznaczenia ilości zawartej w nich nieświecącej (ciemnej) materii. Ma to pomóc w rozwikłaniu problemów dotyczących budowy i ewolucji całego Wszechświata.



To tylko krótki opis możliwości nowego gigantycznego teleskopu w Południowej Afryce. Pierwsze obserwacje naukowe zostały wykonane już jesienią 2005 roku w trakcie fazy testowej. Dotyczyły one układu kataklizmicznego, w którym biały karzeł ma bardzo silne pole magnetyczne (30 milionów razy silniejsze od ziemskiego), a materia z towarzysza opada w rejonach jego biegunów magnetycznych. Obserwacje potwierdziły obecność tzw. gorących plam w tych miejscach oraz pozwoliły na wyznaczenie ich rozmiarów. Teraz, skoro teleskop SALT działa normalnie, powinniśmy tylko nasłuchiwać wieści o nowych odkryciach astronomicznych dokonanych za jego pomocą.

Więcej informacji można znaleźć na stronie <http://salt.camk.edu.pl>



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1138. Dane są takie liczby całkowite a, b , że równanie $x^2 + ax + 1 - b = 0$ ma dwa pierwiastki będące różnymi od 0 liczbami całkowitymi. Wykazać, że liczba $a^2 + b^2$ jest liczbą złożoną.

Rozwiązanie na str. 6

M 1139. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC (rys.), przy czym

$$\sphericalangle BCD - \sphericalangle ACD = 90^\circ.$$

Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą CD , a punkt M jest środkiem odcinka AB . Obliczyć długość odcinka PM , wiedząc, że $BC = a$ oraz $AC = b$.

Rozwiązanie na str. 7

M 1140. Na przyjęciu spotkało się 20 osób. Okazało się, że każdy z obecnych zna co najmniej 10 z nich. Wykazać, że spośród osób obecnych na przyjęciu można wyłonić cztery i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział obok swojego znajomego. (Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .)

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 671. Do Księżyca zbliża się statek kosmiczny z wyłączonym napędem. Prędkość początkowa statku, w dużej odległości od Księżyca, była równa zero. Na jakiej wysokości nad powierzchnią należy włączyć silnik hamujący, zapewniający miękkie lądowanie, jeśli daje on opóźnienie równe $5g$? Przyspieszenie spadku swobodnego na powierzchni Księżyca jest 6 razy mniejsze niż na Ziemi, promień Księżyca r jest równy około $1,7 \cdot 10^3$ km. Masę statku można uznać za zaniedbywalnie małą.

Rozwiązanie na str. 16

F 672. Wzdłuż równika, w kierunku ze wschodu na zachód, rzucono kamień z taką prędkością v_0 , że bardzo daleko od Ziemi jego prędkość stała się równa zero. Taki sam kamień rzucono wzdłuż równika z taką samą prędkością początkową, ale w przeciwną stronę – z zachodu na wschód. Z jaką prędkością v będzie poruszał się ten kamień w bardzo dużej odległości od Ziemi? Długość równika l jest równa $4 \cdot 10^4$ km, okres obrotu Ziemi to jedna doba, promień Ziemi to $R = 6,4 \cdot 10^3$ km. Przyjmując, że przyspieszenie swobodnego spadku na powierzchni Ziemi wynosi $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie na str. 16



O średnich w trapezie

Janusz MATKOWSKI*

Rozwiązanie zadania M 1138.

Niech x_1 i x_2 będą pierwiastkami danego równania. Korzystając ze wzorów Viète'a, uzyskujemy

$$x_1 + x_2 = -a \quad \text{oraz} \quad x_1 x_2 = 1 - b.$$

Stąd

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1 x_2)^2 = (1 + x_1^2)(1 + x_2^2).$$

Oba czynniki są większe od 1, a więc liczba $a^2 + b^2$ jest złożona.

W artykule *Średnie w trapezie*, „Delta” 10(377)/2005, Joanna Jaszusńska daje geometryczne interpretacje czterech symetrycznych średnich: harmonicznej H , geometrycznej G , arytmetycznej A i kwadratowej K , jako długości pewnych poziomych odcinków w trapezie i, opierając się na tych interpretacjach, dowodzi znanych nierówności.

Wszystkie z wymienionych tutaj średnich należą do rodziny *średnich potęgowych ważonych* $A_w^{[p]} : (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)$, określonych wzorem

$$A_w^{[p]}(a, b) := \begin{cases} (wa^p + (1-w)b^p)^{1/p}, & p \neq 0, \\ a^w b^{1-w}, & p = 0. \end{cases}$$

dla $p \in \mathbb{R}$ oraz $w \in (0, 1)$. Liczbę w nazywa się *wagą średniej*. Łatwo sprawdzić, że

$$\lim_{p \rightarrow 0} A_w^{[p]}(a, b) = a^w b^{1-w} = A_w^{[0]}(a, b).$$

Średnia $A_w^{[p]}$ jest symetryczna, tzn. spełnia warunek $A_w^{[p]}(a, b) = A_w^{[p]}(b, a)$ dla wszystkich $a, b > 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $w = \frac{1}{2}$. Średnie $A^{[p]} := A_{1/2}^{[p]}$ nazywane są *średnimi potęgowymi*. Zauważmy, że

$$A = A^{[1]}, \quad H = A^{[-1]}, \quad K = A^{[2]}, \quad G = A^{[0]}.$$

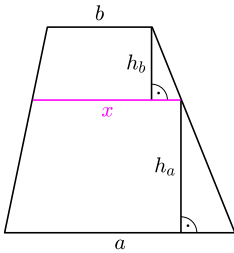
Średnia G odgrywa w rodzinie tych średnich centralną rolę. Mianowicie,

$$G \circ (A_w^{[p]}, A_w^{[-p]}) = G, \quad p \in \mathbb{R}, w \in (0, 1),$$

czyli G jest *niezmiennicza* ze względu na parę średnich $(A_w^{[p]}, A_w^{[-p]})$.

Odpowiadając na pierwsze z dwóch pytań J. Jaszusńskiej, dajemy tutaj interpretacje geometryczne niektórych średnich potęgowych ważonych oraz średnich ważonych kontra-harmonicznych.

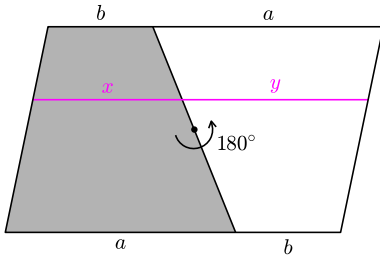
Średnie arytmetyczne ważne. Ustalmy $w \in (0, 1)$ i podzielmy trapez o podstawach długości a i b , $a \neq b$, odcinkiem równoległym do podstaw, o długości x , na dwa trapezy, w taki sposób, że przy oznaczeniach jak na rysunku 1,



Rys. 1

$$\frac{h_a}{h_a + h_b} = w.$$

Wtedy $x = wa + (1-w)b = A_w(a, b)$ jest średnią arytmetyczną ważoną. Obracając trapez względem środka jednego z ramion o 180° , tak jak w artykule J. Jaszusńskiej, otrzymujemy równoległobok, który jest sumą dwóch trapezów (rys. 2). Przedłużenie odcinka o długości x dzieli obrócony trapez odcinkiem o długości y . Ponieważ $x + y = a + b$, więc $y = (1-w)a + wb = A_{1-w}(a, b)$, co oznacza, że



Rys. 2

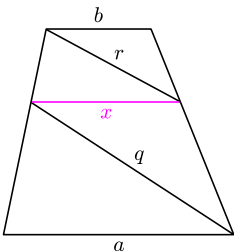
$$A(A_w(a, b), A_{1-w}(a, b)) = A.$$

Ta równość oznacza, że średnia arytmetyczna A jest niezmiennicza ze względu na parę średnich (A_w, A_{1-w}) .

Średnie geometryczne ważne. Średnią geometryczną można także otrzymać, dzieląc trapez odcinkiem poziomym o długości x na dwa trapezy tak, aby ich przekątne o długości r i q były równoległe (rys. 3). Z podobieństwa trójkątów wynika, że

$$\frac{a}{q} = \frac{x}{r} \quad \text{i} \quad \frac{b}{r} = \frac{x}{q}, \quad \text{a stąd} \quad x = \sqrt{ab} = G(a, b).$$

Dla każdego $w \in (0, 1)$ istnieje dokładnie jeden poziomy odcinek w trapezie o długości x , taki że $\frac{x}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^w$. Oczywiście $x = a^w b^{1-w} = A_w^{[0]}(a, b)$ jest średnią geometryczną ważoną. Czy takie odcinki mają jakąś ciekawszą interpretację geometryczną?



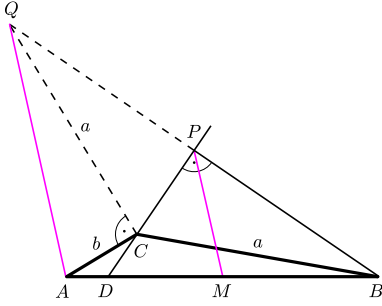
Rys. 3

* Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonomometrii, Uniwersytet Zielonogórski



Rozwiązanie zadania M 1139.

Oznaczmy przez Q punkt symetryczny do punktu B względem punktu P .



Wówczas $BC = QC$ oraz $AQ = 2PM$.

Ponadto

$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle QCP = \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCP = \\ = \sphericalangle ACD + (180^\circ - \sphericalangle BCD) = 90^\circ,$$

skąd otrzymujemy $\sphericalangle ACQ = 90^\circ$. Zatem

$$PM = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + QC^2} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Średnie kwadratowe ważone. Ustalmy dowolnie $w \in (0, 1)$ i podzielmy trapez o polu S odcinkiem o długości x , równoległym do podstaw, na dwa trapezy o polach wS i $(1-w)S$. Przyjmując oznaczenia jak na rysunku 1, otrzymujemy

$$S = \frac{a+b}{2}(h_a + h_b) = \frac{a+b}{2} \left(\frac{2wS}{a+x} + \frac{2(1-w)S}{b+x} \right),$$

skąd wynika, że

$$x = A_w^{[2]}(a, b) := \sqrt{(1-w)a^2 + wb^2}.$$

Ponieważ $G \circ (A_w^{[2]}, A_w^{[-2]}) = G$, więc nasuwa się pytanie, czy również średnią $A_w^{[-2]}(a, b)$ można zinterpretować geometrycznie.

Średnie harmoniczne ważone. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1. Ponieważ pole trapezu jest sumą pól trapezów mniejszych, więc

$$(*) \quad \frac{a+b}{2}(h_a + h_b) = \frac{a+x}{2}h_a + \frac{x+b}{2}h_b.$$

Przyjmując tutaj, że $w \frac{h_b}{h_a} = (1-w) \frac{b}{a}$ dla pewnego $w \in (0, 1)$, otrzymujemy

$$x = \frac{ab}{wa + (1-w)b} = A_w^{[-1]}(a, b),$$

a więc x jest średnią harmoniczną ważoną a i b z wagą w . Jeśli $\frac{h_b}{h_a} = \frac{b}{a}$, to

$$x = \frac{2ab}{a+b} = A_{1/2}^{[-1]}(a, b) = H(a, b).$$

Średnie kontra-harmoniczne ważone. Przyjmując, że $(1-w) \frac{h_b}{h_a} = w \frac{a}{b}$ dla pewnego $w \in (0, 1)$, z $(*)$, po prostych rachunkach, otrzymujemy

$$x = H_w^*(a, b) := \frac{wa^2 + (1-w)wb^2}{wa + (1-w)b}.$$

Gdy $\frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b}$ (tj. dla $w = \frac{1}{2}$), otrzymujemy stąd

$$x = H^*(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a+b}.$$

Funkcja $H_w^* : (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)$ jest średnią (bo $\min(a, b) \leq H_w^*(a, b) \leq \max(a, b)$) i nazywa się *średnią kontra-harmoniczną ważoną*, a średnia $H^* := H_{1/2}^*$ – *średnią kontra-harmoniczną*. Motywacją ich nazwy jest łatwa do sprawdzenia relacja

$$A \circ (H_w, H_w^*) = A,$$

która oznacza, że średnia arytmetyczna A jest niezmiennicza ze względu na parę średnich (H_w, H_w^*) . Średnia H^* należy do rodziny średnich Giniego $M^{[p]} : (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)$ określonych następująco:

$$M^{[p]}(a, b) := \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}, \quad (p \in \mathbb{R}).$$

Zauważmy, że $M^{[1]} = A$, $M^{[1/2]} = G$ i $M^{[0]} = H$ oraz, że $M^{[p]}$ nie jest średnią potęgową dla $p \notin \{1, \frac{1}{2}, 0\}$

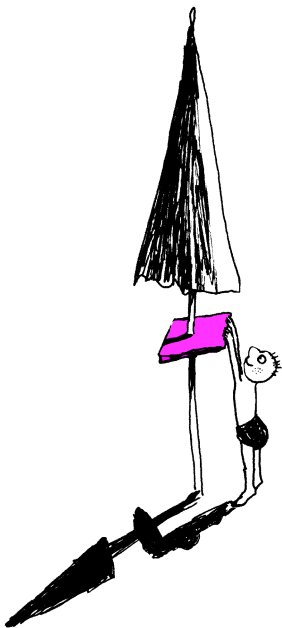
Uwaga. Można udowodnić, że dla dowolnych dwóch średnich istnieje dokładnie jedna ich średnia niezmiennicza. Na ogół nie daje jej się zapisać efektywnym wzorem, jednak zawsze jest ona granicą łatwego do skonstruowania ciągu rekurencyjnego. Ważnym przykładem zastosowania średnich niezmienniczych jest średnia M spełniająca równanie $M \circ (A, G) = M$, zwana *średnią arytmetyczno-geometryczną*. Otrzymuje się ją ze wzoru

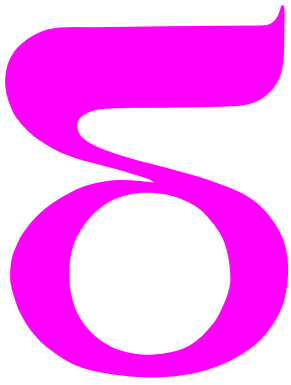
$$M(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n b_n},$$

gdzie ciąg $(a_n, b_n)_{n=0}^\infty$ określony jest rekurencyjnie:

$$(a_0, b_0) := (a, b), \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n} \right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

czyli $M(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A, G)^n(a, b)$, gdzie $(A, G)^n$ oznacza n -tą iterację odwzorowania (A, G) . W 1799 roku Gauss zauważył, że przybliżenia średniej M pozwalają na szybkie obliczanie pewnych całek eliptycznych.

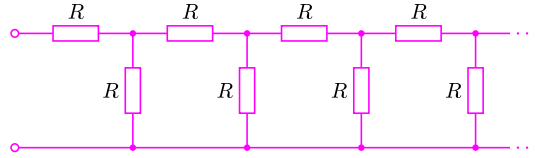




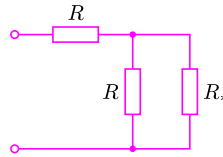
mała delta

Teoria liczb a opór zastępczy

W *Delcie* 2/2003 opisałam metodę obliczania oporu zastępczego nieskończonych układów elektrycznych. Metodę tę można zastosować do następującego układu.

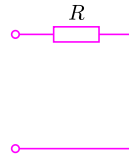


Ponieważ układ ten jest nieskończony, więc opór samopodobnej części układu bez pierwszych dwóch oporników jest równy oporowi R_* całego układu

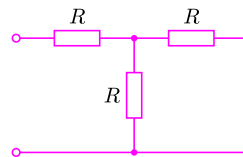


Czyli $R_* = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_*}}$ i stąd $R_* = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Problem ten można rozwiązać też inną metodą.

Układ z jednym opornikiem



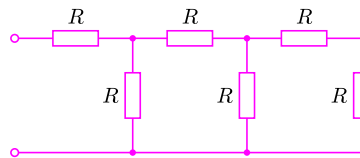
ma opór zastępczy $R_1 = R$. Po dodaniu pierwszego oczka sieci



opór zastępczy całości wynosi

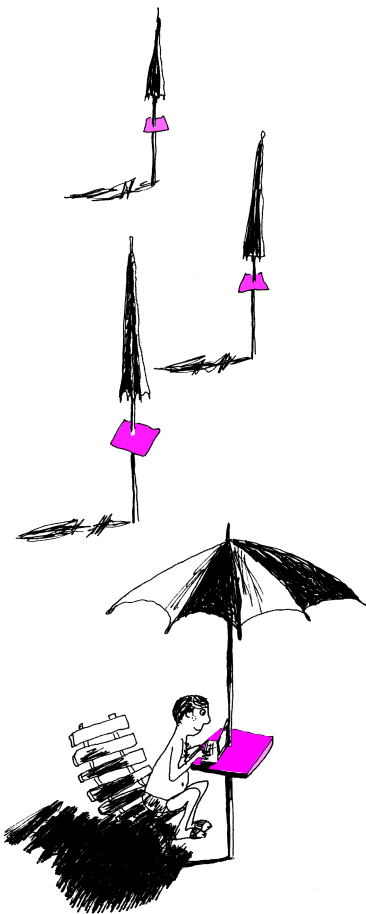
$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} R.$$

Po dodaniu jeszcze kolejnego



mamy

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} R.$$



Dodając w ten sposób kolejne oporniki, otrzymujemy następujące wyrażenie na opór nieskończonej sieci oporników z rysunku 1

$$R_{\infty} \equiv R_* = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} R.$$

Patrz artykuł na str. 10–11.

Wyrażenie $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$ nazywa się ułamkiem łańcuchowym.

Z porównania ze wzorem na opór zastępczy wyprowadzonym na początku wynika, że powinno ono być równe $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Zobaczmy to inaczej.

Mamy

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Z drugiej strony

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

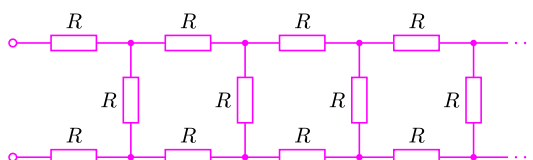
Wstawiając powyższą zależność do przedostatniej i powtarzając to, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}.$$

Liczba $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$ znana jest w matematyce jako tzw.

liczba φ . Opisuje ona „złoty podział”, czyli taki podział odcinka na dwie części, że część dłuższa ma się tak do krótszej, jak długość całego odcinka do jego dłuższej części. Stosunek długości części dłuższej do krótszej, zwany „boską proporcją”, jest równy φ właśnie.

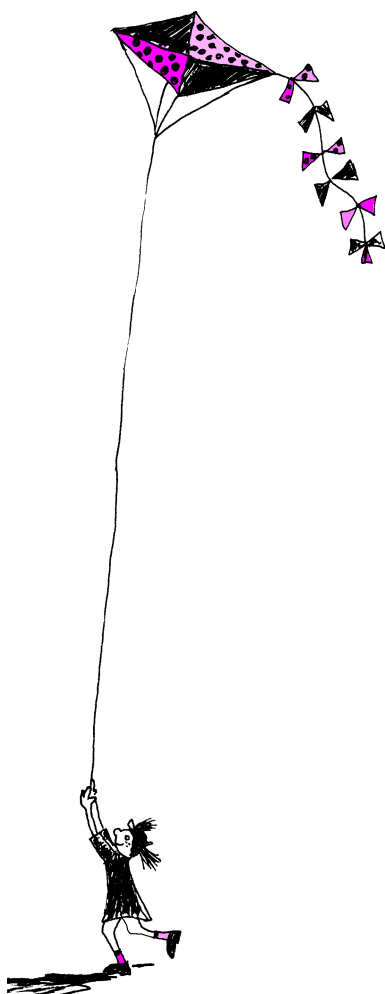
W podobny sposób można obliczyć opór zastępczy poniższego układu.



Postępujemy tak jak w poprzednim przykładzie, czyli dodajemy do układu kolejne oczka sieci i obliczamy za każdym razem opór zastępczy całości, otrzymując

$$R_{\infty} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} R.$$

W analogiczny do opisanego sposób można pokazać, że ten ułamek łańcuchowy jest równy $\sqrt{3}-1$. Przyjemność tę zostawiam Czytelnikowi.



Matą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY



Lepsze ułamki

Rozwiązanie zadania M 1140.

Wybermy dowolną osobę A oraz rozpatrzmy zbiór Z_A tych wszystkich osób, które znają osobę A . Jeśli wszystkie osoby ze zbioru Z_A znają się, to wybieramy dowolne trzy osoby B, C, D z tego zbioru. Wtedy każde dwie osoby ze zbioru $\{A, B, C, D\}$ znają się, a zatem możemy je posadzić przy okrągłym stole zgodnie z warunkami zadania.

Załóżmy więc, że w zbiorze Z_A istnieją dwie osoby B i C , które się nie znają. Osoba B zna osobę A , nie zna osoby C , a zatem wśród pozostałych 17 osób musi ona mieć co najmniej dziewięciu znajomych. Również osoba C wśród tych samych 17 osób ma co najmniej dziewięciu znajomych. Stąd wynika, że w tej grupie 17 osób istnieje osoba D , która zna zarówno B , jak i C . Wystarczy teraz posadzić osoby A, B, C, D przy okrągłym stole w tej właśnie kolejności.

Gdy wystartujemy do ułamka $\frac{1517}{1073}$ ze sposobem na skracanie opartym o wcześniejsze rozłożenie licznika i mianownika na czynniki pierwsze, długo będziemy szukali tego rozkładu. Podobnie będzie z ułamkiem $\frac{771}{146}$.

Oto niezawodna metoda, która – przy okazji – pokazuje jeszcze jedną postać, jaką można nadawać ułamkom. Przepis jest prosty: wyłącz całości, to, co ci zostało, odwróć do góry nogami, znów wyłącz całości, znów odwróć do góry nogami i dalej powtarzaj to (być może bez końca). Spróbujmy.

$$\begin{aligned} \frac{1517}{1073} &= 1 + \frac{444}{1073} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{185}{444}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{74}{185}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{37}{74}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy inną, bardziej fantastyczną postać ułamka: ułamek łańcuchowy. Gdy nie mamy ochoty na takie, zużywające wiele papieru, graficzne figle, zapisujemy to tak: $(1; 2, 2, 2, 2)$, ale tymczasem spróbujmy przekształcać ten ułamek z prawej na lewo:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{12}{29}}} = 1 + \frac{1}{\frac{29}{12}} = \frac{41}{29}.$$

Jak widać, wykonując tę operację tam i z powrotem, skróciliśmy ułamek: to, przez co skrócił się ostatni ułamek przy rozwijaniu w ułamek łańcuchowy (czyli 37), to właśnie największy wspólny dzielnik liczb 1517 i 1073. Nie będziemy dowodzili, że tak będzie się działo zawsze (pierwszy dostrzegł to Teajtetos z Aten w czasach Peryklesa, czyli 2400 lat temu). Sprawdźmy tylko, co ta metoda przyniesie w przypadku drugiego z ułamków wymienionych na początku. Nie będziemy tu wypisywali kolejnych postaci pojawiających się przy rozwijaniu tego ułamka w ułamek łańcuchowy, lecz tylko kolejno pojawiające się wyniki, powstające przy odwracaniu poprzednio otrzymanych ułamków właściwych:

$$\frac{771}{146} = 5 + \frac{41}{146}; \quad 3 + \frac{23}{41}; \quad 1 + \frac{18}{23}; \quad 1 + \frac{5}{18}; \quad 3 + \frac{3}{5}; \quad 1 + \frac{2}{3}; \quad 1 + \frac{1}{2}.$$

Otrzymaliśmy zatem ułamek łańcuchowy $(5; 3, 1, 1, 3, 1, 1, 2)$, który każdy chętny może sobie zapisać w rozwiniętej formie (gdy tylko ma dużo wolnego miejsca). Ale do rzeczy – rozwijany ułamek okazał się nieskracalny – żaden z wypisanych przed chwilą ułamków nie skracał się.

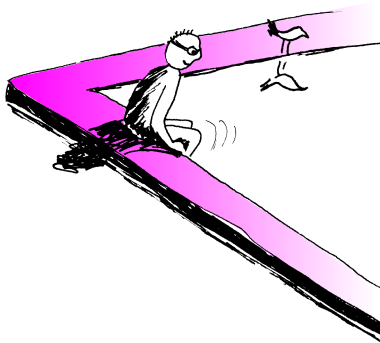
Obserwując choćby te dwa obliczenia, łatwo wywnioskować, że każda liczba wymierna rozwija się w skończony ułamek łańcuchowy (o ileż to piękniej, niż z młodszymi o tysiąclecie ułamkami dziesiętnymi). Ale w ułamki łańcuchowe można rozwijać też i inne liczby. Co więcej – robi się to w ten sam sposób. Oto przykład:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = \dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \end{aligned}$$

(mam nadzieję, że każdy wie, iż $(\sqrt{2} - 1)$ i $(\sqrt{2} + 1)$ to wzajemne odwrotności). A to, co po wielokropku, wynika z faktu, że gdy w obliczeniach pojawi się po raz drugi ta sama liczba (u nas była to liczba $(\sqrt{2} - 1)$), dalsze obliczenia będą się powtarzały. Otrzymaliśmy ułamek łańcuchowy okresowy z powtarzającą się stale dwójką, co się zapisuje $(1; \bar{2})$. Podobny przykład jest rozpatrywany w zadaniu o opornikach (w Małej Delcie). Bez oporników stwierdzamy (stosując tę samą metodę, co poprzednio), że

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

czyli $(0; \bar{1})$.



Dla dociekliwych:
wyrażenie

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

oznacza granicę ciągu

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

Ułamki łańcuchowe okresowe to rozwinięcia niewymiernych pierwiastków równań kwadratowych o współczynnikach całkowitych. Znow nie będziemy tego dowodzili, tylko obejrzymy przykład tego, jak to się dzieje. Może to być ostatni z rozpatrywanych przykładów (jeśli jakieś obliczenie można wykonać na kilka sposobów, to staje się ono bardziej poprawne – prawda?). Zauważmy, że

$$\text{gdy } x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}, \text{ to } x = \frac{1}{1 + x}.$$

Zatem $x(1+x) = 1$, czyli $x^2 + x - 1 = 0$, skąd mamy (wobec dodatniości poszukiwanego pierwiastka) $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Metoda rozwijania w ułamek łańcuchowy stosuje się nie tylko do liczb. Oto przykład geometrycznego (!) obliczenia stosunku przekątnej kwadratu do jego boku. W kwadracie $ABCD$ rysujemy ćwiartkę okręgu o środku A i promieniu AB . Przecina ona przekątną AC w punkcie E . Przed dalszym rysowaniem trzeba zauważyć, że $BS = SE = ET = TD = EC$ (bo styczne z jednego punktu do okręgu są jednakowej długości, rysunek jest – jak dotąd – symetryczny, a SCT to połówka kwadratu, oczywiście mniejszego). Teraz rysujemy półokrąg o środku S i promieniu SB . Wobec poprzedniego spostrzeżenia przechodzi on przez E . Oznaczmy drugi koniec jego średnicy przez F . Teraz liczymy jak poprzednio (wyłączanie całości i odwracanie)

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{CE}{CB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CF}{CE}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CE}{CB}} = (1; \overline{2}) = \sqrt{2}.$$

Trzecia z równości bierze się z podobieństwa trójkątów CBE i CEF : mają kąt przy wierzchołku C wspólny, a ponadto kąt CBE , czyli FBE (jako wpisany w mniejszy okrąg), jest równy kątowi FEC (jako dopisanemu opartemu na tym samym łuku – dla niezających tego pojęcia objaśnienie na marginesie). A ponieważ stosunek CE do CB się powtarza...

Najważniejszą bodaj własność ułamków łańcuchowych odkrył Lagrange. Okazuje się, że redukt ułamka łańcuchowego jest najlepszym przybliżeniem wymiernym rozwijanej liczby. Oto objaśnienia użytych terminów. Redukt ułamka łańcuchowego to on sam obcięty do jakiejś długości – np. $\frac{41}{29}$ jest reduktem $\sqrt{2}$ – prawda? Najlepsze przybliżenie wymierne jakiejś liczby to takie przybliżenie, że lepsze od niego musi mieć większy mianownik. Zatem z podanego przed chwilą przykładu wynika, że lepsze przybliżenie wymierne $\sqrt{2}$ niż $\frac{41}{29}$ musi mieć mianownik co najmniej 30. A lepsze od $\frac{7}{5}$ musi mieć mianownik większy od 5 – prawda?

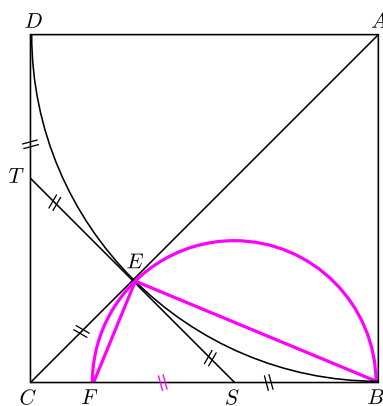
Na koniec jeszcze zwróćmy uwagę, że w zapisie ułamka łańcuchowego oddziela się poszczególne pozycje przecinkami. Czy można byłoby tego nie robić (tak, jak nie robimy tego zapisując ułamki dziesiętne)? Otóż nie. Na poszczególnych miejscach mogą się bowiem pojawiać dowolnie duże liczby. Np. $(1; 1000, 333)$ to łańcuchowy zapis liczby

$$1 + \frac{1}{1000 + \frac{1}{333}} = 1 + \frac{333}{333001} = \frac{333334}{333001},$$

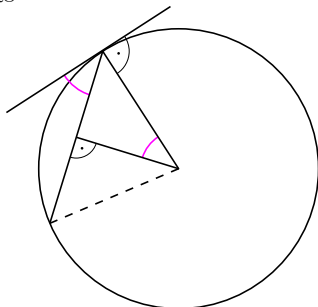
której nie ma powodu dyskryminować. Przy tej okazji można przedstawić jeden z nierozwiązanych dotąd problemów: czy w rozwinięciu łańcuchowym liczby $\sqrt[3]{2}$ występuje tylko skończona liczba różnych wyrazów?

I jeszcze uwaga natury filozoficzno-historycznej. Dlaczego to nie jesteśmy przyzwyczajeni do ułamków łańcuchowych, dlaczego nie ma ich w szkole? Bo prawie wcale ich nie używamy. A dlaczego ich nie używamy? Można spekulować na ten temat, sugerując, że np. dodawanie ułamków łańcuchowych czy ich mnożenie to byłby koszmar – ale może dobrych sposobów nie ma, bo ich dostatecznie intensywnie nie szukaliśmy? Wydaje się, że jedyna nauka płynąca z takich rozważań to dostrzeżenie, że kształt uprawianej matematyki nie jest jedyny możliwy, że mogło wszystko ułożyć się inaczej.

Marek KORDOS



Kąt dopisany to kąt między styczną do okręgu a jego cięciwą poprowadzoną z punktu styczności. Mówimy, że jest oparty na zawartym w jego wnętrzu łuku okręgu.



Wobec tego jest równy, jak widać na rysunku, połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku (kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych), a tym samym jest równy każdemu z kątów wpisanych w okrąg i opartych na tym samym łuku.

Hipoteza Beala

Już od 1994 roku wiadomo, głównie za sprawą Andrew Wileasa, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Wielkie Twierdzenie Fermata (WTF). Jeżeli $n \geq 3$ jest liczbą naturalną, to równanie

$$x^n + y^n = z^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z .

Jak uczy historia, udzielenie odpowiedzi na jakieś pytanie nie zamyka zwykle sprawy, ale prowadzi do szeregu nowych pytań. Tak jest też i w tym przypadku, a jednym z problemów czekających na rozstrzygnięcie jest tytułowa hipoteza.

Zanim przejdziemy do sedna, kilka słów o Andrew Bealu, bo tak nazywa się autor hipotezy. Wbrew temu, co można sądzić, nie jest on zawodowym matematykiem, choć jego profesja ma z matematyką sporo wspólnego. Andrew Beal zajmuje się mianowicie mnożeniem, a konkretnie pomnażaniem pieniędzy. Jest on bowiem właścicielem banku w Dallas w Teksasie, a matematyką zajmuje się amatorsko. Jak stał się autorem znanej hipotezy? W dobie informatyzacji banki posługują się licznymi komputerami, z których jednak sporo przez pół doby stoi bezczynnie. Aby nie marnować mocy obliczeniowej, Beal zaprogramował je do szukania rozwiązań równania Fermata – a nuż jakieś istnieje. Dopiero sukces Wileasa pokazał, że można spokojnie dać procesorom odpocząć i Beal postanowił zająć siebie i komputery czymś innym. Zwrócił się mianowicie ku następującemu, ogólniejszemu równaniu:

$$x^a + y^b = z^c, \quad a, b, c \geq 3, \quad x, y, z \geq 1,$$

$$a, b, c, x, y, z \text{ całkowite,}$$

w którym dopuszczamy różne wykładniki. Nazwijmy je, dla odróżnienia od poprzedniego, *równaniem Beala*.

Możemy przez chwilę sami poszukać rozwiązań, a jest ich całe mnóstwo. Na przykład

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Albo ogólniej:

$$[x(x^n + y^n)]^n + [y(x^n + y^n)]^n = (x^n + y^n)^{n+1}.$$

Można też otrzymać mnóstwo sporadycznych rozwiązań. Robimy to następująco: bierzemy prawie dowolną tożsamość arytmetyczną, na przykład,

$$3^3 + 1 = 28$$

i mnożymy obie strony przez, dajmy na to, 28^6 , otrzymując

$$2352^3 + 28^6 = 28^7.$$

Oto bardziej wyrafinowany przykład w podobnym stylu:

$$5^3 + 3 = 2^7 \quad | \cdot 3^{21},$$

$$10935^3 + 3^{22} = 54^7.$$

Rozważając przykłady tego typu, Beal doszedł do wniosku, że nie zna innych metod otrzymywania rozwiązań swojego równania, niż pomnożenie

Michał ADAMASZEK*

obu stron jakiejś tożsamości przez liczbę większą od 1. Komputerowa weryfikacja wielu początkowych rozwiązań potwierdziła to spostrzeżenie i doprowadziła Beala do sformułowania hipotezy:

Hipoteza Beala (HB). Jeżeli liczby naturalne $x, y, z \geq 1$ oraz $a, b, c \geq 3$ spełniają równanie

$$x^a + y^b = z^c,$$

to $\text{NWD}(x, y, z) > 1$.

Rozwiązania, w których $\text{NWD}(x, y, z) = 1$, nazywamy *pierwotnymi*. Hipoteza stwierdza więc, że *równanie Beala nie ma rozwiązań pierwotnych*. Dotychczas żadne takie nie jest znane, wiadomo też, że nie ma ich gdy wszystkie sześć zmiennych jest z przedziału $[1, 100]$. Kilkoro zapaleńców, w tym Beal, prowadziło badania komputerowe, ale od czasu ogłoszenia hipotezy (w 1997 roku) nie zapadły w tej kwestii żadne rozstrzygnięcia.

Czy założenie $a, b, c \geq 3$ jest bardzo istotne, tak jak dla równania Fermata założenie $n \geq 3$? Tak, gdyż dopuszczenie wykładników równych 2 daje rozwiązania pierwotne, na przykład

$$2^5 + 7^2 = 3^4$$

albo bardziej egzotycznie

$$1414^3 + 2213459^2 = 65^7.$$

Można zapytać, jakiego kalibru jest problem znalezienia dowodu HB (gdyby miała się ona okazać prawdziwa). Wygląda na to, że jest to zadanie bardzo trudne, gdyż HB jest ogólniejsza od WTF, którego dowód okazał się, mówiąc ogólnie, niezbyt elementarny. Zobaczmy, jak prostą konsekwencją HB jest WTF.

Stwierdzenie. $\text{HB} \Rightarrow \text{WTF}$.

Dowód. Nie wprost i metodą regresji. Załóżmy, że równanie Fermata ma rozwiązania dla pewnego $n \geq 3$ i niech x, y, z będzie takim rozwiązaniem, że x jest możliwie najmniejsze. Takie rozwiązanie jest jednocześnie rozwiązaniem równania Beala, więc na mocy HB wnosimy, że $x = dx', y = dy', z = dz'$ dla pewnego $d > 1$ i całkowitych dodatnich x', y', z' . Ale wówczas $x'^n + y'^n = z'^n$ i mamy rozwiązanie z $x' < x$. Sprzeczność z minimalnością x kończy dowód.

Autor dowodu lub kontrprzykładu do hipotezy Beala może zyskać nie tylko sławę, ale też sporą gotówkę. Andrew Beal wyznaczył bowiem nagrodę w wysokości $\$10^5$ za rozstrzygnięcie prawdziwości hipotezy. Efekty już widać: pierwsi matematycy-hochsztaplerzy publikują w internecie swoje „dowody” (przypomnijmy, że Wielkie Twierdzenie Fermata też było swoistym Świętym Graalem dla rzesz matematyków-amatorów). Niemniej do tej pory prawdziwego postępu nie ma. Poszukiwaczy łatwego zarobku ostrzegam jednak: matematycy szukają dowodu, a komputery w Dallas kontrprzykładu już ładnych parę lat...

Więcej informacji: <http://www.bealconjecture.com>
<http://www.math.unt.edu/~mauldin/beal.html>

*Student Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Fuzja na biurku

Nie wszyscy zdają sobie sprawę, że reakcja fuzji jądrowej jest najpowszechniejszym źródłem energii. Łączenie się lekkich jąder w cięższe jest reakcją silnie egzotermiczną, bo np. jądro helu jest lżejsze od dwóch jąder deuteru, z których może powstać. Żeby reakcja zaszła, jądra muszą jednak pokonać bardzo wysoką barierę kulombowską. Dlatego reakcja zachodzi dopiero wtedy, gdy jądra zderzają się z energią rzędu 100 keV, czyli przy temperaturze rzędu miliarda kelwinów.

Fuzja jest najpowszechniejsza, bo większość źródeł energii ma u podstaw energię słoneczną. Prawie jedyną formą energii, której nie można powiązać z działaniem gwiazd, jest właśnie fuzja termojądrowa zachodząca poza gwiazdami. Umiejętność jej kontrolowania mogłaby zapewnić ludzkości praktycznie niewyczerpany rezerwuuar energii.

Droga do tego wydaje się jednak bardzo daleka.

Dlatego za odpowiednik średniowiecznych poszukiwań kamienia filozoficznego można uważać badania nad tzw. zimną fuzją, czyli reakcją syntezy jądrowej, która mogłaby zachodzić w niskiej temperaturze i uwalniać energię netto.

Kilka lat temu obiegiła świat informacja o odkryciu takiej reakcji, ale doniesienia te okazały się nieporozumieniem. W ten sposób „zimna fuzja” stała się synonimem naukowej nieuczciwości lub nieudolności. Doświadczenia tego typu określa się obecnie raczej terminem „fuzji na biurku” (ang. *table top fusion*) i chodzą w nich bardziej o znalezienie sposobu na samo przeprowadzenie reakcji niż o źródło energii. Badania takie nie mają jednak charakteru wyłącznie poznawczego. Małe i stosunkowo tanie (tak w produkcji, jak i w eksploatacji) urządzenia, w którym zachodziłaby w miarę intensywne synteza jąder deuteru, byłoby cennym źródłem neutronów, gdyż jednym z kanałów tej reakcji jest produkcja jąder helu 3 z emisją neutronu o energii 2,45 MeV.

W lutym ukazał się artykuł [1], w którym taki, bliski komercjalizacji, nabiurkowy reaktor termojądrowy został opisany. Praca ta jest jednak tylko potwierdzeniem i rozszerzeniem o rok wcześniejszego doniesienia [2], w którym autorzy przedstawili praktyczną realizację własnego pomysłu [3], przekonująco dowodząc, że znaleźli sposób na efektywną zimną fuzję.

Ich sposób jest, pojęciowo, bardzo prosty. Zamiast uzyskiwać olbrzymią temperaturę, wystarczy przyspieszyć wcześniej zjonizowany deuter odpowiednią różnicą potencjałów i zderzyć z jakimś materiałem wzbogaconym również w deuter.

W tym celu autorzy wykorzystali piroelektryczny kryształ tantalenu litu LiTaO_3 (zjawisko piroelektryczne polega na generowaniu zaskakująco dużej różnicy potencjałów pod wpływem zmiany temperatury). Kryształ, od strony ładującej się dodatnio pod wpływem ogrzewania, został wyposażony w miedzianą tarczę z centralnie zamocowanym bardzo cienkim drucikiem wolframowym. W okolicy końca drucika natężenie pola elektrycznego przekracza 25 V/nm (przy potencjale kryształu 80 kV), co wystarcza do jonizacji deuteru, a zjonizowane atomy, czyli jądra deuteru, są już przyspieszane przez różnicę potencjałów generowaną przez kryształ.

Na drodze strumienia jąder ustawiono wzbogacony w deuter scyntylator plastikowy, od strony strumienia pokryty cienką warstwą uziemionego aluminium i przystawiony do fotopowielacza z drugiej strony. Z boku umieszczony został dodatkowy ciekły scyntylator w celu rejestracji protonów, wybijanych przez powstające w wyniku fuzji neutrony.

Pojedynczy cykl doświadczenia wyglądał w sposób następujący. Ciśnienie deuteru w komorze pomiędzy kryształem piroelektrycznym a tarczą było utrzymywane na poziomie 0,7 Pa. Najpierw kryształ był oziębiany (za pomocą ciekłego azotu) do temperatury 240 K. W 15. sekundzie włączane było grzanie kryształu. W 100. sekundzie rozpoczynała się rejestracja promieni X generowanych przez swobodne elektrony bombardujące kryształ. W 150. sekundzie, po osiągnięciu przez kryształ potencjału 80 kV, następowało gwałtowne włączenie się jonizacji deuteru. W 160. sekundzie sygnał od powstających neutronów rejestrowanych w dodatkowym scyntylatorze rósł powyżej tła. Począwszy od 170. sekundy jonizacja deuteru zachodziła już ze 100% skutecznością, więc wzrost prądu jonowego zmieniał się z eksponencjalnego na liniowy i trwał aż do wyłączenia grzania (po ogrzaniu kryształu o 40 K) w 220. sekundzie. Szczytowa intensywność promieniowania neutronowego wyniosła 800 Hz. Spektrum energetyczne wybijanych przez neutrony protonów było doskonale zgodne z oczekiwaną energią neutronów 2,45 MeV. Obserwowano opóźnienie sygnału rejestracji neutronu w stosunku do rejestracji jądra helu 3 odpowiadające oczekiwanemu czasowi przelotu neutronu do dodatkowego scyntylatora.

Co ciekawe, do pracy [2] dołączony został dodatkowy materiał [4] zawierający m.in. filmy prezentujące przebieg zbierania danych wraz z efektami uzyskanymi poprzez zamianę na dźwięk impulsów odpowiadających rejestracji promieni X (przez kryształ) i neutronów (przez dodatkowy scyntylator). Odtworzenie takiego filmu (słysząc dźwięk podobny do wydawanego przez licznik Geigera-Müllera) daje wrażenie, jakby fuzja zachodziła w naszym komputerze!

W tegorocznej pracy [1] autorzy użyli dwóch kryształów piroelektrycznych ustawionych naprzeciwko, co pozwoliło zwiększyć różnicę potencjałów, a tym samym zwiększyć intensywność fuzji oraz udało im się przeprowadzić doświadczenie bez potrzeby chłodzenia ciekłym azotem, co przybliżyło komercyjne zastosowanie takiego urządzenia, jako taniego źródła neutronów.

Piotr ZALEWSKI

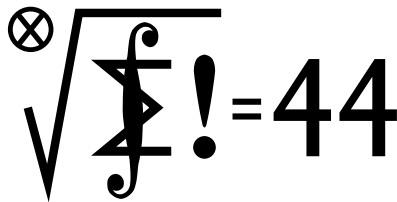
[1] J. Geuther, Y. Danon i F. Saglime, *Nuclear Reactions Induced by a Pyroelectric Accelerator*, Phys. Rev. Lett. **96**(2006)054803

[2] B. Naranjo, J.K. Gimzewski i S. Putterman, *Observation of nuclear fusion driven by a pyroelectric crystal*, Nature **434**(2005)1115

[3] B. Naranjo i S. Putterman, *Search for fusion from energy focusing phenomena in ferroelectric crystals*, 1 lutego 2002 roku, zgłoszenie projektu do UCEI (University of California Energy Institute) <http://rodan.physics.ucla.edu/pyrofusion/ucei.html>

[4] <http://www.nature.com/nature/journal/v434/n7037/supinfo/nature03575.html>

Niestety, żeby obejrzeć filmy, trzeba mieć dostęp do zastrzeżonej dla prenumeratorów części portalu *Nature*. Może jednak warto wybrać się do biblioteki dobrego uniwersytetu, żeby „posłuchać” fuzji?



Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
509 (WT = 1,29) i 510 (WT = 2,15)
z numeru 11/2005

Paweł Najman	– Jaworzno	46,93
Janusz Olszewski	– Suwałki	43,23
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	42,36
Adam Dzedzej	– Gdańsk	38,40

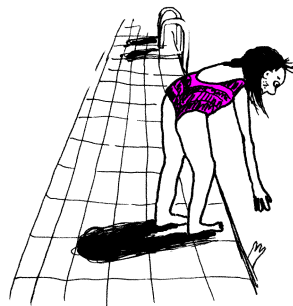
Paweł Najman: „44” już po raz drugi.

W liście ligowej w *Delcie* 5/2006
zamieniłem WT zadań. Powinno być
505 (WT = 4,00) i 506 (WT = 1,65).
Przepraszam. MK

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
410 (WT = 2,28) i 411 (WT = 3,03)
z numeru 1/2006

Mateusz Łącki	– Kraków	40,63
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	33,71
Konrad Kapcia	– Częstochowa	28,96
Tomasz Tkocz	– Rybnik	24,28
Jacek Konieczny	– Poznań	15,22
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	11,29
Jerzy Witkowski	– Radlin	11,13



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2006

Przypominamy treść zadań:

517. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych x, y , dla których każda z liczb $2x + y, 3x - 2y, 11x + 9y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

518. Zbiór $\{1, 2, \dots, 3n\}$ został podzielony w dowolny sposób na trzy rozłączne zbiory n -elementowe A, B, C (n jest dowolną liczbą naturalną). Udowodnić, że istnieją liczby $a \in A, b \in B, c \in C$, z których jedna jest równa sumie dwóch pozostałych.

517. Jedyną parą o wymaganej własności jest $x = 0, y = 0$. Dowód: założmy, zgodnie z warunkiem zadania, że

$$2x + y = u^2, \quad 3x - 2y = v^2, \quad 11x + 9y = w^2$$

dla pewnych liczb całkowitych u, v, w . Otrzymujemy równość

$$(*) \quad v^2 + w^2 = 7u^2.$$

Gdyby liczby v oraz w były niepodzielne przez 7, ich kwadraty dawałyby przy dzieleniu przez 7 reszty 1, 2 lub 4 i równość (*) nie mogłaby zachodzić. Zatem v, w dzielą się przez 7, ich kwadraty dzielą się przez 7^2 , więc u dzieli się przez 7; dla liczb całkowitych $u_1 = u/7, v_1 = v/7, w_1 = w/7$ zachodzi równość analogiczna do (*). Kontynuując to rozumowanie, stwierdzamy indukcyjnie, że każda z liczb u, v, w dzieli się przez 7 w dowolnie wysokiej potęgde naturalnej – a to znaczy, że $u = v = w = 0$. Stąd także $x = y = 0$.

518. Można przyjąć, że liczba 1 jest w zbiorze A , i że najmniejsza liczba b , która nie należy do A , jest w zbiorze B ; liczba $a = b - 1$ jest więc w zbiorze A . Wykażemy, że wówczas pewna liczba ze zbioru C jest sumą liczby ze zbioru A i liczby ze zbioru B .

Przypuśćmy najpierw, że żadne dwie kolejne liczby nie należą do zbioru C . Zbiór $C' = \{c-1 : c \in C\}$ jest więc rozłączny z C , czyli zawiera się w sumie $A \cup B$. Przy tym C' jest zbiorem n -elementowym, nie identycznym z A (bo $1 \in A \setminus C'$). Zatem pewien element $c' \in C'$ należy do zbioru B . Liczba $c = 1 + c'$ należy do C i jest sumą liczb $1 \in A, c' \in B$; mamy tezę zadania.

Pozostaje rozpatrzyć sytuację, gdy w zbiorze C jest co najmniej jedna para liczb kolejnych; niech c, d będzie najwcześniejszą taką parą ($c, d \in C; d = c+1$). Weźmy pod uwagę liczbę $f = d - b$.

Jeżeli $f \in A$, to równość $f + b = d$ daje tezę ($f \in A, b \in B, d \in C$).

Jeżeli $f \in B$, to równość $a + f = c$ daje tezę ($a \in A, f \in B, c \in C$).

Ostatnia możliwość: niech $f \in C$. Wtedy liczba $e = f - 1$ nie należy do C (bo para c, d jest najwcześniejszą parą kolejnych liczb w zbiorze C). Oczywiście $e = c - b$. W zależności od tego, czy e należy do A , czy do B , uzyskujemy żądane przedstawienie następująco:

Gdy $e \in A$, równość $e + b = c$ daje tezę; gdy zaś $e \in B$, równość $1 + e = f$ daje tezę.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2006

Przypominamy treść zadań:

414. Jednorodna belka jednym końcem opiera się o pionową ścianę, tworząc z nią kąt α , a drugi jej koniec jest podtrzymywany przez linkę tworzącą ze ścianą kąt β (rys.). Jaki musi być współczynnik tarcia między belką a ścianą, aby belka nie zsunęła się w dół?

415. W pewnej metodzie rozdzielania dwóch izotopów A i B pewnego pierwiastka elementarną operacją jest rozdzielenie 2 moli mieszaniny zawierającej $2p_A$ moli izotopu A na 1 mol mieszaniny, w której stosunek liczb moli jest r razy większy od wyjściowego

$$\frac{p'_A}{p'_B} = \frac{p_A}{p_B} r$$

i 1 mol pozostałości. Ponadto na każdym etapie dopuszczalne jest łączenie (mieszanie) dowolnie wybranych próbek. Jeśli $r = 1,03$, to ile elementarnych operacji trzeba przeprowadzić, aby z 1000 moli mieszaniny o składzie 50% A i 50% B wyodrębnić 400 moli mieszaniny zawierającej 80% izotopu A ? Wystarczy odpowiedź przybliżona.

Wskazówka: Rozwiązanie może być oparte na obliczeniach komputerowych, albo też na wzorach na entropię mieszaniny.

414. Warunek równowagi względem obrotu belki wokół punktu oparcia jej o ścianę pozwala wyznaczyć siłę napięcia linki

$$F = P \frac{\sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)},$$

gdzie P – ciężar belki. Ponieważ siła nacisku N jest równa $F \sin \beta$, a siła tarcia $T = P - F \cos \beta$, więc po przekształceniach wyznaczamy minimalną wartość współczynnika tarcia $\mu = T/N = \operatorname{ctg} \beta + 2 \operatorname{ctg} \alpha$.

415. Entropia mieszaniny dwóch składników jest dana wyrażeniem

$$S = -n_A \ln \frac{n_A}{n} - n_B \ln \frac{n_B}{n},$$

gdzie n_A i n_B są odpowiednimi liczbami moli, $n = n_A + n_B$. Według tego wzoru należy obliczyć entropię 2 moli mieszaniny wyjściowej, w której udziały składników A i B wyrażają się ułamkami $p_A = n_A/n$, $p_B = n_B/n$. W części „wzbogaconej” udziały A i B wynoszą – zgodnie z podanym wzorem

$$p'_A = \frac{p_A r}{1 - p_A + p_A r}, \quad p'_B = 1 - p'_A,$$

a w części „zubożonej” mamy

$$p''_A = 2p_A - p'_A, \quad p''_B = 1 - p''_A.$$

Łączna entropia obu uzyskanych części jest mniejsza od wyjściowej, a różnica $S_1 = S - S' - S''$ jest miarą efektu operacji elementarnej. Wartość liczbową powyższej różnicy zależy wprawdzie od udziałów początkowych (od p_A), ale wobec przyjętych danych jest to zależność słaba i można przyjąć $S_1 \approx 0,00018$ (dokładniej, S_1 osiąga maksimum równe 0,00022 dla $p_A = 0,5$, a dla $p_A = 0,8$ jej wartość spada do 0,00014). Teraz pozostaje obliczyć entropię 1000 moli mieszaniny początkowej ($S_{pocz} = 693,1$) oraz łączną entropię 400 moli mieszaniny o składzie 80% A i 20% B oraz 600 moli reszty ($S_{końc} = 566,7$). W wyniku podzielenia $S_{pocz} - S_{końc}$ przez S_1 otrzymujemy szukaną liczbę elementarnych operacji równą około 700 tysięcy.

W metodzie „komputerowej” autor podzielił mieszaninę na 50 pojemników po 20 moli, a w każdym etapie procedury wprowadził cztery kroki:

1. zawartość każdego pojemnika zostaje rozdzielona na 10 moli części wzbogaconej i 10 moli części zubożonej (500 elementarnych operacji),
2. część zubożona n -tego pojemnika zostaje połączona z częścią wzbogaconą pojemnika o numerze $n + 1$;

powstaje w ten sposób 49 porcji po 20 moli, a część wzbogacona pierwszego pojemnika i część zubożona ostatniego pozostają oddzielnie,

3. każda z 49 porcji zostaje znów rozdzielona na 10 moli części wzbogaconej i 10 moli części zubożonej (490 elementarnych operacji),
4. część wzbogacona pierwszej z tych porcji łączy się z poprzednio pozostawioną częścią w pierwszym pojemniku, część zubożona ostatniej - analogicznie w ostatnim pojemniku, pozostałe łączą się parami jak w punkcie 2.

Procedurę powtarza się do momentu, w którym łączna zawartość składnika A w pierwszych 20 pojemnikach przekroczy 80% (320 moli) – okazuje się, że trzeba powtarzać powyższą pętlę 1442 razy, czyli liczba elementarnych operacji wynosi $1442 \cdot 990 \approx 1,4$ miliona. Liczbę tę można zmniejszyć do około 1,3 mln, pozostawiając w końcowych etapach tylko operacje istotne dla ostatecznego wyniku (w okolicach pojemnika o numerze 20). Czy istnieje lepszy algorytm, który pozwoli zbliżyć liczbę operacji do wymienionej wyżej wartości 700 tysięcy? Okaże się to po przejrzaniu listów od Czytelników.



Rozwiązanie zadania F 671.

Prędkość nadaną statkowi przez pole grawitacyjne Księżyca możemy wyznaczyć z zasady zachowania energii. Energia potencjalna statku w polu grawitacyjnym Księżyca, tuż przy jego powierzchni, wynosi

$$W_0 = -G \frac{mM}{r}.$$

Siła ciężkości działająca na statek jest równa

$$m \frac{g}{6} = G \frac{mM}{r^2},$$

stąd obliczamy

$$GM = \frac{g}{6} r^2$$

i podstawiamy do wyrażenia na energię potencjalną, otrzymując

$$W_0 = -mr \frac{g}{6}.$$

W chwili początkowej statek spoczywał, a energia potencjalna była równa zeru, zatem:

$$0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgr}{6}, \quad \text{stąd} \quad v^2 = \frac{gT}{3}.$$

Przyjmując, że od chwili osiągnięcia tej prędkości i włączenia silnika hamującego statek będzie miał opóźnienie $a = 5g$ (przyczynę od pola grawitacyjnego Księżyca $g/6$ zaniedbujemy), można wyznaczyć drogę hamowania h :

$$v^2 = 2ah = 10gh.$$

Podstawiając do tego wzoru wyrażenie na v^2 , otrzymujemy ostatecznie:

$$h = \frac{r}{30} \approx 60 \text{ km}.$$



Rozwiązanie zadania F 672.

Zasada zachowania energii, zapisana dla rzutu z zachodu na wschód i ze wschodu na zachód to odpowiednio:

$$\frac{m(v_0 - v_\omega)^2}{2} - mgR = 0,$$

$$\frac{m(v_0 + v_\omega)^2}{2} - mgR = \frac{mv^2}{2},$$

gdzie $v_\omega = l/T$. Stąd otrzymujemy:

$$v = 2\sqrt{v_\omega(v_\omega + \sqrt{2gR})} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{l}{T} \left(\frac{l}{T} + \sqrt{2gR} \right)} \approx 4,7 \text{ km/s}.$$

Patrz w niebo

Jest w Skorpionie gwiazda zmienna oznaczona jako U Scorp. Ma jasność 18 mag, ale raz na dziesięć lat rozbłyskuje, osiągając 9 lub 8 mag. Jest to tzw. gwiazda nowa powrotna. Jej rozbłysk, jak to u gwiazd nowych, polega na tym, że eksploduje cienka zewnętrzna warstwa białego karła, którą tworzy głównie wodór pochodzący z gwiazdy towarzyszącej. Gwiazda nowa jest więc układem podwójnym, którego jednym składnikiem jest gwiazda zaawansowana w ewolucji. A więc rozdęta i tracąca materię na rzecz drugiego składnika, którym jest biały karzeł. Wodór osiadający na powierzchni białego karła jest podgrzewany od dołu i gdy zgromadzi się go dostatecznie dużo, rusza w nim eksplozja termojądrowa, dając obserwowany kilkudniowy błysk. Towarzyszy temu odrzucenie wodorowej otoczki, ale – uwaga! – nie całej. Część materii zostaje, wskutek czego masa białego karła nieustannie rośnie. Nie może to trwać w nieskończoność. Mianowicie, zgodnie z teorią Chandrasekhara, biały karzeł nie może mieć masy większej niż 1,378 masy Słońca (zależy to zresztą nieco od składu chemicznego białego karła, który w pewnych granicach może być rozmaity). Masywniejszy biały karzeł musi zapaść się pod własnym ciężarem, dając zjawisko tzw. supernowej, czemu towarzyszyłby błysk nieporównanie silniejszy i, rzecz jasna, jednorazowy w życiu gwiazdy.

Kilka lat temu grupa angielskich badaczy przy okazji dokonywania nowego przeglądu własności gwiazd podwójnych oceniła masę białego karła w U Scorp. z dużo wyższą dokładnością, niż było to możliwe dotychczas. Badacze ci stwierdzili, że gwiazdzie brakuje zaledwie 0,07 masy Słońca do osiągnięcia granicy Chandrasekhara. Według ich ocen tempa zyskiwania masy rozbłyśnie ona jako supernowa najdalej za 700 000 lat. Brzmi to, oczywiście, zabawnie, niemniej U Scorp. jest obecnie najlepiej znaną kandydatką na supernową. Ze swojej odległości ponad 6,1 kpc byłaby podczas eksplozji widoczna jako obiekt o jasności -5 mag, byłaby więc jaśniejsza od Wenus i widać byłoby ją w dzień.

Tomasz KWAST

Lipiec

W lipcowe wieczory wysoko na niebie, niedaleko zenitu znajduje się Herkules, duży gwiazdozbiór zawierający sporo godnych obejrzenia obiektów. Najokazalszym jest gromada kulista M13 (NGC 6205) widoczna wyraźnie nieuzbrojonym okiem (5,7 mag) i w ogóle jedna z najjaśniejszych gromad kulistych na całym niebie. Zawiera pół miliona gwiazd i leży w odległości 6,3 kpc. Poszczególne gwiazdy widać w niej, oczywiście, tylko za pomocą wielkiego teleskopu, a w teleskopie amatorskim widoczna jest jako okazała mgiełka o rozmiarach zbliżonych do kątowych rozmiarów Księżyca. W Herkulesie znajduje się też gromada kulista M92, również dostępna amatorskim teleskopom. W stronę Herkulesa porusza się Słońce w swoim ruchu względem okolicznych gwiazd, ale tego, rzecz jasna, nie widać bez zastosowania wyrafinowanych metod obserwacyjnych i obliczeniowych (mówi się, że w Herkulesie leży apeks Słońca).

Wenus jest w Byku i wschodzi niedługo przed wschodem Słońca. Mars jest w Lwie i wieczorem szybko zachodzi; 22 VII zbliży się na ułamek stopnia do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Jowisz jest w Wadze i świeci wieczorem przez kilka godzin. Saturn jest w Raku i wieczorem zachodzi jeszcze wcześniej niż Mars. Pełnia Księżyca wypada 11 VII, a nów 25 VII. Księżyc zakryje: Spikę 4 VII (widać to będzie z południowej części Afryki), Antaresa 8 VII (to widać będzie w Australii) i Marsa 27 VII (to będzie w zasadzie widać w Europie, ale „w zasadzie”, bo stanie się to przed wieczorem, a Mars z Księżycem będą i tak blisko Słońca). Ziemia 4 VII znajdzie się najdalej od Słońca (w aphelium), co nie przeszkadza temu, że lato u nas dopiero się zaczyna. W ostatnich dniach lipca można spodziewać się roju delta-Akwarydów.

T. K.

Oto problem z poprzedniego odcinka.

Wylosowano niezależnie i zgodnie z tym samym, nieznanym nam rozkładem o ciągłej dystrybucji (albo wręcz ciągłym, jeśli komuś wygodniej), dwie liczby rzeczywiste. Pokazano nam jedną z nich. Jeśli prawidłowo odgadniemy, czy jest ona większa od drugiej, wygramy milion dolarów. Nietrudno zobaczyć, że możemy zapewnić sobie 50% szans na wygraną. A czy da się więcej?

Przy tak dużej nagrodzie warto walczyć o każdy dodatkowy procent szans.

Zadanie jest trudne. Piszący te słowa nie wie, czy poradziłby sobie z nim, jako że poznał je wraz z rozwiązaniem. Sondaż przeprowadzony wśród znajomych wykazał, że tylko nieliczni potrafili podać pomysł, prowadzący – po wskazówkach i dyskusji – do celu.

Jeśli chcemy rozstrzygnąć, czy zademonstrowana liczba jest duża, czy mała, potrzebujemy punktu odniesienia. Możemy, na przykład, porównać ją z zerem (właśnie taki pomysł miał jeden z ankietowanych).

Niech zatem X_1, X_2 będą wylosowanymi liczbami, pokazano nam X_1 . Jeśli $X_1 < 0$, to uznajemy, że X_1 jest mniejsza od X_2 ; w przeciwnym razie uznajemy X_1 za większą od X_2 . Ponieważ (wspólny) rozkład X_1 i X_2 ma ciągłą dystrybucję, możemy ignorować zdarzenia o zerowym prawdopodobieństwie: $\{X_1 = 0\}, \{X_1 = X_2\}$ itp. Jest teraz sześć możliwych uporządkowań liczb X_1, X_2 i 0, które przedstawimy w tabeli. Plus w ostatniej kolumnie oznacza wygraną, minus przegraną.

1	$X_1 < X_2 < 0$	+
2	$0 < X_1 < X_2$	-
3	$X_2 < 0 < X_1$	+
4	$0 < X_2 < X_1$	+
5	$X_2 < X_1 < 0$	-
6	$X_1 < 0 < X_2$	+

Uporządkowania 1 i 5, 2 i 4, oraz 3 i 6 mają równe prawdopodobieństwa, skąd wynika, że szansa wygranej minus szansa przegranej jest równa

$$P(0 \in (\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2))).$$

Dla pewnych dystrybucji F powyższe prawdopodobieństwo będzie dodatnie, jeśli jednak zero znajdzie się poza zbiorem wartości X_1 i X_2 , nie zyskamy nic.

Jak udoskonalić ten sposób? Należy zamiast zera użyć zmiennej losowej Z o ściśle rosnącej dystrybucji. Wtedy

$$P(Z \in (\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2))) > 0.$$

Wykonanie takiego prywatnego losowania daje szansę wygranej większą niż $\frac{1}{2}$. Jeśli Z ma ten sam rozkład, co X_1 i X_2 , szansa wygranej wzrasta do $\frac{2}{3}$, bowiem wtedy wszystkie uporządkowania w tabeli mają jednakowe prawdopodobieństwa.

Zadanie powyższe aż się prosi o rozmaite modyfikacje i uogólnienia. Można, na przykład, zapytać, co się zmieni, gdy rozkład X_1 (i X_2) jest znany. Zastanówmy się, który z nielosowych punktów odniesienia jest najlepszy, czyli dla jakiego a

(*) $P(a \in (\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2))) = P(X_1 < a < X_2) + P(X_2 < a < X_1)$ jest największe. Za pomocą F (wspólnej dystrybucji X_1 i X_2) łatwo wyliczyć prawdopodobieństwa dwóch zdarzeń po prawej stronie (*):

$$P(X_1 < a < X_2) = P(X_2 < a < X_1) = P(X_2 < a, X_1 > a) = P(X_2 < a) \cdot P(X_1 > a) = F(a) \cdot [1 - F(a)],$$

a to wyrażenie przyjmuje największą wartość, gdy $F(a) = \frac{1}{2}$. Istnienie takiego a wynika z ciągłości F . Liczba a (niekoniecznie wyznaczona jednoznacznie) jest medianą badanego rozkładu. Szansa wygranej wzrasta teraz do $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Mediana jest jednym z ważnych parametrów rozkładu prawdopodobieństwa (prawie tak ważnym, jak wartość oczekiwana, która na ogół niewiele się od mediany różni). Medianą zmiennej losowej X nazywamy każdą liczbę a , dla której

$$P(X \leq a) \geq \frac{1}{2}, \quad P(X \geq a) \geq \frac{1}{2}.$$

Jak widzieliśmy w (*), mediana (tak, jak inne ważne parametry rozkładów) ma pewną własność ekstremalną.

* Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego