

OBÓZ ASTRONOMICZNY!

Klub Astronomiczny „Almukantarat”
od przeszło 20 lat organizuje ogólnopolskie
obozy astronomiczne dla młodych ludzi.

W tym roku organizujemy obóz dla absolwentów gimnazjów.

Odbędzie się on w terminie 16–29 lipca

w Harcerskim Ośrodku Szkoleniowo-Wypoczynkowym
w Załęczu Wielkim koło Wielunia.

Kontakt: Klub Astronomiczny „Almukantarat”, ul. Bartycka 18, 00-716 Warszawa
tel. 609-37-45-87, email: almukantarat@camk.edu.pl, <http://almukantarat.pl/>

ZAPRASZAMY!

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (385)

Całkowanie numeryczne
Jerzy Ginter str. 1

Od struktury do dyfrakcji
Piotr Wójcik str. 4

O cyklach i klikach
Tomasz Warszawski str. 6

Aktualności str. 8

Zadania II i III stopnia
oraz laureaci Olimpiad

Hiperbole w czworokącie
Marcin Hauzer str. 9

Zadania str. 9

Mała Delta:

O tasowaniu kart
Marcin Hauzer str.10

Krzywizna pseudosfery
Piotr Przytycki str.12

Klub 44 str.14

Patrz w niebo str.16

Czerwiec str.16

Wół, lis i konik polny (II)
Rafał Sztencel str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichocki, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: 022-5328-731, lub -820, lub -816, fax: -732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
do 5 XII – na I kwartał roku następnego,
do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,
do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,
do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

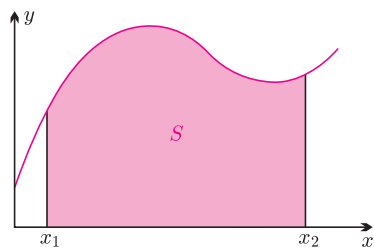
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Teleskop SALT



Rys. 1

Funkcją pierwotną funkcji f jest każda funkcja, której pochodną jest f .

1. Wstęp

Jak wiadomo, wartość całki oznaczonej funkcji dodatniej $y = f(x)$ jest równa wartości pola zawartego między wykresem funkcji a osią x (rys. 1). Obliczanie tego pola może napotkać trudności co najmniej w dwóch przypadkach:

1. jeżeli Czytelnik – na przykład uczeń gimnazjum – nie zna rachunku całkowego;
2. jeżeli funkcja pierwotna F funkcji f nie wyraża się przez funkcje elementarne.

W takich przypadkach może okazać się przydatna umiejętność przybliżonego numerycznego całkowania.

Omówimy tu tylko trzy najprostsze metody takich obliczeń. W każdej z nich interesujące nas pole przybliża się szeregiem pionowych pasków o jednakowej szerokości Δx ; można przy tym oczekiwać, że dla „przyzwoitych” funkcji dokładność uzyskanego wyniku będzie rosła ze zwiększaniem gęstości podziału, czyli zmniejszaniem wielkości Δx . Omawiane metody różnią się sposobem przybliżonego obliczania pola S paska. Umówmy się od razu co do numeracji: pole S_n zawarte jest pomiędzy x_{n-1} a x_n .

Jeżeli interesuje nas całka oznaczona, należy po prostu obliczyć sumę pól S_n dla interesującego nas zakresu x . Jeżeli chcemy uzyskać funkcję pierwotną F , trzeba obliczać kolejno sumy pól od lewego brzegu rozważanego przedziału x_0 do wartości $x_n = x_0 + n\Delta x$. Jest to równoważne algorytmowi $F(x_n) = F(x_{n-1}) + S_n$.

2. Metoda prostokątów

Rozważmy fragment omawianego pola, którego podstawę stanowi odcinek zawarty między x_l i $x_p = x_l + \Delta x$ (rys. 2). Metoda prostokątów polega na przybliżeniu pola S wyróżnionego przez nas fragmentu przez pole prostokąta S_P o wysokości równej wartości funkcji w środku przedziału, czyli w punkcie o współrzędnej $x_s = x_l + \frac{\Delta x}{2} = \frac{x_l + x_p}{2}$. Oznaczmy wartość tej funkcji symbolem $y_s = f(x_l + \frac{\Delta x}{2}) = f(\frac{x_l + x_p}{2})$. Pole prostokąta jest więc równe

$$S_P = y_s \Delta x = f\left(\frac{x_l + x_p}{2}\right) \Delta x.$$

Przykład. Oszacujmy dokładność tego przybliżenia na prostym przykładzie. Rozważmy funkcję $f(x) = x^2$ na przedziale $(1, 2)$ (rys. 3). Dokładna wartość szacowanego pola dana jest całką

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2,333.$$

$h(x)|_a^b$ oznacza $h(b) - h(a)$.

W metodzie prostokątów przybliżona wartość tego pola to

$$S_P = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Metoda prostokątów daje więc w tym przypadku wynik **za mały**. Różnica w porównaniu z wynikiem dokładnym jest równa

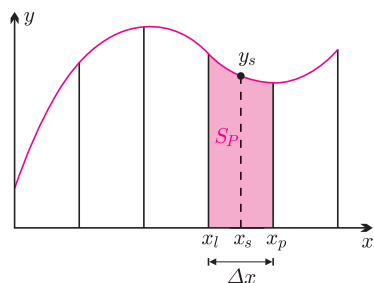
$$S - S_P = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{28-27}{12} = \frac{1}{12}.$$

Błąd względny jest więc równy $\frac{1}{12} : \frac{7}{3} = \frac{1}{28} \approx 0,036 = 3,6\%$.

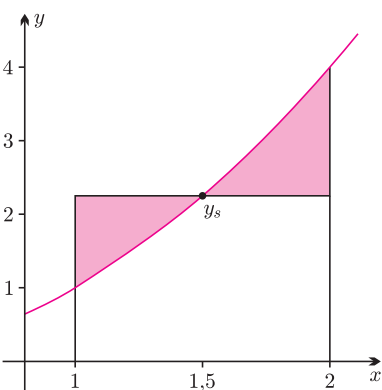
3. Metoda trapezów

Metoda polega na przybliżeniu interesującego nas pola S polem trapezu S_T o lewej podstawie $y_l = f(x_l)$ i prawej podstawie $y_p = f(x_p)$ (rys. 4). Wartość tego pola jest równa

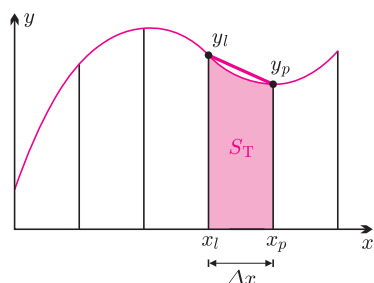
$$S_T = \frac{y_l + y_p}{2} \Delta x = \frac{f(x_l) + f(x_p)}{2} \Delta x.$$



Rys. 2

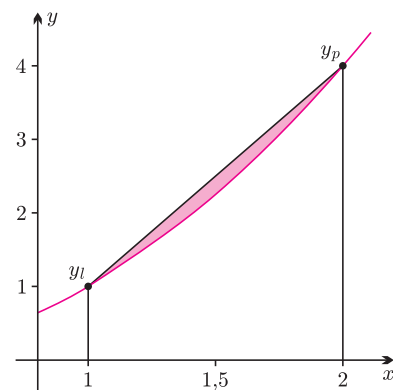


Rys. 3



Rys. 4

*Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego



Rys. 5

Przykład. Oszacujemy dokładność metody trapezów na tym samym przykładzie co poprzednio (rys. 5). Wartość szacowanego pola w metodzie trapezów jest równa

$$S_T = \frac{1^2 + 2^2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Otrzymaliśmy więc wynik **za duży** – o pole figury zakreskowanej na rysunku 5. Błąd wyniku jest równy

$$S_T - S = \frac{5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{15 - 14}{6} = \frac{1}{6}.$$

Błąd względny jest więc równy $\frac{1}{6} : \frac{7}{3} = \frac{1}{14} \approx 0,071 = 7,1\%$.

Widzimy, że metoda prostokątów jest w tym przypadku dokładniejsza niż metoda trapezów (co może na pierwszy rzut oka wydawać się dziwne, bo linia łamana wydaje się lepiej przybliżać krzywą $f(x)$ niż „schodki”). W rozpatrywanym przykładzie błąd pierwszej z tych metod jest dwa razy mniejszy niż drugiej.

4. Metoda Simpsona

Podsumujmy: dla funkcji wypukłej, jaką jest $f(x) = x^2$ (tak!, w matematyce funkcjami wypukłymi nazywa się te, których wykresy leżą w całości pod ich dowolnymi siecznymi), metoda **prostokątów** dała wynik za mały z pewnym błędem. Metoda **trapezów** dała wynik za duży – z błędem dwa razy większym. Przybliżmy więc to pole S polem S_S , który jest średnią ważoną:

$$(1) \quad S_S = \frac{2}{3}S_P + \frac{1}{3}S_T = \frac{2}{3}y_s\Delta x + \frac{1}{3}\frac{y_l + y_p}{2}\Delta x = \frac{y_l + y_p + 4y_s}{6}\Delta x = \frac{f(x_l) + f(x_p) + 4f(x_s)}{6}\Delta x.$$

Przedstawiony tu sposób przybliżania nazywamy metodą Simpsona.

Dla funkcji $f(x) = x^2$ z poprzednich przykładów metoda Simpsona daje wynik **dokładny**:

$$S_S = \frac{1 + 4 + 4 \cdot \frac{9}{4}}{6} \cdot 1 = \frac{7}{3}.$$

Wróćmy do tej sprawy jeszcze w dalszej części tekstu.

5. Całkowanie funkcji $\frac{1}{x^2}$

Zastosujmy omówione metody do całki $f(x) = \frac{1}{x^2}$, która pojawia się przy obliczaniu pracy w polu grawitacyjnym czy elektrostatycznym. Wybierzmy przedział zmiennej x zawarty pomiędzy 1 a 2 i podział $\Delta x = 0,2$. Uzyskane wyniki przedstawia wygenerowana w *Excelu* tabela. Szczegóły Czytelnik znajdzie w programie *Kulomb* na stronie internetowej *Delty*; tu przytaczamy tylko wyniki ostateczne. Trzecia kolumna, oznaczona $F_P(x_n)$, przedstawia wartości funkcji pierwotnej F obliczone metodą prostokątów. Czwarta, czyli $F_T(x_n)$ – obliczoną metodą trapezów. Piąta, $F_S(x_n)$ – metodą Simpsona. A szósta – wyniki ścisłe, opisane wzorem

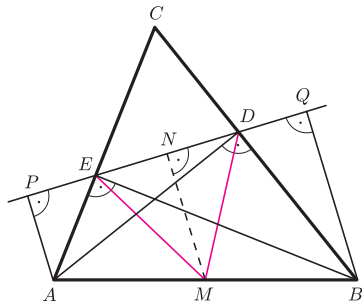
$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

n	x_n	$F_P(x_n)$	$F_T(x_n)$	$F_S(x_n)$	$1 - \frac{1}{x}$
0	1	0	0	0	0
1	1,2	0,165289	0,169444	0,166674	0,166667
2	1,4	0,283632	0,289909	0,285725	0,285714
3	1,6	0,372521	0,379992	0,375012	0,375
4	1,8	0,441725	0,449919	0,444457	0,444444
5	2	0,497127	0,505783	0,500012	0,5

Widać, że – podobnie jak w poprzednim przykładzie – metoda prostokątów daje wynik za mały. W ostatnim wierszu błąd wynosi 0,6%. Metoda trapezów daje wynik za duży – analogicznie o około 1,2%. Natomiast błąd metody Simpsona wynosi około 0,0024%; dokładność tej metody jest więc w tym przykładzie przeszło 200 razy większa niż metody prostokątów.



Rozwiązanie zadania M 1136. Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków AB i PQ . Prosta MN jest równoległa do podstaw trapezu prostokątnego $ABQP$, a więc jest prostopadła do prostej PQ .



Ponieważ $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = 90^\circ$, więc punkt M jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABDE$. Stąd trójkąt DME jest równoramienny, czyli $DN = NE$. Równość ta wraz z zależnością $QN = NP$ daje tezę.



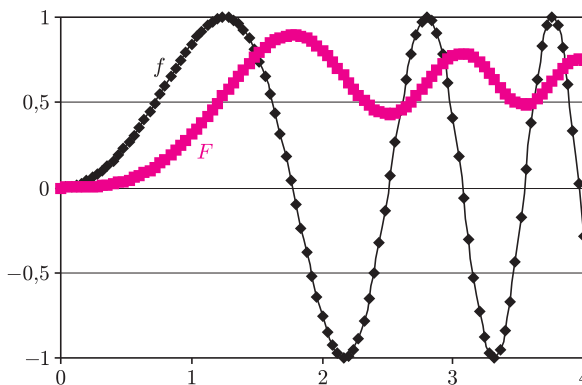
6. Całkowanie funkcji $\sin(x^2)$

Przykład poprzedni miał znaczenie dydaktyczne. Metody numeryczne są przydatne przede wszystkim wtedy, kiedy funkcja pierwotna interesującej nas funkcji f , czyli funkcja F , nie wyraża się przez funkcje elementarne. Możemy wtedy do obliczania wartości $F(x)$ posłużyć się algorytmem wykorzystującym którąś z wyżej omówionych metod. Na przykład, korzystając z metody Simpsona, możemy napisać

$$F(x_n) \approx F(x_{n-1}) + \frac{\Delta x}{6} \left(f(x_{n-1}) + f(x_n) + 4f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right),$$

gdzie $x_n = n\Delta x$.

Jako przykład program $\sin(x^2)$ przedstawia wynik takiego całkowania dla funkcji $\sin(x^2)$ (rys. 6).



Rys. 6

7. Jeszcze o metodzie Simpsona

Metoda Simpsona polega na przybliżeniu całkowanej krzywej odcinkami parabol, przechodzącymi przez trójki punktów, których współrzędne w skrócie nazywaliśmy (x_l, y_l) , (x_s, y_s) , (x_p, y_p) (rys. 7). Wybierzmy na chwilę początek układu współrzędnych w środku przedziału (x_l, x_p) i przybliżmy całkowaną funkcję parabolą $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wynikają stąd wzory:

$$y_s = f(0) = c;$$

$$(2) \quad y_p = f\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = a\frac{\Delta x^2}{4} + b\frac{\Delta x}{2} + c;$$

$$(3) \quad y_l = f\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = a\frac{\Delta x^2}{4} - b\frac{\Delta x}{2} + c.$$

Dodając (2) i (3) stronami, otrzymujemy

$$y_l + y_p = 2a\frac{\Delta x^2}{4} + 2c = 2a\frac{\Delta x^2}{4} + 2y_s.$$

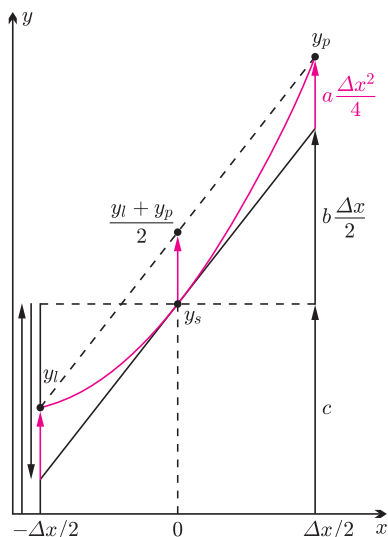
Po prostych przekształceniach uzyskujemy (patrz też rysunek 7)

$$a\frac{\Delta x^2}{4} = \frac{y_l + y_p - 2y_s}{2}.$$

Pole pod omawianym wycinkiem paraboli jest równe

$$\begin{aligned} S_S &= \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (ax^2 + bx + c) dx = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} ax^2 dx + \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} bx dx + \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} c dx = \\ &= a\frac{x^3}{3} \Big|_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} + 0 + c\Delta x = \frac{2}{3}a\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 + c\Delta x = \frac{2}{3}a\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + c\Delta x = \\ &= \left(\frac{1}{3}a\frac{\Delta x^2}{4} + c\right)\Delta x = \left(\frac{1}{3}\frac{y_l + y_p - 2y_s}{2} + y_s\right)\Delta x = \frac{y_l + y_p + 4y_s}{6}\Delta x. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem wzór (1). Wyjaśniliśmy w ten sposób, jaki był sens przyjętego wyżej *ad hoc* przybliżenia, prowadzącego do metody Simpsona.



Rys. 7

Od struktury do dyfrakcji

Z dyfrakcją światła spotykamy się na co dzień, często nie zdając sobie z tego sprawy. Wielokrotnie obserwujemy zjawiska, które łamią zasady optyki geometrycznej, według której światło rozchodzi się po liniach minimalnego czasu przelotu, a więc stanowią bezpośredni dowód na falową naturę światła. Są one właśnie przejawami dyfrakcji.

Często spotykanym, naturalnym przykładem są tzw. „muszki”, czyli włoskowate struktury, które unoszą się w polu widzenia podczas oglądania pozbawionego szczegółów tła np. czystego, niebieskiego nieba. Jest to efekt dyfrakcji światła na zagęszczeniach ciała szklanego, które wypełnia gałkę oczną [1]. Wystarczy w słoneczny dzień spojrzeć na firankę, aby dostrzec mieniające się różnymi kolorami smugi – efekt dyfrakcji światła na drobnych oczkach firanki. Obserwując barwne pręgi na płycie CD mamy również do czynienia z odbiciową siatką dyfrakcyjną.

Do obserwacji dyfrakcji światła stosuje się siatki dyfrakcyjne, czyli płytki, najczęściej szklane, na które naniesiono równoległe, nieprzezroczyste linie w jednakowych odstępach. Szerokość takiego odstępów nazywamy stałą siatki. Światło padające na siatkę doznaje ugięcia na każdej szczeliny i tworzy maksima dyfrakcyjne. Są one szczególnie intensywne, gdy następuje wzmacnianie się fal wychodzących z wielu szczelin, czyli gdy różnica dróg optycznych z dwóch sąsiednich szczelin jest wielokrotnością długości fali. Położenie kątowne kolejnych maksimów dyfrakcyjnych opisuje wzór

$$(1) \quad d \sin \alpha = k \lambda,$$

gdzie d to stała siatki, α to kąt, pod którym znajduje się maksimum, λ to długość fali świetlnej, a k to

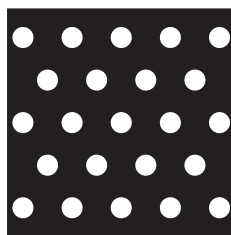
Piotr WÓJCIK*

dowolna liczba całkowita. Za twórcę pierwszej siatki dyfrakcyjnej uważa się Thomasa Younga.

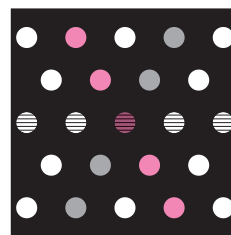
Jednym z ciekawszych zastosowań siatek dyfrakcyjnych jest możliwość wyznaczania długości fali światła emitowanego przez różne źródła, od lamp sodowych po gwiazdy. Dzięki temu możemy wyznaczyć skład chemiczny obiektów odległych od nas o miliardy kilometrów.

Celem mojego doświadczenia było stworzenie możliwie prostego układu optycznego, który umożliwiłby obserwowanie ugięcia światła na siatce dyfrakcyjnej. Następnie przez dodanie, usunięcie, bądź też przestawienie jednej soczewki układ ten miałby demonstrować obraz geometryczny, czyli bez dyfrakcji, struktury uginającej światło.

Do doświadczenia użyłem siatki dyfrakcyjnej sześciokątnej (rys. 1). Była to czarna folia z przezroczystymi okrągłymi szczelinami. Mimo nieco bardziej skomplikowanego kształtu siatki, łatwo opisać położenie kolejnych maksimów wzorem (1), gdyż siatkę tę można potraktować jako złożenie kilku jednowymiarowych siatek dyfrakcyjnych. Wynik dyfrakcji światła na tej siatce można wytłumaczyć jako kolejne obrazy z siatek jednowymiarowych, obrócone i nałożone na siebie (rys. 2).



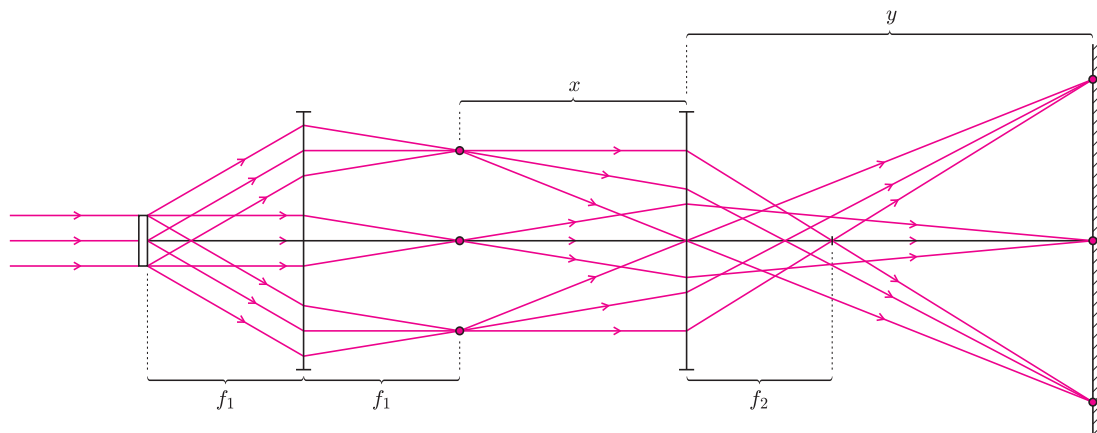
Rys. 1



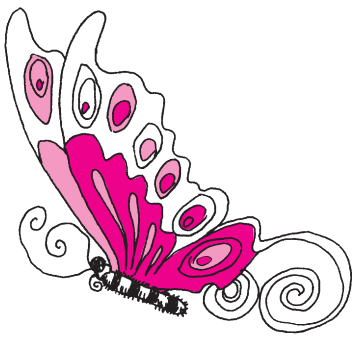
Rys. 2

Aby wytworzyć obraz dyfrakcyjny, należy oświetlić siatkę dyfrakcyjną wąską, równoległą wiązką światła (te warunki doskonale spełnia laser), a następnie ustawić za siatką soczewkę „zbierającą” – w płaszczyźnie jej ogniskowej utworzy się obraz dyfrakcyjny. Ustawiłem taki układ, używając lasera o długości fali 630 nm, sześciokątnej siatki dyfrakcyjnej oraz soczewki o ogniskowej $f_1 = 3,5$ cm. Niestety, powstały w ognisku obraz był za mały do praktycznej obserwacji. Wstawiłem więc do układu dodatkową soczewkę o ogniskowej $f_2 = 15,8$ cm (rys. 3 oraz fot. 1 na okładce). Znajdowała się ona 22 cm za pierwszą soczewką.

*Uczeń I LO w Gorlicach



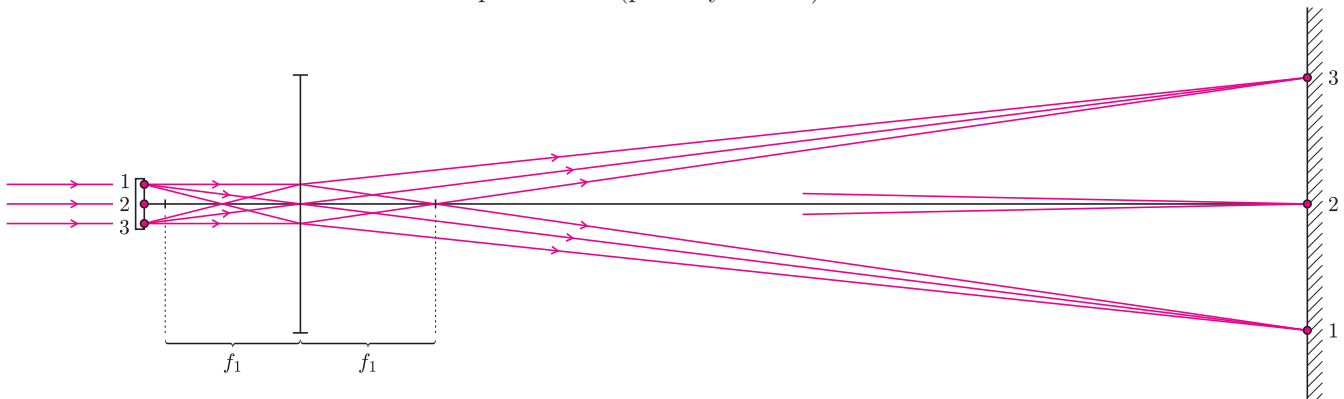
Rys. 3



Z równania soczewki $1/x + 1/y = 1/f_2$ łatwo wyliczyć, gdzie powinien powstawać powiększony obraz dyfrakcyjny. Obraz dyfrakcyjny z ogniska soczewki „zbierającej” staje się przedmiotem dla soczewki powiększającej, a więc odległość przedmiotu x jest równa 18,5 cm. Ogniskowa f_2 jest równa 15,8 cm, zatem obraz wytworzy się około $y = 113$ cm za drugą soczewką. Powiększenie obrazu na ekranie wynosić będzie y/x czyli około 6 razy. Zakładamy tutaj, że głównym efektem dyfrakcji jest pojawienie się za siatką dyfrakcyjną dodatkowych pęków równoległych promieni, rozchodzących się od siatki pod kątami zadanymi przez wzór (1). Każdy pęk skupiany jest najpierw przez soczewkę zbierającą w odległości równej ogniskowej f_1 , a potem jeszcze raz przez drugą soczewkę.

Otrzymany obraz dyfrakcyjny (fot. 2) to centralne maksimum dyfrakcyjne oraz ustawione w wierzchołkach sześciokąta kolejne słabsze maksima. Wysokość zaznaczonego trójkąta to w rzeczywistości 2 mm.

Następnie manipulując tylko jedną soczewką można przejść od obrazu dyfrakcyjnego do geometrycznego. W takim układzie optycznym siatkę dyfrakcyjną możemy traktować jako przedmiot dla soczewki, zaniebując efekty dyfrakcyjne. Obraz struktury siatki uzyskałem przez wyjęcie soczewki powiększającej (drugiej). Przedmiot (w tym przypadku siatka dyfrakcyjna) znajduje się 3,5 cm przed soczewką o ogniskowej $f_1 = 3,5$ cm, a więc jej obraz powinien wytworzyć się w nieskończoności. Mimo to jesteśmy go w stanie obserwować na odległym o 126 cm ekranie. Tę pozorną sprzeczność można łatwo wyjaśnić, jeśli uświadomimy sobie, że siatka dyfrakcyjna nie znajduje się nigdy dokładnie w ognisku soczewki. Jeśli jest położona odrobinę dalej, w dużej odległości od soczewki pojawi się rzeczywisty i bardzo powiększony obraz przedmiotu (patrz rysunek 4).



Rys. 4

Na fotografii 3 (okładka) możemy zauważyć obraz sześciokątnej sieci periodycznej. Mimo iż tworzenie się tego obrazu opisujemy według zasad optyki geometrycznej, widać, że nie ma ucieczki od falowej natury światła: światło, ulegając dyfrakcji na szczelinach, powoduje, że widzimy ich „rozlany” obraz.

Opisane przeze mnie doświadczenie ma przede wszystkim charakter dydaktyczny – większość opisanych w literaturze doświadczeń z optyki falowej umożliwia obserwację jedynie efektów dyfrakcyjnych. Myślę, że układ, który w prosty sposób pozwala zaprezentować obraz dyfrakcyjny i obraz geometryczny może być przydatny do prezentacji zarówno falowej natury światła, jak i zasad optyki geometrycznej.

Serdecznie dziękuję panu profesorowi Janowi Gajowi i pani magister Katarzynie Surowieckiej za pomoc w przygotowaniu i przeprowadzeniu doświadczeń.



Bibliografia

- [1] David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Podstawy fizyki*, tom 4, PWN 2003.
- [2] Jan Gaj, Krzysztof Karpierz, Michał Różycki, Andrzej Szymacha, *Fizyka i astronomia. Część 3*, WSiP 2004.
- [3] Henryk Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN 1999.

Rozważmy n osób, które spotkały się na pewnym przyjęciu. Niektóre z nich są znajomymi. Możemy pytać, na przykład, ilu gości można posadzić przy okrągłym stole tak, by każdy siedział obok swoich znajomych? Albo też czy istnieje na przyjęciu liczna grupa takich osób, że każde dwie z tej grupy się znają? Może to przecież utrudnić zawieranie nowych znajomości. Takie zagadnienia wygodnie jest badać w języku teorii grafów.

Utwórzmy graf, którego wierzchołki będą reprezentować gości. Dwa wierzchołki łączymy krawędzią, jeśli odpowiednie osoby znają się nawzajem. Pierwsze z powyższych pytań równoważne jest szukaniu cykli prostych w tym grafie, drugie badaniu klik. Cyklem (prostim) w grafie nazywamy taki ciąg (x_1, \dots, x_k) ($k \geq 3$) złożony z różnych wierzchołków grafu, że x_i jest połączony krawędzią z $x_{(i+1) \bmod k}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Szczególnym przypadkiem cyklu jest cykl Hamiltona, złożony z wszystkich wierzchołków grafu. Wybierzmy pewien podzbiór wierzchołków i te krawędzie oryginalnego grafu, które końce mają tylko w wybranych wierzchołkach. Otrzymaliśmy pewien podgraf grafu wyjściowego. Jeżeli jego dowolne dwa wierzchołki są połączone krawędzią, to taki podgraf nazywamy kliką. W pracy zająłem się szukaniem warunków, przy których w grafie znajomości pojawiają się cykle i kliki.

Pierwszy warunek jest związany z następującym twierdzeniem Turána:

Jeżeli w grafie znajomości o n wierzchołkach każda klika ma co najwyżej m wierzchołków, to liczba E znajomości (krawędzi) w tym grafie spełnia nierówność

$$E \leq \frac{m-1}{2m} n^2.$$

Nierówność tę można stosunkowo łatwo udowodnić indukcyjnie, a wynika z niej następujący warunek dostateczny na pojawienie się w grafie znajomości kliki o $(m+1)$ wierzchołkach: wystarczy, by krawędzi w tym grafie było więcej niż $\frac{(m-1)n^2}{2m}$.

Przejdźmy teraz do cykli w grafach znajomości. Warunek istnienia cyklu Hamiltona daje następujące twierdzenie Orego:

Danych jest n osób, przy czym dla każdej pary nieznanających się osób suma liczby znajomych obu osób wynosi co najmniej n . Wówczas można wszystkie osoby ustawić w cykl Hamiltona.

Kolejne twierdzenia dotyczą pojawienia się w grafie cyklu, o którym nie wiemy, jaką dokładnie ma długość.

Załóżmy, że w grupie $n \geq 5$ osób wśród dowolnych trzech pewne dwie znają się. Wówczas spośród tych osób można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić je przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

Załóżmy, że w grupie $n \geq 3$ osób jest co najmniej n znajomości. Wówczas w tej grupie znajdzie się pewien cykl.

Nierozstrzygnięte pozostaje następujące zagadnienie: jaka jest najmniejsza liczba krawędzi, jaką trzeba narysować w grafie o n wierzchołkach, by mieć pewność, że znajdziemy w nim 4-wierzchołkowy cykl? Wiadomo, że zawsze wystarczy $\lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}) \rfloor + 1$, ale dla dużych n nie jest to optymalne oszacowanie.

Kolejne warunki są związane z tzw. liczbami Ramseya. Rozważmy graf pełny, tj. taki, w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną krawędzią. Wyobraźmy sobie, że każdą krawędź w grafie możemy pomalować na niebiesko lub czerwono. Ustalmy ponadto liczby naturalne k i l . Pytanie więc jest takie: jakie jest najmniejsze takie n , że przy dowolnym pokolorowaniu krawędzi grafu pełnego o n wierzchołkach pojawi się niebieska klika o k wierzchołkach lub czerwona o l wierzchołkach? Takie n oznaczamy przez $R(k, l)$. Zauważmy, że jeżeli na przyjęciu jest co najmniej $R(k, l)$ gości, to możemy znaleźć grupę złożoną z k osób, w której każde dwie znają się nawzajem lub istnieje grupa



Rozwiązanie zadania M 1137.

Wybieramy dowolną osobę. Następnie dołączamy do niej jedną osobę, która jej nie zna. Do tak uzyskanej pary dołączamy trzecią osobę, która nie zna żadnej z tych dwóch osób. Dalej dołączamy do tej trójki czwartą osobę, która nie zna nikogo z tej trójki, itd.

Wykonując to postępowanie n -krotnie uzyskujemy grupę n osób, w której żadna nie zna żadnej innej osoby z tej grupy. Ponieważ wśród dowolnych dziesięciu osób istnieje trójka znajomych, więc $n \leq 8$. Innymi słowy, opisane postępowanie musi zakończyć się po co najwyżej ośmiu krokach. Zatem każda z osób nienależących do wybranej grupy zna przynajmniej jedną osobę z wybranej grupy.

Jeśli $n < 8$, to uzupełniamy wybraną grupę dowolnie do ośmiu osób uzyskując osiem osób spełniających warunki zadania.

*Student I roku matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim.

złożona z l osób, w której żadne dwie nie są znajomymi. Analogicznie, mając do dyspozycji a kolorów, definiujemy dla liczb naturalnych k_1, \dots, k_a liczby Ramseya $R(k_1, \dots, k_a)$. W przypadku gdy $k_1 = k_2 = \dots = k_a = 3$, $R_a = R(k_1, \dots, k_a)$ jest najmniejszą taką liczbą, że przy dowolnym pomalowaniu krawędzi grafu pełnego o R_a wierzchołkach a kolorami zawsze dostaniemy co najmniej jeden trójkąt o bokach w tym samym kolorze. Korzystając z zasady szufladkowej i indukcji, dowodzi się, że $R_a \leq x_a$, gdzie $x_1 = 3$ i $x_a = a \cdot x_{a-1} - a + 2$ dla $a \geq 2$.

Powróćmy jednak do liczb $R(k, l)$. Mamy oczywiście $R(k, 2) = k$ oraz $R(k, l) = R(l, k)$. Fundamentalną nierównością, która dotyczy liczb Ramseya jest nierówność:

$$R(k, l) \leq R(k, l-1) + R(k-1, l).$$

Z niej i z warunku początkowego łatwo wyprowadzić, że

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

To jednak nie wszystko. W swojej pracy pokazałem, że gdy mamy dane oszacowania $R(m, n-1) \leq C$ oraz $R(m-1, n) \leq D$, gdzie C i D są parzyste, to oszacowanie $R(m, n) \leq C + D$ możemy poprawić na

$$R(m, n) \leq C + D - 1.$$

Wynikające z tego faktu oszacowania niewielkich liczb Ramseya pokazuje tabelka obok.

Liczba Ramseya	Oszacowanie górne
$R(m, n)$	$\binom{m+n-2}{m-1}$
$R(3, 3)$	6
$R(3, 4)$	9
$R(3, 5)$	14
$R(3, 6)$	19
$R(4, 4)$	18
$R(4, 5)$	31
$R(4, 6)$	50
$R(5, 5)$	62
$R(5, 6)$	111
$R(6, 6)$	222

Więcej informacji o liczbach Ramseya i ich lepsze oszacowania można znaleźć na stronie <http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html>.

Następujący problem wydał mi się bardzo ciekawy. Jest on analogiczny do problemu liczb Ramseya, jednak pojawia się w nim dodatkowe założenie o nieparzystości cykli. Załóżmy znów, że w danym grafie pełnym o n wierzchołkach każdą krawędź pokolorowano jednym z a kolorów. Jakie jest najmniejsze $n = n(a)$, przy którym po dowolnym takim pokolorowaniu pojawi się nieparzysty (tzn. o nieparzystej liczbie wierzchołków) cykl o wszystkich krawędziach w jednym kolorze? Okazuje się, że ta „nieparzystość” umożliwia podanie konkretnej odpowiedzi (w przypadku liczb Ramseya znane są w większości tylko oszacowania):

$$n(a) = 2^a + 1.$$

W swojej pracy zajmowałem się także badaniem istnienia cykli w grafach turniejowych, czyli grafach pełnych, które ponadto są skierowane. Oznacza to, że dla każdej krawędzi określono, który wierzchołek jest jej początkiem, a który końcem. Graficznie oznaczamy to za pomocą strzałki. Graf turniejowy można interpretować jako zapis wyników turnieju, w którym każdy zagrał z każdym dokładnie raz i nie było remisów. Strzałki na krawędziach wskazują zwycięzców każdej rozgrywki. Od cykli w grafie skierowanym żądamy dodatkowo, aby początkiem krawędzi łączącej x_i z $x_{(i+1) \bmod k}$ było x_i . Na zakończenie chciałbym podać warunek na istnienie cyklu Hamiltona w grafie turniejowym. Zanim jednak o nim będzie mowa, spójrzmy na poniższy łatwy lemat:

Dla każdego grafu turniejowego zachodzi co najmniej jeden z przypadków:

- można wszystkich zawodników podzielić na niepuste rozłączne podzbiory A i B takie, że każdy zawodnik z A wygrał z każdym zawodnikiem z B ,*
- istnieje w tym grafie 3-cykl.*

Używając tego lematu, dowodzi się następującego twierdzenia:

Dla każdego grafu turniejowego następujące warunki są równoważne:

- nie istnieje podział wszystkich zawodników na niepuste rozłączne podzbiory A i B takie, że każdy zawodnik z A wygrał z każdym zawodnikiem z B ,*
- wszystkich zawodników można ustawić w cykl Hamiltona.*



Rozwiązanie zadania M 1135.

Wśród dowolnych 26 kolejnych liczb naturalnych jest dokładnie 13 liczb parzystych i 13 nieparzystych. Wśród dziesięciu wybranych liczb jest nieparzysta liczba liczb nieparzystych. Zatem wśród pozostałych szesnastu liczb jest parzysta liczba liczb nieparzystych. Stąd wynika, że suma pozostałych szesnastu liczb jest parzysta, a więc jest liczbą złożoną.

Czy warto mieć szorstką skórę?

Nie wszyscy przywiązują do tego wagę, ale obroty firm sprzedających puder, podkłady, maseczki *et cetera* dowodzą, że jeżeli już na jakiejś skórze nam zależy, to na gładkiej. Również w sporcie obserwujemy coraz gładsze kombinezony tam, gdzie zmniejszenie oporu powietrza może zdecydować o kolejności na mecie.

Dlatego nie ma chyba Czytelnika *Delty*, który nie odczuwałby lekkiego niepokoju, biorąc do ręki piłeczkę golfową. Czy na pewno będę wiedział, co odpowiedzieć, gdy zapytają mnie, dlaczego ma ona taką „antygladką” powierzchnię?

Gdyby nie miała wgłębień na powierzchni, to maksymalny zasięg pojedynczego uderzenia byłby mniejszy. Tak przynajmniej wynika z wielokrotnie przeprowadzanych prób. Wgłębienia powodują zmniejszenie oporu powietrza. Tylko dlaczego tak się dzieje?

Zacznijmy od tego, że gdyby powietrze było idealnym, nielepkiem gazem, to poruszająca się w nim kula nie odczuwałaby żadnego oporu. Sprzeczność tego przewidywania z doświadczeniem nazywano jeszcze pod koniec XIX wieku paradoksem d'Alemberta. Rzeczywisty opływ nie jest laminarny. Za piłką pojawia się turbulentny ogon. Opór zależy od tego, jak gruby jest ten ogon, gdyż w nim ciśnienie jest mniejsze niż z przodu, a więc powstaje opór wynikający z różnicy ciśnień. Gdyby opływ był w pełni laminarny (i powietrze nie było lepkie), to za piłką panowałoby takie samo ciśnienie jak przed i opór by nie było. Wgłębienia powodują, że turbulencja pojawia się wcześniej, ale tylko w warstwie przyściennej bezpośrednio przylegającej do powierzchni. Turbulentna warstwa przyścienna ma większą energię i dzięki temu powstawaniu ogona „opóźnia się”, tzn. zmniejsza się jego średnica. Tak więc kosztem niewielkiego wzrostu oporu powierzchniowego otrzymuje się stosunkowo duże zmniejszenie oporu ciśnienia.

Dlaczego więc podobnej metody nie stosuje się w samolotach? Okazuje się, że jeżeli kształt opływającego przez powietrze ciała jest aerodynamiczny, to dominuje opór powierzchniowy, więc wgłębienia nic by nie pomogły.

Jednak nie zawsze jest to prawda. W pracy [1] pokazano, że można opóźnić powstawanie turbulencji w warstwie przyściennej poprzez dodanie do opływającej powierzchni odpowiednio dobranych wypustek.

Eksperyment przeprowadzono z płaską powierzchnią o wymiarach 7 m na 1,2 m w tunelu aerodynamicznym. 80 milimetrów za krawędzią natarcia umieszczono prostopadle do kierunku przepływu rząd 42 cylindrów o wysokości 1,4 mm, średnicy 4,2 mm i wzajemnej odległości 14,7 mm. Następnie, również poprzecznie, umieszczono podłużny głośnik generujący zaburzenie akustyczne i zadymiacz. Obserwowane za pomocą kamery pole o wymiarach $210 \times 168 \text{ mm}^2$ znajdowało się ponad metr dalej wzdłuż strumienia powietrza. Wyniki obserwacji pokazane są na zdjęciach. Zdjęcia (a) i (b) odpowiadają powierzchni pozbawionej cylindrycznych wypustek. Na zdjęciach (c) i (d) wypustki są na całej szerokości, a w ostatnim rzędzie (zdjęcia (e) i (f)) wypustki zajmują górną połowę szerokości. Lewa kolumna (zdjęcia (a), (c) i (e)) odpowiada brakowi akustycznego wymuszenia. Natomiast prawa kolumna pokazuje sytuację z włączonym akustycznym wymuszeniem. Jak widać, nad powierzchnią pozbawioną wypustek (zdjęcie (b) i dolna połowa zdjęcia (f)) przepływ staje się turbulentny, podczas gdy w obecności wypustek (zdjęcie (d) i górna połowa zdjęcia (f)) pozostaje laminarny.

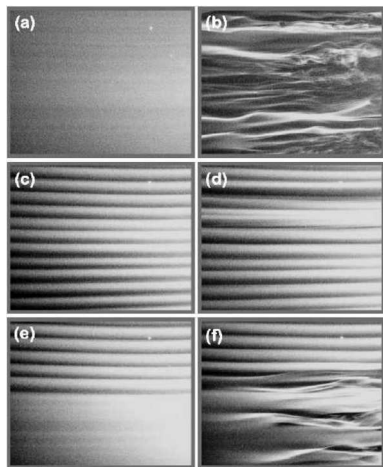
Obserwacje te były wcześniej przewidywane, ale w eksperymencie opisanym w pracy [1] zostały po raz pierwszy wykonane. Jak widać, odpowiednio dobrane nierówności mogą nie tylko powodować powstawanie turbulencji, ale również opóźniać jej powstawanie.

Piotr ZALEWSKI

[1] J.H.M. Fransson, A. Talamelli, L. Brandt i C. Cossu, *Delaying Transition to Turbulence by a Passive Mechanism*, *Phys. Rev. Lett.* **96**(2006)064501



Dym opływający piłkę golfową.



Zdjęcia z tunelu aerodynamicznego [1]. Przepływ z lewej strony na prawą.

Hiperbole w czworokącie

W *Delcie* 4/2006 A. Wrzesień postawił przed Czytelnikami pytanie, w jakich czworokątach wypukłych spełniona jest równość

$$(*) \quad \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \frac{S_3 + S_4}{2},$$

gdzie S_1, S_2, S_3, S_4 oznaczają odpowiednio pola trójkątów $\triangle ABO, \triangle CDO, \triangle BCO, \triangle DAO$, a punkt O jest punktem przecięcia się przekątnych.

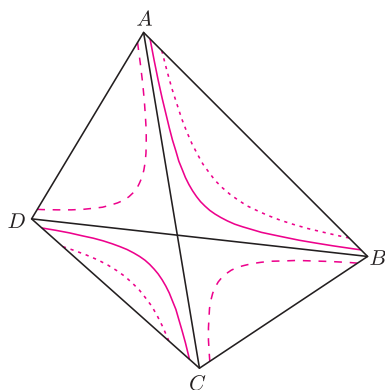
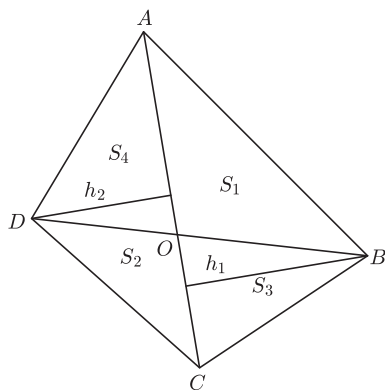
Na pewno Czytelnicy nie mieli problemów ze stwierdzeniem, że jeżeli w czworokącie zachodzi (*), to musi on być trapezem. Wynika to z prostej obserwacji, że w dowolnym czworokącie zachodzi

$$(**) \quad S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4.$$

Rzeczywiście, każdy z iloczynów jest równy $\frac{1}{4}h_1h_2 \cdot |OA| \cdot |OC|$. Zatem (*) jest równoważna równości $\sqrt{S_3 \cdot S_4} = \frac{S_3+S_4}{2}$, która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $S_3 = S_4$. A to już pozwala na stwierdzenie, że $AB \parallel CD$.

Zastanówmy się teraz, dla jakich innych punktów O z wnętrza czworokąta wypukłego i wyznaczonych przez niego trójkątów spełniona jest równość (**). Szybko zauważamy, że może to być dowolny inny punkt należący do którejś z przekątnych. A jak układają się punkty, dla których $S_1 \cdot S_2 - S_3 \cdot S_4 = c$ dla pewnej niezerowej stałej c ? Okazuje się, że dostaniemy albo zbiór pusty, albo fragment hiperboli, której asymptoty zawierają przekątne naszego czworokąta. A co będzie, jeśli dopuścimy także punkty O leżące poza czworokątem? Czy otrzymane krzywe mają jakieś ciekawe geometryczne własności powiązane z wyjściowym czworokątem? A co z wyrażeniem $(S_1 + S_2) - (S_3 + S_4) = c$? Zachęcamy Czytelników do własnych poszukiwań!

Marcin HAUZER



Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 669. Pręt z jednej strony zakończony jest bardzo śliską powierzchnią mogącą poruszać się praktycznie bez tarcia, z drugiej powierzchnią szorstką, o dużym współczynniku tarcia statycznego. Opieramy go o ścianę raz częścią szorstką do góry, raz w dół (rys. 1). W której pozycji może on znajdować się w stanie równowagi i dlaczego?

Rozwiązanie na str. 16

F 670. Drabina składa się z dwóch jednakowych części połączonych przegubem działającym bez tarcia. Na jej lewą część, do $3/4$ całkowitej wysokości drabiny, wchodzi człowiek. Z której strony lepiej podeprzeć drabinę zamocowanym klockiem, aby zapobiec „rozjechaniu się” drabiny z człowiekiem?

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

M 1135. Danych jest 26 kolejnych liczb naturalnych. Okazało się, że suma pewnych dziesięciu z nich jest liczbą pierwszą. Wykazać, że suma pozostałych szesnastu liczb jest liczbą złożoną.

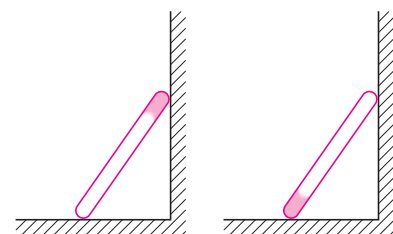
Rozwiązanie na str. 7

M 1136. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkty D i E są rzutami prostokątnymi punktów A i B , odpowiednio, na proste BC i CA (rys. 2). Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi, odpowiednio, punktów A i B na prostą DE . Dowieść, że $PE = DQ$.

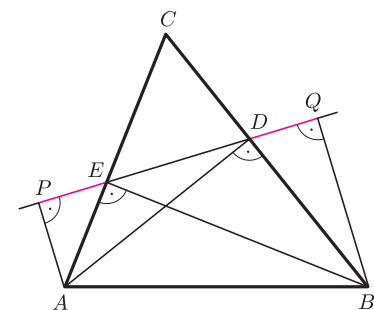
Rozwiązanie na str. 2

M 1137. Na przyjęciu spotkało się $n > 10$ osób. Okazało się, że wśród dowolnych dziesięciu z nich istnieją trzy, z których każda zna dwie z pozostałych. Wykazać, że spośród wszystkich osób na przyjęciu można wyłonić osiem tak, aby każda z pozostałych знаła przynajmniej jedną osobę z wybranej ósemki.

Rozwiązanie na str. 6



Rys. 1



Rys. 2



mała delta

O tasowaniu kart

Każdy, kto gra w karty, powinien umieć tasować. Najpopularniejszy sposób tasowania, którym wyłącznie będziemy się zajmować, składa się z dwóch etapów. Najpierw dzielimy talię na dwie kupki przez wzięcie pewnej ilości kart z wierzchu. Bierzymy obie części w dłonie i splatamy je upuszczając od dołu karty w sposób losowy. Szczególnym przypadkiem takiego tasowania jest opisane w Delcie 8/2002 przez Tomasza Bartnickiego i Jarosława Grytczuka tasowanie *doskonale*, tzn. takie, w którym talię dzielimy na połowy, a karty upuszczane są pojedynczo raz z jednej, raz z drugiej kupki. Ale co z sytuacją ogólną?

Rozpocznijmy od prostej sztuczki karcianej. By uniknąć nieporozumień związanych z pojęciem koloru karty, ustalmy, że karty czerwone to kiery i kara, a czarne to trefle i piki. Przed pokazem przygotuj talię kart w ten sposób, że karty czerwone umieszczone są na przemian z czarnymi. Połóż na stole kartę czerwoną, a obok czarną. Pozostałe karty podziel na dwie kupki tak, by na spodzie jednej była karta czerwona, a na drugiej czarna i raz potasuj. Wręcz je widzowi i poproś, aby odsłonił wierzchnią kartę, a potem położył ją na stole na karcie o takim samym kolorze. Następną kartę, bez oglądania, niech położy na karcie obok. Na stole powinny znajdować się teraz dwie kupki po dwie karty. Kolejne pary kart niech wyłoży według tej samej zasady, aż do otrzymania na stole dwóch kupek po 26 kart każda. Niespodzianka! W każdej z nich są karty tego samego koloru. Zapraszamy czytelnika do samodzielnego wyjaśnienia, dlaczego tak jest. Opisana sztuczka ilustruje oczywisty fakt, że po jednym tasowaniu tylko niektóre układy kart są możliwe.

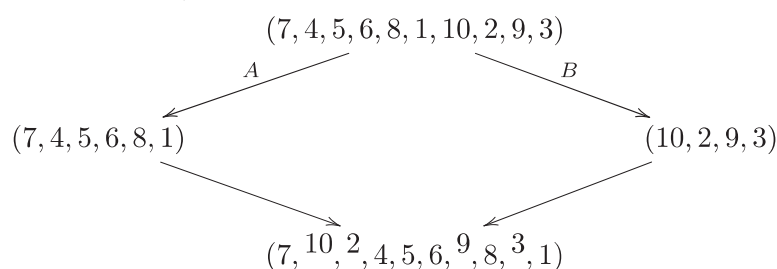
Ograniczyliśmy się tylko do takich tasowań, w których talię dzielimy na dwie kupki zawierające nieparzystą liczbę kart. Jakie układy dostaniemy przy pozostałych tasowaniach? Może można tę sztuczkę jakoś udoskonalić?



Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, ile razy co najmniej trzeba potasować talię kart, żeby istniała możliwość otrzymania dowolnego innego układu kart. Dla uproszczenia załóżmy najpierw, że mamy tylko 10 kart ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Każdemu układowi kart odpowiada ustawienie tych liczb w pewnej kolejności np:

(*) $(7, 4, 5, 6, 8, 1, 10, 2, 9, 3)$.

Podział w pewnym miejscu takiego ciągu na dwa krótsze ciągi A i B odpowiada podziałowi talii kart na dwie kupki. Przeplatanie kart z kupek to nic innego jak wstawienie bez zmieniania kolejności liczb z ciągu B pomiędzy wyrazy ciągu A :





W każdym ciągu, kodującym pewien układ kart, możemy wyróżnić tzw. *podciągi wstępujące*. Są to takie podciągi rosnące, których wyrazami są kolejne liczby naturalne i których nie można przedłużyć do dłuższych podciągów o tej własności. Na przykład, w ciągu (*), podciągi wstępujące to (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9) i (10). To pojęcie jest kluczowe do odpowiedzi na nasze pytanie. Zauważmy bowiem, że

liczba podciągów wstępujących w ciągu reprezentującym układ kart po tasowaniu może być co najwyżej dwa razy większa od liczby podciągów wstępujących w ciągu odpowiadającym talii przed tasowaniem.

Rzeczywiście, każdy podciąg wstępujący generuje co najwyżej jeden podciąg wstępujący zarówno w A jak i w B . Kolejność w A i w B zostaje zachowana, więc liczba podciągów wstępujących nie może być większa od liczby podciągów wstępujących w A i w B .

Załóżmy teraz, że nasza talia liczy n kart. Jeżeli początkowym układem kart jest

$$(1, 2, 3, \dots, n)$$

to po k tasowaniach mogą pojawić się tylko takie układy, które zawierają co najwyżej 2^k podciągów wstępujących. Największą liczbę takich podciągów zawiera ciąg

$$(n, n-1, n-2, \dots, 1)$$

odpowiadający talii ułożonej w odwrotnej kolejności niż na początku. Zatem jeżeli $2^k < n$, to po k tasowaniach możemy być pewni, że tak ułożonej talii nie otrzymamy. Ponadto, jeśli w pewnym układzie liczba podciągów wstępujących jest większa lub równa 2^k , to istnieje k takich tasowań, które doprowadzą talię do tego układu. Dowód tego faktu jednak pominiemy. W przypadku $n = 52$ dopiero po sześciu tasowaniach można otrzymać dowolny inny układ kart.

Na zakończenie opiszemy jeszcze jedną sztuczkę, wykorzystującą zachowanie się podciągów wstępujących przy tasowaniu. Będzie ona miała jednak jedną wadę: od czasu do czasu może nie wyjść. Ustalmy najpierw taką numerację kart, którą łatwo będzie zapamiętać, np. do wartości karty (asa traktujemy jak jedynekę, a waleta, damę i króla jako odpowiednio jedenastkę, dwunastkę i trzynastkę) dodajmy $13p$, gdzie p zależy od koloru karty według poniższej tabelki:

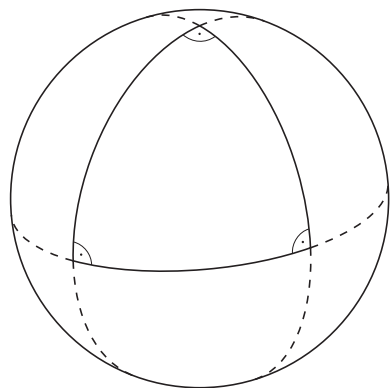
kolor	kier	pik	karo	trefl
p	0	1	2	3

Ułóż talię tak, by numery kart tworzyły ciąg

$$(1, 2, \dots, 52).$$

Tak przygotowaną talię wręcz widzowi i poproś go o potasowanie jej trzykrotnie. Następnie niech obejrzy kartę z wierzchu i włoży ją gdzieś do środka talii. Twoim zadaniem jest odnalezienie tej karty. Często powinno Ci się udać, ponieważ po trzykrotnym tasowaniu, w talii przeważnie znajduje się osiem podciągów wstępujących sześć- lub siedmiocyfrowych. Karta widza dodaje dodatkowy podciąg wstępujący długości 1. Do odnalezienia go jest potrzebne wprawne oko lub ułożenie swojego pasjansa. Przed pokazem warto więc trochę poćwiczyć.

Matą Deltę przygotował Marcin HAUZER

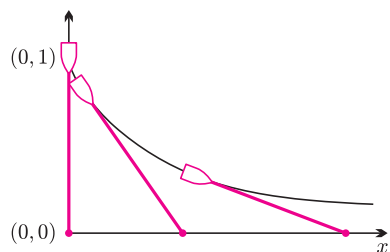


Rys. 1

Rozważmy sferę o promieniu R . Przypomnijmy, że najkrótszą krzywą na powierzchni sfery łączącą dwa wybrane jej punkty (tzw. geodezyjną) jest fragment okręgu wielkiego tej sfery. (Ciekawą niech potraktują ten fakt jako zadanie.) Sfera ma następującą pasjonującą własność: suma kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta geodezyjnego (czyli trójkąta, którego krawędziami są geodezyjne) jest większa od π o miarę pola powierzchni tego trójkąta pomnożoną przez $\frac{1}{R^2}$.

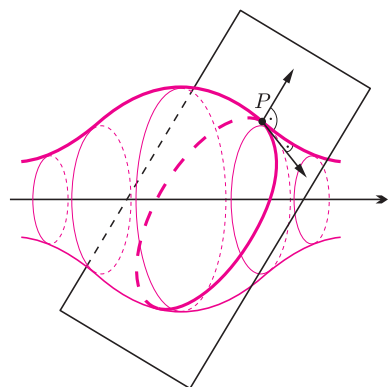
Sprawdźmy to na przykładzie trójkąta składającego się z połówek południków $45^\circ E$ i $45^\circ W$ oraz ćwiartki równika (rys. 1). Suma kątów wewnętrznych tego trójkąta jest równa $3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$, czyli jest o $\frac{\pi}{2}$ większa od π . Natomiast pole tego trójkąta stanowi $\frac{1}{8}$ powierzchni całej sfery, czyli $\frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2$. Zatem po pomnożeniu przez $\frac{1}{R^2}$ rzeczywiście otrzymujemy $\frac{\pi}{2}$.

Jest to przejaw jednego z najwspanialszych twierdzeń geometrii różniczkowej – twierdzenia Gaussa–Bonnetta. Mówi ono, że na każdej powierzchni M rolę czynnika $\frac{1}{R^2}$ odgrywa pewna funkcja rzeczywista $\kappa : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ta funkcja, zwana *krzywizną* (Gaussa), opisuje lokalną geometrię powierzchni M : mianowicie, jeśli chcemy zbadać różnicę między sumą kątów wewnętrznych trójkąta geodezyjnego, a wartością π , to musimy scałkować funkcję κ po powierzchni tego trójkąta. Na przykład dla płaszczyzny ta funkcja jest stała i wynosi 0, a dla sfery o promieniu R też jest stała i wynosi $\frac{1}{R^2}$. (Ale dla elipsoidy krzywizna stała już nie jest.) Jak widać, im większa krzywizna, tym bardziej „zakrzywiona” jest rozważana powierzchnia – natomiast sfera o dużym promieniu, która lokalnie wydaje się prawie płaska, ma małą krzywiznę. Drugą ciekawą obserwacją jest to, że jeśli powierzchnia lokalnie nie jest „wypukła”, czyli przypomina siodło, to krzywizna staje się ujemna. Zajmiemy się taką właśnie powierzchnią, mianowicie wyliczymy, ile wynosi krzywizna pseudosfery – pewnej powierzchni obrotowej przypominającej trąbkę.



Rys. 2

Zdefiniujemy najpierw krzywą, z której obrotu powstaje pseudosfera. Wyobraźmy sobie, że wzdłuż osi x płaszczyzny morza z kartezjańskim układem współrzędnych przebiega pomost. W początkowej chwili w punkcie $(0, 0)$ stoi marynarz, który trzyma na sztywnym holu o długości 1 łodeczkę, która unosi się w punkcie $(0, 1)$. Następnie marynarz ciągnie łódkę posuwając się po pomoście w kierunku dodatnim. Tor ruchu łódki będzie miał tę własność, że wektor prędkości łódki będzie styczny do kierunku holu (patrz rys. 2). Krzywą, będącą torem ruchu łódki, nazywamy *traktryką*. Obracając ją dookoła osi x , otrzymujemy powierzchnię nazywaną *pseudosferą*.

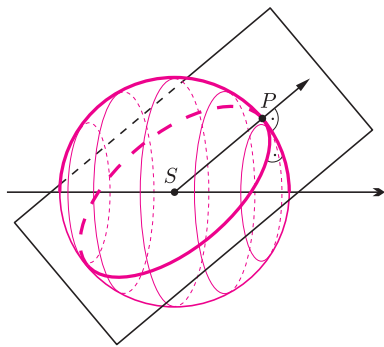


Rys. 3

Skorzystamy przy obliczaniu krzywizny tej powierzchni z recepty używanej na drugim roku przez studentów matematyki, ale unikniemy wykonywanych przez nich zazwyczaj nieprzyjemnych rachunków. Jedyne przepis potrzebny nam wcześniej to pojęcie *krzywizny* krzywej w przestrzeni (nie mylić z krzywizną powierzchni!). Krzywizna krzywej jest określona w każdym punkcie krzywej jako długość wektora przyspieszenia w tym punkcie, przy założeniu, że przebiegamy tę krzywą z jednostkową prędkością. Na przykład, dla ruchu po okręgu wiemy, że przyspieszenie wynosi $\frac{v^2}{R}$, więc skoro zakładamy, że $|v| = 1$, to krzywizna okręgu będzie w każdym punkcie równa $\frac{1}{R}$. Widzimy, że im mniejszy okrąg, bardziej „zakrzywiony”, tym większa krzywizna.

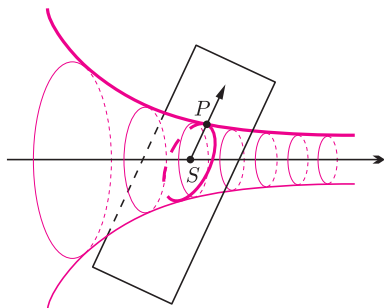
Możemy teraz wrócić do krzywizny powierzchni. Recepta dla powierzchni obrotowych brzmi następująco: ustal punkt P powierzchni, w którym masz ochotę wyliczyć krzywiznę. Rozważ następujące dwie krzywe na powierzchni przechodzące przez punkt P : południk (czyli krzywą płaską, którą obracamy) oraz drugą, będącą cięciem powierzchni obrotowej płaszczyzną prostopadłą do południka w punkcie P (rys. 3). Weź iloczyn krzywizn tych krzywych w punkcie P i postaw znak minus, jeśli funkcja dodatnia, której wykresem jest obracana krzywa, jest wypukła.

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego



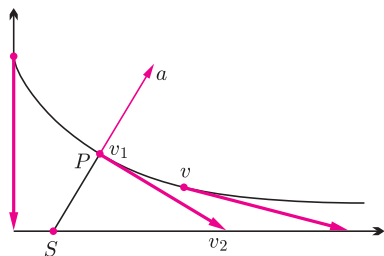
Rys. 4

Zbadamy najpierw, jak rozumieć tę receptę na przykładzie sfery o promieniu R . Sfera powstaje z obrotu półokręgu (rys. 4). Południkiem jest tutaj półokrąg o promieniu R , czyli krzywa o krzywiznie $\frac{1}{R}$. Natomiast płaszczyzna prostopadła do tego półokręgu zawiera wektor normalny sfery, czyli przechodzi zawsze przez środek S sfery, zatem tnie sferę również wzdłuż okręgu wielkiego. Zatem ta druga krzywa również ma krzywiznę $\frac{1}{R}$. Półokrąg jest wykresem funkcji wklęsłej, więc nie będziemy zmieniać znaku. W rezultacie krzywizna powierzchni jest równa iloczynowi krzywizn dwóch rozważanych krzywych, czyli wynosi $\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2}$. Zatem nowa recepta daje wynik zgodny z twierdzeniem Gaussa–Bonnetta.



Rys. 5

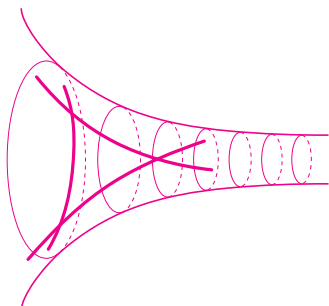
Skorzystajmy teraz z tego przepisu, żeby obliczyć krzywiznę pseudosfery. Ustalmy punkt P pseudosfery. Na początek zbadajmy krzywą powstałą z cięcia pseudosfery płaszczyzną prostopadłą do południka przechodzącą przez punkt P (rys. 5). Posłużymy się tutaj małym oszustwem. Mianowicie przypomnijmy, że w przypadku obliczania wartości krzywizny tej krzywej dla sfery, otrzymaliśmy wartość $\frac{1}{R}$, gdzie R było odległością między punktem P , a punktem S będącym przecięciem osi x z kierunkiem wektora normalnego w punkcie P . Okazuje się, że w ogólności pewien okrąg o środku w punkcie S i promieniu R dobrze przybliża rozważaną krzywą i ma taką samą krzywiznę w punkcie P . Zatem zawsze rozważane cięcie ma krzywiznę w punkcie P równą wartości $\frac{1}{|PS|}$.



Rys. 6

Teraz obliczmy krzywiznę południka, czyli krzywiznę traktrisy. Jak pamiętamy, musimy obliczyć przyspieszenie łódki ciągniętej przez marynarza, przy założeniu, że prędkość łódki jest stała i wynosi 1. W każdym punkcie krzywej narysujmy wektory prędkości v łódki (rys. 6). Zgodnie z definicją traktrisy, końce tych wektorów będą zawsze leżały na osi x ! Wykorzystamy później to spostrzeżenie! Mamy obliczyć przyspieszenie a , które jest równe zmianie wektora prędkości w czasie, czyli $\frac{dv}{dt}$. Oznaczmy przez $v_1(t), v_2(t)$ odpowiednio początki i końce wektorów prędkości. Wtedy $-a = -\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt}$. Zauważmy, że skoro v_1 porusza się po traktrisie, to $\frac{dv_1}{dt} = v$. Natomiast v_2 zawsze należy do osi x , zatem $\frac{dv_2}{dt}$ jest wektorem poziomym. Dodatkowo wiadomo, że w przypadku ruchu o jednostajnej prędkości przyspieszenie jest skierowane prostopadle do kierunku ruchu, więc jeśli początek wektora $-a$ umieścimy w punkcie P , to jego koniec musi się znajdować na prostej PS . Jednocześnie ten koniec musi się znajdować na osi x , gdyż koniec wektora $\frac{dv_1}{dt}$ leży na osi x , a jego modyfikacja o $-\frac{dv_2}{dt}$ jest wektorem poziomym. Zatem koniec wektora $-a$ jest punktem przecięcia prostej PS z osią x , czyli punktem S . Wobec tego krzywizna traktrisy w punkcie P wynosi $|-a| = |PS|$.

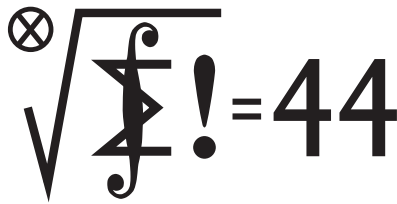
Na koniec, zgodnie z receptą, powinniśmy pomnożyć krzywizny południka i krzywej powstałej z cięcia płaszczyzną prostopadłą do południka oraz dodać znak minus z uwagi na wypukłość funkcji, której wykresem jest traktrisa. Zatem krzywizna pseudosfery wynosi $-\frac{1}{|PS|}|PS| = -1$. Czyli jest stała, nie zależy od punktu P , mimo, iż wydaje się, że pseudosfera w każdym swoim punkcie wygląda nieco inaczej! Ale to tylko jest wrażenie obserwatora zewnętrznego. Mrówki żyjące na pseudosferze nie mają szansy tego (lokalnie) dostrzec. Nazwa pseudosfery wzięła się właśnie z tego (dosyć przyszywanego) podobieństwa do sfery – funkcja krzywizny jest na niej również stała.



Rys. 7

Teraz możemy sformułować bardzo prosto twierdzenie Gaussa–Bonnetta na pseudosferze. Tym razem krzywizna jest ujemna, więc trójkąty geodezyjne będą „chude” (rys. 7). Różnica między wartością π a sumą miar kątów wewnętrznych każdego trójkąta geodezyjnego będzie miarą powierzchni tego trójkąta. (Bowiem całka funkcji stałej równej 1 po dowolnej powierzchni jest miarą tej powierzchni.)

Ciekawym warto zdradzić, że pseudosfera jest lokalnie modelem tzw. geometrii hiperbolicznej. Ale o tym innym razem.



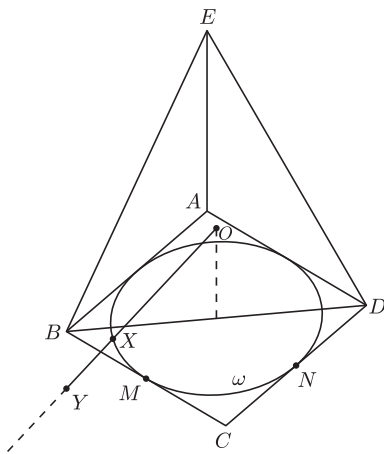
Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VIII 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
507 ($WT = 1,60$) i 508 ($WT = 2,18$)
z numeru 10/2005

Paweł Najman – Jaworzno 43,49
Janusz Olszewski – Suwałki 39,79
Adam Dzedzej – Gdańsk 34,96



515. Okrąg Ω jest podzbiorem sfery opisanej na sześcianie; okrąg ω jest podzbiorem sfery wpisanej w szkielet sześcianu (stycznej do wszystkich krawędzi). Te dwie sfery mają wspólny środek O , a ich promienie są równe odpowiednio $R = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Każdy odcinek o jednym końcu na jednej sferze, a drugim na drugiej, ma długość nie mniejszą niż $R - r$; a jeśli leży na półprostej o początku O , wówczas ma dokładnie długość $R - r$.

Wykażemy, że taka sytuacja ma miejsce dla pewnego odcinka o końcach na okręgach Ω i ω . Okrąg ω jest styczny do odcinków CB i CD w ich środkach M i N . Ponieważ O jest środkiem odcinka CE , płaszczyzna MNO jest równoległa do BDE ; w szczególności proste OM i ON są równoległe do płaszczyzny BDE .

Niech X będzie zmiennym punktem, obiegającym okrąg ω (rysunek). Gdy X leży na dłuższym łuku MN okręgu ω , półprosta OX przecina płaszczyznę BDE . Punkt przecięcia może leżeć wewnątrz okręgu Ω (np. gdy $X \in \omega$ jest punktem najbliższym punktu A), jak i na zewnątrz okręgu Ω (np. gdy X zbliża się do któregoś z końców łuku MN i półprosta OX tworzy z płaszczyzną BDE kąt bliski zeru).

Zatem przy pewnym położeniu punktu $X \in \omega$ półprosta OX przetnie okrąg Ω w pewnym punkcie Y . W myśl

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 523, 524

Redaguje Marcin E. KUCZMA

523. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ znajduje się punkt O , z którego każdy bok sześciokąta jest widoczny pod kątem 60° , a ponadto

$$|OA| > |OC| > |OE| \quad \text{oraz} \quad |OB| > |OD| > |OF|.$$

Udowodnić, że $|AB| + |CD| + |EF| < |BC| + |DE| + |FA|$.

524. Ciąg liczb dodatnich (x_n) spełnia zależność rekurencyjną

$$27(1 - 2x_n)x_{n-1}x_{n+1} \geq 1 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykazać jego zbieżność i obliczyć granicę.

Zadanie 524 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2006

Przypominamy treść zadań:

515. W ścianę $ABCD$ sześcianu o krawędzi 1 wpisany jest okrąg ω . Wierzchołek E jest końcem krawędzi AE prostopadłej do AB i AD . Okrąg Ω jest opisany na trójkącie BDE . Obliczyć długość najkrótszego odcinka łączącego punkt okręgu ω z punktem okręgu Ω .

516. Rozważamy operację, która uporządkowanej parze dodatnich liczb całkowitych (a, b) przyporządkowuje parę $(a', b') = \begin{cases} (2a, b-a) & \text{gdy } a < b, \\ (a-b, 2b) & \text{gdy } a \geq b. \end{cases}$ Startujemy od zadanej pary (a_0, b_0) liczb całkowitych dodatnich i powtarzamy algorytm. Przerwywamy, gdy pojawi się para liczb, z których jedna jest zerem. Scharakteryzować te pary początkowe (a_0, b_0) , dla których algorytm zatrzyma się w skończonym czasie.

konkluzji pierwszego akapitu, odcinek XY ma wówczas długość $R - r = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, i jest to minimalna długość, jaką może mieć odcinek o końcach na okręgach Ω i ω .

516. Suma $a + b$ jest niezmiennikiem badanej operacji. Jeśli więc $a_0 + b_0 = n$, to dalej już stale $b = n - a$, co pozwala wyeliminować zmienną b :

$$a' = \begin{cases} 2a & \text{gdy } a < n/2, \\ 2a - n & \text{gdy } a \geq n/2. \end{cases}$$

To znaczy, że a' jest resztą z dzielenia $2a$ przez n ($0 \leq a' \leq n-1$); drugi element pary, czyli liczba $b' = n - a'$, nigdy nie będzie zerem.

Pytamy więc, kiedy iterowane podwajanie zmiennej a doprowadzi do zera (mod n). Stanie się tak wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych liczb naturalnych k, q zachodzi równość $2^k a_0 = qn$. Równoważnie: gdy iloraz

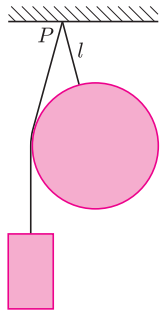
$$\frac{a_0}{a_0 + b_0}$$

jest liczbą dwójkowo-wymierną (tzn. liczbą postaci $2^{-k}q$). Jeszcze inaczej: gdy każdy nieparzysty dzielnik pierwszy sumy $a_0 + b_0$ jest jednocześnie (w co najmniej tej samej potędze) dzielnikiem obu składników tej sumy. Jest to żądana charakterystyka.

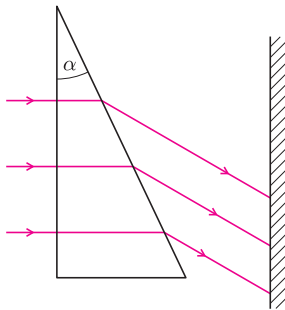


Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2006



Rys. 1



Rys. 2

420. W tym samym punkcie P zawieszono na nici o długości $l = 3$ cm kulę o promieniu $r = 5$ cm i masie $m_1 = 300$ g oraz na odpowiednio dłuższej nici (zob. rys. 1) ciężarek o masie $m_2 = 200$ g. Tarcie między kulą a tą nicią nie występuje. Obliczyć siłę napinającą nić, na której wisi kula.

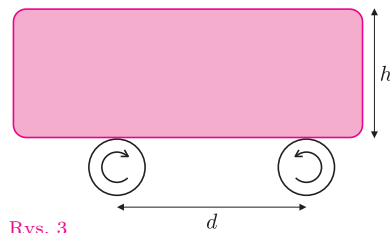
421. Ekran jest równomiernie oświetlony światłem padającym na niego prostopadle. Jak zmieni się natężenie jego oświetlenia, jeśli na drodze promieni ustawimy pryzmat (rys. 2) o kącie łamiącym α ze szkła o współczynniku załamania n ? Ściana, na którą pada światło, jest równoległa do ekranu. Pominąć odbicie światła od ścian pryzmatu.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2006

Przypominamy treść zadań:

412. Proces fermentacji win musujących trwa jeszcze – jak wiadomo – po rozlaniu ich do butelek i zakorkowaniu, przy czym powstaje mętny osad, który usuwa się na ostatnim etapie produkcji wina. Dokonuje się tego następująco: butelka jest wtedy przechowywana szyjką do dołu, zatem osad skupia się w szyjce. Szyjkę tę się zamraża, tak że przy korku powstaje warstwa lodu, odwraca się butelkę do pozycji normalnej, wyciąga korek wraz z lodem i zawartym w nim osadem i korkuje butelkę ponownie. Wino jest wtedy już nasycone dwutlenkiem węgla pod ciśnieniem. Dlaczego więc przy otwieraniu butelki wino się nie pieni i nie „ucieka” z butelki, tak jak podczas zwykłego otwarcia?

413. Na dwóch walcach obracających się w przeciwnie strony położono jednorodny klocek (rys. 3) tak, że jego środek był początkowo nieco bliżej jednego z walców. Odległość osi walców jest równa d , wysokość klocka – h , a współczynnik tarcia walców o klocek – f . Podać warunki, przy których ruch klocka jest harmoniczny i obliczyć okres drgań.



Rys. 3

412. Mamy tu do czynienia ze stanem równowagi nietrwałej, podobnym do wody przegrzanej albo przeschłodzonej. Dowodem na to jest fakt, że lekkie stuknięcie w otwartą butelkę powoduje „katastrofę” – gwałtowne spienienie się wina. Podobnie można wywołać gwałtowne wrzenie przegrzanej wody.

413. Oznaczmy masę klocka przez m , a siły nacisku klocka na walce przez N_1 i N_2 . Siły tarcia są dane wzorami

$$T_1 = fN_1, \quad T_2 = fN_2,$$

a przy założeniu małej amplitudy drgań są one skierowane stale do środka (równoważnie można przyjąć, że prędkość obrotu walców jest odpowiednio duża). Oprócz oczywistego warunku

$$N_1 + N_2 = mg$$

siły muszą też spełniać równanie wynikające z braku obrotu klocka, tzn. suma ich momentów względem środka masy jest równa zero

$$N_1 \left(\frac{d}{2} - x \right) - N_2 \left(\frac{d}{2} + x \right) = (T_1 - T_2) \frac{h}{2},$$

gdzie x jest przesunięciem klocka względem położenia równowagi. W wyniku przekształceń otrzymujemy wzór na wypadkową siłę działającą na klocek

$$F_{wyp} = T_1 - T_2 = \frac{2xmgf}{d - fh}.$$

Siła ta jest – jak widać – proporcjonalna do wychylenia, a jeśli spełniony jest warunek $d > fh$, to jest skierowana w stronę położenia równowagi i wtedy rzeczywiście ruch klocka jest harmoniczny. Okres T jest równy $2\pi\sqrt{m/k}$, gdzie k jest współczynnikiem przy x w powyższym wzorze, tzn.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d - fh}{2gf}}.$$

Jeśli $d < fh$, to klocek postawiony poza położeniem równowagi przestanie się opierać na jednym z walców i przewróci się.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
408 (WT = 1,26) i 409 (WT = 2,99)

z numeru 12/2005

Mateusz Łącki	– Kraków	40,63
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	29,70
Konrad Kapcia	– Częstochowa	28,96
Tomasz Tkocz	– Rybnik	23,14
Jacek Konieczny	– Poznań	15,22



Rozwiązanie zadania F 669.

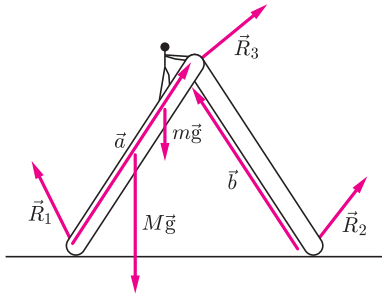
Równowaga możliwa jest tylko w pozycji „szorstkim w dół”. Jest tak dlatego, że aby pręt był w równowadze, muszą równoważyć się poziome składowe sił działających. W obydwu sytuacjach istnieje pozioma składowa siły reakcji na siłę nacisku pręta na ścianę. Jeśli jednak część śliska znajduje się na dole, nie ma tarcia między podłożem i prętem i nie ma w związku z tym żadnej siły działającej na pręt w tym kierunku. Pręt nie może więc być w równowadze.

Jeśli szorstka część jest w dole, siła tarcia równoważy poziomą składową siły reakcji na siłę nacisku pręta na ścianie.



Rozwiązanie zadania F 670.

Niech \vec{R}_1 oznacza siłę reakcji podłoża na nacisk lewej części drabiny, \vec{R}_2 siłę reakcji na nacisk prawej części drabiny, \vec{R}_3 zaś – siłę reakcji prawej części na nacisk lewej, α – kąt między pionem a drabiną, pozostałe wektory jak na rysunku.



Warunek równowagi to znoszenie się wszystkich sił działających na lewą i prawą część drabiny, oraz momentów liczonych w naszym przypadku względem punktów podparcia części drabiny o podłoże:

$$M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{R}_1 - \vec{R}_3 = 0$$

$$\frac{\vec{a}}{2} \times M\vec{g} + \frac{3\vec{a}}{4} \times m\vec{g} - \vec{a} \times \vec{R}_3 = 0$$

$$M\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = 0$$

$$\frac{\vec{b}}{2} \times M\vec{g} + \vec{b} \times \vec{R}_3 = 0.$$

Po rozpisaniu na składowe dostajemy układ 6 równań z 6 niewiadomymi:

$R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}, R_{3x}, R_{3y}$.

Rozwiązanie:

$$R_{1x} = \left(\frac{M}{2} + \frac{3m}{8} \right) g \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{2} = -R_{2x}$$

$$R_{1y} = Mg + \frac{5mg}{8} \quad R_{2y} = Mg + \frac{3mg}{8}$$

Widzimy, że o ile siła tarcia jest po obu stronach jednakowa, to nacisk jest większy po stronie lewej. Bardziej prawdopodobne jest więc „obsunięcie się” prawej części drabiny i to ją należy podeprzeć.

Patrz w niebo

Od kilku lat coraz większą karierę robi nowa metoda badania budowy wewnętrznej gwiazd, zwana asterosejsmologią. Nazwa ta dobrze oddaje fakt, że metoda polega na śledzeniu drgań (falowania) powierzchni gwiazdy, tak jak sejsmologia to śledzenie drgań skorupy ziemskiej. Na podstawie tych drgań wyciąga się wnioski co do budowy wewnętrznej badanego obiektu. O ile jednak w przypadku Ziemi zbieranie obserwacji nie przedstawia trudności (drżania zapisują sejsmografy), to w przypadku gwiazd jest to nieporównanie trudniejsze. Wyjątkową gwiazdą jest oczywiście Słońce, u którego można mierzyć prędkość radialną każdego punktu tarczy (heliosejsmologia). Ale każda inna gwiazda sama jest punktem świetlnym emitującym jednocześnie promieniowanie zarówno poczerwienione (z miejsc gwiazdy akurat zapadających się) jak i poniebieszczone (z miejsc wznoszących się). Powoduje to okresowe zniekształcanie wybranej linii widmowej. Gdyby gwiazda tylko pulsowała, to linia widmowa przesuwałaby się wskutek zjawiska Dopplera w rytm pulsacji. Jeżeli fale na powierzchni gwiazdy tworzą drobniejszy wzorek, to linia jako całość nie przesuwa się, ale sam jej profil zmienia się w rozmaitych miejscach w zależności od tego, jak szybko porusza się gaz wprawiony w ruch przez powierzchniowe fale. Chodzi tu o zauważenie fal o amplitudzie rzędu 100 m i okresie rzędu minut! Zjawisko to jest dodatkowo silnie zakłócanie przez ruchy materii tuż pod fotosferą gwiazdy (granulacja), dlatego do zaobserwowania jakichkolwiek zmian profilu linii potrzebna jest niezwykle precyzyjna spektroskopia, obecnie wykonalna tylko dla gwiazd jaśniejszych od około 10 mag.

Kilka lat temu wykonano takie superdokładne pomiary dopplerowskich deformacji linii widmowych dla najbliższej gwiazdy – alfy Centaura A (alfa Centaura to układ potrójny, a alfa Cen A to jego najjaśniejszy składnik). Jest to gwiazda bardzo podobna do Słońca: typ widmowy ten sam – G2; masa – 1,1 masy Słońca; średnica – 1,26 średnicy Słońca. Jej powierzchnia drga z dominującym okresem 7 minut, na Słońcu dominujące drżanie ma okres 5 minut. Na podstawie dopasowania tych wszystkich danych do budowy wewnętrznej gwiazdy jej wiek oceniono na 6,5 mld lat (Słońce liczy 4,6 mld lat). Wszystko wskazuje na to, że jeżeli metodami asterosejsmologicznymi nie wykryje się nawet niczego sensacyjnego, to z pewnością metody te przyczynią się do tworzenia dokładniejszych i pewniejszych modeli konkretnych gwiazd.

Tomasz KWAST

Czerwiec

Wieczorem w czerwcu wysoko i trochę ku zachodowi widać jasnego Arktura, najjaśniejszą gwiazdę Wolarza. Jeszcze dalej ku zachodowi znajdują się dwa słabo widoczne gwiazdozbiory: Psy Gończe i Warkocz Bereniki. Nie zawierają one jasnych gwiazd, za to zawierają wiele galaktyk, niestety tylko nieliczne dostępne amatorskim obserwacjom. Ale np. w Warkocz Bereniki można spróbować odszukać galaktykę M67 (Czarne Oko) o jasności 8,8 mag, którą jako pierwszy opisał w 1779 roku Johann Bode (ten od reguły Titiusa–Bodego). W Psach Gończych najjaśniejszym niegwiazdowym obiektem jest gromada kulista M3 o jasności 6,2 mag, a drugim z kolei galaktyka M94 o jasności 7,9 mag. Pamiętajmy, że do obserwacji obiektów mgławicowych potrzebne jest szczególnie czyste i ciemne niebo, o co w czerwcu w Polsce nie jest łatwo.

Merkury znajdzie się najdalej od Słońca 20 VI i można szukać go na zachodnim niebie po zachodzie Słońca. Wenus jest w Baranie i widać ją przed wschodem Słońca. Mars i Saturn są w Raku i wieczorem są już nisko na zachodzie; 17 VI znajdują się we wzajemnej odległości 0,6 stopnia. Jowisz jest w Wadze i widać go praktycznie przez całą noc, gdyż noce są krótkie – 21 VI jest przesilenie letnie, odkąd dni będą się już skracać. Pełnia Księżycy wypada 11 VI, a nów 25 VI. Księżyc zakryje Spikę (7 VI, co będzie widoczne we wschodniej Azji) i Antaresa (10 VI, co zobaczą mieszkańcy północnej Ameryki i południowej Afryki).

T. K.

Wół, lis i konik polny (II)

Rafał SZTENCEL*

W poprzednim numerze opisaliśmy prostą grę, w której trzeba było dokonać dwukrotnie właściwego wyboru jednej z dwóch możliwości, by zmaksymalizować średnią wygraną. Krótko mówiąc, był to dynamiczny problem decyzyjny. Zademonstrowaliśmy też trzy z wielu możliwych strategii, w tym optymalną (oczywiście lisa).

Nie wiemy, jak zachowaliby się gracze, grający w taką grę. Czy dałoby się zauważyć podział na grupy, odpowiadające kilku charakterystycznym strategiom? Dzięki autorom pracy [1] wiemy natomiast, jak zachowują się ludzie, postawieni przed znacznie bardziej skomplikowanym dynamicznym problemem decyzyjnym, gdzie ze względu na złożoność obliczeniową nikt nie jest w stanie w trakcie gry znaleźć strategii optymalnej.

Oto opis eksperymentu. Gra składa się z 15 rund. W każdej rundzie należy wybrać wypłatę, odpowiadającą jednej z opcji: 1 lub 2. Gracz widzi przed podjęciem decyzji proponowane wypłaty. Ostateczna wygrana jest sumą wypłat z 15 rund.

Jednak przyszłe wypłaty z opcji 1 zależą od historii gry, podczas gdy wypłaty z opcji 2 – nie. Ponadto wszystkie wypłaty są nieujemne.

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

A dokładniej:

Dla opcji 1:

- wypłata zasadnicza $Z = 3000$;
- premia $P = 7500$, gdy poprzednio wybraliśmy opcję 1 od 6 do 9 razy, i równa zero w przeciwnym razie;
- koszt $K = 5000$, gdy poprzednio wybraliśmy opcję 2, w przeciwnym razie zero;
- loteria: L_1 jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-5000, 5000]$;
- łączna wypłata $W = \max(Z + P - K + L_1, 0)$.

Dla opcji 2:

- wypłata zasadnicza $Z = 4000$;
- loteria: L_2 jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-5000, 5000]$;
- łączna wypłata $W = \max(Z + L_2, 0)$.

Przy generowaniu wypłat dla opcji 1 i 2 zmienne losowe L_1 i L_2 są niezależne. Są także niezależne od loterii z poprzednich rund.

Uczestnicy eksperymentu mieli możliwość krótkiego treningu przed właściwym testem.

Co się okazało? Autorzy pracy [1] twierdzą, że analiza wzorców zachowania graczy pozwala podzielić ich na trzy grupy, nazwane „dość rozsądni” (*near-rational*), „fataliści” (*fatalists*) i „zagubieni” (*confused*). Gracze z pierwszej grupy (37% całości) tracili średnio zaledwie 2,3% w porównaniu ze strategią optymalną, podczas gdy fataliści (było ich 40%) – 11,7%, wreszcie zagubieni (24%) – 18,6%.

Skąd takie nazwy grup? W bardzo dużym skrócie przedstawiamy argumentację autorów. Gracze „dość rozsądni” zrozumieli, że należy dążyć do uzyskania premii w 6, 7, 8 i 9 rundzie, wobec tego opcję 2 warto wybierać tylko wtedy, gdy ma dużą przewagę. Mało tego, potrafili z niezłą dokładnością oszacować, jaka musi być ta przewaga – a zależy ona od historii gry. Fataliści nie wiedzą, jaki jest charakter tej zależności, choć zdają sobie z grubsza sprawę, jak należy grać, i dlatego w efekcie zdają się na los szczęścia. Zagubieni tracą głowę w rundzie 5 i następnych: przeceniają opcję 2, i w efekcie – wbrew oczekiwaniom – nie uzyskują premii. Ponadto wariancja wygranej jest w tej grupie większa niż w pozostałych.

Wygląda na to, że ludzie postawieni przed trudnym problemem wykazują niewiele fantazji i wybierają spośród niewielu rozwiązań.

Ciekawe, jakie byłyby typowe reakcje na następujący problem:

Wylosowano niezależnie i zgodnie z tym samym rozkładem o ciągłej dystrybucji (albo wręcz ciągłym, jeśli komuś wygodniej) dwie liczby rzeczywiste. Pokazano nam jedną z nich. Jeśli prawidłowo odgadniemy, czy jest ona większa od drugiej, wygramy milion dolarów. Co robić?

Literatura

[1] D. Houser, M. Keane, K. McCabe, *Behavior in Dynamic Decision Problem: An Analysis of Experimental Evidence Using a Bayesian Type Classification Algorithm*, *Econometrica*, vol. 72, No. 3 (May 2004), 781–822.



Dodatek Olimpijski

Zadania II stopnia oraz finału

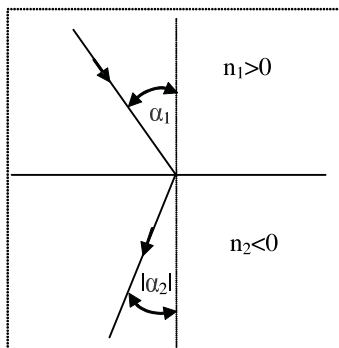
Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

LV OLIMPIADA FIZYCZNA 2005/2006

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej: <http://www.kgof.edu.pl>

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Pewne sztucznie wytworzone materiały mogą mieć w wąskim zakresie częstotliwości fal elektromagnetycznych ujemny współczynnik załamania (dla mikrofal są to metamateriały utworzone z układów drutów, a dla światła widzialnego tzw. kryształy fotoniczne). Przy przejściu z ośrodka o współczynniku załamania $n_1 > 0$ do ośrodka o współczynniku załamania $n_2 < 0$ jest spełnione zwykle prawo załamania $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$, przy czym $\alpha_2 < 0$ – patrz rysunek.



a) Mały przedmiot umieszczono w odległości a_p od płaskorównoległej płytki o grubości d wykonanej

z materiału o współczynniku załamania równym -1 . Rozważmy obraz utworzony przez promienie, które przeszły przez płytkę. Znajdź jego położenie, powiększenie i ustawienie (tzn. czy jest on odbity, obrócony...). Dla jakich a_p rozważany obraz jest rzeczywisty?

b) Mały przedmiot umieszczono w punkcie o współrzędnych $(a_p, -b_p, 0)$, gdzie $a_p > 0, b_p > 0$. Obszar przestrzeni spełniający równania $x > 0, y > 0$ jest wypełniony ośrodkiem o współczynniku załamania równym -1 . Znajdź położenie, powiększenie i ustawienie obrazu tego przedmiotu, utworzonego przez promienie, które wyszły z obszaru o $n = -1$. Z jakich miejsc można zobaczyć ten obraz? Rozważ tylko promienie w płaszczyźnie $z = 0$.

W obu przypadkach narysuj bieg różnych promieni wybiegających z przedmiotu i przechodzących przez obszar o $n = -1$.

Współczynnik załamania przestrzeni poza płytką (w pkt. a)) i poza obszarem $x > 0, y > 0$ (w punkcie b)) jest równy 1.

2. Na prostym, poziomym odcinku drogi przeprowadzono testy samochodu. Ustalono, że minimalna droga hamowania tego samochodu od $v_{100} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do $0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ wynosi $l = 40 \text{ m}$.

Obliczyć minimalny czas osiągnięcia przez spoczywający początkowo samochód prędkości v_{100} , przy założeniu, że samochód może w każdej chwili w pełni wykorzystywać moc swojego silnika. Zakładamy, że warunki są dokładnie takie same jak w powyższym teście.

Samochód ma (wraz z kierowcą) masę $m = 1000 \text{ kg}$, moc silnika $P = 50 \text{ kW}$, oraz napęd i hamulce na wszystkie koła. Pomijamy opór powietrza, opory toczenia i wszystkie opory układu przeniesienia napędu. Nawierzchnia drogi była taka sama w każdym punkcie rozpatrywanego odcinka testowego. Samochód ma system optymalnie dobierający siłę hamowania każdego koła oraz układ optymalnie rozkładający moc silnika na każdą z osi.

3. Rozważmy prostokątną taflę lodu o wymiarach $a \times b \times h$, gdzie $a \gg h$, $b \gg h$. Tafla ta przesuwa się z prędkością v po płaskiej, poziomej powierzchni.

Jakie jest największe v , przy którym tafla nie zacznie się topić? Tafla porusza się w takich warunkach, że temperatura jej górnej powierzchni jest równa $T_{ot} = -10^\circ\text{C}$.

Współczynnik przewodnictwa cieplnego lodu jest równy $\lambda = 2,3 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$, natomiast powierzchnia, po której przesuwa się tafla, nie przewodzi ciepła. Współczynnik tarcia suchej powierzchni lodu o tę powierzchnię jest równy $f = 0,1$. Obliczenia wykonaj dla

(i) $a = 0,3 \text{ m}$, $b = 0,3 \text{ m}$, $h = 0,02 \text{ m}$,

(ii) $a = 2 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $h = 0,1 \text{ m}$ (fragment kry)

oraz dla

(iii) $a = 30 \text{ m}$, $b = 30 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$ (oderwany fragment lodowca w górach).

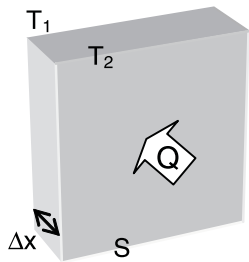
Gęstość lodu jest równa $\rho_L = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Współczynnik przewodnictwa cieplnego danego ośrodka jest zdefiniowany następująco:

Rozważmy dwie równoległe, odległe o Δx warstwy ośrodka, o powierzchni S każda (patrz rysunek). Jeśli temperatury warstw wynoszą odpowiednio T_1 i T_2 , to

$$\lambda = \frac{Q/\Delta t}{S} \frac{\Delta x}{|T_2 - T_1|},$$

gdzie Q jest ilością ciepła przepływającego w ciągu czasu Δt od warstwy cieplejszej do chłodniejszej.



ii

Zadanie doświadczalne. Dwa oporniki (R_1 , R_2) oraz kondensator C połączone w układ elektryczny. Elementy obwodu zostały umieszczone w zamkniętym, izolującym pudełku. W trzech punktach obwodu utworzono kontakty, które umieszczono na ściankach pudełka i oznaczono literami A, B oraz C. Można do nich podłączyć przewody elektryczne.

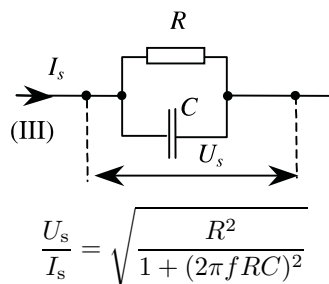
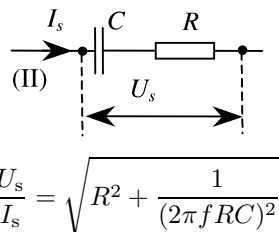
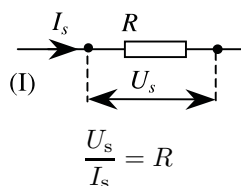
Mając do dyspozycji:

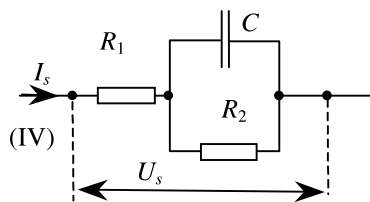
- woltomierz pozwalający na pomiar napięcia stałego oraz wartości skutecznej napięcia zmiennego,
- baterię 4,5 V,
- generator napięcia sinusoidalnego o częstotliwości regulowanej w zakresie $20 \div 1000 \text{ Hz}$,
- opornik o oporze 100Ω ,
- przewody i zaciski umożliwiające zestawienie układu pomiarowego,
- papier milimetryowy,

ustal, nie otwierając pudełka, schemat połączeń elementów w układzie elektrycznym zamkniętym w pudełku i wyznacz wartości oporów R_1 , R_2 oraz pojemność C kondensatora.

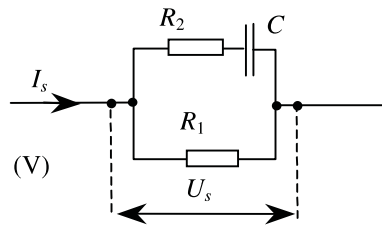
Wskazówka:

- 1) Przyjmij, że natężenie prądu płynącego przez woltomierz jest zanedbywane małe.
- 2) Dla przedstawionych poniżej obwodów elektrycznych zależność od częstotliwości f stosunku napięcia skutecznego U_s do prądu skutecznego I_s opisana jest następującymi wzorami:





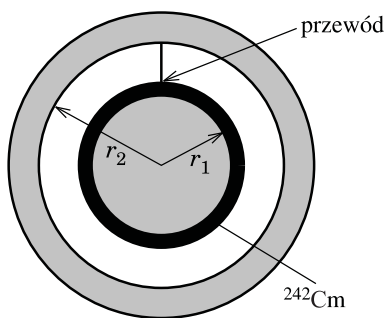
$$\frac{U_s}{I_s} = \frac{\sqrt{[R_1 + R_2 + R_1(2\pi f R_2 C)^2]^2 + R_2^2(2\pi f R_2 C)^2}}{1 + (2\pi f R_2 C)^2}$$



$$\frac{U_s}{I_s} = \frac{\sqrt{[R_1 + R_1 R_2 (R_1 + R_2)(2\pi f C)^2]^2 + R_1^4(2\pi f C)^2}}{1 + (R_1 + R_2)^2(2\pi f C)^2}$$

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Metalowa kulka o promieniu $r_1 = 10$ cm jest otoczona, współśrodkową z nią, metalową, sferyczną powłoką o promieniu wewnętrznym $r_2 = 2r_1$ (patrz rys. 1). Między powłoką a kulką panuje próżnia. Kulka jest pokryta cienką, równomierną warstwą izotopu kiuru ^{242}Cm w ilości $n = 0,01$ mola. Jądro ^{242}Cm rozpada się, wysyłając cząstkę alfa o energii $E_0 \approx 6,1$ MeV. Czas połowicznego zaniku kiuru wynosi $t_{1/2} = 163$ dni. Powłoka jest połączona z kulką biegnącym radialnie cienkim przewodem. Przyjmujemy, że obecność przewodu i płynący w nim prąd nie wpływają na pole elektryczne między powłokami. Cząstki alfa są całkowicie pochłaniane przez powłokę oraz kulkę, ale nie są pochłaniane ani rozpraszane przez kiur.



Rys. 1

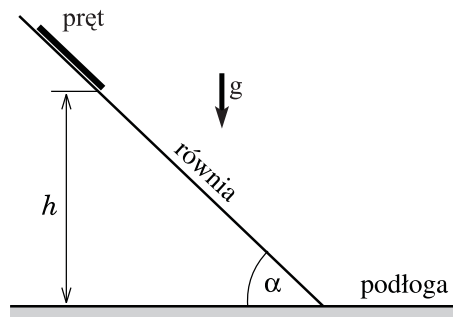
- Jakie jest natężenie prądu płynącego w przewodzie, jeśli jego opór jest równy $R_1 = 100$ k Ω ?
- Jaki powinien być opór R_2 przewodu, aby natężenie płynącego w nim prądu było równe połowie natężenia prądu określonego w pkt. a)?

Liczba Avogadro $N_A \approx 6,0 \cdot 10^{23}$ mol $^{-1}$, wartość ładunku elektronu $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Pomijamy emisję elektronów z kulki i otaczającej ją powłoki.

Rozważamy sytuację stacjonarną, tzn. po (przybliżonym) ustaleniu się natężenia prądu w przewodzie, przez czas mały w porównaniu z $t_{1/2}$.

2. Pręt o długości l i masie m położono na równi o kącie nachylenia α (patrz rys. 2), na wysokości h nad podłogą (przy czym $h \gg l$).

- Opisz jakościowo ruch pręta.
- Wyznacz prędkość pręta w ostatniej fazie ruchu. Podaj wartość liczbową dla $h = 6,4$ m, $\alpha = 45^\circ$, $g = 10$ m/s 2 (przyspieszenie ziemskie).

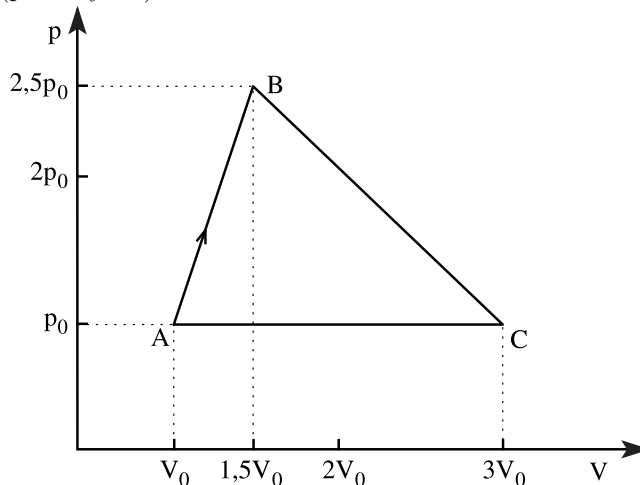


Rys. 2

Tarcie i opór powietrza zanedbujemy. Pręt jest idealnie sztywny i cały czas znajduje się w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do powierzchni równi. Podłoga i równia idealnie amortyzują uderzenia, tzn. powodują, że tuż po uderzeniu prostopadła do nich składowa prędkości uderzanego punktu jest równa 0, a ich ugięcie w trakcie uderzenia jest znikomo małe.

Moment bezwładności pręta względem środka masy jest równy $I = (1/12)ml^2$. W chwili początkowej pręt spoczywał. Kąt nachylenia spełnia warunek $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, przy czym α nie jest bliskie 90° .

3. Pewien konstruktor zbudował skomplikowany silnik cieplny, którego czynnikiem roboczym jest n moli jednoatomowego gazu doskonałego (molowe ciepło właściwe równe $(3/2)R$) pracującego w cyklu tworzącym na wykresie $p - V$ trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach (V_0, p_0) , $((3/2)V_0, (5/2)p_0)$, $(3V_0, p_0)$ (patrz rys. 3).



Rys. 3

Gaz pobiera ciepło ze źródła ciepła o temperaturze T_1 i oddaje je do chłodnicy o temperaturze T_2 .

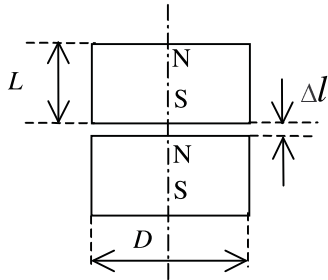
Przyjmujemy, że gaz jest w każdym momencie cyklu w stanie równowagi termodynamicznej i pomijamy wszelkie opory mechanizmów.

a) Oblicz sprawność tego silnika.

b) Jakie warunki muszą spełniać temperatury T_1 i T_2 , aby silnik pracował?

Zadanie doświadczalne.

Rozważmy dwa magnesy walcowe o wysokości L i średnicy D , jednorodnie namagnesowane w kierunku osi walca. Jeśli takie magnesy są rozsunięte na niewielką odległość $\Delta l \ll L$, $\Delta l \ll D$ (rys. 4), to pole magnetyczne w szczelinie pomiędzy nimi jest w przybliżeniu jednorodne i prostopadłe do podstaw magnesów.



Rys. 4

Przy rozsuwaniu magnesów na odległość Δl wartość indukcji B nie zmienia się, a towarzyszącą temu zmianę

energii pola magnetycznego można wyrazić jako:

$$\Delta E = \frac{1}{2\mu\mu_0} B^2 S \Delta l,$$

gdzie,

S – powierzchnia podstawy walca,

μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni,

μ – względna przenikalność magnetyczna ośrodka w szczelinie pomiędzy magnesami.

Masz do dyspozycji:

- dwa jednakowe magnesy neodymowe w kształcie walca (namagnesowane jednorodnie w kierunku osi walca),
- zagięty na końcu pasek niemagnetycznej ($\mu = 1$) blachy o masie równej (21 ± 1) g,
- puszkę wykonaną z blachy ferromagnetycznej, wypełnioną przetworami owocowymi,
- 1 kg cukru w kostkach,
- torebkę plastikową,
- krzesło z płaskim drewnianym siedziskiem,
- klocek,
- linijkę.

Wyznacz wartość indukcji B pola magnetycznego w szczelinie pomiędzy dwoma przyciągającymi się magnesami (patrz rys. 4).

Przenikalność magnetyczna próżni wynosi $\mu_0 = 4\pi(10^{-7} \text{ VS/Am})$.

Laureaci LV Olimpiady Fizycznej 2006/2007

1. Michał Paweł Pilipczuk, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska; klasa III

2. Krzysztof Zbigniew Niemkiewicz, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu, nauczyciel: mgr Marek Golka; klasa III

3. Marcin Piotr Sobczyk, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, nauczyciel: dr Jerzy Mucha; klasa III

4. Tomasz Marek Smoleński, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu, nauczyciel: mgr Marek Golka; klasa II

5. Tomasz Badowski, II LO im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie, nauczyciel: mgr Anna Gut; klasa III

6. Michał Gawroński, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński; klasa II

7. Arkadiusz Paweł Trawiński, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu, nauczyciel: dr Jacek Jurkowski; klasa III

8. Marcin Pawłowski, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu, nauczyciel: dr Jacek Jurkowski; klasa III

9. Piotr Tomasz Godlewski, Publiczne Gimnazjum Nr 23 przy ZSO Nr 6 im. Jana Kochanowskiego w Radomiu, nauczyciel: mgr Grażyna Bilewska; klasa III

10. Władysław Tadeusz Surała, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: mgr Robert Stasiak; klasa III

11. Adam Mariusz Ratajczak, VI LO im. Wacława Sierpińskiego w Gdyni, nauczyciel: mgr Dorota Cegielska; klasa III

12. Piotr Batog, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, nauczyciel: mgr Marian Bąk; klasa III

13. Konrad Henryk Wypchło, II LO im. Stanisława Staszica w Starachowicach, nauczyciel: mgr Jacek Orzechowski; klasa III

14. Jakub Stanisław Kobak, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie, nauczyciel: mgr Grzegorz Depczyński; klasa III

15. Paweł Rafał Sznajder, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: mgr Robert Stasiak; klasa II

16. Juliusz Stasiewicz, I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku, nauczyciel: mgr Andrzej Stasiewicz; klasa III

17. Kornel Maksymilian Maczyński, V LO im. w Bielsku-Białej, nauczyciel: mgr Ewa Gajda; klasa III

18. Marcin Stanisław Bieda, LO ss. Prezentek im. Jana Pawła II w Rzeszowie, nauczyciel: siostra mgr Agata Rozmus; klasa II

19. Karol Jakub Wędołowski, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku, nauczyciel: mgr Mariusz Sobczak; klasa III

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA (24 lutego 2006)

1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równości $a^2 + b^2 = c^2$, $x^2 + y^2 = z^2$ oraz nierówności $|x - a| \leq 1$, $|y - b| \leq 1$. Wykazać, że zbiory $\{a, b\}$ oraz $\{x, y\}$ są równe.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC + BC = 3AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E . Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I . Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

3. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

4. Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (a_n) jest określony przez warunki

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = d(a_n) + c \text{ dla } n = 1, 2, \dots,$$

gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m . Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k , że ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ jest okresowy.

5. Punkt C jest środkiem odcinka AB . Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach C i D . Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1 , który nie zawiera punktu C . Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2 , który nie zawiera punktu C . Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

6. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita n , przy czym $p \geq n \geq 3$. Zbiór A składa się z n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ i ma następującą własność:

Dla dowolnych dwóch ciągów (x_1, x_2, \dots, x_n) oraz (y_1, y_2, \dots, y_n) ze zbioru A istnieją takie różne liczby k, l, m , że $x_k \neq y_k$, $x_l = y_l$, $x_m \neq y_m$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru A .

ZAWODY III STOPNIA (5 kwietnia 2006 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k , dla których liczba $3^k + 5^k$ jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od 1.

3. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

4. Na trójce liczb wykonujemy następującą operację. Wybieramy dwie spośród tych liczb i zastępujemy je

ich sumą oraz ich iloczynem, pozostała liczba nie ulega zmianie. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od trójki $(3, 4, 5)$ i wykonując tę operację możemy ponownie uzyskać trójkę liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD , to czworościan $ABCD$ jest foremny.

6. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b , dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$, gdzie każda z liczb c_0, c_1, \dots, c_{n-1} jest równa 1 lub -1 .

Informacje o przebiegu LVII Olimpiady Matematycznej

I. W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1670 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 567 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 125 uczniów.

II. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 7 kwietnia br. postanowił przyznać 15 osobom tytuł laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 punktów możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

I miejsce: Przemysław MAZUR (31 pkt.), uczeń klasy pierwszej II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie.

II miejsce: Wojciech ŚMIETANKA (30 pkt.), uczeń klasy drugiej III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

III miejsce: Michał PILIPCZUK (28 pkt.), uczeń klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Nagrody stopnia drugiego

IV miejsce: Marcin Dublański (26 pkt.), uczeń klasy drugiej I LO im. Edwarda Dembowskiego w Zielonej Górze.

Miejsca V–VII

Krzysztof DOROBISZ (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Maciej KUŹNIAR (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Maciej SKÓRSKI (24 pkt.), uczeń klasy trzeciej I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie.

VIII miejsce: Marta GÓRECKA (23 pkt.), uczennica klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl

Nagrody stopnia trzeciego

Miejsca IX–XII:

Joanna BOGDANOWICZ (**20 pkt.**), uczennica klasy pierwszej XIII LO w Szczecinie.

Kamil HERBA (**20 pkt.**), uczeń klasy trzeciej XIII LO w Szczecinie.

Jan SZEJKO (**20 pkt.**), uczeń klasy trzeciej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Filip WOLSKI (**20 pkt.**), uczeń klasy trzeciej III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

Miejsca XIII–XV:

Marcin ANDRYCHOWICZ (**19 pkt.**), uczeń klasy pierwszej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Jakub KALLAS (**19 pkt.**), uczeń klasy drugiej III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

Jakub KONIECZNY (**19 pkt.**), uczeń klasy pierwszej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

III. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 16 zawodników:

Miejsca XVI–XXIII:

Maciej Gawron (**18 pkt.**), uczeń klasy drugiej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Albert Kamiński (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie.

Marcin Kurczych (**18 pkt.**), uczeń klasy drugiej I LO im. Stefana Żeromskiego w Kielcach.

Artur Machno (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Marcin Skotniczny (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Tomasz Szarek (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu.

Tomasz Szumny (**18 pkt.**), uczeń klasy drugiej IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu.

Bogusław Wróblewski (**18 pkt.**), uczeń klasy trzeciej I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie.

Miejsca XXIV–XXVII:

Przemysław Chojecki (**17 pkt.**), uczeń klasy drugiej XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Karol Daszkiewicz (**17 pkt.**), uczeń klasy drugiej III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

Tomasz Kulczyński (**17 pkt.**), uczeń klasy drugiej VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy.

Wojciech Zaremba (**17 pkt.**), uczeń klasy drugiej XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.

Miejsca XXVIII–XXXI:

Sławomir Kierat (**16 pkt.**), uczeń klasy trzeciej VIII LO im. Marii Skłodowskiej Curie w Katowicach.

Juliusz Kopczeński (**16 pkt.**), uczeń klasy trzeciej II Społecznego LO w Warszawie.

Juliusz Sompolski (**16 pkt.**), uczeń klasy piątej Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu.

Maciej Wawro (**16 pkt.**), uczeń klasy drugiej LO im. Mikołaja Kopernika w Jarosławiu.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje następującym osobom, które pomagały laureatom

i wyróżnionym uczniom w przygotowaniach do zawodów:

Zbigniew Bobiński, Beata Bogdańska, Wojciech Boratyński, Łukasz Bury, Stanisław Buś, Piotr Butryn, Andrzej Bysiewicz, Lucyna Cięciwa, Karol Cwalina, Wojciech Czerwiński, Sławomir Dinew, Żywomir Dinew, Maria Donten, Tomasz Dubrownik, Jacek Dymel, Tomasz Elsner, Małgorzata Fundakowska, Ryszard Gruca, Janusz Gwoździwicz, Witold Jarnicki, Joanna Jaszuńska, Jolanta Jerzy, Krzysztof Kapulkin, Grzegorz Kapustka, Michał Kapustka, Zbigniew Karczmarczyk, Michał Kijewski, Marek Kiszkiś, Jerzy Konarski, Alicja Kozak-Wnuczek, Artur Kozłowski, Bogusław Kraszewski, Lev Kurlyandchik, Michał Lason, Andrzej Lenarcik, Adam Makowski, Wojciech Martys, Michał Matuszczyk, Adam Neugebauer, Michał Niedźwiedz, Jakub Onufry Wojtaszczyk, Waldemar Pałuba, Piotr Pawlikowski, Henryk Pawłowski, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Teresa Piotrowska, Krystyna Skórnik, Michał Skrzypczak, Edward Stachowski, Maria Stańczykowska, Renata Suchanek, Przemysław Szczepaniak, Sławomir Śmiarowski, Wojciech Śmietanka, Wojciech Tomalczyk, Bartosz Walczak, Paweł Walter, Oskar Wantoła, Filip Wieczorek, Krzysztof Wilgucki i Tomasz Żukowski.

IV. W skład delegacji polskiej na XLVII Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbędzie się w Słowenii w dniach 10–18 lipca br., powołani zostali:

Krzysztof Dorobisz, Marcin Dublański, Przemysław Mazur, Michał Pilipczuk, Maciej Skórski i Wojciech Śmietanka.

Zawodnicy rezerwowi:

Maciej Kuźniar i Marta Górecka.

V. Na XXIX Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się w dniach 28 czerwca – 7 lipca br. w Polsce,

powołano delegację w składzie: *Przemysław Chojecki, Maciej Gawron, Marta Górecka, Jakub Konieczny, Maciej Kuźniar i Tomasz Szumny.*

Zawodnicy rezerwowi:

Karol Daszkiewicz, Wojciech Zaremba i Maciej Wawro.

VI. Powołano też delegację na XVII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich, które odbędą się w Finlandii na początku listopada br. Skład tej delegacji jest następujący:

Marcin Andrychowicz, Joanna Bogdanowicz, Jakub Kallas, Tomasz Kulczyński i Marcin Kurczych.

Zawodnicy rezerwowi:

Wojciech Zaremba, Karol Daszkiewicz i Maciej Wawro.

VII. Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbędzie się w dniach 4–18 czerwca br. w Domu Wczasowym *Zgoda* w Zwardoniu. Na obóz ten zostały powołane następujące osoby:

Marcin Andrychowicz, Joanna Bogdanowicz, Przemysław Chojecki, Karol Daszkiewicz, Krzysztof Dorobisz, Marcin Dublański, Maciej Gawron, Marta Górecka, Joachim Jelisiejew, Jakub Kallas, Jakub Konieczny, Marcin Kurczych, Maciej Kuźniar, Przemysław Mazur, Łukasz Mazurek, Maciej Skórski, Urszula Swianiewicz, Maciej Wawro i Wojciech Zaremba.

Zawodnicy rezerwowi:

Łukasz Wołochowski, Przemysław Jurewicz, Tomasz Kobos i Grzegorz Sobczak.

Wskutek uwzględnienia ewentualnych odwołań składy powyższych delegacji mogą ulec zmianie.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Z okresowości przebiegu całkowitych zaćmień Słońca (cykl *saros*) wynika dziś, że pas zaćmienia całkowitego w dniu 14 stycznia 484 roku powinien wtedy przebiegać m.in. przez Hiszpanię. Okazało się jednak, że w tym dniu nie obserwowano tam zaćmienia całkowitego, tylko częściowe. Oblicz, gdzie na kuli ziemskiej przebiegał wówczas pas całkowitego zaćmienia.

Wskazówka: Pas całkowitego zaćmienia uległ przesunięciu w długości geograficznej ze względu na zmianę okresu obrotu Ziemi, wynikającą z hamowania pływowego. Zmiana ta powoduje, że w ciągu 100 lat doba słoneczna wydłuża się o 0,0016 sekundy.

2. Jaki jest promień orbity satelity Ziemi, który sięga wierzchołka stożka cienia rzucanego przez Księżyc w nowiu, gdy Księżyc jest odległy o 90 stopni od węzła swojej orbity i znajduje się w średniej odległości od Ziemi, a Ziemia w średniej odległości od Słońca? Potrzebne dane znajdź samodzielnie.

3. Dzięki szczęśliwej okoliczności, tzn. znajdującemu się w niewielkiej odległości kątowej radioźródła 3C 66A o przesunięciu ku czerwieni $z = 0,44$, udało się zmierzyć (metodą interferometrii wielkobazowej) położenia na sferze radioźródła 3C 66B o $z = 0,0215$ w dwu różnych częstotliwościach. Okazało się, że radioźródło 3C 66B wykonuje ruch cykliczny z okresem $1,05 \pm 0,03$ roku. Gdy do wspomnianych pomiarów spróbowano dopasować ruch keplerowski układu podwójnego, to okazało się, że rozmiary kątowe wielkiej półosi są różne dla obu częstotliwości i wynoszą: 243 ± 30 i 45 ± 4 mikrosekund łuku. Spróbuj wyjaśnić naturę tego źródła (czym jest i dlaczego są dwa różne rozmiary liniowe). Zakładając,

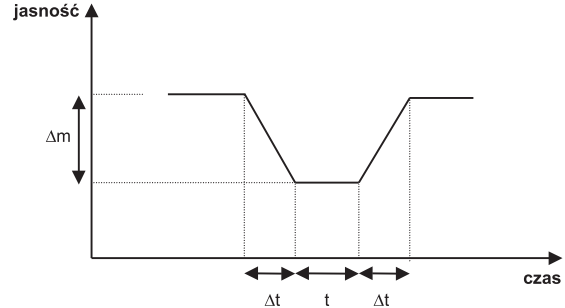
że składa się ono z dwóch równych mas, wywnioskuj, czym może być obserwowany obiekt.

W tym celu oszacuj:

- a. masę radioźródła,
- b. prędkość liniową ruchu w obu przypadkach (zakładając przybliżenie kołowe).

Zinterpretuj tak wysoką, wydawałoby się absurdalną, wartość prędkości. Aktualnie przyjmowana wartość stałej Hubble'a wynosi $70 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$.

4. Minimum wtórne pewnej gwiazdy zmiennej zaćmieniowej jest identyczne z jej minimum głównym.



Różnica jasności w minimum i maksimum wyrażona w wielkościach gwiazdowych wynosi Δm . Zmiana jasności gwiazdy między wartościami ekstremalnymi trwa tak samo długo i wynosi Δt . Czas trwania tzw. płaskiego dna wynosi t .

1. Znajdź ogólny warunek rozstrzygający, czy przy takich parametrach zaćmienia jest ono centralne.
2. Korzystając z tego warunku, sprawdź, czy jest centralne zaćmienie w przypadku, gdy $\Delta m = 0^m43$, $t/\Delta t = 0,43$ i znajdź stosunek promieni gwiazd.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Ciężkie pierwiastki są produkowane w ostatnich stadiach ewolucyjnych masywnych gwiazd. Stąd kluczową informacją pozwalającą ocenić liczbę gwiazd w tych stadiach jest określenie ilości nowo powstających ciężkich pierwiastków. Można to zrobić, np. mierząc strumień kwantów gamma powstających w wyniku rozpadu krótko żyjących izotopów (krótko żyjące izotopy „świecą” niedługo i praktycznie emitowane promieniowanie określa tempo ich powstawania). Z początkiem 2006 roku doniesiono o pomiarze natężenia strumienia fotonów pochodzącego z rozpadu ^{26}Al o okresie połowicznego zaniku $7,2 \cdot 10^5$ lat. Natężenie to wyniosło $\phi = 3,3 \cdot 10^{-4}$ fotonów na centymetr kwadratowy i sekundę. Fotony przychodzą z niewielkich, prawie punktowych źródeł nieregularnie rozłożonych w pasie o szerokości około 20 stopni i rozciągającym się na długości około 60 stopni wzdłuż płaszczyzny Galaktyki. Jak należało się spodziewać, środek pasa leży w kierunku na centrum Galaktyki. Okazało się dodatkowo, że fotony pochodzące ze skrajnych części pasa wykazują przesunięcie ku czerwieni i fioletowi wskazujące na udział źródeł promieniowania w ruchu wokół Galaktyki. Korzystając z tych danych, oszacuj ilość ^{26}Al w Galaktyce.

Wskazówki: W celu oszacowania odległości, w jakiej znajdują się źródła promieniowania, skorzystaj z danych o przesunięciu dopplerowskim – z podanych własności można sądzić, że źródła promieniowania należą do pewnego pierścienia otaczającego jej centrum. Ponieważ chodzi jedynie o oszacowanie, do rachunków przyjmij, że wszystkie fotony pochodzą z jednego źródła leżącego w jakiejś wybranej przez Ciebie odległości z przedziału tych, które dopuszcza położenie tego pierścienia. Wyraźnie zapisz, jaka odległość została wybrana i dlaczego. Przyjmij, że odległość od centrum Galaktyki wynosi 28 tys. lat świetlnych.

2. Podaj, w jaki sposób zmieniają się w ciągu roku obserwowane współrzędne równikowe gwiazdy α Leonis (α Lwa). Przyjmij, że średnie współrzędne α Lwa wynoszą: $\alpha_{2000} = 10^h 08^m 00^s$, $\delta_{2000} = +11^\circ 58' 00''$, paralaksa $\pi = 0''039$.

3.* Wiedząc, że odtwarzana sfera odpowiada wyglądowni nieba podczas jednej z tegorocznych nocy na Ziemi, korzystając z dostępnych materiałów, określ z możliwie największą dokładnością:

- a) datę odtwarzanej nocy,
- b) szerokość geograficzną miejsca obserwacji,
- c) porę nocy,
- d) widoczne na niebie obiekty z katalogu Messiera,
- e) współrzędne horyzontalne wskazanego obiektu.

*Na niebie planetarium odtworzono wygląd sfery niebieskiej z pozycji obserwatora na równiku w dniu 10 grudnia 2006 roku, dwie godziny po zachodzie Słońca.

4. 10 listopada 2005 roku w obserwatorium SAAO, znajdującym się na płaskowyżu Karoo w RPA, nastąpiła oficjalna inauguracja SALT (Southern African Large Telescope) – teleskopu o największej obecnie powierzchni zbierającej światło, odpowiadającej powierzchni monolitycznego lustra o średnicy 10,5 metra. Polska uczestniczyła w jego budowie, ponosząc około 11% kosztów. W takim samym wymiarze polscy astronomowie mogą korzystać z czasu obserwacyjnego na tym teleskopie. W odróżnieniu od klasycznych teleskopów SALT, może poruszać się tylko wokół jednej osi: możliwy jest dowolny ruch w azymucie, natomiast stałe jest nachylenie osi teleskopu – wynosi ono 37 stopni względem pionu. W trakcie obserwacji zwierciadło teleskopu pozostaje nieruchome, a wybrane obiekty przesuwane się przed lustrem wraz z ruchem sfery niebieskiej mogą być obserwowane dzięki ruchowi urządzenia śledzącego, tzw. trackera, znajdującego się na powierzchni ogniskowej. Ponieważ lustro główne ma kształt sferyczny, tracker jest wyposażony w korektor aberracji sferycznej. Ruch trackera umożliwia obserwacje w pasie nieba o szerokości 12 stopni (6 stopni od osi zwierciadła).

Biorąc pod uwagę specyfikę budowy teleskopu SALT i jego ograniczenia, określ jego możliwości obserwacyjne, w szczególności:

- określ, jaki obszar nieba jest dostępny do obserwacji w zadanym momencie we współrzędnych horyzontalnych;
- określ zakres deklinacji obiektów, które SALT może obserwować;
- oszacuj, jaki procent sfery niebieskiej, dostępnej z obserwatorium SAAO, jest możliwy do obserwacji za pomocą teleskopu SALT.

Informacje dodatkowe:

- szerokość geograficzna obserwatorium SAAO: $\varphi = -32^\circ$;
- pole boczne odcinka kuli (czaszy) wylicza się ze wzoru: $P_b = 2\pi Rh$, gdzie R jest promieniem kuli, h jest wysokością czaszy;
- przyjmij promień sfery niebieskiej równy 1.

5. Planetoida typu NEO obiega Słońce po elipsie w tej samej płaszczyźnie, w tym samym kierunku i z tym samym okresem co Ziemia. Drugie ognisko orbity planetoidy znajduje się na orbicie Ziemi. Wiedząc, że wczoraj planetoida była w opozycji i aphelium, oblicz, kiedy przetnie ona orbitę Ziemi i jaka będzie wówczas jej odległość od nas. W rozwiązaniu pominij oddziaływania perturbacyjne i przyjmij, że orbita Ziemi jest okręgiem.

6. Określ, kiedy sporządzono załączoną mapę aktualnego wówczas nieba. Należy podać pełne uzasadnienie odpowiedzi.

Wskazówka: Wskutek zjawiska precesji Punkt Barana przesuwa się po ekliptyce w kierunku przeciwnym niż ruch Słońca o kąt 50,3 sekundy rocznie.



Końcowa klasyfikacja

Laureaci

I miejsce: Krystyna Macioszek, V LO im. K. Kieślowskiego w Zielonej Górze

II miejsce: Karolina Sołtys, I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie

III miejsce ex aequo:

Piotr Czarnik, II LO im. płk. Leopolda Lisa Kuli w Rzeszowie

Krzysztof Zieleniewski, II LO im. Jana Śniadeckiego w Kielcach

IV miejsce ex aequo:

Paweł Kołacz, IX LO im. Cypriana. K. Norwida w Częstochowie

Tomasz Smoleński, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu

Finaliści

V miejsce: Krzysztof Niemkiewicz, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu

VI miejsce: Rafał Szepietowski, III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni

VII miejsce: Przemysław Zych, LO im. Bolesława Prusa w Skierniewicach

VIII miejsce: Paweł Swaczyna, Salezjański ZSP „Don Bosko” w Świętochłowicach

IX miejsce: Marcin Abram, ZSO nr 10 im. Edwarda Dembowskiego w Gliwicach

X miejsce: Paweł Sierszeń, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim

XI miejsce ex aequo:

Juliusz Stasiewicz, I LO im. Adama Mickiewicza Białymstoku

Tomasz Szalast, I LO w Radzynie Podlaskim

Karol Wędołowski, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku

oraz

Marcin Chwała, LO im. Stefana Żeromskiego w Strzegomiu

Michał Kobielarz, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu

Filip Misiewicz, I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie

Mariusz Niedźwiecki, ZSO nr 1 im. Adama Mickiewicza w Prudniku

Julia Romanowska, I LO im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie