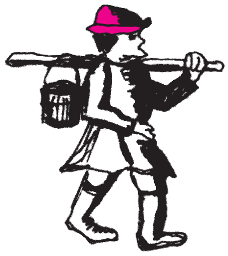


SPIS TREŚCI
NUMERU 5 (384)

W następnym numerze:

Krzywizna pseudosfery

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delty”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46) Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące**. Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

   Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: 022-5328-731, lub -820, lub -816, fax: -732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
http://www.mimuw.edu.pl/delta

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Konflikt i kooperacja, czyli Nobel 2005

*Anna ŻYLICZ**

Profil strategii $(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie x_i jest strategią i-tego gracza, nazywamy równowagą Nasha, jeśli żadnemu z graczy nie opłaca się stosować innej strategii, przy założeniu, że pozostali gracze pozostaną przy swoich strategiach. Więcej o równowadze Nasha można przeczytać w artykule J. Miękisza „Polowanie na jelenia i równowagi Nasha”, *Delta* 11/2001.

*Wydział Nauk Ekonomicznych Uniwersytetu Warszawskiego

W 2005 roku Nagrodę Nobla z ekonomii otrzymali za „przyczynienie się do zwiększenia naszego rozumienia mechanizmów konfliktu i kooperacji przez analizę teoriogrową” profesorowie Robert J. Aumann (Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie) oraz Thomas C. Schelling (Uniwersytet Maryland i Uniwersytet Harwarda).

Obaj laureaci znakomitą większość swoich prac publikowali w okresie, w którym dwa największe światowe mocarstwa zaangażowane były w zimną wojnę i wyścig zbrojeń. Umiejętność znalezienia właściwych strategii politycznych w konfliktowych sytuacjach była więc wtedy szalenie ważna, rola naukowców w znajdowaniu najlepszych strategii zaś na tyle duża, że w latach 60. XX wieku dostęp do niektórych artykułów Aumanna był ograniczony!

My zacznijmy jednak od mniej poważnych tarć, a mianowicie od konfliktów małżeńskich. Wyobraźmy sobie sytuację, w której każdy z małżonków musi zdecydować, co będzie robił wieczorem. Oczywiście, przyjemność sprawić może tylko wspólne wyjście, ale mąż wolałby zobaczyć mecz piłkarski (M), a żona balet (B). Tę sytuację „wojny płci” można przedstawić za pomocą następującej macierzy wypłat:

	B	M
B	2,1	0,0
M	0,0	1,2

Decyzja żony to wybór wiersza, a męża – kolumny; zadowolenie żony opisuje pierwsza, a męża – druga liczba w wybranym polu tabeli.

W tej grze mamy trzy równowagi Nasha: jeśli oboje małżonkowie zdecydują się pójść na balet (para strategii czystych (B, B)); jeśli oboje zdecydują się pójść na mecz (para strategii czystych (M,M)); albo jeśli każde w celu rozstrzygnięcia dylematu będzie rzucać niesymetryczną monetą (para strategii mieszanych $(\frac{2}{3}\text{B} + \frac{1}{3}\text{M},\ \frac{1}{3}\text{B} + \frac{2}{3}\text{M})$). W pierwszym przypadku faworyzowana jest żona, w drugim – mąż. W trzecim co prawda nikt, ale za to może się tak zdarzyć, że małżonkowie wylosują różne rozrywki i żadne z nich nie będzie szczęśliwe. Co robić?

Jeśli małżonkowie mogą porozmawiać przed podjęciem decyzji, to mogą np. ustalić, że pójdą na balet. Zauważmy, że jeśli się umówią, to nikt nie będzie miał motywacji do tego, żeby umowę jednostronnie zrywać – nawet mąż, któremu nie opłaca się zostawić żony samej przed budynkiem opery, choć jego wieczór nie będzie całkiem udany, bo oczywiście wolałby iść z żoną na mecz. Innym problemem jest to, w jaki sposób ustalić wspólny plan. Jedną z możliwości rozstrzygnięcia między wieloma równowagami jest odwołanie się np. do rzutu monetą. Rozszerzając wyjściową grę o ten dodatkowy ruch wykonywany (przez naturę), zanim którekolwiek z małżonków podejmie decyzję, rozszerzamy też *de facto* zbiory strategii graczy (mogą uzależnić swój wybór od tego, co zostanie wylosowane). Jeśli teraz zastanowimy się nad tym, jakie w grze są równowagi, to dochodzimy do wprowadzonego przez Aumanna [2] pojęcia równowagi skorelowanej. Równowaga ta podobna jest do równowagi Nasha w strategiach mieszanych, ale odpowiada sytuacji, w której losowe wybory graczy nie muszą być niezależne. W naszym przypadku równowagą Aumanna byłaby np. para strategii (B – jeśli orzeł, M – jeśli reszka; B – jeśli orzeł, M – jeśli reszka), niezależnie od tego, czy moneta jest symetryczna.

Jednak, niestety, nie zawsze jest tak, że nawet jeśli umowa została już zawarta, to opłaca się jej przestrzegać. Jeśli do wyboru wieczorem małżonkowie mają sprzątanie mieszkania (S) lub siedzenie na kanapie (K), to macierz wypłat mogłaby wyglądać następująco:

	S	K
S	4,4	0,5
K	5,0	2,2

Każdy jest najszczęśliwszy, jeśli mieszkanie jest czyste, a prace zostały wykonane przez współmałżonka; trochę mniej szczęśliwy – jeśli prace porządkowe były wykonywane wspólnie; jeszcze mniej – jeśli mieszkanie jest brudne, ale na kanapie nie siedział w pojedynkę; i wcale – jeśli sam musiał sprzątać mieszkanie. Tym razem małżeństwo – jako całość – byłoby najszczęśliwsze, gdyby wybrana została para strategii (S,S). Jednak każdemu z małżonków z osobna opłaca się wybrać siedzenie na kanapie (strategia K jest dominująca: lepsza niezależnie od tego, czy współmałżonek wybiera S, czy K), więc jedynym możliwym wynikiem tej gry małżeńskiej, w sytuacji gdy nie można zawierać umów, jest (K,K).

Ale czy możliwość zawarcia umowy (każdy wybiera S) zagwarantowałaby porządek w mieszkaniu? Niestety, najprawdopodobniej nie: to, że umowa została zawarta, nie zmieniło faktu, że każdemu bardziej się opłaca niezgodna z umową strategia K. Zwłaszcza, jeśli współmałżonek miałby dotrzymać umowy. O ile więc nie ma zewnętrznych mechanizmów wymuszających przestrzeganie umów, to w tej sytuacji równie dobrze mogłoby umowy nie być – wynik gry pozostaje ten sam.

Powyżej mamy sytuację, w której jedna strategia (K) jest wyraźnie lepsza od tej, do której wybrania zmusza umowa (S). Jednak problem z respektowaniem umów może pojawić się również wtedy, kiedy nie zmuszamy nikogo do podejmowania decyzji „wbrew sobie”. Załóżmy scenariusz jak powyżej, z tym że teraz każdy czuje się najbardziej szczęśliwy, jeśli mieszkanie jest czyste, a prace wykonane zostały wspólnie (podczas siedzenia na kanapie i patrzenia na sprzątającego współmałżonka odczuwa się przecież wyrzuty sumienia):

	S	K
S	4,4	0,3
K	3,0	2,2

Teraz znów możliwe są trzy równowagowe pary strategii: (S,S), (K,K) oraz rzucanie niesymetryczną monetą $(\frac{2}{3}\mathrm{S}+\frac{1}{3}\mathrm{K},\ \frac{2}{3}\mathrm{S}+\frac{1}{3}\mathrm{K})$.

Przypuśćmy, że małżonkowie umówili się, że oboje będą sprzątać (najkorzystniejsza dla wszystkich sytuacja). Jednak każde z nich może rozumować w następujący sposób: „Niezależnie od tego, czy współmałżonek zamierza sprzątać, czy nie, korzystne jest dla niego, żebym ja myślała, że on na pewno wybierze S, bo wtedy i ja powinnam wybrać S. A więc niezależnie od tego, co zamierza zrobić, w jego interesie było umówić się, że sprzątamy. Ale, być może, nie jest pewien, czy ja umowy dotrzymam; jeśli więc liczy się z tym, że umowę zerwę, to i dla niego lepiej jest umowy nie dotrzymać. W takim razie bezpieczniej będzie dla mnie również umowy nie dotrzymać, żeby nie narażać się na niebezpieczeństwo samotnego sprzątania.”

A zatem: problem z dotrzymywaniem umowy może się pojawić także wtedy, kiedy dwie strony umawiają się na wybór korzystnej dla wszystkich kombinacji strategii, i to takich, które prowadzą do równowagi! A może jednak są jakieś warunki, w których umów opłaca się dotrzymywać?

W swoich pracach (np. [1]) Aumann zastanawiał się, między innymi, nad tym, jaki wpływ na skłonność do kooperacji będzie miał fakt, że gra między tymi samymi partnerami może być rozgrywana nie raz, lecz wiele razy; i to tak wiele, że w dowolnym momencie zostanie jeszcze „bardzo dużo” gier do rozegrania (odpowiednikiem tej sytuacji w modelu matematycznym będzie „supergra” składająca się z nieskończenie wielu partii tej samej gry podstawowej).

Wróćmy do początkowego dylematu: mecz czy balet. Jeśli małżonkowie mają w perspektywie nie jedno wieczorne wyjście, lecz wiele, to zapewne bez problemu ustalą, że dziś wybór pada na balet, następnym razem pójdą na mecz, potem znów obejrzą balet itd. W tej sytuacji nie dość, że za każdym razem najlepiej będzie dotrzymać umowy, to jeszcze rozwiązanie wygląda sprawiedliwie.

A przy wielokrotnym wyborze między sprzątaniem a kanapą? Teraz każdy z małżonków może rozumować w ten sposób: „Umówiliśmy się, że sprzątamy. Jeśli tym razem złamię umowę, to zaufanie zostanie nadszarpnięte, i druga strona już zawsze wybierze kanapę; wiedząc to, ja też już na pewno nigdy nie zdecyduję się sprzątać. To znaczy, że już zawsze żyć będziemy w brudnym mieszkaniu. To, co ewentualnie mogę zarobić, uchylając się od umowy dziś wieczorem, stracę więc z nawiązką w przyszłości; a zatem opłaca mi się umowy dotrzymać”. Zauważmy, że to samo rozumowanie działa zarówno wtedy, kiedy para (S,S) jest równowagą pojedynczej gry, jak i wtedy, kiedy równowagą nie jest. Można udowodnić, że takie „wydłużenie horyzontu”, które w codziennym życiu może się dokonywać także np. przez zwiększenie częstotliwości interakcji, sprzyja skłonności do kooperacji.

Rozwiązaliśmy więc (częściowo przynajmniej) problem dotrzymywania umów. Jednak żeby było czego przestrzegać, umowa musi powstać. Sztuka negocjacji jest w dużej mierze domeną psychologii, ale Schelling pokazał, że i teoria gier ma tutaj coś do powiedzenia. Co zatem można zrobić, żeby polepszyć swoją sytuację podczas negocjacji umowy w przypadku konfliktu interesów?

Postawmy się w sytuacji małżonków, którzy muszą ustalić, czy wieczorem wybiorą się na Jedyny w Swoim Rodzaju Balet czy Niepowtarzalny Mecz. Deklarowanie, że „tym razem na pewno nie ustąpię”, nie podziała, gdyż druga strona wie, że jeśli zajdzie konieczność, to każdy się ugnie, bo nade wszystko nie chce zostać sam. Podpowiedź jest jednak paradoksalna: można polepszyć swoją pozycję przetargową poprzez… pogorszenie własnej sytuacji, gdyby miał nastąpić wybór innej niż postulowana strategii. Przypuśćmy, że mąż powie: „Założyłem się z kolegą, że do końca życia będę mu stawiał piwo, jeśli uda ci się namówić mnie, żebym obejrzał ten balet; mam na to niezbity dowód w postaci notarialnie potwierdzonej umowy”. Taka groźba jest wiarygodna (zadowolenie męża z ewentualnego wspólnego wieczoru w balecie zostało niezaprzeczalnie zamienione w tragedię, a strategia M stała się strategią dominującą), i żona powinna stwierdzić, że w takim razie upierać się przy balecie nie warto. Taktyka ta może być nieskuteczna jedynie w przypadku, gdyby się miało okazać, że w odpowiedzi na to żona wyciągnie dokument podobnej treści…

Przypuśćmy teraz, że mamy poważniejszy konflikt do rozwiązania: dwa kraje w trakcie wyścigu zbrojeń. Czy jeden z nich może udowodnić drugiemu poza wszelką wątpliwość, że chce uniknąć wojny? Schelling [3] argumentuje, że owszem: jeśli kraj (nawet bez umowy) wycofa się z wdrażania systemów obrony przed atakiem, daje jasny sygnał, że szkodzić drugiemu będzie tylko w ramach ewentualnej akcji odwetowej („zdolność do brania odwetu jest bardziej przydatna, niż zdolność do odpierania ataków”). Co zaś zrobić, żeby uwiarygodnić groźbę odwetu? Twierdzenie Schellinga jest następujące: odwet niepewny jest bardziej wiarygodny i efektywny niż odwet pewny. Jeśli jedno państwo upiera się przy twierdzeniu, że najbłahsza przesłanka spowoduje reakcję w postaci ataku jądrowego – jest mało wiarygodne: można przypuszczać, że ponieważ wie, do jakiej eskalacji konfliktów i zniszczeń to doprowadzi, to nie zdecyduje się na taką formę odwetu. Jeśli jednak prezydentem w kraju zostanie ktoś postrzegany przez drugą stronę jako szaleniec, który może podejmować decyzje wbrew zdrowemu rozsądkowi lub losowo (irracjonalnie, z punktu widzenia przeciwnika) – to wtedy zagrożenie odwetem staje się bardziej wiarygodne. Niektórzy uważają, że podobną strategię stosował prezydent USA Richard Nixon.

Oczywiście fakt, że Schelling i Aumann wprowadzali pewne pojęcia dopiero w drugiej połowie XX wieku, nie znaczy, że opisane mechanizmy nie były znane politykom wcześniej. Dlaczego Niemcy podczas drugiej wojny światowej nie napadły na Szwajcarię? Na pewno jednym z powodów był fakt zainstalowania przez Szwajcarów niemożliwych do wyłączenia mechanizmów destrukcji sejfów bankowych, które to mechanizmy aktywować się miały samoczynnie w przypadku wykrycia ataku. A to przecież klasyczny przypadek groźby wiarygodnej.

Literatura

[1] Aumann, Robert J., *Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games*, w Contributions to the Theory of Games IV, Annals of Mathematics Study 40, red. A. W. Tucker i R. D. Luce, Princeton University Press, 1959, str. 287–324.

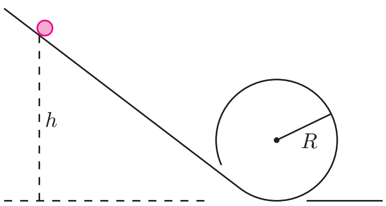
[2] Aumann, Robert J., *Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies*, Journal of Mathematical Economics **1**, 1974, str. 67–96.

[3] Schelling, Thomas, *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press, 1960.

Zadania

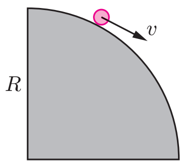
Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 667. Tor składa się z równi pochyłej oraz pętli (rys. 1). Z jakiej wysokości należy spuścić kulkę, aby pokonała ona całą pętlę i nie nastąpiło jej oderwanie od toru?
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1

F 668. Kulkę spuszczamy po torze w kształcie ćwiartki okręgu o promieniu R (rys. 2). W najwyższym punkcie prędkość kulki jest niemal zerowa. W którym miejscu toru nastąpi oderwanie kulki?
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 2

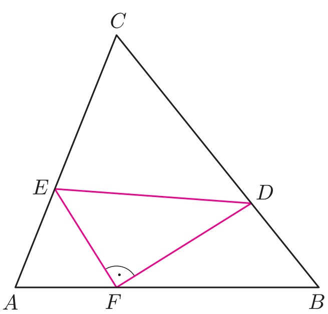
Redaguje Waldemar POMPE

M 1132. Na tablicy napisano kilka różnych liczb całkowitych dodatnich (co najmniej cztery). Okazało się, że suma każdych trzech spośród napisanych liczb jest liczbą pierwszą. Ile liczb napisano na tablicy?
Rozwiązanie na str. 16

M 1133. Dany jest trójkąt ABC (rys. 3). Na bokach BC, CA, AB znajdują się odpowiednio punkty D, E, F, przy czym

$$CD = 2BD, \quad BF = 2AF \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DFE = 90^\circ .$$

Dowieść, że $\sphericalangle AEF = \sphericalangle FED$.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 3

M 1134. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą podzbiorami zbioru $S = \{1, 2, \ldots, 200\}$. Wiadomo, że dla dowolnych dwóch liczb $a, b \in S$ istnieje zbiór A_i zawierający liczby a i b, ale nie zawierający żadnej liczby z przedziału (a, b). Wykazać, że $n \geqslant 10\,000$.
Rozwiązanie na str. 4

Quake, Doom i matematyka

*Jerzy TYSZKIEWICZ**

Fanom gier komputerowych haseł „Quake” czy „Doom” nie trzeba tłumaczyć. To sławne sieciowe gry komputerowe, polegające głównie na bardzo realistycznym starciu zbrojnym, w którym każdy z graczy wciela się w jednego z żołnierzy. Mówi się o nich, że to gry FPS (ang. First-Person Shooter, strzelanina w pierwszej osobie).

Rozwiązanie zadania M 1134.
Oznaczmy przez $A(a,b)$ zbiór zawierający liczby a i b, ale nie zawierający żadnej liczby z przedziału (a,b).

Niech $S_1 = \{1, 2, \ldots, 100\}$ oraz $S_2 = \{101, 102, \ldots, 200\}$. Ponieważ zbiór $A(a,b)$ nie zawiera liczb z przedziału (a,b), więc dla dowolnych dwóch par (a,b), (c,d) takich, że $a, c \in S_1$ oraz $b, d \in S_2$ zbiory $A(a,b)$, $A(c,d)$ są różne. Zatem zbiorów A_i spełniających warunki zadania jest co najmniej tyle, ile różnych par (a,b), dla których $a \in S_1$ oraz $b \in S_2$. Natomiast takich par jest $100 \cdot 100 = 10\,000$.

Czy matematyk może mieć z nich jakiś pożytek zawodowy, oprócz wyładowywania frustracji po kolejnej nieudanej próbie znalezienia dowodu/błędu w dowodzie/rozwiązaniu (niewłaściwe skreślić)? O dziwo – tak. Matematyczne zasady używane były z powodzeniem do opisywania tak wielu różnych aspektów i zjawisk naszej rzeczywistości, że nie może dziwić, iż także wojna znalazła się wśród nich.

Wyobraźmy sobie dwie niezbyt duże grupy wrogich sobie żołnierzy, spotykające się na odkrytym terenie. Oczywiście wywiązuje się walka. Obie strony strzelają, trup ściele się gęsto… No właśnie, jak gęsto? Policzmy. Niech w chwili t oddział A ma $a(t)$ żołnierzy, a oddział B ma ich $b(t)$. Załóżmy, że w każdym z oddziałów żołnierze są jednakowo wyszkoleni i uzbrojeni. W krótkim odcinku czasu o długości $[t, t+\Delta t]$ straty oddziału A są zatem proporcjonalne do liczebności oddziału B oraz Δt i wynoszą, powiedzmy, $\beta\, b(t)\Delta t$. Istotnie, przy ustalonej szybkostrzelności broni tych z B oddają oni liczbę strzałów proporcjonalną do $b(t)\Delta t$, z których z kolei stały ułamek trafia celu, wobec ustalonego poziomu wyszkolenia. Symetrycznie, straty oddziału B to $\alpha\, a(t)\Delta t$. Mamy

$$a(t+\Delta t) - a(t) = -\beta\, b(t)\Delta t,$$

skąd po przekształceniu

$$\frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t} = -\beta\, b(t),$$

a po przejściu do granicy przy $\Delta t \to 0$,

$$\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta\, b(t) \tag{1}$$

oraz symetrycznie

$$\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\, a(t). \tag{2}$$

Układ równań różniczkowych (1) i (2) to *równania Lanchestera*, zwane tak od nazwiska wybitnego angielskiego teoretyka i praktyka konstrukcji samochodów i samolotów Fredericka Williama Lanchestera, który je wyprowadził w 1916 roku. Mimo swojej prostoty, jak wielu fachowców twierdzi, nadmiernej, równania Lanchestera były i nadal są studiowane jako matematyczny model walki zbrojnej.

Nas będzie interesowało tak zwane *kwadratowe prawo Lanchestera*, które daje się wyprowadzić z równań Lanchestera i ma postać

$$\alpha\, a(t)^2 - \beta\, b(t)^2 = \text{const.} \tag{3}$$

Wyprowadzenie dla amatorów sportów ekstremalnych, których nie przeraża rodeo z notacją Leibniza. Najpierw dzielimy (1) stronami przez (2) i dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} = \frac{-\beta b}{-\alpha a},$$

skąd

$$\alpha a \mathrm{d}a = \beta b \mathrm{d}b.$$

Skoro powyższe wyrażenia są równe, to można je oba scałkować w sposób nieoznaczony, dostając kolejno

$$\int \alpha\, a\mathrm{d}a = \int \beta\, b\mathrm{d}b,$$

$$\alpha\frac{a^2}{2} + c_a = \beta\frac{b^2}{2} + c_b,$$

$$\alpha a^2 - \beta b^2 = 2c_b - 2c_a = \text{const.}$$

Gotowe.

Jego konsekwencją jest to, że jeszcze przed rozpoczęciem walki można obliczyć wartość $M = \alpha\, a(0)^2 - \beta\, b(0)^2$, która wskaże przyszłego zwycięzcę: jeśli $M > 0$, to wygra oddział A i w dodatku w momencie t ostatecznego pokonania B jego liczebność będzie (teoretycznie) spełniała zależność

$$\alpha\, a(t)^2 - \beta\, \underbrace{b(t)}_{0}{}^2 = M,$$

czyli $a(t) = \sqrt{M/\alpha}$, a symetrycznie gdy $M < 0$, to wygra B, z którego przeżyje około $\sqrt{-M/\beta}$ żołnierzy. Dla $M = 0$ starcie będzie bliskie nierozstrzygniętemu.

Prawo to ma niespodziewane konsekwencje: liczebność wpływa na „potencjał bojowy” oddziału (reprezentowany przez wartość $\alpha\, a(t)^2$) daleko silniej, bo kwadratowo, niż liniowe w swoim efekcie wyposażenie i wyszkolenie. Oczywiście, nie jest to do końca prawda, bo w rzeczywistości odpowiednio lepsze uzbrojenie

*Instytut Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego

i wyszkolenie nie tylko podnoszą α, ale i zmniejszają β, zgodnie z maksymą „im więcej potu na ćwiczeniach, tym mniej krwi w boju”.

Żeby zrozumieć konsekwencje tego prawa, wyobraźmy sobie dwa oddziały A i B o równym potencjale, czyli takie, że $M = 0$. W razie walki straty A wyniosłyby $a(0)$ (czyli wszystkich) żołnierzy. Niech teraz dowódca A uzyska posiłki i dysponuje $2\,a(0)$ żołnierzy, po czym dopiero doprowadzi do starcia z B. Nowe M wyniesie w tym przypadku

$$\alpha\,(2\,a(0))^2 - \beta\,b(0)^2 = 3\,\alpha\,a(0)^2 + \underbrace{(\alpha\,a(0)^2 - \beta\,b(0)^2)}_{0} = 3\,\alpha\,a(0)^2.$$

Zatem straty A wyniosą, zgodnie ze wzorem, tylko

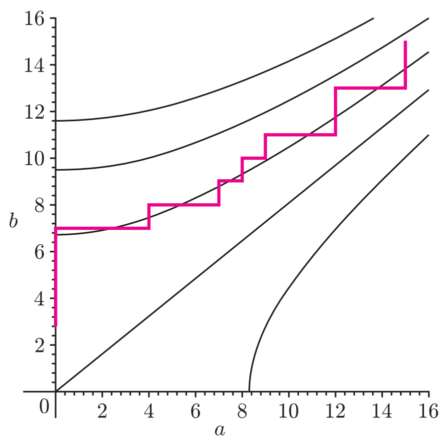
$$2\,a(0) - \sqrt{3\,\alpha\,a(0)^2/\alpha} \approx 0,23\,a(0).$$

Przy podwojeniu sił straty spadły ponad czterokrotnie!

Hola, hola. A czy to wszystko ma w ogóle jakiś sens i związek z rzeczywistością? I jak to sprawdzić, nie organizując ani igrzysk gladiatorów, ani nie wywołując wojny? Otóż i miejsce, gdzie Quake i Doom przydają się matematykowi w pracy. Starcie zbrojne można przecież całkiem łatwo zorganizować w przestrzeni wirtualnej.

Tak też postąpił autor ze swoimi studentami. W czasie Festiwalu Nauki 2005 zorganizowaliśmy zespołowe turnieje gry w BZFlag (to inna gra typu FPS, trochę mniej krwawa i łatwiejsza w obsłudze informatycznej niż te poprzednie). Wyniki walki rejestrowaliśmy, a potem analizowaliśmy w sali wykładowej w obecności niedawnych „żołnierzy”, porównując narastanie strat w obu zespołach z przewidywaniami kwadratowego prawa Lanchestera. Musimy się przyznać, że dla lepszej weryfikacji prawa w tajemnicy zmniejszyliśmy szybkostrzelność broni jednego z zespołów o połowę. Wobec małej liczebności drużyn i braku możliwości spełnienia postulatu o równym wyszkoleniu, nie wszystkie przebiegi pasowały do teoretycznego modelu. Jednak wielokrotnie zgodność była całkiem dobra. Wynik przedstawialiśmy na wykresie: po zarejestrowaniu wszystkich chwilowych liczebności obu oddziałów powstały zbiór punktów przedstawialiśmy na płaszczyźnie. W teorii punkty te powinny układać się na krzywej opisanej równaniem: $\alpha\,a^2 - \beta\,b^2 = M$, dla pewnego M. Interpretując wyniki eksperymentu, musieliśmy dobierać α, β i M tak, aby uzyskać jak najlepszą zgodność łamanej obrazującej realną walkę z krzywą teoretyczną.

Poniżej widać wynik jednego z takich „udanych” eksperymentów. Eksperymentalnie dobrane stałe to $\alpha = 0{,}65$, $\beta = 1$ i $M = -45$. Czarne kreski to krzywe teoretyczne dla różnych M, kolorowa to wynik eksperymentu.

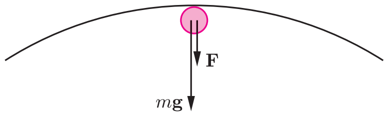


Jest w nim tylko jedna skaza: gwałtowny pionowy spadek liczebności B po wyeliminowaniu A. Tak, jakby prawo Lanchestera nagle przestało obowiązywać, za to zaczęły się dziać cuda. I tu, na zakończenie, pytanie do Czytelników z wyobraźnią: co się stało? Odpowiedź wewnątrz numeru.

Rozwiązanie zadania F 667.
Wysokość musi wynosić co najmniej R, aby kulka mogła pokonać tor. Zauważmy ponadto, że gdy zmniejszając wysokość początkową, a przy tym prędkość, doprowadzimy do oderwania się kulki, nastąpi to w najwyższym punkcie pętli. Kulka ma tam prędkość

$$v = \sqrt{2g(h-2R)},$$

a działające na nią siły to siła ciężkości i siła reakcji na nacisk na tor (rys. 1).



Przyspieszenie kulki skierowane jest w dół i wynosi

$$a = \frac{v^2}{R} = 2g\left(\frac{h}{R} - 2\right).$$

Z drugiej zasady dynamiki

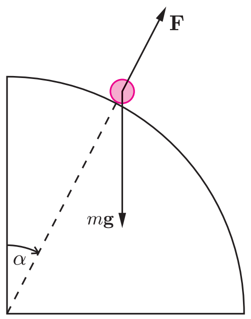
$$ma = mg + F$$

czyli

$$F = mg\left(\frac{2h}{R} - 5\right).$$

Oczywiście $F > 0$, czyli $h > \frac{5}{2}R$.

Rozwiązanie zadania F 668.
Niech α oznacza kąt między prostą l łączącą środek krzywizny toru ze środkiem kulki a pionem (rys. 2).



Prędkość kulki w czasie ruchu obliczamy z zasady zachowania energii

$$v = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)}.$$

Na kulkę działa siła ciężkości i siła reakcji $\vec{F}$. Rozważmy składową równoległą do prostej l równania wyrażającego drugą zasadę dynamiki

$$mg\cos\alpha - F = \frac{v^2}{R}m.$$

Stąd

$$F = 3mg\cos\alpha - 2mg.$$

Oderwanie nastąpi, gdy wielkość ta znika, czyli dla

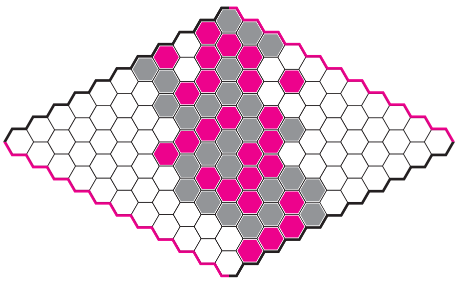
$$\alpha = \arccos\frac{2}{3}.$$

Gra hex i punkty stałe

Filip MURLAK[*]

1. Reguły gry

Hex jest jedną z najprostszych i jednocześnie jedną z najciekawszych z matematycznego punktu widzenia gier planszowych. Rozgrywka heksa jest prowadzona na romboidalnej planszy złożonej z sześciokątnych pól. Najbardziej typowe są plansze 11×11, jak na rysunku, ale można grać na dowolnie dużej planszy.

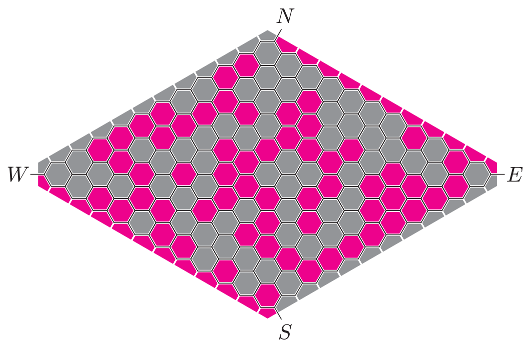


Gracze na przemian stawiają na wolnym polu jeden pionek, kolorowy lub szary. Celem gracza I jest połączenie przeciwległych czarnych krawędzi za pomocą łańcucha szarych pionków, jak na rysunku. Taki łańcuch pionków będziemy nazywali wygrywającym dla gracza I. Gracz II chce zbudować łańcuch wygrywający łączący krawędzie kolorowe.

2. Remisy

Łatwo zaobserwować, że łańcuch wygrywający całkowicie izoluje od siebie krawędzie przeciwnika. Zatem nie mogą istnieć jednocześnie wygrywające łańcuchy dla szarych i kolorowych. A co będzie, jeśli po całkowitym wypełnieniu planszy żaden z graczy nie ma wygrywającego łańcucha? Pokażemy, że taka sytuacja nie może mieć miejsca. Innymi słowy, *partia heksa nie może zakończyć się remisem.*

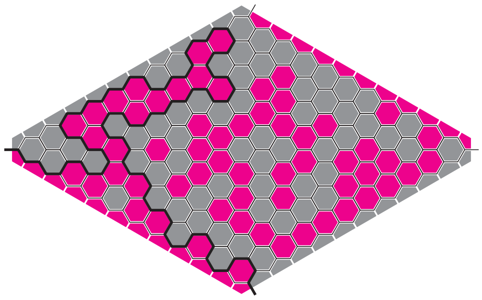
Rozważmy przykładową planszę heksa. Dla wygody dodajmy sztuczne rzędy pól wzdłuż krawędzi planszy i oznaczmy skrajne punkty planszy literami: N, S, E, W, jak na rysunku poniżej.



Rozpoczynając w punkcie W, poruszajmy się po krawędziach między polami według następującej reguły. Na każdym rozgałęzieniu wybierzmy tę z dwóch krawędzi, która oddziela pola różnego koloru. Za każdym razem istnieje dokładnie jeden dobry wybór. Wyobraźmy sobie, że dochodzimy do pewnego rozgałęzienia. Przypuśćmy, że po lewej stronie mamy pole szare, a po prawej kolorowe (tak jak na pierwszym rozgałęzieniu, w wierzchołku W). Jeśli pole przed nami jest szare, to skręcamy w prawo, jeśli jest kolorowe, to skręcamy w lewo. Zwróćmy uwagę, że dzięki temu zawsze po lewej stronie mamy pola szare, a po prawej kolorowe.

Postępując w ten sposób, nigdy nie wrócimy do wierzchołka, w którym już byliśmy. Przypuśćmy przeciwnie, że doszliśmy do wierzchołka już raz odwiedzonego i że jest to pierwszy taki moment w naszej wędrówce. W takim razie musieliśmy dojść do niego krawędzią, której przedtem nie używaliśmy. Ale krawędź taka zawsze leży między polami tego samego koloru, więc nie mogliśmy jej wybrać – sprzeczność.

Plansza do heksa jest skończona, więc w końcu musimy z niej wyjść. Do dyspozycji mamy jedynie drogi przez N, S, E, gdyż wszystkie inne wiodą między polami tego samego koloru.



Jeśli ścieżka skończy się w wierzchołku S, jak to ma miejsce na rysunku powyżej, to wyznacza wygrywający łańcuch dla szarych. Analogicznie, jeśli ścieżka dotrze do wierzchołka N, to wyznacza wygrywający łańcuch dla kolorowych. Zwróćmy uwagę, że ścieżka nie może opuścić planszy przez wierzchołek E, bo musielibyśmy minąć kolorowe pole po *lewej*, a szare po *prawej.*

Zauważmy, że nigdzie nie skorzystaliśmy z faktu, że układ na planszy powstał z jakiejś rozgrywki. Dowód działa dla dowolnego pokrycia planszy pionkami.

3. Strategie

Istnieje sprytna metoda, która pozwala na wykazanie, że w grze hex gracz, który zaczyna (czyli szary), ma strategię wygrywającą. Metoda ta polega na podkradaniu strategii przeciwnikowi. Przypuśćmy, że wygrywającą strategię ma gracz II. Gracz I powinien rozpocząć od zupełnie dowolnego ruchu, a następnie postępować tak, jak nakazuje hipotetyczna strategia gracza II, zamieniając miejscami kolory. Jedyny kłopot, jaki może się pojawić, to sytuacja, w której podkradziona strategia nakazuje zająć pole, na którym już stoi pionek. Może się to zdarzyć tylko wtedy, gdy jest to pionek postawiony podczas rozpoczynającego, losowego ruchu (w przeciwnym przypadku strategia nie wskazałaby tego pola). Wtedy ponownie wykonujemy dowolny możliwy ruch. Jest jasne, że posiadanie dodatkowego pionka na planszy nie pogarsza sytuacji gracza, zatem podkradziona strategia gwarantuje zwycięstwo pierwszemu graczowi. W ten sposób

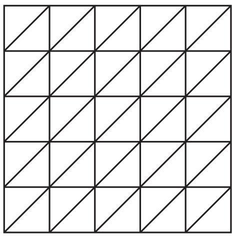
[*]Instytut Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego

otrzymujemy sprzeczność z założeniem o istnieniu strategii dla drugiego gracza.

Powyższe rozumowanie jest całkowicie niekonstruktywne, nie daje graczowi I żadnych wskazówek odnośnie tego, jak powinien grać. Rozwiązanie tego problemu w praktyce jest bardzo trudne. Dotychczas udało się wyliczyć strategię dla planszy o rozmiarze 9×9. Mimo to, żeby zniwelować ewidentną przewagę gracza I, zaawansowani gracze dodają dodatkową *regułę zamiany*. Po tym, jak gracz I postawi pierwszy pionek, gracz II może zdecydować, czy będzie grał kolorowymi, czy szarymi. W ten sposób teoretycznie istnieje strategia wygrywająca dla gracza II, ale w praktyce gra staje się wystarczająco sprawiedliwa.

4. Dualna plansza

Czy hex może się przydać matematykowi do czegoś poza rozrywką? Okazuje się, że ta prosta gra ma głęboki związek z topologią. Żeby to dokładniej wyjaśnić, zastąpimy planszę do heksa przez planszę dualną. Na planszy dualnej pola reprezentowane są przez wierzchołki. Wierzchołki reprezentujące sąsiednie pola łączymy krawędzią. Dualną planszę 6×6 przedstawia rysunek.



W tej interpretacji gracze stawiają pionki na wierzchołkach i usiłują zbudować ścieżkę łączącą przeciwległe krawędzie kwadratu. Nietrudno zauważyć, że jest to inny opis tej samej gry i wszystko, co powiedzieliśmy o heksie, jest prawdą również dla tej wersji.

5. Twierdzenie o punkcie stałym

Pokażemy teraz, jak wykorzystać grę hex na dualnej planszy w dowodzie ważnego twierdzenia topologicznego zwanego twierdzeniem Brouwera. Głosi ono, że *każde ciągłe przekształcenie kwadratu w siebie pozostawia pewien punkt na swoim miejscu.* Jeśli oznaczymy przez I^2 kwadrat $[0,1] \times [0,1]$, to twierdzenie powyższe można sformułować następująco: dla dowolnego ciągłego przekształcenia $f : I^2 \to I^2$ istnieje taki punkt $x \in I^2$, że $f(x) = x$. Taki punkt nazywamy *punktem stałym* przekształcenia f.

Zauważmy najpierw, że wystarczy udowodnić, że istnieje ciąg punktów $x_1, x_2, x_3, \ldots$, należących do I^2, spełniających warunek:

$$d(f(x_n), x_n) < \tfrac{1}{n}\,.$$

Rzeczywiście, kwadrat I^2 jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, zatem z takiego ciągu $x_1, x_2, \ldots$ można wybrać podciąg $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ zbieżny do pewnego punktu $x \in I^2$. Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$d(f(x_{n_i}), x) \leqslant d(f(x_{n_i}), x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x)\,.$$

Obie odległości dążą do zera, więc granicą ciągu $f(x_{n_i})$ jest punkt x. Jednocześnie z ciągłości funkcji f wynika, że $f(x_{n_i})$ dąży do $f(x)$. Zatem $f(x) = x$.

Spróbujmy więc wykazać istnienie takiego ciągu. Ustalmy n. Wybierzmy $k > n$ i tak duże, żeby spełniony był warunek:

$$\text{jeśli } d(x,y) < \tfrac{1}{k}, \text{ to } d(f(x), f(y)) < \tfrac{1}{2n}.$$

Podzielmy kwadrat I^2 tak, aby otrzymać dualną planszę do gry hex o rozmiarze $2k \times 2k$. Przyjmijmy $f(x) = x'$ oraz $x = (x_1, x_2)$, $x' = (x_1', x_2')$. Przez G będziemy oznaczali zbiór wierzchołków, które pod wpływem f przesuwają się w górę o co najmniej $\frac{1}{2n}$, to znaczy $x_2' - x_2 \geqslant \frac{1}{2n}$. Podobnie definiujemy zbiory D, L, P jako zbiory wierzchołków, które przesuwają się o co najmniej $\frac{1}{2n}$, odpowiednio, w dół, w lewo i w prawo.

Ustalmy wierzchołki $x \in G$, $y \in D$. W takim razie, $x_2' - x_2 \geqslant \frac{1}{2n}$, $y_2 - y_2' \geqslant \frac{1}{2n}$. Jeśli x i y są połączone krawędzią, to ich pionowe współrzędne x_2 i y_2 różnią się co najwyżej o $\frac{1}{2k}$, a zatem $x_2 - y_2 \geqslant -\frac{1}{2k}$. Dodając powyższe trzy nierówności stronami, dostajemy $x_2' - y_2' \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{2k}$. Stąd odległość między x' a y' wynosi co najmniej $\frac{1}{2n}$, to jednak jest sprzeczne z tym, że wierzchołki x i y są połączone krawędzią. Jeśli bowiem dwa wierzchołki sąsiadują ze sobą, to odległość między nimi wynosi najwyżej $\frac{\sqrt{2}}{2k}$ (długość skośnej krawędzi na planszy dualnej), zatem na mocy wyboru liczby k odległość między ich obrazami musi być ostro mniejsza niż $\frac{1}{2n}$.

Wykazaliśmy więc, że wierzchołki ze zbiorów G i D nie mogą sąsiadować. Oczywiście, wierzchołki ze zbioru G nie mogą leżeć na górnej krawędzi planszy, bo stamtąd nie da się pójść do góry. Podobnie wierzchołek ze zbioru D nie może leżeć na dolnej krawędzi planszy. W takim razie zbiór $G \cup D$ nie może zawierać łańcucha wygrywającego dla gracza chcącego połączyć górną i dolną krawędź. Podobnie $L \cup P$ nie może zawierać łańcucha wygrywającego dla drugiego gracza. Skoro na planszy do gry w hex nie może być układu remisowego, to $G \cup D \cup L \cup P$ nie może wyczerpywać wszystkich wierzchołków planszy. Weźmy dowolny wierzchołek x_n, leżący poza $G \cup D \cup L \cup P$. Z definicji zbiorów G, D, L, P wynika, że obraz wierzchołka x_n jest zawarty w kwadracie o środku x_n i krawędzi $\frac{1}{n}$. Zatem obraz x_n jest odległy od x_n najwyżej o $\frac{\sqrt{2}}{2n} < \frac{1}{n}$.

Podobny dowód z użyciem zwykłej szachownicy można znaleźć w *Delcie* 9/1980 (zadania 232–4).

Inny dowód twierdzenia Brouwera, także w wyższych wymiarach, Czytelnik może znaleźć w znakomitych książkach *Co to jest matematyka?* oraz *Dowody z księgi.*

Literatura

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, PWN, 2002.

[2] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka, 1998.

[3] D. Gale. *The game of hex and the Brouwer fixed-point theorem*, American Mathematical Monthly, **86**, grudzień 1979, str. 818–827.

Zagadka o mędrcach w czapkach

W pewnym kraju żyło bardzo wielu mędrców. Któregoś dnia groźny król postanowił przekonać się, czy rzeczywiście zasługują oni na to zaszczytne miano i zapowiedział, że czeka ich trudna próba. Zebrał mędrców w swej komnacie i przedstawił im poniższe zasady.

Następnego dnia przed południem zostaną oni ponownie zgromadzeni w tej samej komnacie i ustawieni jeden za drugim. Król każdemu włoży na głowę czarną lub białą czapkę, przy czym nie ma żadnego ograniczenia dotyczącego liczby nakryć głowy w danym kolorze. Każdy mędrzec widzieć będzie tylko czapki wszystkich stojących przed nim i zadaniem każdego będzie określić, jaką czapkę ma na własnej głowie. W samo południe jeden z nich powinien zabrać głos, podając domniemany kolor swojej czapki. Minutę po nim powinien odezwać się kolejny, również wypowiadając słowo „czarna” lub „biała”. I tak dalej – mędrcy mają, oczywiście bez dodatkowego porozumiewania się, odzywać się pojedynczo, w jednominutowych odstępach, w dowolnej kolejności, ale każdy dokładnie raz. Złamanie którejkolwiek z tych zasad grozi natychmiastową śmiercią wszystkich mędrców. Kiedy już każdy zadeklaruje kolor swojej czapki, sprawdzian się zakończy. Wtedy król obwieści, kto odgadł poprawnie i rozkaże ściąć głowy pozostałym.

W *Delcie* nr 7 (374)/2005, w artykule Andrzeja Dąbrowskiego „Kolorowe czapeczki”, bystre krasnoludki Królewny Śnieżki sprytnie sobie poradziły z innym zadaniem związanym z odgadywaniem kolorów swoich czapek.

Mędrcy mają zatem całą noc na opracowanie algorytmu odzywania się i odgadywania kolorów czapek. Nie lubią ryzyka, więc szukają takiej wspólnej strategii, która daje stuprocentową gwarancję przeżycia jak największej liczbie spośród nich. Jaka to strategia?

Wskazówki, czyli o różnych strategiach

Nietrudno dostrzec strategię, pozwalającą ocalić co drugiego mędrca: wystarczy, by jako pierwszy odezwał się mędrzec stojący na miejscu numer 2 i by wymienił kolor jedynej czapki, jaką widzi przed sobą. Wtedy po minucie mędrzec na miejscu 1 powtarza jego wypowiedź (poprawnie określając kolor swojej czapki). Następnie mędrzec na miejscu 4 podaje kolor czapki bezpośrednio przed sobą, a właściciel tej czapki powtarza za nim, etc. Tę próbę na pewno przeżyją przynajmniej wszyscy mędrcy stojący na miejscach o numerach nieparzystych (oprócz, być może, ostatniego).

Dość łatwo można tę strategię poprawić tak, by przeżywało na pewno dwóch mędrców z każdej trójki: mędrzec numer 3 zaczyna, mówiąc „biała”, jeśli widzi przed sobą dwie identyczne czapki, oraz „czarna”, jeśli widzi różne. Następnie odzywa się mędrzec 2 – widzi czapkę mędrca 1 i wie, czy ma na głowie taką samą, czy inną, więc poprawnie określa jej kolor. Wtedy może zabrać głos mędrzec 1, który zna już kolor czapki mędrca 2 i wie, czy ma taką samą. Dalej zabierają głos mędrcy z kolejnej trójki (o numerach 6, 5, 4) i tak dalej.

Te strategie wciąż są jednak bardzo dalekie od optymalnej. Jak dobra może ona być? Na pewno nie da się zapewnić bezpieczeństwa temu spośród mędrców, który odzywa się jako pierwszy, ponieważ nie ma on żadnych informacji, pozwalających określić kolor własnej czapki. Ale, jak widać z powyższych przykładów, każdy odzywający się mędrzec, oprócz ratowania własnego życia, może przekazywać towarzyszom niedoli informacje o kolorach ich czapek. Może zatem warto, by jako pierwszy odzywał się mędrzec stojący na końcu (bo widzi najwięcej)? Wiemy już, że potrafi on uratować kolegę stojącego przed nim, a nawet dwóch. Może jest w stanie pomóc trzem lub jeszcze większej liczbie?

Rozwiązanie, czyli strategia optymalna

Okazuje się, że mędrzec z końca (odzywający się jako pierwszy) może swoją wypowiedzią uratować wszystkich innych!

Jak to działa? Mędrzec stojący na końcu mówi „biała”, jeśli widzi przed sobą nieparzystą liczbę białych czapek, a „czarna” – w przeciwnym przypadku. Jako następny odzywa się mędrzec stojący bezpośrednio przed nim. Sprawdza parzystość liczby białych czapek, które widzi. Jeśli zgadza się ona z parzystością podaną przez stojącego za nim mędrca, to oznacza, że sam ma na głowie czarną czapkę, a jeśli się nie zgadza – że ma na głowie „brakującą” białą. Umie zatem określić kolor własnej czapki! Deklaruje go, gwarantując sobie przeżycie. Teraz stojący przed nim mędrzec liczy, ile widzi białych czapek; wie, jaka parzystość ma wyjść w sumie (z punktu widzenia ostatniego mędrca) oraz jaką czapkę ma na głowie stojący za nim przedmówca, więc wylicza, jaką sam ma. I tak dalej – wszyscy przeżyją, być może poza nieszczęśnikiem, którego ustawiono na końcu (i który odzywał się jako pierwszy).

A jak to działa, jeśli król wkłada mędrcom na głowy czapki w trzech lub więcej kolorach? Tak samo! Dla n różnych kolorów ponumerujmy je liczbami $0, 1, \ldots, n-1$. Mędrzec stojący na końcu dodaje wszystkie odpowiadające kolejnym czapkom liczby i podaje wynik modulo n (oczywiście deklarując stosowny kolor). Wtedy mędrzec stojący przed nim sumuje liczby odpowiadające czapkom, które widzi, i sprawdza, jaką liczbę trzeba dodać, by uzyskać właściwy wynik. W ten sposób wylicza, jaką czapkę ma na głowie. I tak dalej – znowu każdy mędrzec, gdy przychodzi jego kolej, zlicza to, co widzi, wie też, jakie czapki mają mędrcy stojący za nim (oprócz ostatniego) i jaka ma wyjść suma, więc wylicza, jaką czapkę sam ma na głowie.

Okazuje się zatem, że dla dowolnie wielu kolorów – przy tej, optymalnej, strategii – swoim życiem ryzykuje tylko ten mędrzec, którego uratować i tak się nie da, bo odzywa się jako pierwszy. Jeśli jednak ma szczęście, to wymieniony przez niego kolor okaże się właściwy i on również przeżyje. Czyli wymyślony przed groźnego króla sprawdzian nawet w pozornie jeszcze trudniejszej, wielokolorowej wersji, nie jest dla mędrców taki straszny!

Zagadkę tę opowiedział mi profesor Victor Ufnarovski z Uniwersytetu w Lund (Szwecja).

Małą Deltę przygotowała Joanna JASZUŃSKA

Zosia i Tadeusz na zakupach albo gry logiczne rozróżniające grafy

*Damian NIWIŃSKI**, *Marek ZAWADOWSKI***
*Instytut Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego
**Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Wyobraźmy sobie dwoje ludzi, Zosię i Tadeusza, którzy rozmawiają o dwóch sklepach spożywczych. Tadeusz uważa, że sklepy niczym istotnym się nie różnią, podczas gdy Zosia twierdzi, że jej sklep jest lepszy (a w każdym razie różny) od sklepu Tadeusza. Oboje byli w obu sklepach.

`Zosia:` Do mojego sklepu jest bardzo wygodny dojazd, i autobusem i samochodem.
`Tadeusz:` Do mojego też jest wygodny dojazd, i autobusem i samochodem.
`Zosia:` Ale do twojego sklepu od przystanku autobusowego trzeba przejść przez światła.
`Tadeusz:` A do twojego to nie? Też masz zaraz za przystankiem pasy i światła.
`Zosia:` W moim sklepie mogę wziąć wózek przy wejściu i zostawić go po zakupach na parkingu koło samochodu.
`Tadeusz:` W moim sklepie też tak jest.
`Zosia:` Ale ja po wejściu mam blisko do najcięższych towarów: wody, soków, mleka, które powinny być na dnie wózka. Bardzo dobrze to zostało pomyślane.
`Tadeusz:` U mnie też ktoś o tym pomyślał i też tak jest.
`Zosia:` A ja mam zaraz po tym świeże pieczywo.
`Tadeusz:` U mnie też zaraz za ciężkimi towarami jest dział ze świeżym pieczywem.

I tak dalej, i tak dalej. Aż w końcu albo będzie tak, że Zosia odkryje jakąś różnicę:

`Zosia:` Ale u ciebie dział z owocami jest bardzo ściśnięty w kącie, jest mały wybór owoców i w dodatku są bardzo poobijane.
`Tadeusz:` …!? No tak, trzeba przyznać, że dział owocowy w twoim sklepie jest znacznie lepszy. Masz rację, Zosiu.

I będziemy wiedzieli, ze te sklepy nie są takie same, albo też Zosi nie uda się znaleźć niczego istotnego, co by odróżniało jeden sklep od drugiego:

`Tadeusz:` Wykonałaś już n prób wykazania, że nasze sklepy są różne. Gdyby tak było, to do tej pory odkryłabyś jakąś różnicę. Zatem musisz przyznać, że są takie same.
`Zosia:` … ? Masz rację, Tadeuszu.

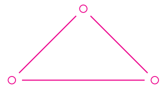
Istotą takiej rozmowy jest pewna gra, w wyniku której dwaj gracze – Tadeusz i Zosia, próbują ustalić na ile pewne dwie struktury są podobne. Jeśli po kolejnych kilku próbach gracze stwierdzą istotną różnicę, Tadeusz przyzna rację Zosi, w przeciwnym razie Zosia w końcu przyzna racje Tadeuszowi.

W matematyce struktury, które są być może różne, ale nie różnią się żadnym istotnym szczegółem nazywamy *izomorficznymi*. Ale rozważa się także słabsze formy podobieństwa. Gry wymyślone pięćdziesiąt lat temu przez polskiego matematyka Andrzeja Ehrenfeuchta są niejako matematycznym modelem przytoczonej wyżej rozmowy i nadają się bardzo dobrze do rozróżniania struktur różnych rodzajów.

W tym artykule przyjrzyjmy się strukturom, które matematycy nazywają *grafami*. Przypominają one nieco plan sieci kolejowej lub metra, a może planszę jakiejś gry. Graf składa się z *punktów*, z których niektóre połączone są *krawędziami*. Jednak ani kształt krawędzi, ani jej długość nie mają dla nas znaczenia. Krawędź jest to po prostu para (nieuporządkowana) dwóch różnych punktów. Co więcej, utożsamiamy grafy różniące się jedynie „nazwami” punktów.

Krawędzie można także przedstawić jako relację dwuargumentową E na zbiorze punktów: symetryczną (tzn. $E(x,y) \Rightarrow E(y,x)$) i przeciwzwrotną (tzn. $\neg E(x,x)$). W ogólności rozważa się także tzw. *grafy zorientowane*, gdzie E jest dowolną relacją dwuargumentową.

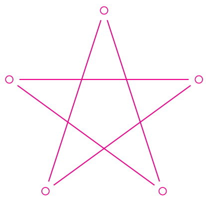
Na przykład rysunek

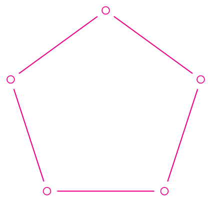


reprezentuje dokładnie *jeden* graf, możemy go przedstawić w różny sposób, np. wybierając punkty $1, 2, 3$ i krawędzie $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,1\}$ (lub, jeśli ktoś woli: punkty a, b, c, krawędzie $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{c,a\}$, itp.).

W gruncie rzeczy, żeby przedstawić graf, nie trzeba go wcale rysować, wystarczy określić punkty i krawędzie. Z drugiej strony, ten sam graf można zwykle narysować na wiele sposobów. Na przykład graf o punktach $1, 2, 3, 4, 5$ i krawędziach $\{1,2\}, \{2,3\}$, $\{3,4\}, \{4,5\}$, $\{5,1\}$, możemy narysować

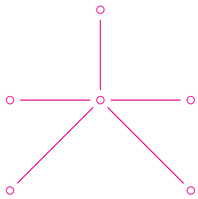
tak: lub tak:





Niektóre grafy, choć różne, jesteśmy skłonni uznać za „podobne”. Na przykład, uogólniając powyższe przykłady trójkąta i pięciokąta, uznamy za podobne do siebie wszystkie *cykle*, czyli grafy, które można narysować jako n-kąt, dla pewnego $n \geqslant 3$.

Natomiast graf



jest do nich raczej niepodobny.

Czy intuicję tę możemy wyrazić w języku matematyki?

Opiszemy teraz grę, której wynik dość trafnie wyznacza stopień podobieństwa dwóch grafów, powiedzmy G i H. Grać będą nasi dobrzy znajomi – Zosia i Tadeusz, przy czym, podobnie jak w rozmowie przytoczonej na wstępie, Zosia będzie poszukiwała różnicy, a Tadeusz bronił podobieństwa obu grafów.

Każdy z graczy dysponuje zestawem kamyczków, ponumerowanych $1, 2, 3, \ldots$. Kamyczki o różnych numerach są różne, natomiast kamyczki Zosi i Tadeusza nie muszą się odróżniać.

Gra toczy się w kolejnych rundach. W i-tej rundzie najpierw Zosia kładzie swój kamyczek numer i w dowolnym punkcie jednego z grafów, w którym jeszcze nie leży żaden kamyczek. Gdyby takiego punktu nie było, Zosia przegrywa. Jeśli Zosia wykona swój ruch, to z kolei Tadeusz kładzie swój i-ty kamyczek w pewnym wolnym punkcie pozostałego grafu. Gdyby takiego punktu nie było, Tadeusz przegrywa.

W ten sposób po i rundach i kamyczków każdego z graczy leży już w punktach jednego lub drugiego grafu. Po każdej rundzie sprawdza się zgodność „kamyczkowań". Otóż, jeśli w którymkolwiek z grafów kamyczki o numerach k i ℓ leżą w punktach połączonych krawędzią, a w pozostałym grafie tak nie jest, to Tadeusz przegrywa (Zosia wykazała różnicę).

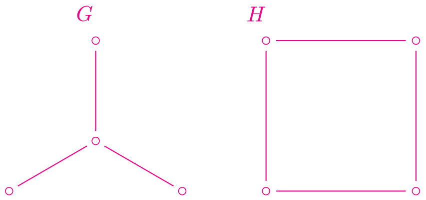
Zauważmy, że jeśli Tadeusz nie przegrał w ciągu n rund, to w każdym punkcie obu grafów leży już jakiś kamyczek. Ale wtedy G i H okazały się tym samym grafem (w języku matematyki mówimy, że G i H są *izomorficzne*)! Mianowicie grafem o punktach $1, 2, \ldots, n$ i krawędzi $\{j, k\}$ wtedy, gdy kamyczki j i k leżą na sąsiednich punktach w grafie G (ale tak samo jest w grafie H, skoro Tadeusz nie przegrał do tej pory).

Ogólnie, jeśli V_1 i V_2 są zbiorami wierzchołków grafów G i H, a E_1 i E_2 odpowiednio zbiorami ich krawędzi, to *izomorfizmem* jest funkcja wzajemnie jednoznaczna $f : V_1 \to V_2$, taka, że $\{p, q\} \in E_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{f(p), f(q)\} \in E_2$. Grafy są izomorficzne, kiedy istnieje taki właśnie izomorfizm.

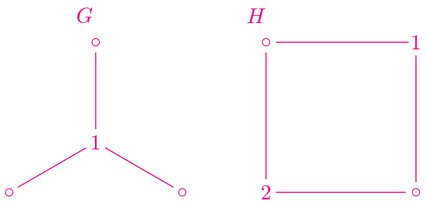
W przeciwnym razie, minimalna liczba rund, w której Zosia może pokonać Tadeusza (jakkolwiek dobrze by się bronił), jest miarą podobieństwa grafów: im mniej podobne są grafy, tym szybciej Zosia „odkrywa różnicę".

Czytelnik może spróbować wykazać, że jeśli dwa grafy *skończone* nie są izomorficzne, to Zosia wygrywa grę. Dla grafów nieskończonych tak być nie musi.

Zachęcamy Czytelnika, by przed dalszą lekturą rozegrał partię na następujących grafach:



Zosia może wygrać już w dwóch rundach, jeśli swój pierwszy kamyk położy w „centralnym" punkcie grafu G. W drugiej rundzie Zosia wybierze graf H, gdzie położy swój kamyk „na przekątnej" kamyka nr 1 (położonego przez Tadeusza). Łatwo zauważyć, że Tadeusz nie ma już dobrego ruchu, bo wszystkie wolne punkty w G są połączone z pozycją 1.

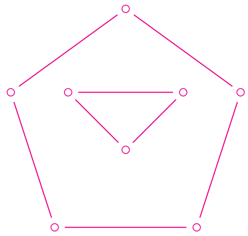


Zrobimy teraz obserwację ogólniejszą. *Odcinkiem* $-_n$ nazwiemy graf o n punktach $1, 2, \ldots, n$ i krawędziach $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}$. Oto przykład $-_6$:

Pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie sprawdzenie, że jeśli G jest *dowolnym* cyklem, a H *dowolnym* odcinkiem, to Zosia wygrywa *najpóźniej* w 3 rundach.

Jak może się wydawać, znaleźliśmy użyteczną miarę podobieństwa (lub „różności") dwóch struktur. A jednak sprawa nie jest taka prosta. Co mianowicie powiemy o parze grafów, gdzie G jest cyklem o $2n$ punktach, a H składa się z dwóch rozłącznych cykli o n punktach? Oczywiście, G i H są tu także „całkiem niepodobne", a więc Zosia powinna szybko wygrać. A jednak intuicja nas myli. W pozostałej części artykułu postaramy się wykazać, że dla każdego m, Tadeusz może „utrzymać się" przez m rund, o ile tylko G i H są dostatecznie duże względem m.

Niech $\bigcirc_n$ oznacza cykl o n punktach, a $\bigcirc_n\bigcirc_m$ graf otrzymany jako suma rozłącznych kopii $\bigcirc_n$ i $\bigcirc_m$. Oto na przykład $\bigcirc_3\bigcirc_5$:



Twierdzenie. Tadeusz może tak grać, by nie przegrać w n rundach gry na grafach $\bigcirc_m$ i $\bigcirc_{k_1}\bigcirc_{k_2}$, o ile tylko $m, k_1, k_2 \geqslant 3^n$.

Oszacowanie 3^n zostało wzięte z naddatkiem, dla wygodnego dowodu. Czytelnik może podjąć próbę znalezienia lepszego (tzn. mniejszego) oszacowania.

W dowodzie przydadzą się grafy nieskończone. *Linią* nazwiemy graf, którego punktami są wszystkie liczby całkowite, a krawędzie są postaci $\{i, i+1\}$ dla wszystkich i; graf ten oznaczamy $\cdot\!\!-\!\!\cdot$. Głównym pomysłem naszego dowodu jest podobieństwo „dużego" cyklu do linii.

$$\cdots -3 - -2 - -1 - 0 - 1 - 2 - 3 \cdots$$

Przydatny będzie również graf, który otrzymamy z linii przez wyjęcie zera i wychodzących z niego krawędzi $\{-1, 0\}, \{0, 1\}$.

Oczywiście, ten sam graf moglibyśmy uzyskać usuwając tylko jedną dowolną krawędź, ale wygodnie jest nam pozbyć się właśnie zera, dla sprawnego liczenia w dowodzie Lematu 1.

Graf ten nazwiemy *ramionami* i oznaczymy $\bowtie$. O ramionach myślimy jak o grafie nieskończonym „naśladującym" odcinek, dlatego wygodnie jest narysować go tak:

$$-1 - -2 - -3 \cdots \qquad \cdots 3 - 2 - 1$$

Liczby niedodatnie stanowią lewe „ramię", a liczby dodatnie – prawe.

Krańcem w grafie nazwiemy punkt, który ma tylko jednego sąsiada. Powiemy, że Tadeusz *respektuje krańce* jeśli kładzie swój i-ty kamyczek na krańcu wtedy i tylko wtedy, gdy Zosia zrobiła podobnie ze swoim i-tym kamyczkiem.

Lemat 1. Tadeusz może grać respektując krańce i nie przegrać w k rundach gry na $-_m$ i $\bowtie$, o ile tylko $m \geqslant 3^k$.

Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem k. Przypadki $k = 1$ i $k = 2$ pozostawiamy Czytelnikowi. Przypuśćmy, że mamy już tezę lematu dla k i rozważmy $m \geqslant 3^{k+1}$. Określimy odpowiedź Tadeusza na ruch Zosi w pierwszej rundzie. Jak się okaże, dalej będzie już można skorzystać z założenia indukcyjnego. Przyjmijmy, że punktami odcinka —_{m+1} są $1, 2, \ldots, m+1$.

Rozważmy najpierw przypadek, że Zosia położyła swój kamyczek nr 1 w odcinku, w punkcie p. Przypuśćmy, że bliższym krańcem jest 1, tzn. $p - 1 \leqslant m - p$ (w przeciwnym razie argument jest podobny). Wtedy Tadeusz kładzie swój kamyczek w tej samej odległości od krańca (na przykład) -1 w $\bowtie$, czyli na pozycji $-p$. Dlaczego właśnie tak?

Części leżące „na lewo” od kamyczka 1 są w obu grafach identyczne, a zatem Tadeusz może na nich grać po prostu wiernie naśladując ruchy Zosi. Respektowanie krańców gwarantuje zgodność z kamyczkiem numer 1.

Z kolei część odcinka —_{m+1} leżąca na prawo od kamyczka nr 1 stanowi pewien odcinek o co najmniej 3^k punktach, natomiast podgraf grafu $\bowtie$ leżący na prawo od kamyczka nr 1 jest, z dokładnością do przemianowania punktów identyczny z $\bowtie$. A zatem z założenia indukcyjnego (pozostało już tylko m rund!), Tadeusz ma strategię wygrania również na tych częściach. Składając strategie na lewych i prawych częściach, Tadeusz może bezpiecznie rozegrać pozostałe m rund.

Z kolei przypuśćmy, że w pierwszej rundzie Zosia położyła kamyczek nr 1 na pewnej pozycji p w $\bowtie$. Jeśli jej odległość od krańca jest co najwyżej $\frac{m+1}{2}$, to Tadeusz może położyć swój pierwszy kamyczek w tej samej odległości od krańca odcinka i dalej argument przebiega podobnie jak poprzednio.

Jeśli jednak odległość pozycji p od krańca $\bowtie$ jest większa niż połowa $m+1$, Tadeusz kładzie swój pierwszy kamyczek na pozycji q „w środku” odcinka, w ten sposób, by na lewo i na prawo od pozycji q mieć odcinki dłuższe niż 3^k.

Otrzymujemy znowu dwie pary struktur: „długi” odcinek i $\bowtie$, z czym już umiemy sobie poradzić, oraz dwa odcinki dłuższe niż 3^k, nazwijmy je I_1 i I_2. Tu również możemy skorzystać z założenia indukcyjnego, choć w nieco subtelniejszy sposób. Wiemy mianowicie, że Tadeusz wygrywa m rund (respektując krańce) na parach grafów $(I_1, \bowtie)$ oraz $(I_2, \bowtie)$. To już wystarczy, by wygrać również na (I_1, I_2). Kiedy mianowicie Zosia kładzie swój kamyczek powiedzmy w I_2, Tadeusz patrzy, jak odpowiedziałby na to w $\bowtie$, a potem jak odpowiedziałby na tę odpowiedź w I_1, gdyby to był ruch nie jego, lecz Zosi. To działa!

Ta ostatnia metoda jeszcze się nam przyda, dlatego ujmiemy ją w oddzielny

Lemat 2. Relacja $\sim_n$ określona tak, że $G \sim_n H$ wtedy i tylko wtedy, gdy Tadeusz nie przegrywa w n rundach, jest przechodnia, tzn. $G \sim_n H$ i $H \sim_n J$ pociąga za sobą $G \sim_n J$.

Relacja $\sim_n$ jest również w oczywisty sposób zwrotna i symetryczna, a zatem jest relacją równoważności.

Lemat 3. Tadeusz może tak grać, by nie przegrać w n rundach gry na cyklu $\bigcirc_m$ i linii $\cdot\!\!-\!\!\cdot$, o ile tylko $m \geqslant 3^n$.

Przypadki $n = 1, 2$ pozostawiamy Czytelnikowi, rozważmy $n \geqslant 3$. Ze względu na symetrię obu struktur, pierwsza runda nie ma znaczenia. Przypuśćmy, że kamyczki nr 1 leżą już w $\bigcirc_m$ i $\cdot\!\!-\!\!\cdot$ na pozycjach, odpowiednio, p_1 i q_1 i Zosia bierze do ręki kamyczek numer 2. Jeśli położy go na pozycji p_2 w $\bigcirc_m$, to „rozetnie” cykl na dwie części; przypuśćmy, że w mniejszej z nich znajduje się α punktów (lub w każdej, gdy są równe). Wtedy Tadeusz kładzie swój kamyczek na pozycji q_2 w $\cdot\!\!-\!\!\cdot$, tak by pomiędzy q_1 a q_2 znajdowało się również dokładnie α punktów. Zauważmy, że część linii na zewnątrz odcinka od q_1 do q_2 tworzy $\bowtie$, a „większy” odcinek cyklu $\bigcirc_m$ ma co najmniej $3^{n-1} > 3^{n-2}$ punktów. Tak więc Tadeusz może dokończyć grę, korzystając z Lematu 1 i znanej nam już metody składania strategii na fragmentach grafów.

Jeśli zamiast tego Zosia kładzie swój kamyczek nr 2 na pozycji q_2 w linii $\cdot\!\!-\!\!\cdot$, to gdy liczba punktów pomiędzy q_1 i q_2 jest co najwyżej $\frac{m-1}{2}$, Tadeusz znajduje pozycję p_2 w cyklu w takiej samej odległości od p_1; w przeciwnym razie kładzie swój kamyczek nr 2 „możliwie najdalej” od kamyczka nr 1. Dalej argument przebiega podobnie.

Jeśli Czytelnik zrozumiał dowody Lematów 1 i 3, to nie sprawi mu kłopotu

Lemat 4. Tadeusz może tak grać, by nie przegrać w n rundach gry na dwóch grafach, z których jeden jest linią $\cdot\!\!-\!\!\cdot$, a drugi sumą dwóch rozłącznych linii: $\cdot\!\!-\!\!\cdot\ \cdot\!\!-\!\!\cdot$.

$$\cdots -3 — -2 — -1 — 0 — 1 — 2 — 3 \cdots$$
$$\cdots -3' — -2' — -1' — 0' — 1' — 2' — 3' \cdots$$

Trzeba podkreślić, że Lemat 4 nie oznacza, że Tadeusz *nigdy* nie przegra gry, gdyby toczyła się w nieskończoność (takie stwierdzenie nie byłoby prawdziwe).

Zauważmy wreszcie, że jeśli graf G jest sumą rozłącznych kopii grafów G_1 i G_2, a graf H jest sumą rozłącznych kopii grafów H_1 i H_2, oraz $G_1 \sim_n H_1$ i $G_2 \sim_n H_2$, to również $G \sim_n H$.

Nietrudno jest już teraz złożyć dowód Twierdzenia, bowiem z Lematów 2–4 i powyższej obserwacji otrzymujemy następujący ciąg równoważności $\sim_n$, dla $m, k_1, k_2 \geqslant 3^n$:

$$\begin{aligned} \bigcirc_m &\sim_n \cdot\!\!-\!\!\cdot \\ &\sim_n \cdot\!\!-\!\!\cdot\ \cdot\!\!-\!\!\cdot \\ &\sim_n \bigcirc_{k_1}\bigcirc_{k_2} \end{aligned}$$

Czy zatem nasza koncepcja rozróżniania struktur przez gry okazała się błędna? Nic podobnego! Jest ona bardzo użyteczna, m.in. w teorii baz danych. Jednak, jak każda metoda, ma też swoje granice. Jak pięćdziesiąt lat temu wykazał Andrzej Ehrenfeucht, są to granice *logiki pierwszego rzędu*.

Ale to już następna historia...

Zręczna woda

Jak powstało życie? To jedno z najbardziej fascynujących otwartych pytań. Kluczem do tej zagadki od dawna wydaje się zrozumienie, w jaki sposób powstała nadwyżka lewoskrętnych aminokwasów nad prawoskrętnymi.

W organizmach żywych występują (prawie) wyłącznie te lewoskrętne, chociaż w czasie syntezy w laboratorium powstaje równie dużo prawoskrętnych. Oczywiście jest możliwe, że życie pochodzi od jednego organizmu, który przypadkowo powstał z wykorzystaniem akurat lewoskrętnych aminokwasów. Jednak od wielu lat bardziej kusząca wydaje się możliwość, że nadwyżka pojawiła się skutkiem jakiegoś naturalnego procesu i że to ona spowodowała powstanie życia.

Zaproponowano wiele mechanizmów, które mogły wywołać taką asymetrię. Wśród nich jest jeden szczególnie atrakcyjny dla fizyka. Możliwe, że powodem jest subtelna różnica między enancjomerami (związkami różniącymi się skrętnością), wywołana łamaniem parzystości przez oddziaływanie słabe. Za wiązania chemiczne odpowiedzialne jest bowiem nie tylko oddziaływanie elektromagnetyczne, lecz również oddziaływanie słabe. Wkład tego ostatniego jest jednak grube rzędy wielkości mniejszy. Żeby jego wpływ był zauważalny, musi działać jakiś mechanizm wzmacniający.

Mechanizm, który różnicuje reaktywność lewo- i prawoskrętnych aminokwasów, został chyba potwierdzony [1]. Piszę chyba, bo dobrze byłoby poczekać na potwierdzenie wyników przez niezależny zespół badawczy.

Doświadczenie [1] zostało przeprowadzone z łańcuchami złożonymi z dokładnie 24 monomerów lewoskrętnego i prawoskrętnego kwasu poliglutaminowego. Związki te rozpuszczają się w wodzie. W środowisku obojętnym (pH>6) tworzą helisę, natomiast w środowisku kwaśnym (pH<3) związki te dysocjują i helisa się rozprostowuje.

Okazuje się, że zjawisko to zachodzi dla pH o 0,2–0,3 mniejszego (czyli dla mniej więcej dwa razy większego stężenia jonów hydroniowych H_3O^+) dla kwasu poli-L-glutaminowego niż dla D-glutaminowego. Jeszcze ciekawsze jest znikanie różnicy po zastąpieniu zwykłej wody H_2O przez wodę ciężką D_2O.

Wygląda to zaskakująco. Podręczniki chemii przekonują, że praktycznie nie ma różnicy w reaktywności związków chemicznych związanej z ich składem izotopowym. Od pewnego czasu wiadomo jednak, że woda jest wyjątkiem. Zwykła woda występuje w dwóch odmianach: orto i para. Różnią się one całkowitym spinem jąder wodoru. Spin ten może być równy jeden $\hbar$ lub zero. W pierwszym przypadku są trzy możliwości: $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, a w drugim tylko jedna: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$. W takim razie zwykła woda jest w 75% orto-H_2O i w 25% para-H_2O. Podobne zróżnicowanie nie występuje dla tlenku deuteru, ponieważ jądrem deuteru jest para nukleonów.

Orto-H_2O jest obdarzona słabym polem magnetycznym. Według autorów [1] właśnie to pole jest odpowiedzialne za minimalną różnicę w zachowaniu łańcuchów lewo- i prawoskrętnych aminokwasów, która jest wzmacniana przez autokatalityczny proces zwijania się łańcucha polipeptydowego w helisę.

Nie jest w tej chwili jasne, czy obserwowana różnica jest wystarczająca, aby doprowadzić do powstania przewagi lewoskrętnych aminokwasów nad prawoskrętnymi i czy taka różnica zapoczątkowała życie na Ziemi.

Jeżeli jest to jednak prawda, to powstanie życia wiąże się po raz kolejny z powstawaniem Wszechświata. Wówczas bowiem przewaga lewoskrętnych aminokwasów jest wywołana nie tylko łamaniem parzystości przez oddziaływania słabe, ale również przewagą materii nad antymaterią. Ta przewaga z kolei nie mogłaby się wykształcić bez łamania kombinowanej symetrii CP (charge-parity) sprzężenia ładunkowego i parzystości. Choć łamanie tej symetrii zostało stwierdzone i znajduje wyjaśnienie w ramach standardowego modelu oddziaływań elementarnych, to powszechnie uważa się, że potrzebne jest jego dodatkowe źródło, aby wyjaśnić obserwowaną różnicę między materią i antymaterią. W takim przypadku, bez zrozumienia efektów wykraczających poza model standardowy, nie da się wyjaśnić powstania życia na Ziemi.

Piotr ZALEWSKI

[1] Meir Shinitzky i inni, *Subtle differences in structural transitions between poly-L- and poly-D-amino acids of equal length in water*, Phys. Chem. Chem. Phys., 2006, **8**, 333-339;
Colin R. Batchelor, *Is water the answer to nature's handedness?*, *Chemical Science* 23/01/2006 `http://www.rsc.org/Publishing/ChemScience/Volume/2006/02/water_handedness.asp`

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2006

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
505 ($WT = 1{,}65$) i **506** ($WT = 4{,}00$)
z numeru 9/2005

Paweł Najman	–	Jaworzno	39,93
Janusz Olszewski	–	Suwałki	36,01
Adam Dzedzej	–	Gdańsk	33,36

Zadania z matematyki nr 521, 522

Redaguje Marcin E. KUCZMA

521. Dwaj gracze na przemian piszą na tablicy liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, N\}$ (N jest zadaną liczbą naturalną); zabronione jest napisanie liczby będącej dzielnikiem liczby już znajdującej się na tablicy. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię zwycięską?

522. Wyznaczyć wszystkie piątki liczb pierwszych a, b, c, d, p, spełniające równanie
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2 = p.$$

Zadanie 522 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2006

Przypominamy treść zadań:

513. Ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o wyrazach $a_i \in \{1, 2, \ldots, 44\}$ ma następującą własność: pomiędzy każdymi dwoma wyrazami o jednakowej wartości znajduje się co najmniej jeden wyraz większy od nich. Znaleźć największą możliwą długość n takiego ciągu.

514. Wyznaczyć wszystkie pary funkcji ciągłych $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie $f(x)g(x) + f(y)g(y) = xf(x) + yg(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

513. Oznaczmy przez ℓ_m maksymalną długość ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o podanej własności, o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, m\}$. Ustalmy $m > 1$ i weźmy jeden z takich ciągów ($a_i \leqslant m$). Ma on dokładnie jeden wyraz największy – niech to będzie wyraz a_k.

Każdy z ciągów $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ oraz $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ też ma badaną własność, a ich wyrazy leżą w zbiorze $\{1, \ldots, m-1\}$, więc ich długości nie przekraczają ℓ_{m-1} (stwierdzenie słuszne także w przypadku, gdy jeden z nich jest pusty, czyli ma długość zerową). Otrzymujemy zależność rekurencyjną
$$\ell_m \leqslant 1 + 2\ell_{m-1}.$$
Ponieważ $\ell_1 = 1$, wynika stąd, że $\ell_m \leqslant 2^m - 1$.

Długość $n = 2^m - 1$ jest przy tym możliwa do uzyskania: wystarczy wziąć ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ o wyrazach
$$a_i = \alpha + 1 \quad \text{dla} \quad i = 2^\alpha(2\beta + 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
(Ilustracja dla $m = 3$: ciąg $(1, 2, 1, 3, 1, 2, 1)$.)

Wniosek:
$$\ell_m = 2^m - 1.$$
Dla $m = 44$ dostajemy w wyniku $2^{44} - 1$.

514. Niech f i g będą funkcjami spełniającymi podane równanie. Podstawiając $y = 0$, a następnie $x = 0$, stwierdzamy, że każda z funkcji $\varphi(x) = f(x)g(x) - xf(x)$ oraz $\psi(y) = f(y)g(y) - yg(y)$ ma stałą wartość $-f(0)g(0)$; a ponieważ $\varphi(0) = f(0)g(0)$, ta wartość jest równa 0. Zatem $\varphi \equiv \psi \equiv 0$, czyli
$$f(x)g(x) = xf(x) \quad \text{oraz} \quad f(x)g(x) = xg(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$
Stąd $f(x) = g(x)$ dla $x \neq 0$; wobec ciągłości także $f(0) = g(0)$. Tak więc f i g to ta sama funkcja; zadane równanie przybiera postać
$$f(x)\bigl(f(x) - x\bigr) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$
To znaczy, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ wartość $f(x)$ jest równa x lub 0. W każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$ funkcja ciągła $h(x) = f(x)/x$, przyjmująca co najwyżej dwie wartości (0 lub 1), musi być stała. Otrzymujemy w ten sposób cztery możliwe funkcje f:
$$f_1(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}; \qquad f_2(x) = x \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R};$$
$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } x \geqslant 0; \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x \geqslant 0; \end{cases}$$
każda z nich (wraz z równą jej funkcją g) spełnia wyjściowe równanie.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
406 ($WT = 2{,}84$) i **407** ($WT = 3{,}06$)
z numeru 11/2005

Zbigniew Galias	– Kraków	45,44
Mateusz Łącki	– Kraków	39,37
Konrad Kapcia	– Częstochowa	27,70
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	26,43
Tomasz Tkocz	– Rybnik	20,08
Jacek Konieczny	– Poznań	15,22

Gdyby p. Galiasowi odrobinę bardziej się spieszyło, bez kłopotu mógłby zostać członkiem Klubu 44F już bardzo dawno temu – stan 30 punktów na koncie osiągnął przecież po 48 zadaniach, czyli w 1987 roku! No cóż, cieszymy się, że mamy tak wiernego czytelnika, nawet jeśli rozwiązania przysyła rzadko. . .

Zadania z fizyki nr 418, 419

Redaguje Jerzy B. BROJAN

418. Przez miedziany przewód o promieniu przekroju r płynie prąd elektryczny, powodując jego nagrzewanie się. Pewien odcinek tego przewodu jest otoczony cienką warstwą izolacji o współczynniku przewodnictwa cieplnego λ. Dany jest też współczynnik przenoszenia ciepła z powierzchni do otaczającego powietrza, równy κ. Jaki warunek muszą spełniać te parametry, aby temperatura drutu w przewodzie izolowanym była niższa, niż w nieizolowanym?

Wskazówki:
a) Przepływ ciepła Q między dwiema płaskimi powierzchniami S odległymi od siebie o h, których temperatury wynoszą T_1 i T_2, jest dany wzorem

$$\frac{Q}{S\mathrm{d}t} = \lambda\frac{T_1 - T_2}{h},$$

gdzie $\mathrm{d}t$ – przedział czasu, a λ – współczynnik przewodnictwa cieplnego. Dla miedzi ten współczynnik jest tak duży, że jej temperaturę można uznać za stałą na danym przekroju przewodu.
b) Odpływ ciepła od powierzchni S o temperaturze T_2 do otaczającego powietrza o temperaturze T_3 jest dany przybliżonym wzorem

$$\frac{Q}{S\mathrm{d}t} = \kappa(T_2 - T_3),$$

gdzie κ jest tzw. współczynnikiem przenoszenia ciepła (uwzględniającym konwekcję i promieniowanie).

419. Oczy człowieka są na wysokości 1,7 m nad płaską, poziomą powierzchnią ziemi (np. pasem startowym na lotnisku), a temperatura na wysokości oczu jest o 3° C niższa, niż przy ziemi. W jakim zakresie odległości człowiek może widzieć powierzchnię ziemi? Wystarczy ocena przybliżona.

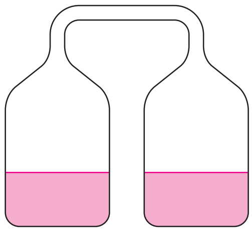
Dany jest bezwzględny współczynnik załamania powietrza w normalnych warunkach, równy 1,00029. Należy przyjąć, że różnica między tym współczynnikiem a jednością jest proporcjonalna do gęstości powietrza, a zależność temperatury od wysokości jest liniowa.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2006

Przypominamy treść zadań:

410. Ocenić orientacyjnie stosunek masy niezbędnego paliwa do masy statku kosmicznego wprowadzonego na niską ($h_o = 500$ km) orbitę okołoziemską. Dane: prędkość wylotowa gazów względem rakiety $v_g = 3$ km/s, stosunek siły ciągu silników do ciężaru startowego $n = 1{,}75$. Dla uproszczenia pominąć opór powietrza podczas startu i korzyści wynikające z zastosowania rakiety kilkustopniowej. Jak dużą oszczędność paliwa daje wystrzelenie statku kosmicznego z kosmodromu na równiku w porównaniu z kosmodromem na biegunie (gdyby istniał tam kosmodrom)?

411. W jednym naczyniu znajduje się czysta woda, a w drugim identycznym naczyniu – roztwór soli w wodzie. Naczynia połączono rurką (rys.) i pozostawiono na bardzo długi czas. Czy poziom wody w naczyniach pozostanie stały, a jeśli nie, to jak się będzie zmieniał? Jak zależy przebieg zjawiska od tego, czy w naczyniach znajduje się powietrze?



410. Autor założył następujący skrajnie uproszczony schemat lotu rakiety: najpierw pionowe rozpędzanie się do wyczerpania paliwa, następnie bezwładne wznoszenie się do wysokości h_o, wreszcie nagła zmiana kierunku na poziomy bez utraty prędkości (odbicie sprężyste od sztywnej przeszkody ustawionej ukośnie??). Całkując równanie ruchu rakiety o zmiennej masie, przy założeniu stałego tempa zużycia paliwa i stałej wartości siły ciężkości (do obliczeń podstawimy wartość g na wysokości 250 km, tzn. 9,1 m/s^2), otrzymuje się następujące wyrażenia na zależność prędkości rakiety v i jej wysokości h od czasu:

$$v = v_\mathrm{g} \ln\frac{v_\mathrm{g}}{v_\mathrm{g} - \mathrm{g}nt} - \mathrm{g}t,$$

$$h = v_\mathrm{g}t - \frac{v_\mathrm{g}}{\mathrm{g}n}(v_\mathrm{g} - \mathrm{g}nt)\ln\frac{v_\mathrm{g}}{v_\mathrm{g} - \mathrm{g}nt} - \frac{\mathrm{g}t^2}{2}.$$

Nietrudno zauważyć, że argument logarytmu w powyższych wyrażeniach jest równy stosunkowi masy początkowej do aktualnej. Rozważmy chwilę zakończenia pracy silników i podstawmy pewną wybraną wartość k tego stosunku. Procedura numeryczna może być skonstruowana następująco: po zadaniu k obliczamy stąd t, v i h, a następnie z zasady zachowania energii wyznaczamy prędkość na zadanej wysokości h_o. Następnie korygujemy k tak, aby ta prędkość stała się równa prędkości orbitalnej (na wysokości 500 km jest ona równa 7,6 km/s). Otrzymana wartość k wynosi 23, czyli szukany stosunek masy paliwa do masy statku byłby równy 22. W rzeczywistości wynosi on około 45 – może ktoś z Czytelników zastosuje inny schemat obliczeniowy i otrzyma lepszy wynik?

W przypadku kosmodromu na równiku do prędkości uzyskanej dzięki pracy silników dodaje się prędkość obiegowa powierzchni Ziemi, równa 40 000 km/24 h = 0,46 km/s. Obliczenia wykonane według powyższej zasady wskazują, że stosunek masy paliwa do masy statku zmniejszy się z 22 do 19, czyli o 14%.

411. Ciśnienie pary nasyconej nad roztworem jest niższe, niż nad czystą cieczą. Dlatego para wodna będzie przepływać znad czystej wody do naczynia z roztworem i tam się skraplać, aż ciśnienie słupa pary zrównoważy wspomnianą różnicę ciśnień. Innym czynnikiem sprzyjającym ustaleniu się nowego położenia równowagi jest fakt, że stężenie roztworu będzie malało, a wtedy ciśnienie pary nad nim zbliża się do ciśnienia nad czystą wodą. W obecności powietrza przepływ pary wodnej będzie następował wskutek dyfuzji, co oznacza wolniejszy przebieg zjawiska.

Odpowiedź na pytanie ze str. 5: rozgrzani bojem i sfrustrowani brakiem przeciwnika gracze zespołu B zaczęli strzelać do siebie nawzajem. To efekt spotykany w prawdziwych wojnach. Model informatyczny okazał się również i w tym krańcowym przypadku całkiem bliski rzeczywistości.

Rozwiązanie zadania M 1132.
Odp.: 4.

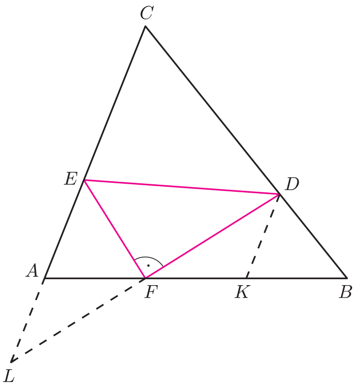
Przypuśćmy, że na tablicy znajduje się 5 liczb i przyjmijmy, że liczby te dają z dzielenia przez 3 reszty $r_1, r_2, \ldots, r_5$.

Jeśli wśród reszt $r_1, r_2, \ldots, r_5$ występuje każda z liczb 0, 1, 2, to suma liczb odpowiadającym tym trzem resztom jest podzielna przez 3.

Załóżmy więc, że wśród reszt $r_1, r_2, \ldots, r_5$ występują co najwyżej dwie różne liczby. Zatem trzy spośród nich są jednakowe, a wtedy suma liczb odpowiadających tym trzem resztom jest podzielna przez 3.

Pozostało wskazać 4 liczby o własności opisanej w treści zadania. Są nimi na przykład: 1, 3, 7, 9.

Rozwiązanie zadania M 1133.
Niech K będzie środkiem odcinka FB oraz niech prosta FD przecina prostą AC w punkcie L.



Z równości
$$\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2} = \frac{BK}{AK}$$
wynika, że proste DK i AC są równoległe.

Punkt F jest środkiem odcinka AK, więc
$$\frac{FD}{FL} = \frac{FK}{AF} = 1\,.$$
Zatem w trójkącie DEL prosta EF jest zarówno środkową, jak i wysokością, skąd wynika, że trójkąt ten jest równoramienny. Zatem $\sphericalangle AEF = \sphericalangle FED$.

Patrz w niebo

Od 1961 roku wiadomo, że Wenus obraca się w przeciwną stronę, niż obiega Słońce. Stwierdzenie tego faktu nastąpiło dlatego tak późno, że powierzchni Wenus po prostu nie widać – planeta pokryta jest gęstymi chmurami. W rezultacie obrót globu Wenus został zaobserwowany metodami radarowymi. Sądzi się, że przyczyna wstecznego obrotu Wenus jest dość prozaiczna, mianowicie skumulowanie się skutków przypadkowych zderzeń formującego się globu z okruchami, z których planeta w końcu powstała. Niektórzy twierdzą, że było to jedno zderzenie prawie już uformowanej planety z dostatecznie masywnym obiektem, ale udowodnić tego raczej nie można.

Kilka lat temu pojawił się jednak zupełnie inny pogląd, że przyczyną tej – jak by nie było – anomalii jest atmosfera Wenus. Atmosfera ziemska jest postrzegana jako przyczyna klimatu, erozji, obiegu wody w przyrodzie, jako czynnik sprzyjający życiu itd., chyba nikt jednak nie szuka roli atmosfery w ewolucji mechanicznej planety. Ale atmosfera Wenus jest 100 razy masywniejsza niż ziemska, więc kto wie? Twórcy nowej hipotezy uważają, że wywoływane przez Słońce pływy atmosfery Wenus (silniejsze niż w przypadku Ziemi, bo Wenus jest bliżej Słońca) i jej tarcie o glob planety doprowadziły do wyhamowania normalnej rotacji planety, jeżeli normalną była rotacja w kierunku obiegu. Jej spowolnienie wywołało większą różnicę temperatur między dzienną i nocną półkulą Wenus, a to z kolei – z bardzo skomplikowanych powodów – wystąpienie potężnych wiatrów usiłujących obracać planetę w kierunku wstecznym. Hipoteza wręcz rewolucyjna! Twórcy tej hipotezy uważają nawet, że wsteczny obrót planet ziemiopodobnych z gęstymi atmosferami powinien być normą w pozasłonecznych układach planetarnych. Niestety, nie dysponujemy obserwacjami mogącymi rzucić światło na ten problem. Na niekorzyść hipotezy przemawia fakt, że atmosfery planet typu Ziemi są dość młode i trudno wymagać, by obecność atmosfery np. Wenus zdążyła przynieść tak wielkoskalowe skutki. Ponadto wzrostowi momentu pędu ciężkiego globu planety musiałby towarzyszyć wzrost momentu pędu (z przeciwnym znakiem) innego obiektu – nie jest jasne, co miałoby nim być. Tak więc hipoteza przyznająca atmosferze główną rolę w mechanicznej ewolucji planety została odnotowana w literaturze naukowej, ale stosunek do niej astronomów jest raczej sceptyczny.

Tomasz KWAST

Maj

Lew, okazały gwiazdozbiór wiosennego nieba, wieczorami w maju znajduje się wysoko prawie w kierunku południowym. Regulus, jego najjaśniejsza gwiazda (1,34 mag), jest gwiazdą potrójną, a wszystkie trzy składniki można zobaczyć za pomocą amatorskiego teleskopu. Składnik główny to gorąca gwiazda typu B7. Obiega go w odległości niemal 3 minut kątowych gwiazda o jasności 7,6 mag. Ona sama jest z kolei gwiazdą podwójną, której składniki (7,6 i 13 mag) dzieli odległość 4 sekund kątowych, dzięki czemu będą łatwo widoczne osobno przy powiększeniu 100 razy. Nazwa gwiazdy oznacza „Mały Król", a wprowadził ją Mikołaj Kopernik. Regulus leży w odległości 25 pc.

Wenus jest w Rybach i wschodzi przed wschodem Słońca. Mars jest w Bliźniętach i po zachodzie Słońca sam dość szybko zachodzi. Jowisz jest w Wadze i widać go przez całą noc – 4 V jest jego opozycja, czyli znajduje się wtedy w kierunku przeciwnym niż Słońce. Saturn jest w Raku i widać go przez kilka godzin po zachodzie Słońca. Pełnia Księżyca wypada 13 V, a nów 27 V. Księżyc zakryje Spikę (11 V – zjawisko widoczne w Północnej Ameryce i w centralnej Afryce) i Antaresa (14 V – widoczne w Indonezji, Australii i w Nowej Zelandii). 5 V można spodziewać się maksimum skromnego roju eta-Akwarydów, który może być widoczny przez prawie całą pierwszą dekadę maja.

T. K.

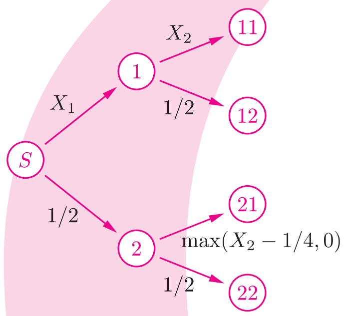
Wół, lis i konik polny

Rafał SZTENCEL *

Czarownica C w punkcie S na rozstaju dróg mówi: „Pójdziesz w prawo, dostaniesz pół złotego; pójdziesz w lewo, dostaniesz garść miedziaków z sakiewki – możesz je sobie przeliczyć. Ja jestem uczciwą czarownicą i kwota wyciągnięta z sakiewki ma rozkład prawie jednostajny na przedziale $[0,1]$.

Prawie, bo złotówka nie jest nieskończenie podzielna. W XVI w. 1 złoty dzielił się bardzo wygodnie na 30 groszy, 90 szelągów, 180 kwartników (ternarów) i 540 pieniążków, przy czym za kwartnik można było dostać 7 jaj (por. [1], s. 21, zad. 4).

Średnio dostajesz pół złotego. Chodziłeś do szkół – będziesz wiedział, co to znaczy. Nie chce mi się więcej gadać, rzuć okiem na plan. Uważaj na wiedźmina z dwójki. Pójdziesz w lewo – on weźmie z garści miedziaków coś na piwo (ile się da, ale nie więcej niż ćwierć złotego) i wypłaci resztę – jeśli zostanie".



Może i słusznie czarownicy nie chciało się gadać. Formalny opis gry jest prosty. Wymaga dwóch niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2 o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Oto wypłaty odpowiadające czterem możliwym drogom:

$$X_1+X_2,\quad X_1+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}+\max\Big(X_2-\frac{1}{4},0\Big),\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}.$$

W trzech przypadkach średnia wypłata jest równa 1, w jednym – nieco mniejsza.

Na rozstaju pojawia się wół, który nie lubi niespodzianek. Idzie dwa razy w prawo, wygrywa średnio (i zawsze) złotówkę. Konik polny lubi ryzyko, ale nie myśli. Idzie dwa razy w lewo, średnio dostaje złotówkę.

Lis akceptuje ryzyko i myśli. A myśli tak: jeśli za pierwszym razem miedziaków będzie mało, pójdę w prawo. I tak mam gwarantowane pół złotego, a może będzie lepiej? Ostatecznie lis (po konsultacji z niedźwiedziem) dochodzi do ogólnej teorii. Najpierw rozważa wypłaty w ostatnim kroku, gdzie wybór drogi jest oczywisty: niezależnie od tego, co już ma, wybiera większą z oferowanych wypłat. W stanie 1 otrzyma zatem $\max(X_2,\frac{1}{2})$, a w stanie 2 – $\max(\max(X_2-\frac{1}{4},0),\frac{1}{2})=\max(X_2-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$. Może nawet obliczyć średnie (szybki sposób na końcu artykułu):

$$E\max\Big(X_2,\frac{1}{2}\Big)=\frac{5}{8},\qquad E\max\Big(X_2-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\Big)=\frac{17}{32}.$$

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

To z kolei umożliwi mu podjęcie decyzji na starcie. Jeśli

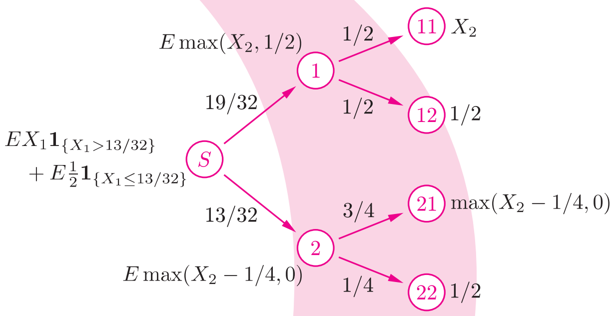
$$X_1+\frac{5}{8}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{17}{32},$$

czyli $X_1\leqslant\frac{13}{32}$, to idzie w prawo (teraz już wie dokładnie, co to znaczy, że miedziaków jest za mało: progiem decyzyjnym jest $73\frac{1}{8}$ kwartnika). W przeciwnym razie idzie w lewo. Co na tym zyskuje?

Zobaczmy. Średnia wygrana w pierwszym kroku jest równa

$$EX_1\mathbf{1}_{\{X_1>\frac{13}{32}\}}+E\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{X_1\leqslant\frac{13}{32}\}}=\frac{855}{2048}+\frac{13}{64}=\frac{1271}{2048},$$

gdzie pierwszy składnik odpowiada drodze w lewo, drugi – w prawo. Symbol $\mathbf{1}_A$ oznacza zmienną losową wskaźnikową zdarzenia A: przyjmuje ona wartość 1 na A i 0 na A'. W efekcie $E\mathbf{1}_A=P(A)$.



Drogę w lewo wybieramy z prawdopodobieństwem $\frac{19}{32}$ i wygrywamy w drugim kroku średnio $\frac{5}{8}$; dla drogi w prawo odpowiednie wielkości są równe $\frac{13}{32}$ i $\frac{17}{32}$, zatem średnio w drugim kroku mamy

$$\frac{19}{32}\cdot\frac{5}{8}+\frac{13}{32}\cdot\frac{17}{32}=\frac{380+221}{1024}=\frac{601}{1024}.$$

Ostatecznie lis wygrywa średnio

$$\frac{1271}{2048}+\frac{1202}{2048}=\frac{2473}{2048}\approx 1{,}208,$$

czyli o ponad 20% więcej niż wół i konik polny. W istocie lis znalazł sposób na uzyskanie największej możliwej średniej wygranej (czego nie udowodnimy).

Wyjaśnimy natomiast na zakończenie, jak zostały obliczone występujące powyżej średnie. Jeśli Z jest nieujemną zmienną losową, to

$$EZ=\int_0^\infty P(Z>t)\mathrm{d}t.$$

Gdy Z ma rozkład ciągły, wzór ten można otrzymać rutynowo: całkując przez części. Ale najbardziej pożyteczny staje się on w przypadku bardziej ogólnych rozkładów.

Obliczenie $E\max(X_2,\frac{1}{2})$ sprowadza się do obliczenia pola prostej figury geometrycznej. Z kolei $EX_1\mathbf{1}_{\{X_1>a\}}$ jest polem trapezu o wysokości $1-a$ i bokach a oraz 1; prosimy Czytelnika o sprawdzenie.

Literatura

[1] Witold Więsław, *Stare polskie zadania z matematyki*, Wydawnictwo Nowik, 2000.