

## SPIS TREŚCI NUMERU 4 (383)

Prz(e)chodzi Euler do Nagela  
*Michał Marcinkowski*

str. 1

Drobiazgi

str. 3

Ile jest wielościanów  
 foremnych?

*Zdzisław Pogoda*

str. 4

### Mała Delta:

Jak spada jabłko?

*Piotr Zalewski*

str. 8

Bombardowanie komety

*Krzysztof Ziolkowski*

str.10

Jeszcze jedna

*Andrzej Wrzesień*

str.12

Zadania

str.12

Aktualności

str.13

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Kwiecień

str.16

Zadanie o podziale puli  
 i arbitraż

*Rafał Sztencel*

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichocki, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:  
 Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450,  
 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)  
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: 022-5328-731, lub -820, lub -816, fax: -732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

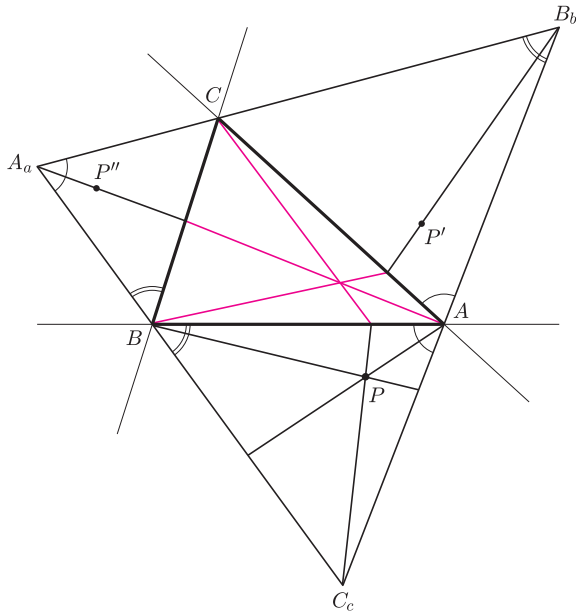
Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Gry

Rozważmy następującą konstrukcję:

Dla danego trójkąta  $ABC$  rysujemy dwusieczne jego kątów zewnętrznych. Tworzą one trójkąt  $A_a B_b C_c$ , którego każdy wierzchołek jest środkiem pewnego okręgu dopisanego do trójkąta  $ABC$ . Nowopowstałe trójkąty  $ABC_c$ ,  $BCA_a$  i  $CAB_b$  nazywamy trójkątami dopisanymi. Nietrudno zauważyć, że trójkąty dopisane są podobne. Następnie wybieramy jeden z tych trójkątów, np. trójkąt  $ABC_c$  i pewien punkt  $P$ . Niech punkt  $P'$  będzie obrazem punktu  $P$  w podobieństwie przekształcającym trójkąt  $ABC_c$  w trójkąt  $CAB_b$ . Analogicznie wyznaczamy punkt  $P''$  dla trzeciego trójkąta dopisanego. Teraz przez punkty  $C_c$  i  $P$  prowadzimy prostą. Odpowiadająca jej czerwona prosta wyznaczona jest przez punkt  $C$  i punkt przecięcia prostej  $C_c P$  z prostą  $AB$  lub jest równoległa do  $AB$ , gdy prosta  $C_c P$  jest równoległa do  $AB$ . Analogicznie proste  $B_b P'$  oraz  $A_a P''$  wyznaczają dwie dodatkowe czerwone proste.



Rys. 1

Prawdziwe jest

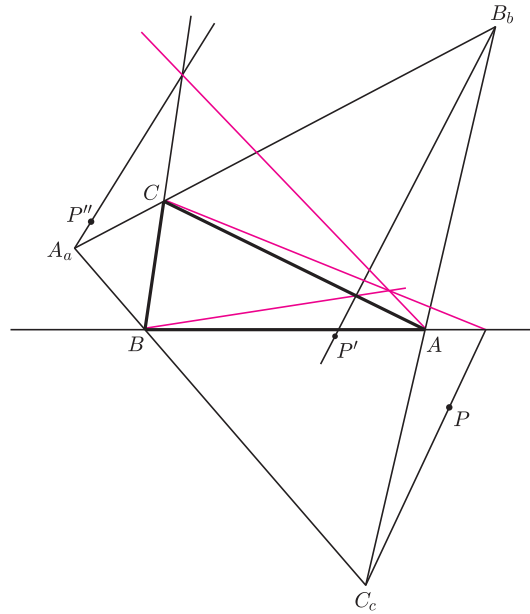
**Twierdzenie 1.**

*Czerwone proste przecinają się w jednym punkcie.*

Podamy dowód dla przypadku, gdy proste  $C_c P$ ,  $B_b P'$  i  $A_a P''$  przecinają się z odpowiednimi bokami (lub ich przedłużeniami) wyjściowego trójkąta.

**Dowód.**

Zauważmy, że prosta przechodząca przez punkty  $B$  i  $P$  jest odpowiednia do prostej  $B_b P'$  (bo w omawianym wyżej podobieństwie punkt  $B$  przechodzi na  $B_b$ , a  $P$  na  $P'$ ). Analogicznie prosta  $AP$  jest odpowiednia do prostej  $A_a P''$ . W takim razie czerwone proste dzielą boki  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  (lub ich przedłużenia) tak samo, jak proste  $C_c P$ ,  $BP$ ,  $AP$  dzielą boki trójkąta  $ABC_c$  (lub ich przedłużenia). Ponieważ te trzy proste w trójkącie  $ABC_c$  przecinają się w jednym punkcie, więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy, czerwone proste też przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 2

Widzimy, że jeżeli względem pewnego trójkąta dopisanego (np.  $ABC_c$ ) obierzemy punkt  $P$ , to  $P$  jednoznacznie wyznacza dwa punkty  $P'$  i  $P''$ . Ta trójka punktów wyznacza z kolei punkt przecięcia czerwonych prostych. Można więc powiedzieć, że powyższa konstrukcja przekształca punkt  $P$  w punkt wspólny tych prostych.

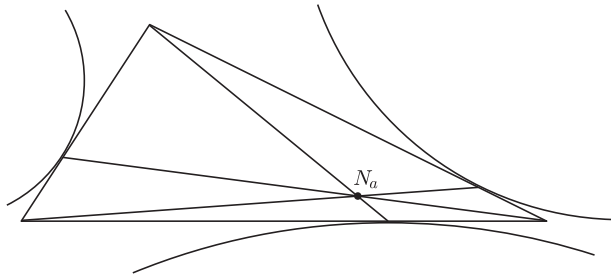
Okazuje się, że tak zdefiniowane przekształcenie ma wiele ciekawych właściwości. Nietrudno na przykład zauważyć, że obrazem środka ciężkości trójkąta  $ABC_c$  jest środek ciężkości trójkąta  $ABC$ . Istnieje jednak więcej szczególnych punktów trójkąta  $ABC_c$ , których obrazy są szczególnymi punktami trójkąta  $ABC$ . Obrazuje to następująca tabela:

w trójkącie $ABC_c$	obraz w trójkącie $ABC$
środek okręgu opisanego ( $O$ )	środek okręgu wpisanego ( $L$ )
środek ciężkości ( $G$ )	środek ciężkości ( $G'$ )
środek okręgu 9 punktów ( $N_9$ )	punkt Spieker'a ( $Sp$ )
ortocentrum ( $H$ )	punkt Nagela ( $Na$ )

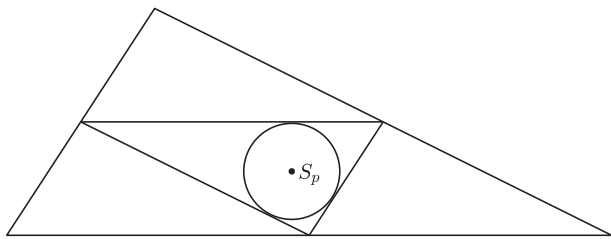
\*Michał Marcinkowski, uczeń III LO we Wrocławiu

Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki, 2005.

Punkt Nagela (rys. 3) to punkt przecięcia się odcinków łączących wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych do przeciwnych boków tego trójkąta, a punkt Spieker (rys. 4) to środek okręgu wpisanego w trójkąt powstały przez połączenie środków boków trójkąta wyjściowego.



Rys. 3

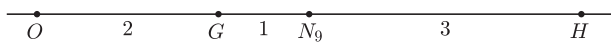


Rys. 4

Niemniej ważną cechą przekształcenia jest jego afiniczność (dokładniej: przekształcenie jest powinowactwem osiowym wyznaczonym przez wektor  $\vec{C_c\bar{C}}$  i prostą  $AB$ ). Dodatkowo, dowolnie wybrana prosta, jej obraz i prosta  $AB$  przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe (wektor  $\vec{C_c\bar{C}}$  i oś  $AB$  są tutaj wyróżnione, ponieważ przekształcamy względem trójkąta  $ABC_c$ ).

Zajmijmy się teraz tytułowymi bohaterami pracy.

Znany jest fakt, że w każdym trójkącie punkty  $O$ ,  $G$ ,  $N_9$  i  $H$  leżą na jednej prostej (tzw. *prostej Eulera*) a stosunki odległości między tymi punktami są takie jak na rysunku niżej.



Rys. 5

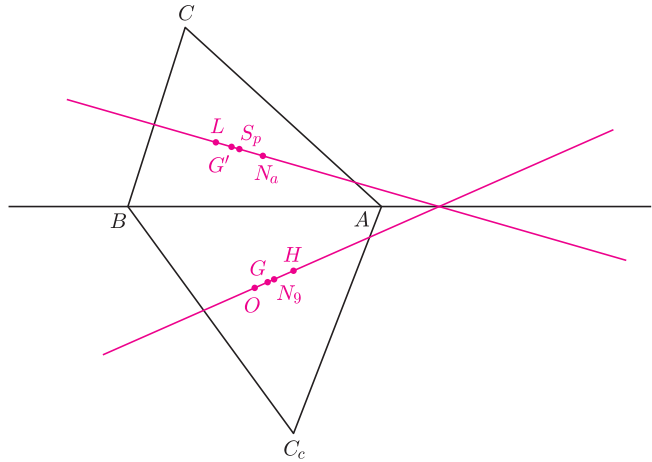
Euler z całą pewnością udowodnił, że punkty  $O$ ,  $G$  i  $H$  są współliniowe. O istnieniu okręgu dziewięciu punktów wiedział (w 1765 roku pokazał nawet, że przechodzi przez środki boków trójkąta wyjściowego). Czy wiedział o tym, że  $N_a$  należy do prostej nazwanej później jego imieniem? Jednoznacznej odpowiedzi nie znalazłem, ale jest bardzo możliwe, że tak. Dowód tego faktu nie jest przecież trudny.

Christian Heinrich von Nagel (1803–1882) odkrył inną ciekawą prostą trójkąta (tzw. *prostą Nagela*), na której leży  $L$ ,  $G'$  (dla odróżnienia od  $G$ ),  $S_p$  i  $N_a$ .

Z podanej wyżej tabeli i faktu, że przekształcenie jest afiniczne, wynika

**Twierdzenie 2.**

*Obrazem prostej Eulera trójkąta dopisanego jest prosta Nagela trójkąta  $ABC$ .*



Rys. 6

Stąd od razu mamy

**Wniosek 3.**

*Prosta Eulera trójkąta  $ABC_c$ , prosta Nagela trójkąta  $ABC$  i prosta  $AB$  spotykają się w jednym punkcie lub są równoległe.*

**Wniosek 4.**

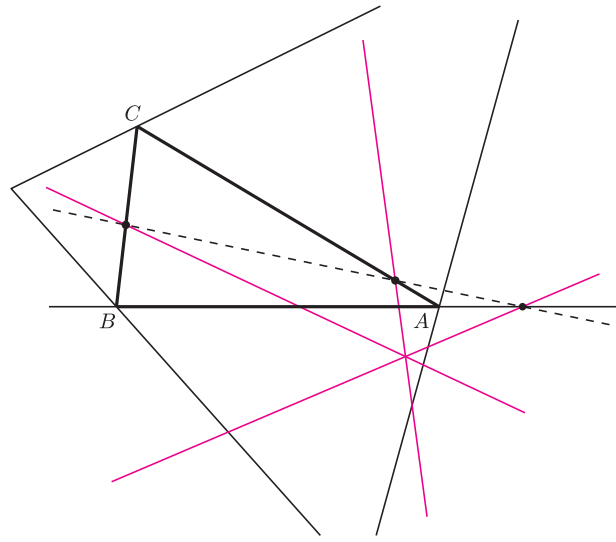
*Stosunki odległości między omawianymi punktami prostej Nagela są takie same jak stosunki odległości między odpowiadającymi im punktami na prostej Eulera (jest to cecha przekształceń afinicznych).*

Na koniec narysujmy (rys. 7) trójkąt  $ABC$  z trzema trójkątami dopisanymi, prostą Nagela trójkąta  $ABC$  (przerywana) i proste Eulera dla trzech trójkątów dopisanych (czerwone). Widzimy trzy charakterystyczne punkty. W każdym z nich przecinają się trzy proste: prosta Nagela, jedna spośród trzech prostych Eulera i prosta zawierająca któryś z boków trójkąta  $ABC$ . Istnienie takich trzech punktów wynika z wniosku 3 zastosowanego do każdego trójkąta dopisanego z osobna (trójkąt  $ABC_c$  wybraliśmy tylko dla ustalenia uwagi). Na rysunku widzimy jednak jeszcze jeden specyficzny punkt. Rzeczywiście, zachodzi

**Twierdzenie 5.**

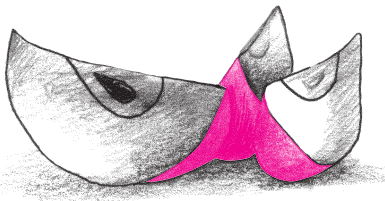
*Trzy proste Eulera trójkątów dopisanych przecinają się w jednym punkcie.*

Możliwości eksploatacji tematu jest naprawdę wiele. Pokazana dualność między prostymi Eulera i Nagela pozwala przeformułować pewne twierdzenia o prostej Eulera na dualne twierdzenia dotyczące prostej Nagela (takim jest np. warunek konieczny na równoległość prostej Eulera do pewnego boku trójkąta). Można też szukać następných szczególných punktów trójkąta i badać ich obrazy, analogicznie można postępować z prostymi. Na uwagę zasługuje encyklopedia Clarka Kimberlinga (<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>), w której opisane zostało 3055 szczególných punktów trójkąta! Na stronach MathWorld (<http://mathworld.wolfram.com/CentralLine.html>) można znaleźć kilkanaście charakterystycznych prostých trójkąta. Materiał badawczy jest praktycznie niewyczerpywalny.



Rys. 7

## Drobiazgi



Astronomicznym odpowiednikiem słynnego problemu kury i jajka jest np. zagadnienie, czy uformowane wcześniej galaktyki zebrały się w gromady galaktyk, czy też ogromne obłoki rozproszonej materii podzieliły się na fragmenty, z których dopiero powstały galaktyki. W świecie gwiazd sprawa wydaje się rozstrzygnięta: obłoki materii w miarę zgęszczania się ogrzewają się, co razem sprzyja rozpadowi na mniejsze fragmenty, a z nich w końcu powstają gwiazdy. Na zdrowy rozum, mechanizm ten mógłby działać też w większej skali. Jednak obserwacje najbliższej gromady galaktyk, gromady w Pannie (Virgo), sugerują coś przeciwnego. Gromada ma mianowicie dwie koncentracje, z których każda w centrum mieści wielką galaktykę eliptyczną. Koncentracje te najwyraźniej spadają na siebie – dowodzi tego rozkład przestrzenny galaktyk i ich prędkości radialne. Wreszcie galaktyki różnych typów są w tych podgromadach nie wymieszane: galaktyki eliptyczne (masywne) grupują się w pobliżu centrów, a spiralne (lżejsze) na peryferiach podgromad (nazywa się to efektem segregacji galaktyk, a występuje on w licznych gromadach). Ten fakt akurat można tłumaczyć dwojako. Może on oznaczać, że gromady nie osiągnęły jeszcze stanu równowagi, albo że właśnie są stare w skali kosmicznej, gdyż pojawianie się efektu segregacji z upływem czasu potwierdzają numeryczne symulacje mechanicznej ewolucji gromad. Badania ewolucji gromad stawiają dopiero pierwsze kroki.

\* \* \*

Średnią odległość  $\langle r \rangle$  planety od Słońca można obliczyć np. jako średnią (niech już będzie: arytmetyczną) wielu pomiarów  $r$  wykonanych w jednakowych odstępach czasu  $t$  w ciągu pełnego obiegu planety. Ale można też uśrednić pomiary  $r$  wykonane w jednakowych odstępach kąta  $v$  między kierunkiem  $r$  a kierunkiem na peryhelium (kąten ten nazywa się anomalią prawdziwą). A jeżeli obliczyć średnią arytmetyczną po prostu najmniejszej i największej odległości planety od Słońca, to co wyjdzie? A ile wynosi średnia geometryczna tych dwóch odległości? A ich średnia harmoniczna? Wszystkie te średnie są różne. Oto one ( $a$  oznacza wielką półoś elipsy,  $e$  jej mimośród):

$$\langle r \rangle_t = a(1 + e^2/2), \quad \langle r \rangle_v = a\sqrt{1 - e^2} = b,$$

$$(r_{\min} + r_{\max})/2 = a, \quad \sqrt{r_{\min}r_{\max}} = b,$$

$$\left( \frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{r_{\max}} \right)^{-1} = a(1 - e^2)/2.$$

Można skonstruować kąt (zwany anomalią mimośrodową), względem którego uśrednione  $r$  wynosi  $a$ .

T. K.



### Rozwiązanie zadania F 666.

Niech  $r_{kl}$  oznacza opór mierzony między punktami  $k$  i  $l$ . W układzie 1 między 1 i 2 mamy połączenie równoległe opornika  $R_3$  z połączeniem szeregowym  $R_1$  i  $R_2$ , czyli

$$r_{12} = \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right)^{-1} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

oraz

$$r_{13} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

i

$$r_{23} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

W układzie 2 między tymi samymi punktami jest tylko połączenie szeregowo  $R'_1$  i  $R'_2$ , czyli  $r_{12} = R'_1 + R'_2$ , analogicznie  $r_{13}$  i  $r_{23}$ . Łącząc otrzymane wzory, dostajemy

$$R'_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$R'_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

i

$$R'_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$



# Ile jest wielościanów foremnych?

Zdzisław POGODA \*

Pytanie postawione w tytule wydaje się dziwne. Przecież wiadomo co najmniej od czasów Platona, że wielościanów foremnych jest pięć typów: czworościan foremny, sześciątka oraz ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan – wszystkie foremne. Łatwo też pokazuje się, że nie może być ich więcej. W czym zatem problem?

Definiując i opisując wielościany foremne, zazwyczaj zakładamy milcząco, że są one wypukłe. A co będzie, gdy zrezygnujemy z wypukłości? Podobnie możemy zrezygnować z wypukłości ścian. Czy w takiej ogólniejszej sytuacji będziemy mogli mówić o wielościanach foremnych? Ile ich wtedy będzie?

Najpierw ustalmy pewne definicje. Zapewne pamiętamy, że wielokąt foremny to jest taki wielokąt wypukły, który ma wszystkie boki równe i kąty wewnętrzne przy wierzchołkach takie same, czyli przystające. Opuszczając słowo „wypukły” i nie zwracając uwagi na przecięcia boków, dostajemy określenie wielokąta foremnego gwiaździstego. Takie wielokąty powstają z przekątnych zwykłych wielokątów wypukłych. Najprostszy tworzą przekątne wypukłego pięciokąta foremnego – jest to pięciokąt gwiaździsty, czyli znany Pitagorejczykom pentagram. Przekątne sześciokąta nie zamykają się w wielokąt gwiaździsty – tu dostajemy kompozycje dwóch trójkątów równobocznych nazywaną często gwiazdą Dawida. Za to w siedmiokącie foremnym mamy aż dwa siedmiokąty gwiaździste.

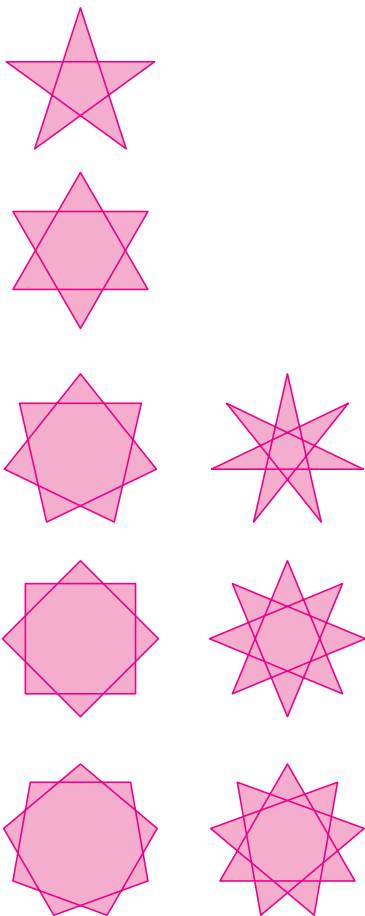
Jeśli wielokąt foremny (gwiaździsty lub nie) ma  $n$  boków, a punkt  $O$  oznacza jego środek (czyli np. środek okręgu opisanego na tym wielokącie), to punkt poruszający się po bokach wielokąta obiegnie środek  $d$  razy. Gdy wielokąt jest wypukły, to  $d = 1$ , dla pentagramu  $d = 2$ . Kąt środkowy, czyli kąt o wierzchołku  $O$ , którego ramiona przechodzą przez końce jednego boku, ma miarę  $\frac{2\pi d}{n}$ . Liczbę  $d$  często nazywa się gęstością wielokąta foremnego. Liczby  $d$  i  $n$  są względnie pierwsze oraz  $2d < n$ . Wielokąt o  $n$  bokach i gęstości  $d$  oznacza się symbolem  $\left\{ \frac{n}{d} \right\}$  – jest to symbol Schläfliego wielokąta foremnego.

Można spróbować również rozszerzyć definicję wielościanu foremnego, rezygnując z wypukłości i dopuszczając ściany gwiaździste. Wielościan nazwiemy foremnym, gdy jego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi, również gwiaździstymi, a w każdym wierzchołku schodzi się jednakowa liczba ścian. W takim przypadku, podobnie jak dla wielokątów gwiaździstych, ściany będą mogły się przenikać. Warto może zaznaczyć, że termin „ściana” jest tu już nieco umowny.

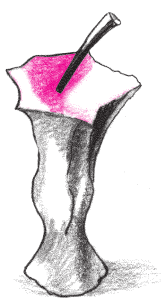
Wygodnie jest też zdefiniować wielościan foremny, używając pojęcia figury (wielokąta) wierzchołkowej. Figura wierzchołkowa jest wielokątem, którego wierzchołki są środkami krawędzi schodzących się w danym wierzchołku wielościanu. Dla sześciątka, na przykład, figurą wierzchołkową jest trójkąt, a dla dwudziestościanu pięciokąt.

Łatwo sprawdzamy, że wielościan jest foremny, gdy wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i podobny warunek spełniają figury wierzchołkowe. Dla wielościanów foremnych wprowadzamy również symbol Schläfliego  $\{p, q\}$ , gdzie  $\{p\}$  jest symbolem ściany, a  $\{q\}$  symbolem figury wierzchołkowej. Liczba  $q$ , gdy jest całkowita, jest także liczbą krawędzi lub, co na jedno wychodzi, ścian schodzących się w wierzchołku wielościanu. Tak więc, np.  $\{5, 3\}$  oznacza wielościan, którego ścianami są pięciokąty, a figurami wierzchołkowymi trójkąty, czyli w każdym wierzchołku tego wielościanu mamy trzy krawędzie. Jest to naturalnie dwunastościan foremny.

Jakie pary liczb  $\{p, q\}$  można przypisać wielościanom foremnym? Klasyczne twierdzenie mówi, że dla wielościanów wypukłych dopuszczalne są następujące symbole  $\{3, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{4, 3\}$ ,  $\{3, 5\}$  i  $\{5, 3\}$ . Z każdym związany jest pewien



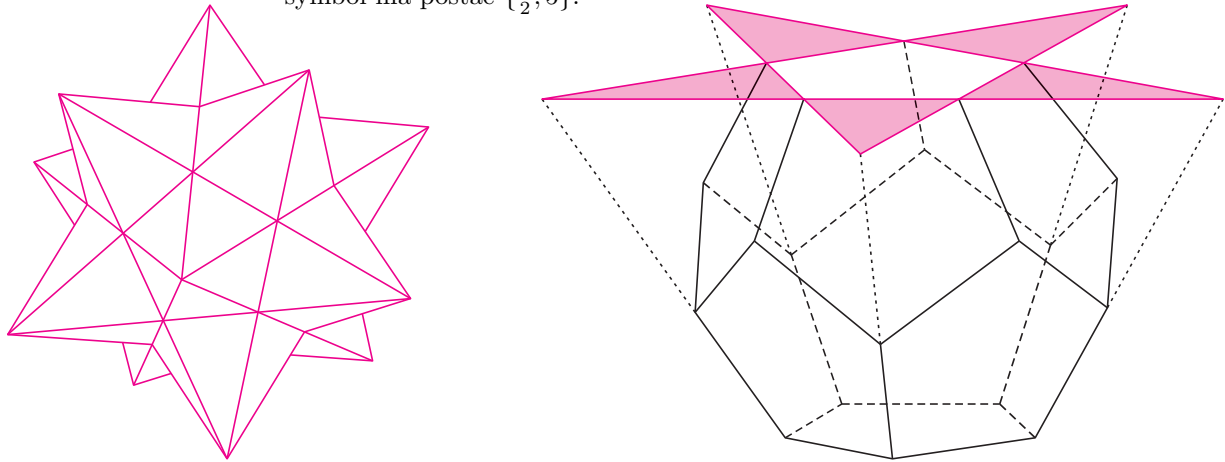
Rys. 1. Wielokąty gwiaździste.



\*Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

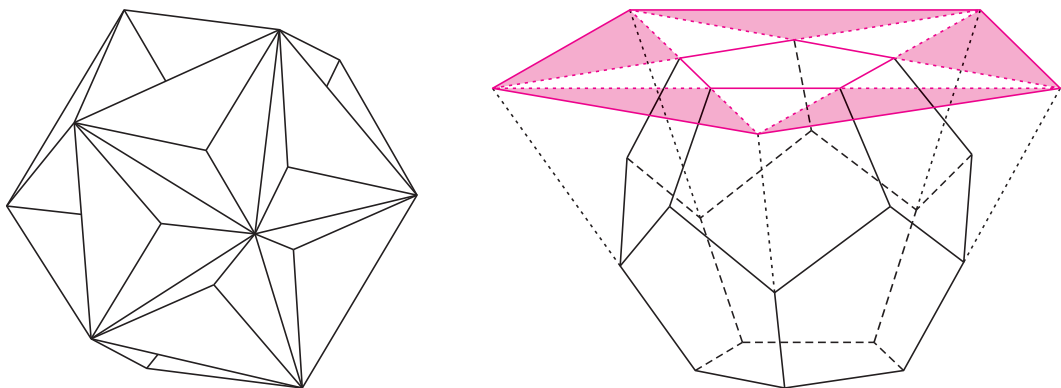
wieloscian foremny. Jaki? Czytelnik z pewnością sam zgadnie. Czy liczby  $p$  i  $q$  mogą przyjmować wartości ułamkowe? Kepler na początku XVII, a Poinot na początku XIX wieku skonstruowali takie przykłady.

Jeśli w pięciokącie foremnym przedłużymy krawędzie aż do przecięcia, to otrzymamy pięciokąt gwiaździsty. Możemy tak postąpić z każdym pięciokątem – ścianą dwunastościanu foremnego. Otrzymamy wtedy obiekt nazywany dwunastościanem gwiaździstym małym. Jego ścianami są pentagramy i w każdym wierzchołku schodzi się ich pięć, a zatem spełnione są warunki rozszerzonej definicji wielościanu foremnego. Zgodnie z przyjętymi zasadami jego symbol ma postać  $\{\frac{5}{2}, 5\}$ .



Rys. 2. Dwunastościan gwiaździsty mały i idea konstrukcji.

Istnienie wielościanu o symbolu  $\{5, \frac{5}{2}\}$  udowodnił Poinot. Wystarczy w każdym pentagramie dwunastościanu gwiaździstego małego połączyć wierzchołki, tworząc ponownie wypukłe pięciokąty foremne. Powstały wielościan jest figurą niezwykłą, gdyż zbudowany jest, podobnie jak dwunastościan foremny, z dwunastu pięciokątów, a jego figurą wierzchołkową jest pentagram. Nazwano go dwunastościanem wielkim.

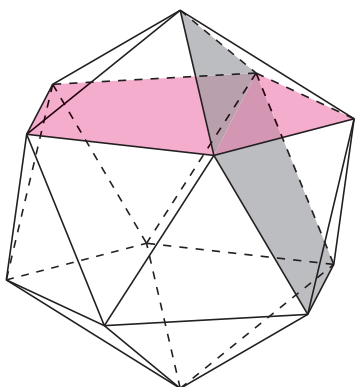


Rys. 3. Dwunastościan wielki i idea konstrukcji.

Jeśli w dwudziestościanie foremnym poprowadzimy płaszczyzny tak, że będą zawierały podstawy ostrosłupów pięciokątnych, to utworzą one właśnie dwunastościan wielki.

Czy można wskazać jeszcze jakieś inne niewypukłe wielościany foremne? Kepler i Poinot skonstruowali jeszcze po jednym, a Poinot zastanawiał się, czy to już wszystkie możliwości. No właśnie, jak sprawdzić, czy przypadkiem czegoś nie przeoczono? O ile dla wielościanów wypukłych łatwo przekonujemy się, że więcej możliwości być nie może (wystarczy sprawdzić, ile wielokątów foremnych i jakie mogą się schodzić w jednym wierzchołku), o tyle, gdy rezygnujemy z wypukłości, sprawa staje się dużo trudniejsza.

Z pomocą przychodzą wiadomości dotyczące izomerii własnych figur (symetrii figur) i ich grup. Przypomnijmy, że izometrią własną albo symetrią figury nazywamy taką izometrią, która przekształca figurę na siebie. Może to być

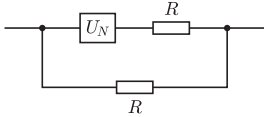


Rys. 4



### Rozwiązanie zadania F 665.

Zauważmy, że układ  $N + 1$  powstaje z  $N$  przez dołączenie oporników jak na rysunku.



Wobec tego

$$R_{N+1} = \left( \frac{1}{R + R_N} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{(R_N + R)R}{R_N + 2R}.$$

Granica tak określonego ciągu jest dodatnia i musi spełniać równanie

$$R_\infty = \frac{(R_\infty + R)R}{R_\infty + 2R}.$$

Dodatnim pierwiastkiem tego równania jest

$$R_\infty = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R.$$

obrót, symetria osiowa, symetria płaszczyznowa (odbicie), a także przekształcenie identycznościowe. Nietrudno się przekonać, że symetrie figury tworzą grupę: złożenie dwóch symetrii jest symetrią i odwrotna do symetrii figury też jest jej symetrią. Na przykład: czworościan foremny ma 24 symetrie – każdej jednoznacznie odpowiada jakaś permutacja wierzchołków.

Dla nas będzie interesujące pewne ważne twierdzenie dotyczące, między innymi, obrotów własnych wielościanów foremnych. Zanim je sformułujemy, przypomnijmy, że każdy obrót na płaszczyźnie wykonujemy wokół pewnego punktu – środka obrotu, a obrót w przestrzeni dokoła pewnej prostej – osi. Jeśli obrót o kąt  $360^\circ/n$  jest obrotem własnym figury, to mówimy, że figura ma  $n$ -krotny środek obrotu lub  $n$ -krotną oś obrotu w zależności od typu obrotu. Na przykład: pięciokąt foremny ma pięciokrotny środek obrotu, a czworościan foremny ma trzykrotne osie obrotu, ale ma też dwukrotne osie obrotu (czyli osie symetrii) przechodzące przez środki krawędzi skośnych.

Sygnalizowane twierdzenie mówi, że jeśli grupa obrotów w przestrzeni jest skończona i zawiera co najmniej dwa obroty różne od obrotów o  $180^\circ$  i o różnych osiach, to jest identyczna (izomorficzna) z jedną z trzech następujących grup: grupą obrotów czworościanu foremnego, grupą obrotów sześciianu (i tym samym ośmiościanu foremnego) oraz grupą obrotów dwunastościanu foremnego (identyczną z grupą obrotów dwudziestościanu foremnego). Niestety, nie ma tu miejsca na dowód tego ważnego faktu. Czytelnik zainteresowany dowodem może go znaleźć, na przykład, w klasycznej książce Hermana Weyla „Symetria”.

Zobaczmy, jak to twierdzenie pozwala wyznaczyć niewypukłe wielościany foremne. Każdy z wielościanów foremnych o symbolu  $\{p, q\}$  musi mieć jedną z trzech wymienionych w twierdzeniu grup obrotów własnych. Wygodnie jest rzutować powierzchnię wielościanu na powierzchni sfery stycznej do wszystkich ścian wielościanu (sfery wpisanej) – rzut wykonujemy ze środka sfery. Dzięki temu wystarczy studiować odpowiednie mozaiki na sferze i ich obroty. Zauważmy jeszcze, że w grupie symetrii podziału sfery odpowiadającemu wielościanowi  $\{p, q\}$  mamy obroty o  $n_p$ -krotnych środkach pokrywających się ze środkami ścian oraz  $n_q$ -krotne obroty o środkach w wierzchołkach. Liczby  $n_p$  i  $n_q$  są ewentualnie licznikami liczb  $p$  i  $q$ , gdy są one ułamkami.

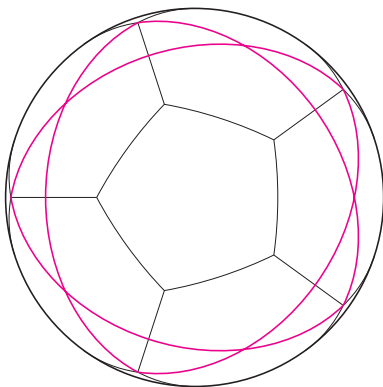
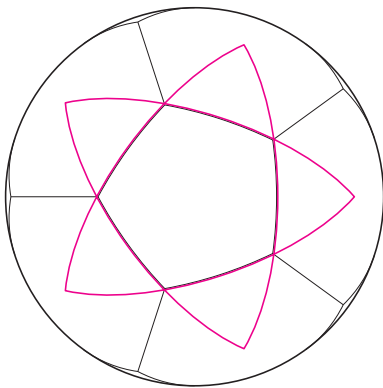
Z cytowanego twierdzenia natychmiast wynika, że jeśli szukamy wielościanu foremnego różnego od znanych brył platońskich o symbolu  $\{p, q\}$ , to jego grupa symetrii musi być grupą obrotów dwunastościanu foremnego, która jako jedyna ma pięciokrotne osie obrotu, co gwarantuje pięciokrotne środki obrotu dla odpowiadającego podziału sfery. Zatem wielościany foremne niewypukłe mogą mieć tylko symbole  $\{\frac{5}{2}, k\}$  względnie  $\{k, \frac{5}{2}\}$ , gdzie  $k$  może przyjąć wyłącznie jedną z trzech wartości: 3, 5 albo  $\frac{5}{2}$ .

Ostatnią wartość da się wyeliminować. Przyjrzyjmy się temu bliżej. Porównamy podział sfery dla hipotetycznego wielościanu  $\{\frac{5}{2}, k\}$  z podziałem dla dwunastościanu foremnego.

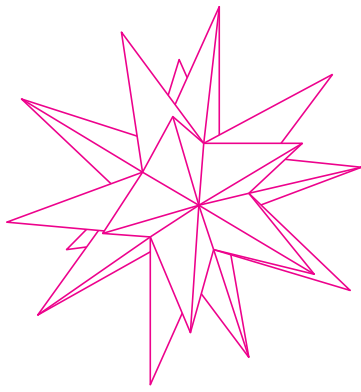
Niech na sferze będzie dany podział typu  $\{5, 3\}$ . Wybierzmy jedną ze ścian wraz ze sferycznym pięciokątem gwiaździstym  $\{\frac{5}{2}\}$  umieszczonym tak, żeby grupa obrotów dwunastościanu była dla niego grupą symetrii. Ten pięciokąt może być umieszczony tylko na dwa sposoby, żeby nie burzyć symetrii i żeby można było dołożyć kolejne pięciokąty gwiaździste związane z potencjalnym wielościanem  $\{\frac{5}{2}, k\}$ :

- wierzchołki pięciokąta gwiaździstego są środkami ścian przyległych do wyróżnionej;
- wierzchołki pięciokąta gwiaździstego są wierzchołkami ścian również przyległych do tej wybranej

Znów powołując się na zachowanie symetrii, zauważamy, że w pierwszym przypadku możemy otrzymać podział typu  $\{\frac{5}{2}, 5\}$ , bo w środku zejdzie się pięć pentagramów. Natomiast w drugim przypadku w wierzchołku zejdą się tylko



Rys. 5.



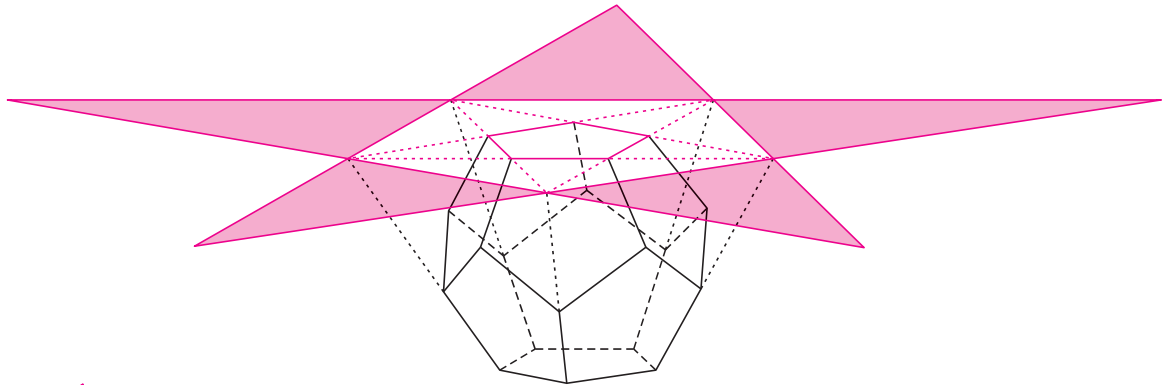
Rys. 6a

trzy pentagramy, czyli podział odpowiada  $\{\frac{5}{2}, 3\}$ . Dzięki dwoistości możliwe są jeszcze tylko podziały:  $\{5, \frac{5}{2}\}$ ,  $\{3, \frac{5}{2}\}$ .

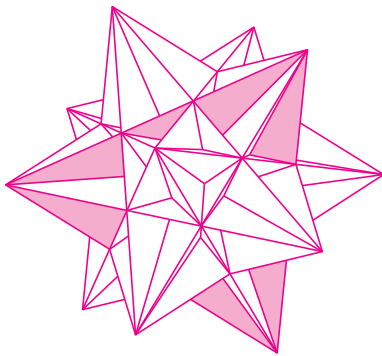
Ostatecznie więc, możliwe są co najwyżej cztery niewypukłe wielościany foremne, czyli Kepler i Poinset znaleźli wszystkie dopuszczalne obiekty.

Pierwszym, który udowodnił, że wielościanów foremnych niewypukłych jest cztery, był Augustyn Cauchy. Posłużył się on również własnościami rzutu powierzchni wielościanu na sferę i wykorzystał pewne pomysły Poinseta. Nie znał on naturalnie twierdzenia o klasyfikacji grup obrotów w przestrzeni.

Na koniec opiszemy krótko, jak można skonstruować dwunastościan gwiaździsty wielki i dwudziestościan wielki. Pierwszy z nich otrzymamy z dwunastościanu wielkiego przez przedłużanie krawędzi – boków pięciokątów. Jak już wiemy, przedłużając boki pięciokąta foremnego, otrzymamy pentagram. W omawianym przypadku trzy pentagramy zejdą się w jednym wierzchołku, tworząc dwunastościan gwiaździsty wielki.

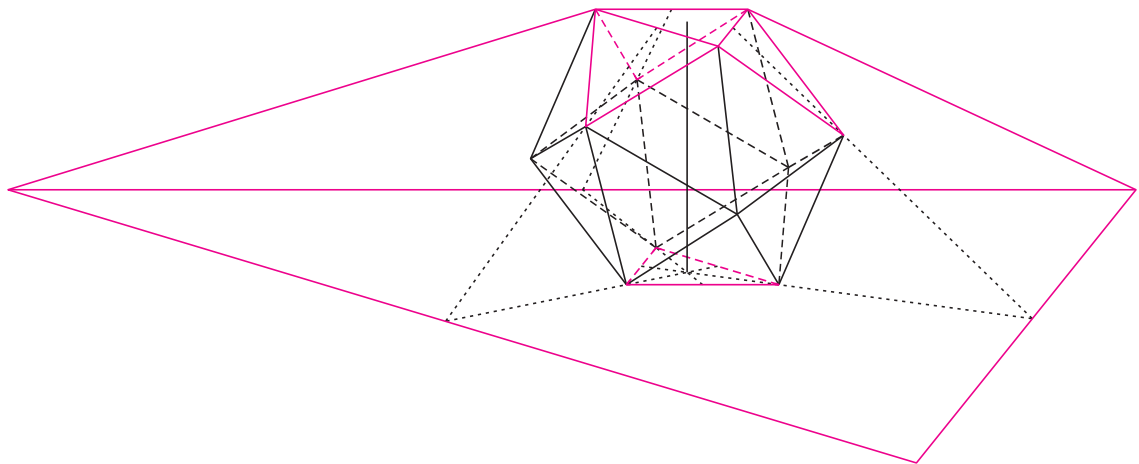


Rys. 6b



Rys. 7a

Konstrukcja dwudziestościanu wielkiego jest bardziej skomplikowana. Umieścimy dwudziestościan foremny na płaszczyźnie tak, żeby jedna z jego ścian leżała na tej płaszczyźnie. Przyjrzyjmy się teraz ścianie przeciwległej. Przez przyległe do niej trójkąty poprowadzmy płaszczyzny. Wyznaczą one na pierwszej płaszczyźnie trójkąt równoboczny – jest to ściana dwudziestościanu wielkiego. Powtarzając procedurę dla każdej ze ścian dwudziestościanu foremnego, otrzymamy dwudziestościan wielki – foremny wielościan niewypukły zbudowany również z dwudziestu trójkątów równobocznych. Jego symbol Schläfliego to właśnie  $\{3, \frac{5}{2}\}$ .



Rys. 7b

Czytelnicy pragnący wykonać modele omawianych wielościanów znajdą ich opis w książce Cundy, Rollet *Modele matematyczne*.

Podobnie możemy zapytać o niewypukłe wielościany archimedesowe. Tu sprawa jest jeszcze bardziej skomplikowana i ostateczny wynik uzyskano dopiero w latach siedemdziesiątych XX wieku.





# mała delta

## Jak spada jabłko?

Jak to jak, można odpowiedzieć. Normalnie, ruchem jednostajnie przyspieszonym. Ale skąd to wiadomo? Jeżeli z podręcznika, to czy było tam opisane doświadczenie, które potwierdza tę opinię? Może da się to sprawdzić?

Możliwość zmierzenia czegokolwiek wymaga spełnienia dwóch warunków. Potrzebny jest pomysł i – nazwijmy to jakoś – możliwości techniczne. Żeby wykonać prosty pomiar długości, czasu, temperatury itp., wystarczy odpowiednio wyskalowany przyrząd, bo pomysł jest oczywisty.

Co należy zrobić, żeby sprawdzić, czy jabłko rzeczywiście spada ruchem jednostajnie przyspieszonym?

Należy odwołać się do definicji przyspieszenia. Wielkość ta jest po prostu miarą tempa zmiany prędkości. Jeżeli ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, to w każdym kolejnym przedziale czasu jego prędkość zmienia się o tyle samo. Inaczej mówiąc, wykres zależności prędkości od czasu powinien być linią prostą. Współczynnik kierunkowy tej prostej, czyli stosunek przyrostu prędkości do czasu, w którym ten przyrost następuje, jest, oczywiście, miarą przyspieszenia

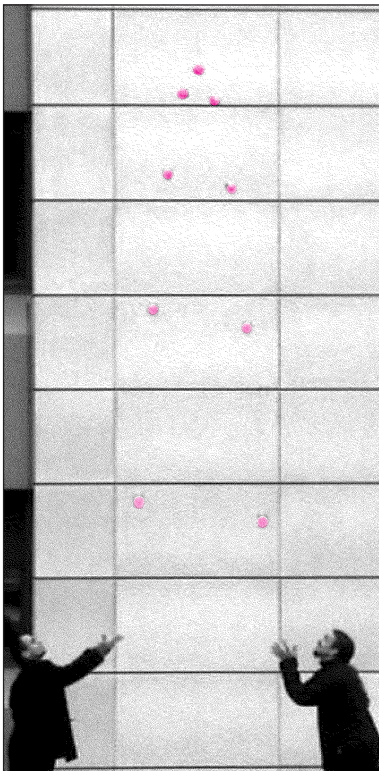
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Sprawa nie wydaje się trudna. Należy po prostu wykonać taki wykres. Przy okazji wyznaczymy wówczas przyspieszenie ziemskie  $g$ . Jest jednak pewien problem. Żeby wyznaczyć prędkość spadającego jabłka, należy zmierzyć, jak wysoko znajduje się ono w kolejnych chwilach. A to jest bardzo trudne bez odpowiedniego wyposażenia technicznego.

Dlatego, jeżeli już wykonuje się doświadczenia, które sprawdzają, czy ciała rzeczywiście spadają ruchem jednostajnie przyspieszonym, to zazwyczaj nie są to pomiary bezpośrednie. Używa się równi pochyłych albo wahadła.

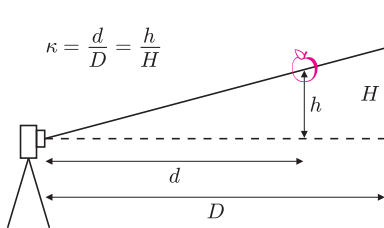
Tymczasem konieczne wyposażenie techniczne jest coraz bardziej dostępne. Potrzebna jest kamera cyfrowa, statyw i... pomysł, jak te możliwości techniczne wykorzystać. Kręcąc film ze spadającym jabłkiem w roli głównej, rejestrujemy jego pozycję co  $1/25$  sekundy (wartość typowa dla kamer cyfrowych na polskim rynku). Należy film przegrać do komputera, rozbić na pojedyncze klatki i, wykorzystując dowolny program do obróbki zdjęć, zmierzyć tę pozycję na każdej klatce. Jeżeli zdjęcia będą miały w tle coś, co pozwoli na wyznaczenie odległości w pionie, to analizując je, będziemy mogli nie tylko sprawdzić, czy jabłko spada ruchem jednostajnie przyspieszonym, ale również to przyspieszenie wyznaczyć. Montaż takiej sekwencji ujęć przedstawiony jest na zdjęciu (pokazana jest co piąta klatka, czyli pozycja jabłka co dwie dziesiąte sekundy).

Zdjęcie przedstawia rzut ukośny, ale to przecież też jest spadek swobodny w pewnym układzie inercyjnym (jakim?). Jabłko powinno poruszać się



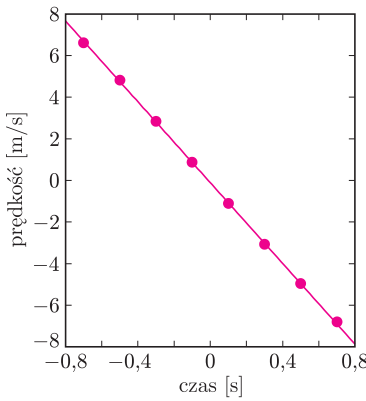
ruchem jednostajnym w kierunku poziomym i ruchem z jednostajnym przyspieszeniem w kierunku pionowym. Rzut został wykonany na tle ściany wyłożonej regularnymi płytami, co pozwala określić skalę. Doświadczalnie zostało sprawdzone, że rzut ukośny ma kilka przewag nad spadkiem swobodnym. Po pierwsze, nie trzeba umieszczać pomocników na dwóch poziomach (przy okazji zaświadczam, że jabłko nie stała się żadna krzywda, zostało ono później komisyjnie zjedzone przez ekipę filmową). Po drugie, możliwy do sfilmowania lot jest dwa razy dłuższy (dlaczego to jest istotne?).

Choć ściana jest regularna i takie sprawia wrażenie na zdjęciu, to w rzeczywistości płyty w środku zdjęcia są na nim minimalnie wyższe niż u dołu i góry. Obiektyw aparatu tylko do pewnego stopnia spełnia wzór soczewkowy. Każdy obiektyw powoduje mniejsze lub większe zniekształcenie, takie jak widoczne przy zdjęciach obiektywami typu rybie oko. Jest ono tym mniejsze, im większy jest stosunek ogniskowej do rozmiaru powstającego w aparacie obrazu. Dlatego zdjęcia należy robić z jak największej odległości, wykorzystując zoom optyczny. Oprócz tego dobrze jest zadbać o dobre oświetlenie (tu oświetlenie mogłoby być lepsze – zbyt długie otwarcie migawki powoduje rozmycie jabłka na dole zdjęcia). W pierwszym podejściu pominiemy jednak te problemy. Okazuje się, że dokładność pomiarów jest zbyt mała, żeby się tymi problemami przejmować.



Rys. 1. Wyznaczenie współczynnika  $\kappa$ .

Pozostaje jednak jeden efekt, który musimy skorygować. Chodzi o błąd paralaksy spowodowany tym, że płaszczyzna rzutu jest w pewnej odległości od ściany, którą wykorzystujemy jako miarę. Problem ten możemy rozwiązać za pomocą twierdzenia Talesa. Odległość w pikselach od linii poziomej dzielącej (niewykadrowane) zdjęcie na pół (na tej wysokości znajdowała się ustawiono poziomo kamera) należy pomnożyć przez stosunek  $\kappa$  odległości: kamera – płaszczyzna ruchu jabłka i kamera – ściana (Rys. 1). W tym konkretnym przypadku odległość została zmierzona krokami i stosunek  $\kappa$  wyniósł 57/61.



Rys. 2. Wykres zależności średniej pionowej składowej prędkości jabłka od czasu dla przedziałów między kolejnymi pozycjami jabłka ze zdjęcia na poprzedniej stronie. Jako dodatni został przyjęty zwrot w górę.

Na rysunku 2. przedstawiona jest zależność pionowej składowej prędkości jabłka od czasu. Ponieważ do wyznaczenia prędkości (średniej) potrzebna jest różnica położenia, to punktów na wykresie jest o jeden mniej niż jabłek na zdjęciu. Punkty układają się na dopasowanej do nich prostej, więc nie mamy podstaw, żeby twierdzić, że nie jest to ruch z jednostajnym przyspieszeniem.

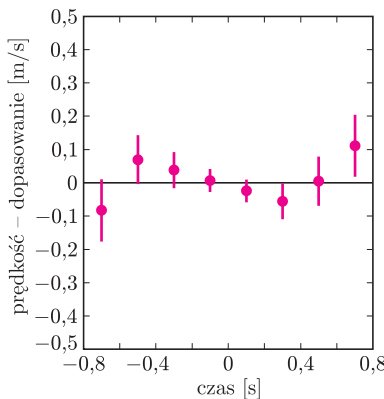
Niepewności pomiaru są zbyt małe (przyjęto niepewność od jednego piksela dla położenia centralnego do trzech pikseli dla położenia skrajnych), żeby były widoczne. Dlatego poniżej przedstawiony jest wykres różnic między zmierzonym położeniem a dopasowaniem, za pomocą którego można wizualnie ocenić stopień zgodności punktów z prostą (Rys. 3).

Parametrem dopasowania jest przyspieszenie (współczynnik kierunkowy dopasowywanej prostej):

$$g = (-9,7 \pm 0,1)\text{m/s}^2.$$

Dodatkowo pomiar jest obciążony błędem względnym rzędu 1% w związku z niepewnością wyznaczenia stosunku odległości  $\kappa$ .

Wygląda na to, że Newton znalazł się na jabłkach.



Rys. 3. Wykres różnic między wartością prędkości a przedstawioną na górnym panelu dopasowaną prostą.

*Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI  
Autor dziękuje za pomoc w przeprowadzeniu sesji  
zdjęciowej Piotrowi TRACZYKOWI i Pawłowi ZYCHOWI.*

# Bombardowanie komety

Na początku lipca 2005 r. przeprowadzony został niezwykle eksperyment kosmiczny: wystrzelony z Ziemi pół roku wcześniej obiekt uderzył w jądro komety, aby – poprzez wybite na jego powierzchni krateru uderzeniowego – można było zbadać właściwości uwolnionej i odsłoniętej w ten sposób materii. Ciała niebieskie zwane kometami – choć urodziwe, ale ciągle tajemnicze – są dziś przedmiotem szczególnego zainteresowania, dlatego że ich badania bardzo dużo mogą powiedzieć o powstaniu Układu Słonecznego. Wiemy bowiem, że są pozostałościami tworzywa i procesów sprzed ponad 4,5 miliarda lat, które dały początek Słońcu i krążącym wokół niego planetom. Co więcej, podejrzewa się, że to one mogły dostarczyć formującej się Ziemi nie tylko wodę, ale i materię organiczną, która była niezbędna do rozwoju życia. Nic więc dziwnego, że obecnie usiłuje się coraz głębiej wnikać w tajniki komet, gdyż zawierają one zapewne wiele informacji o naszej przeszłości i pochodzeniu. Jeszcze do niedawna cała wiedza o kometach pochodziła z obserwacji, prowadzonych z powierzchni Ziemi za pomocą różnych instrumentów astronomicznych. Od dwóch dziesięcioleci jest natomiast wzbogacana metodami sondowania, pozwalającymi na bezpośredni kontakt przyrządu badawczego z przedmiotem badań. Zaczęło się w połowie lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku, kiedy to na spotkanie z powracającą wtedy w pobliże Słońca słynną kometą Halleya wysłano kilka sond kosmicznych. W marcu 1986 r. przeleciały one przez tzw. głowę komety, czyli obłok gazowo-pyłowy będący najbardziej okazałą częścią obiektu. Pierwsze zbliżyły się do znajdującego się wewnątrz głowy jądra komety dwie identyczne sondy radzieckie WEGA, mijając go w odległości około 8500 km ze względną prędkością prawie 80 km/s (w skład aparatury naukowej sond WEGA wchodził skonstruowany w Polsce analizator fal plazmowych niskich częstotliwości). Kilka dni później sonda Europejskiej Agencji Kosmicznej Giotto zanurzyła się w głowę komety aż do odległości 600 km od jądra. Znacznie dalej od komety przeleciały dwie sondy japońskie: Suisei minęła jądro w odległości około 150 tys. km, a Sakigake aż 7 mln km. Kometę Halleya śledziła też z odległości ponad 30 mln km amerykańska sonda ICE (ang. *International Cometary Explorer*), która kilka miesięcy wcześniej przeleciała przez warkocz komety Giacobiniego-Zinnera w odległości około 7800 km od jądra. ICE to wystrzelony w 1978 roku sztuczny satelita Ziemi ISEE-3 (ang. *International Sun-Earth Explorer*), przeznaczony początkowo do badań okołoziemskich pasów radiacyjnych i wiatru słonecznego, który po serii manewrów – wykorzystujących m.in. oddziaływanie grawitacyjne Księżyca – w 1984 r. stał się międzyplanetarną sondą kometarną.

Trzecim spotkaniem sondy kosmicznej z kometą był przelot uruchomionego po kilkuletnim uśpieniu aparatu Giotto w lipcu 1992 r. w odległości około 200 km od jądra komety Grigga-Skjellerupa. Sonda minęła tę kometę ze względną prędkością 14 km/s, czyli znacznie

Krzysztof ZIOŁKOWSKI\*

mniej niż w przypadku komety Halleya. Nie udało się jednak uruchomić uszkodzonej podczas przelotu koło komety Halleya kamery fotograficznej i wobec tego uzyskane tym razem wyniki były znacznie skromniejsze. Kolejna kometa zbadana przez sondę kosmiczną była nadprogramowym celem misji Deep Space 1, inaugurującej amerykański program o nazwie Nowe Tysiąclecie (ang. *New Millennium Program*), służący testowaniu nowych technologii dla eksploracji przestrzeni kosmicznej w XXI wieku. Wystrzelona w 1998 r. sonda Deep Space 1 była pierwszym obiektem międzyplanetarnym wyposażonym w silnik jonowy zasilany energią słoneczną. Realizację swych głównych zadań przeprowadziła podczas lotu do jednej z planetoid bliskich Ziemi (9969 Braille) i zbliżenia do niej w lipcu 1999 roku na odległość zaledwie 26 km. Pomyślne zakończenie misji zachęciło jej twórców do przedłużenia pracy sondy i, mimo awarii urządzenia służącego do kontroli orientacji obiektu w przestrzeni, sondę Deep Space 1 udało się skierować ku komecie Borrellego. Minęła ją we wrześniu 2001 roku w odległości 2171 km od jądra, przekazując na Ziemię m.in. piękne jego zdjęcia.

Do najciekawszych i najbardziej obiecujących misji kometarnych należy lot amerykańskiej sondy Stardust, który rozpoczął się w 1999 r. Głównym jej celem było przechwycenie i dostarczenie na Ziemię materii z głowy komety Wilda 2 (a także cząstek pyłu międzygwiazdowego penetrującego Układ Słoneczny). W styczniu 2004 roku sonda osiągnęła kometę i przeleciała w odległości 236 km od jej jądra z prędkością względem niego 6 km/s. Oprócz pobrania próbek materii kometarnej zostały wykonane różne badania jądra (łącznie z doskonałymi jego zdjęciami) oraz otoczki gazowo-pyłowej komety. W styczniu 2006 r. zasobnik z gazem i pyłem kometarnym ma zostać sprowadzony na Ziemię.

Kometa Wilda 2 przed odkryciem w 1978 r. obiegała Słońce w okresie 47 lat po orbicie, której punkt najbliższy Słońca znajdował się w odległości od niego porównywalnej z odległością Jowisza. Tak oddalonej od Ziemi komety nie dało się zobaczyć. Ale w 1974 r. zbliżyła się do Jowisza na odległość zaledwie 900 tys. km, w wyniku czego oddziaływanie grawitacyjne największej planety zmieniło jej ruch. Zaczęła krążyć wokół Słońca w okresie około 6 lat, a jej najmniejsza odległość od Słońca stała się tylko trochę większa od odległości Ziemi od Słońca. Umożliwiło to jej odkrycie i stałe śledzenie. Zbadanie takiej komety jest więc szczególnie interesujące, gdyż składa się ona z materii, na którą promieniowanie słoneczne miało dotychczas znacznie mniejszy wpływ niż w przypadku komet, które bliżej i częściej przelatują koło Słońca. Można więc domniemywać, że kometa Wilda 2 kryje w sobie więcej informacji o początkach Układu Słonecznego niż inne komety krótkookresowe.

Zanim jednak w ziemskich laboratoriach zostanie zbadana materia kometarna, przechwycona przez sondę Stardust, poznamy już, być może, wstępne wyniki

\* Centrum Badań Kosmicznych PAN



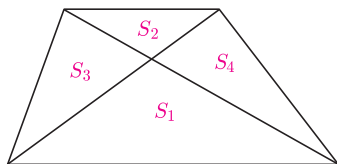
amerykańskiej misji Deep Impact, której celem była krótkookresowa kometa 9P/Tempel 1. Odkrył ją w 1867 r. niemiecki astronom Ernst W.L. Tempel pracujący w Obserwatorium Astronomicznym w Marsylii. Nie była widoczna gołym okiem, ale kilkumiesięczne śledzenie przez lunety jej ruchu po niebie umożliwiło obliczenie toru jej rzeczywistego ruchu wokół Słońca. Dzięki temu kometa Tempel 1 udało się obserwować podczas następnego pojawienia się w latach 1873 i 1879. Ale w 1881 r. zbliżyła się do Jowisza, co – wskutek silnego oddziaływania grawitacyjnego masywnej planety – spowodowało tak dużą zmianę toru, że kolejne próby jej zaobserwowania nie powiodły się i kometa uznano za zagubioną. Podejrzewano nawet, że mogła w ogóle przestać już istnieć w rezultacie np. jakiegoś rozpadu na mniejsze fragmenty, podobnie jak rozpadła się obserwowana wcześniej kometa Bieli. Dopiero w 1967 r., dzięki obliczeniom amerykańskiego badacza ruchów komet Briana G. Marsdena, kometa odnaleziono i od tej pory jest już stale śledzona podczas każdego powrotu w pobliże Słońca. Obecnie obiega Słońce co 5,5 roku po eliptycznej orbicie o mimośrodku 0,5, położonej w płaszczyźnie nachylonej do płaszczyzny ruchu Ziemi pod kątem 10,5°. Przez najbliższy Słońca punkt swej orbity przeszła na początku lipca 2005 r. i wtedy właśnie dosięgnął ją wystrzelony z Ziemi pocisk. Sondę Deep Impact wyniosła na trajektorię okołosłoneczną, prowadzącą ku komecie Tempel 1, rakieta Delta 2, której start nastąpił 12 stycznia 2005 r. z przylądka Canaveral na Florydzie. W dniu 4 lipca 2005 r. odłączony od sondy dzień wcześniej pocisk o masie 372 kg zderzył się z jądrem komety z prędkością 10,2 km/s. Pocisk został naprowadzony na kilkukilometrową bryłę jądra za pomocą własnego automatycznego systemu nawigacyjnego. Dzięki zainstalowanej na nim kamerze z 12 cm teleskopem uzyskano zdjęcia powierzchni jądra tuż przed uderzeniem, charakteryzujące się zdolnością rozdzielczą aż do ok. 20 cm; ostatnie zostało wykonane i przekazane na Ziemię na 3 sek. przed uderzeniem, czyli z odległości ok. 30 km. Przebieg zderzenia był śledzony z pokładu sondy za pomocą 30 cm teleskopu z kamerą wielospektralną i spektrometrem podczerwieni, a także 12 cm teleskopu przeznaczonego przede wszystkim do celów nawigacyjnych. W momencie uderzenia sonda znajdowała się w odległości ok. 8600 km od jądra i zbliżała się do niego, wykonując kilka zdjęć na sekundę. Gdy przelatowała w minimalnej odległości ok. 500 km od jądra, instrumenty sondy zostały na kilka minut skryte za specjalną osłoną chroniącą je przed ewentualnym uderzeniem cząstek pyłu kometarnego, ale później dalej śledziły skutki uderzenia. W sumie na Ziemię dotarło ok. 4500 zdjęć, które wspólnie z wynikami obserwacji komety wykonanych za pomocą teleskopów kosmicznych oraz przyrządów z powierzchni Ziemi są bogatym materiałem do badań komety. Jednym z najciekawszych i raczej niespodziewanym efektem uderzenia było utworzenie się ogromnego pióropusza pyłowego, złożonego z drobin tak małych i tworzących tak gęsty obłok, że uniemożliwił sfotografowanie powstającego krateru z przelatującej w pobliżu sondy. Z obserwacji naziemnych wynika, że

rozprzestrzeniał się mniej więcej dwukrotnie szybciej niż naturalne emisje materii z jądra i doprowadził do pięciokrotnego wzrostu jasności komety, którego maksimum nastąpiło ok. 30 min. po uderzeniu. Był to jednak efekt krótkotrwały: po kilku dniach wygląd komety powrócił do stanu sprzed uderzenia. Zaobserwowano także wzrost emisji produktów rozpadu cząsteczek wody, ale nie tak duży, jak można było oczekiwać. Już te pierwsze wyniki, wskazujące, że pokryte wielką ilością pyłu jądro zawiera prawdopodobnie mniej lodu wodnego, zmuszają do skorygowania dotychczasowych modeli i wyobrażeń na temat budowy komet.

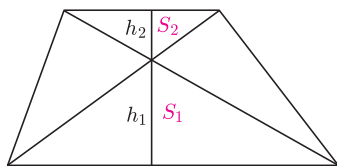
Zadaniem misji Deep Impact była symulacja typowego, chociaż słabo rozpoznanego zjawiska w Układzie Słonecznym. Na wszystkich twardych powierzchniach obserwuje się jedynie jego skutki w postaci licznych kraterów uderzeniowych. Nasza Ziemia nie jest wyjątkiem: też doświadczyła w swej historii wielu uderzeń i jest na nie narażona w przyszłości. Trudno więc przecenić znaczenie tego eksperymentu dla projektowania ewentualnej obrony przed wprawdzie mało prawdopodobnym, ale jednak realnym niebezpieczeństwem. Szczególnie ważne wydaje się przetestowanie systemu automatycznego naprowadzania pocisku na cel, który – co warto podkreślić – pomyślnie zadziałał w odległości ponad 130 mln km od Ziemi. Przeciwno uderzeniu w kometa podnosiły się głosy protestu. Nie ma co ukrywać, że była to rzeczywiście ingerencja człowieka w naturę, ale trzeba ją widzieć w odpowiednich proporcjach. Sztucznie wywołane zaburzenie środowiska komety było wyraźnie mniejsze niż naturalne przejawy aktywności podczas zbliżania się komety do Słońca. Dowodzą tego choćby dostrzeżone w dniach 14 i 22 czerwca 2005 r. nagle pojaśnienia komety Tempel 1, świadczące o jakichś gwałtownych wyrzutach strumieni gazów i pyłów z pękającej, być może, powierzchni jądra. Takie wybuchy są często i od dawna obserwowane w kometach, ale niewiele o nich wiadomo. Eksperyment Deep Impact z pewnością pomoże je objaśnić.

Podczas kulminacyjnego momentu misji kometa Tempel 1 była obserwowana przez wiele instrumentów astronomicznych z powierzchni Ziemi i znajdujących się w przestrzeni międzyplanetarnej, m.in. przez sondę Rosetta, która w marcu 2004 r. rozpoczęła lot do komety Churyumowa–Gerasimenki. Wprawdzie misja Rosetta Europejskiej Agencji Kosmicznej swój cel osiągnie dopiero w 2014 r., ale wszechstronnością i rozmachem projektowanych badań przewyższa wszystkie dotychczasowe eksperymenty kometarne. Wystarczy dla przykładu wspomnieć, że planowane jest m.in. osadzenie na powierzchni jądra komety urządzenia badawczego. Dodajmy, że w jego skład wchodzi – zbudowany w Centrum Badań Kosmicznych PAN w Warszawie – tzw. penetrator wraz ze specjalnym młotkiem wbijającym go w jądro dla zbadania własności materii podpowierzchniowej. Po próbie zajrzania pod powierzchnię jądra komety przez wybitcie na niej krateru uderzeniowego nadchodzi czas systematycznego badania powierzchni za pomocą instalowanych na niej przyrządów.

## Jeszcze jedna



Rys. 1



Rys. 2

W artykule J. Jaszuńskiej w *Delcie* 10/2005 podane zostały dowody różnych nierówności przeprowadzone przez rozważanie geometrycznych własności trapezu. Chciałem podać pewną, niepodaną tam zależność związaną z trapezem. Zależnością tą, przy oznaczeniach z rysunku 1, jest

$$(*) \quad \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \frac{S_3 + S_4}{2},$$

czyli swoista równość średniej geometrycznej i arytmetycznej.

Jak łatwo zauważyć, nierówność ta, wobec  $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$  (gdzie  $S$  to pole całego trapezu), wynika bezpośrednio z zależności

$$S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Ta z kolei równość ma następujący dowód: ponieważ z podobieństwa dolnego i górnego trójkąta (oznaczenia z rysunku 2) otrzymujemy

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{a}{b},$$

więc

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2) = \frac{ah_1}{2} + \frac{bh_2}{2} + \frac{bh_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \\ &= S_1 + S_2 + \frac{h_2}{2} \left( b\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + a \right) = S_1 + S_2 + \frac{h_2}{2} \left( b\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + b\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \right) = \\ &= S_1 + S_2 + S_2 \cdot 2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}. \end{aligned}$$

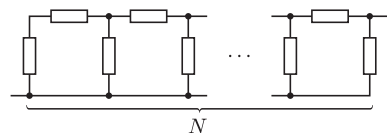
Piękno równości (\*) psuje trochę fakt, że w trapezie jest  $S_3 = S_4$  (a gdy jest to równoległobok czy wręcz prostokąt, równości jest jeszcze więcej). Powstaje pytanie: czy istnieje czworokąt wypukły, inny niż wymienione, w którym spełniona jest równość (\*). Wydaje się, że nie. Ale może Czytelnicy podadzą jakiś przykład?

Andrzej WRZESIEN



## Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



Rys. 1

**F 665.** Dany jest układ jednakowych oporników z rysunku 1. Podać wzór rekurencyjny na opór zastępczy  $R_N$  dla układu o  $N$  oczkach i zbadać granicę  $N \rightarrow \infty$ .

Rozwiązanie na str. 6

**F 666.** Dany jest układ oporników z rysunku 2 o znanych oporach  $R_1, R_2$  i  $R_3$ . Jakie muszą być opory elektryczne  $R'_1, R'_2$  i  $R'_3$  oporników z układu na rysunku 3, aby opór mierzony między dowolnymi dwoma spośród punktów 1, 2 i 3 był taki sam, jak w układzie 1?

Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1129.** Na lekcji jest 30 uczniów, którzy siedzą w 15 ławkach dwuosobowych. Okazało się, że dokładnie połowa wszystkich dziewcząt siedzi w ławce z chłopcami. Rozstrzygnąć, czy można tak przesadzić uczniów, aby dokładnie połowa wszystkich chłopców siedziała w ławce z dziewczętami.

Rozwiązanie na str. 16

**M 1130.** Na czworokącie  $ABCD$  jest opisany okrąg o średnicy  $AB$  (rys. 4). Punkt  $E$  jest symetryczny do punktu  $A$  względem środka odcinka  $CD$ . Dowieść, że proste  $CD$  i  $BE$  są prostopadłe.

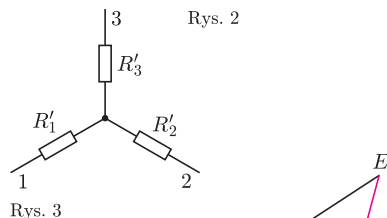
Rozwiązanie na str. 16

**M 1131.** Ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_{400}$  liczb całkowitych dodatnich jest określony wzorem rekurencyjnym

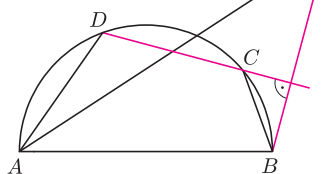
$$a_{n+1} = d(a_n) + d(n) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, 399,$$

gdzie  $d(k)$  oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby  $k$ . Udowodnić, że w ciągu tym występuje co najwyżej 210 liczb pierwszych.

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 3



Rys. 4



## Wyprawa po gwiazdny pył

Nieosiągalne marzenia czasem się realizują. Na przykład ściągnięcie kawałka gwiazdy na Ziemię, choć wydaje się po prostu niemożliwe, to takie nie jest. Gwiazdą jest przecież także nasze Słońce. Pierwsza próba dostarczenia składników wiatru słonecznego skończyła się jednak połowicznym sukcesem. Próbnik sondy Genesis, który miał być przechwycony przez helikopter podczas końcowej fazy opadania, nie otworzył spadochronu i wyrznięt w stan Utah 8 września 2004 roku. Próbką została dostarczona, ale niekoniecznie w stanie, o jaki chodziło. Zespół naukowców eksperymentu Genesis twierdzi, co prawda, że próbki przetrwały twarde lądowanie nienaruszone [1].

Potocznie gwiazdami nazywa się jednak nie tylko obiekty podobne do Słońca. Od wieków wyobraźnię ludzi rozpalają gwiazdy z warkoczami. Jedni ich się bali, drudzy wykorzystywali do głoszenia konieczności naprawy moralnej, a jeszcze inni marzyli o kawałku ogona na własność. Ci ostatni stali się bardziej zdeterminowani, gdy zrozumiano, że komety są pozostałością po okresie formowania się Układu Słonecznego.

O badaniach komet za pomocą sond kosmicznych pisze w tym numerze Krzysztof Ziolkowski (str. 10–11). Wspomina o projekcie Stardust [2], który miał dostarczyć na Ziemię pył komety Wilda 2 w styczniu tego roku. Operacja udała się. Sonda zrzuciła na Ziemię próbnik i poleciała dalej [3]. Na pierwszej okładce widać wyhamowane w aerożelu drobinę kometarnego kurzu.

Aerożel to substancja wynaleziona przez Samuela S. Kistlera. To najmniej gęste ciało stałe podobno powstało w wyniku zakładu z kolegą. Po raz pierwszy zostało opisane w *Nature* w 1931 roku (numer 127 str. 741). Jest to żel, w którym ciecz jest zastąpiona przez gaz. W wyniku otrzymuje się fraktalną substancję składającą się głównie z submikronowej wielkości porów. Jej gęstość może być zaledwie trzy razy większa niż gęstość powietrza. Jednocześnie aerożel ma mechaniczną wytrzymałość ciała stałego i jest niezwykle dobrym izolatorem termicznym i akustycznym.

Materiał użyty w eksperymencie Stardust (podobnie jak pierwszy aerożel) jest oparty na związkach krzemu. Można powiedzieć, że jest rodzajem niezwykle porowatego szkła. Użycie go do łapania kosmicznego pyłu było podyktowane pragnieniem przechwycenia drobin jak najmniej zmienionej postaci. Z kawałków

aerożelu zbudowano strukturę podobną do rakiety tenisowej. W odpowiednim momencie sonda wystawiła tę „łapkę na muchy”, żeby cząstki pyłu mogły w nią się wbić. Prędkość względna sondy i komety przy ich spotkaniu wynosiła kilka kilometrów na sekundę. Cząstki pyłu są mniejsze od ziaren piasku. Użycie aerożelu miało zapobiec zmianie ich struktury czy wręcz całkowitemu wyparowaniu.

Przechwycenie kometarnego pyłu to nie jedyna strona misji sondy Stardust. Jest jeszcze, dosłownie, druga jej strona. Sonda podróżowała siedem lat po Układzie Słonecznym z wystawioną „łapką na muchy”. Pułapka ta ma dwie strony. Jedna była eksponowana w czasie spotkania z kometą, a druga w pozostałym czasie. Szacuje się, że w tej drugiej utknęło kilkadziesiąt cząstek galaktycznego pyłu, przez który przelatuje Układ Słoneczny. Znalezienie tych kilkadziesiątu mikronowej wielkości śladów jest tytaniczną pracą. Tym bardziej że nie bardzo można polegać na automatycznych przeglądach.

Dlatego uruchamiany jest program STARDUST @ HOME [4]. Za pomocą automatycznego mikroskopu optycznego zostanie stworzony cyfrowy film zawierający 16 milionów zdjęć pokrywających tysiąc centymetrów kwadratowych aerożelu. Zdjęcia te będą przesyłane uczestnikom programu, których zadaniem będzie wyszukanie tych zdjęć, które mogą odpowiadać drobinom galaktycznego pyłu.

Do programu może zapisać się każdy, kto ma dostęp do internetu. Znalezienie interesującego przypadku będzie wymagało nie tylko pracowitości, ale również szczęścia. Jednak każdy uczestnik będzie wymieniony jako współautor publikacji naukowych, które powstaną w ramach programu.

Niezwykle interesujące będzie zbadanie składu tego gwiazdznego pyłu. Przecież właśnie z tego „prochu” powstaliśmy.

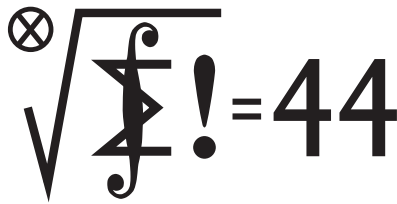
Piotr ZALEWSKI

[1] Strona misji kosmicznej Genesis  
[http://www.nasa.gov/mission\\_pages/genesis/main/](http://www.nasa.gov/mission_pages/genesis/main/)

[2] Strona misji kosmicznej Stardust  
<http://stardust.jpl.nasa.gov/home/>

[3] Aktualizowaną co 10 minut pozycję sondy Stardust można śledzić poprzez stronę <http://stardust.jpl.nasa.gov/mission/scnow.html>

[4] Strona projektu STARDUST @ HOME  
<http://stardustathome.ssl.berkeley.edu/>



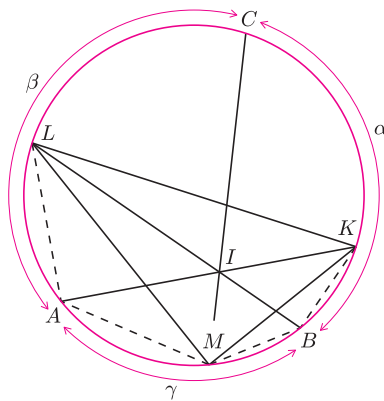
Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2006

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
**404** ( $WT = 1,83$ ) i **405** ( $WT = 1,98$ )  
z numeru 10/2005

Jerzy Witkowski – Radlin	47,60
Mateusz Łacki – Kraków	36,53
Konrad Kapcia – Częstochowa	27,70
Andrzej Idzik – Bolesławiec	20,84
Tomasz Tkocz – Rybnik	18,90

Witamy nowego członka Klubu 44F –  
p. Jerzego Witkowskiego.



**511.** Niech  $\omega$  będzie okręgiem przechodzącym przez parami różne punkty  $K, L, M$  oraz środki  $A, B, C$  okręgów (odpowiednio)  $k_1, k_2, k_3$ . Punkty  $A, B, C$  dzielą okrąg  $\omega$  na łuki  $BC, CA, AB$ , które oznaczmy odpowiednio przez  $\alpha, \beta, \gamma$ . Przyjmijmy, że  $\gamma$  jest najkrótszym z tych łuków; zatem  $|\sphericalangle ACB| \leq 60^\circ$ .

Skoro  $A$  leży na zewnątrz okręgu  $k_2$ , a  $B$  na zewnątrz okręgu  $k_1$ , to  $|AB| > |AM|$ ,  $|AB| > |BM|$ , więc  $|\sphericalangle AMB| > 60^\circ$ . Zatem punkty  $M, C$  leżą na różnych łukach  $AB$  okręgu  $\omega$ , czyli  $M \in \gamma$ .

Różne punkty  $L, M \in k_1$  są jednakowo odległe od  $A$ , a łuk  $\gamma$  jest nie dłuższy od  $\beta$ , wobec czego  $L \in \beta$ . Analogicznie,  $K \in \alpha$ . Tak więc punkty  $A, M, B, K, C, L$  leżą na okręgu  $\omega$  w takim właśnie porządku; przy tym  $A, B, C$  są środkami łuków  $LM, MK, KL$ . Zatem proste  $KA, LB, MC$  zawierają dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta  $KLM$  i przechodzą przez wspólny punkt  $I$ .

Wiadomo, że  $|AI| = |AM|$  oraz  $|BI| = |BM|$  (znana własność punktu przecięcia dwusiecznych). Wobec tego punkt  $I$  leży na okręgu  $k_1$  oraz na okręgu  $k_2$ . Jest on różny od punktu  $M$ , więc pokrywa się z punktem  $Z$ , i analogicznie, pokrywa się z  $X$  oraz  $Y$ . Stąd teza:  $X = Y = Z = I$ .

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z matematyki nr 519, 520

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**519.** Czy istnieje nieskończony ciąg liczb dodatnich  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , dla którego

szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$  oraz  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n^2}$  są oba zbieżne?

**520.** Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , o różnych promieniach i środkach (odpowiednio)  $O_1$  i  $O_2$ , przecinające się w punktach  $A$  i  $B$  tak, że kąt  $O_1AO_2$  jest prosty. Na odcinku  $AB$  obieramy dowolny punkt  $X$  różny od  $A, B$  oraz środka odcinka  $AB$ . Prosta  $O_1X$  przecina okrąg  $\Omega_2$  w punktach  $P_1$  i  $Q_1$ , prosta  $O_2X$  przecina okrąg  $\Omega_1$  w punktach  $P_2$  i  $Q_2$ , przy czym punkty  $P_1$  i  $P_2$  leżą na odcinkach  $O_1X$  i  $O_2X$ . Wykazać, że proste  $P_1P_2, Q_1Q_2$  i  $O_1O_2$  mają punkt wspólny i że ten punkt nie zależy od wyboru punktu  $X$ .

Zadanie 520 zaproponował pan Piotr Achinger z Warszawy.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2005

Przypominamy treść zadań:

**511.** Okręgi  $k_1, k_2, k_3$  (na płaszczyźnie) przecinają się parami:  $k_2 \cap k_3 = \{K, X\}$ ,  $k_3 \cap k_1 = \{L, Y\}$ ,  $k_1 \cap k_2 = \{M, Z\}$ . Środek każdego okręgu leży na zewnątrz dwóch pozostałych okręgów. Ponadto istnieje okrąg przechodzący przez punkty  $K, L, M$  oraz środki okręgów  $k_i$ . Udowodnić, że jeśli  $K, L, M$  są trzema różnymi punktami, to punkty  $X, Y, Z$  pokrywają się.

**512.** Dana jest liczba całkowita dodatnia  $n$ . Wykazać, że równanie  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{n}$  ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych  $x, y$  wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $n$  jest podzielna przez sześćian liczby całkowitej większej od 1.

**512.** Załóżmy, że liczby całkowite  $x, y, n > 0$  spełniają podane równanie. Wówczas liczby dodatnie

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{x}{n}}, \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{y}{n}}$$

spełniają równanie  $\alpha + \beta = 1$ . Ich sześciiany są liczbami wymiernymi. Z tożsamości

$$3(\alpha + \beta)(\alpha^3 - \beta^3) = (\alpha - \beta) \cdot 3(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha - \beta)(2(\alpha + \beta)^3 + (\alpha^3 + \beta^3))$$

wnosimy, że  $\alpha - \beta$  jest liczbą wymierną, i w konsekwencji same liczby  $\alpha, \beta$  są wymierne.

Zapisując liczbę  $\alpha$  w postaci nieskracalnego ułamka  $\alpha = k/m$  mamy równość  $xm^3 = nk^3$ , z której wynika, że  $n$  dzieli się przez  $m^3$ . Skoro zaś  $x < n$ , to  $k < m$ , więc liczba  $n$  jest podzielna przez sześćian liczby  $m$ , większej od 1.

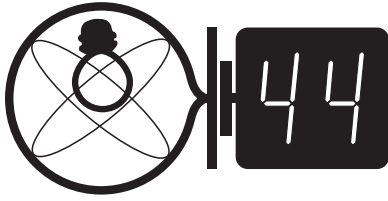
Na odwrót, zakładając, że liczba  $n$  ma dzielnik postaci  $m^3$  ( $m > 1$ ), przyjmujemy

$$x = \frac{n}{m^3}, \quad y = \frac{n(m-1)^3}{m^3}$$

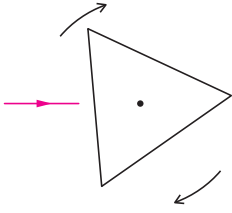
i uzyskujemy wymaganą równość

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{n}.$$

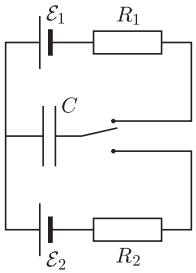
Redaguje Jerzy B. BROJAN



Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2006



Rys. 1

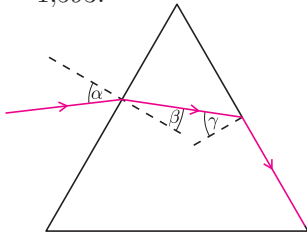


Rys. 2

408. Z równań

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \sin \gamma = \frac{1}{n}, \quad \beta + \gamma = 60^\circ,$$

można numerycznie wyznaczyć  $n$  – dla  $\alpha = 35^\circ$  otrzymujemy  $n = 1,593$ .



409. Niech kształt drutu po włączeniu prądu będzie opisany funkcją  $y(x)$ , gdzie  $y$  jest poziomym odchyleniem drutu na wysokości  $x$  ( $0 < x < l$ ). Kąt odchylenia drutu od pionu jest mały i równy w przybliżeniu  $\alpha = dy/dx$ , a składowa pozioma siły napięcia drutu wynosi w tym samym przybliżeniu  $Q_y = Q\alpha$ , gdzie  $Q = mg/2$ . Zauważmy dalej, że przy podanych wartościach  $d$  i  $l$  można podzielić druty na odcinki o długości znacznie większej od  $d$ , a jednocześnie znacznie mniejszej od  $l$ . Ponieważ wygięcie drutów jest niewielkie, więc siłę wzajemnego oddziaływania tych odcinków można obliczyć korzystając ze wzoru dla przewodników równoległych i nieskończenie długich. Przyrównując różnicę między wartościami  $Q_y$  na początku i na końcu odcinka drutu o długości  $dx$  do siły oddziaływania magnetycznego  $dF_m$  otrzymujemy równanie

$$Q \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dF_m}{dx} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{d-2y},$$

gdzie minus po znaku równości wynika z faktu, że druga pochodna funkcji  $y(x)$  jest ujemna, a czynnik 2 w wyrażeniu  $d-2y$  – z symetrii problemu (przesunięcie

416. Ze szkła o współczynniku załamania 1,5 wykonano pryzmat o podstawie trójkąta równobocznego, skierowano na niego promień światła tak, że przedłużenie tego promienia przebiegało przez środek trójkąta i wprowadzono pryzmat w ruch obrotowy (rys. 1). Podać zakres możliwych wartości kąta odchylenia promienia od kierunku początkowego (przedział lub przedziały). Pominąć częściowe odbicie światła towarzyszące załamaniu, natomiast uwzględnić ewentualne całkowite odbicie wewnętrzne.

417. Przełącznik na rysunku 2 jest przerzucany z górnego do dolnego położenia i na odwrót, przy czym czasy zetknięcia z dolnym i górnym stykiem są jednakowe. Częstotliwość przerzucania (lub – co na jedno wychodzi – pojemność kondensatora) jest tak duża, że po pewnym czasie zmiany napięcia na kondensatorze przestają być zauważalne. Jaka jest wtedy wartość tego napięcia? Wielkości oznaczone na rysunku są dane.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2005

Przypominamy treść zadań:

408. Przez pryzmat, którego przekrój ma kształt trójkąta równobocznego, biegnie promień światła, wybiegając z niego stycznie do ścianki. Ile wynosi współczynnik załamania szkła, jeśli kąt  $\alpha$  wynosi  $35^\circ$ ?

409. Ciężar o masie  $m = 10$  kg wisi na dwóch cienkich i jednakowo obciążonych drutach o długości  $l = 20$  m, które początkowo były pionowe i odległe od siebie o  $d = 20$  cm. Przez druty przepuszczono prąd o jednakowym natężeniu i zwrocie. Przy jakim natężeniu prądu druty się zetkną? Dopuszczalne są przybliżenia odpowiednie dla podanych wartości liczbowych oraz obliczenia numeryczne.

każdego z drutów o  $y$  zmniejsza ich wzajemną odległość o  $2y$ ). Pomnożenie obu stron przez  $dy/dx$  i scałkowanie daje nam równanie z pierwszą pochodną

$$Q \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \frac{d-2y}{d-2y_{\max}},$$

gdzie  $y_{\max}$  jest maksymalnym odchyleniem drutu (w połowie jego długości). Analizując zależność  $y_{\max}$  od natężenia prądu  $I$  (lub na odwrót –  $I$  od  $y_{\max}$ ) stwierdzamy, że początkowo ma ona charakter rosnący, a po przekroczeniu pewnej wartości  $y_{\max}$  odpowiadającej maksymalnemu natężeniu prądu mamy do czynienia z funkcją malejącą. Nietrudno dojść do wniosku, że w tym drugim zakresie równowaga drutu ma charakter niestabilny. Do analizy numerycznej najlepiej wprowadzić bezwymiarowe zmienne

$$u = 2y/d \quad \text{i} \quad s = ax$$

(gdzie  $a = \frac{2I}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi Q}}$ ), w których równanie przybiera postać

$$\left( \frac{du}{ds} \right)^2 = \ln \frac{1-u}{1-u_{\max}}.$$

Zadajemy pewną wartość  $u_{\max}$  mniejszą od 1, wybieramy znak  $du/ds > 0$  i całkujemy numerycznie powyższe równanie od punktu  $s = 0, u = 0$  do punktu, w którym  $s = s_m, u = u_{\max}$ . Porównując wyniki otrzymane dla różnych  $u_{\max}$  stwierdzamy, że maksymalna wartość  $s_m$  jest osiągnięta dla

$$u_{\max} = 0,57 \div 0,58$$

i wynosi  $s_m = 1,082$ . Po przyrównaniu  $s_m$  do  $al/2$  i podstawieniu  $a$  wyznaczamy maksymalne natężenie prądu, przy którym nie nastąpi zetknięcie drutów:

$$I_{\max} = 1,082 \frac{d}{l} \sqrt{\frac{2\pi Q}{\mu_0}} = 169 \text{ A}.$$



### Rozwiązanie zadania M 1129.

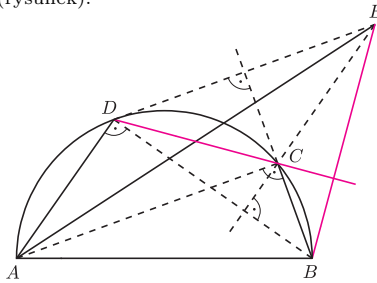
Nie można. Jeśli połowa wszystkich dziewcząt siedzi w ławce z chłopcami, to druga połowa dziewcząt siedzi w ławce z dziewczętami. Zatem liczba dziewcząt niesiedzących w ławce z chłopcami jest parzysta. Stąd wynika, że liczba wszystkich dziewcząt w klasie jest podzielna przez 4.

Gdyby udało się posadzić uczniów w ławkach tak, aby dokładnie połowa chłopców siedziała z dziewczętami, to analogiczne rozumowanie dowodzi, że liczba chłopców w klasie byłaby również podzielna przez 4. Zatem liczba wszystkich uczniów, czyli 30, byłaby podzielna przez 4. Sprzeczność.



### Rozwiązanie zadania M 1130.

Kąty  $ACB$  i  $ADB$  są proste, bo są wpisane i oparte na średnicy  $AB$  (rysunek).



Czworokąt  $ACED$  jest równoległobokiem. Zatem proste  $BC$  i  $DE$  są prostopadłe, a także proste  $CE$  i  $BD$  są prostopadłe. Stąd wynika, że punkt  $C$  jest punktem przecięcia wysokości w trójkącie  $BDE$ , a więc również proste  $CD$  i  $BE$  są prostopadłe.



### Rozwiązanie zadania M 1131.

Połączmy wyrazy danego ciągu w pary

$$(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{399}, a_{400}).$$

Par tych jest 200, więc zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykazemy, że w co najwyżej dziesięciu z tych par oba wyrazy są liczbami pierwszymi.

Przyjmijmy zatem, że  $a_{2n-1}$  oraz  $a_{2n}$  są liczbami pierwszymi. Wówczas  $d(a_{2n-1}) = 2$ , a więc  $a_{2n} = 2 + d(2n-1)$ . Aby liczba  $a_{2n}$  była pierwsza, liczba  $d(2n-1)$  musi być nieparzysta. To jednak jest możliwe jedynie wtedy, gdy liczba  $2n-1$  jest kwadratem liczby naturalnej.

Wśród liczb 1, 3, 5, ..., 399 jest dokładnie 10 pełnych kwadratów. Zatem co najwyżej 10 spośród rozpatrywanych par zawiera oba wyrazy będące liczbami pierwszymi.

## Patrz w niebo

W roku 2000 odkryto obiekt o jasności 24 mag, na pierwszy rzut oka wyglądający jak kolejny obiekt pozaneptunowy, których dziesiątki już zarejestrowano do tego czasu. Uzyskał symbol 2000 CR<sub>105</sub>, ale już w nocy, gdy został odkryty, zauważono, że nie jest typowym członkiem Pasa Kuipera. Wyróżniał się mianowicie niezwykle powolnym ruchem na niebie, co mogło świadczyć o jego wielkiej odległości od Słońca. Obserwacje prowadzone w następnych miesiącach potwierdziły to podejrzenie. Okazało się, że 2000 CR<sub>105</sub> ma mocno wydłużoną orbitę z aphelium w odległości 400 j.a., zaś perihelium w odległości 44,5 j.a. (był tam w roku 1965). Jeden obieg po takiej orbicie trwa 3300 lat. Pojawiło się naturalne pytanie, jak mogło dojść do powstania tak dziwnej orbity.

Przed wszystkim 2000 CR<sub>105</sub> nie mógł zostać wyrzucony na 400 j.a. od Słońca przez Plutona, bo ma on zbyt małą masę, nie mógł też tego zrobić Neptun, gdyż zagadkowe ciało nawet w perihelium znajdowało się za daleko od niego. Wysłunięto kilka mniej lub bardziej prawdopodobnych (lub nieprawdopodobnych) hipotez. Jedna głosi, że orbita ta powstała jednak jako wynik oddziaływania najbliższych planet, oddziaływania wprawdzie bardzo słabego, ale trwającego może nawet miliard lat. Inna mówi, że to akurat Neptun w przeszłości znajdował się znacznie dalej od Słońca i mógł wtedy jakiś przypadkowy obiekt wprowadzić na taką przypadkową orbitę. Trzecia dopuszcza, że Pas Kuipera zawierał dawniej wiele ciał o masach planet i to one skierowały 2000 CR<sub>105</sub> na jego dziwną orbitę, zanim ich wzajemne oddziaływania nie powyrzucały ich samych z Pasa Kuipera. Wiadomo, że sondy Pioneer 10 i 11 nie spotkały, jak dotąd, za orbitą Neptuna żadnego obiektu o masie planety, jednak w 2003 roku odkryto w odległości około 100 j.a. obiekt oznaczony jako 2003 UB<sub>313</sub>. Według niektórych oszacowań, gdyby obiekt ten odbijał 100% promieniowania, to powinien mieć przynajmniej rozmiary Plutona, dlatego szybko zyskał nazwę dziesiątej planety. Jeżeli zostanie to potwierdzone, to może oznaczać, że poza uznanymi obecnie granicami Układu Słonecznego ciała o masach planet są jednak do dziś.

Tomasz KWAST

## Kwiecień

W kwietniowe wieczory dość nisko nad południowym horyzontem ciągnie się gwiazdozbiór Hydry, najdłuższy gwiazdozbiór nieba. W „głowie” Hydry znajduje się gwiazda epsilon o jasności 3,48 mag. Jest to gwiazda potrójna. Główny składnik ma jasność 3,79 mag. Obiega go po elipsie towarzysza o jasności 5 mag (wielka oś tej elipsy wynosi ponad 40 j.a.). Tę parę w odległości 360 j.a. obiega trzeci składnik o jasności 7,5 mag. Zważywszy, że odległość całego układu wynosi 100 pc, wszystkie trzy gwiazdy powinny być dostrzegalne z osobna przez dobry amatorski teleskop (przy bardzo dużym powiększeniu!), a w ciągu kilku lat powinna dać się zauważyć nawet zmiana konfiguracji składników. Tylko kto ma tyle cierpliwości?...

Wenus jest w Wodniku i widać ją przed wschodem Słońca. Mars jest na granicy Byka i Bliźniąt i wieczorem szybko zachodzi. Jowisz jest w Wadze, widać go więc przez całą noc. Saturn jest w Raku; wieczorem jest jeszcze dość wysoko i przed świtem zachodzi. Merkury znajdzie się najdalej od Słońca 8 IV i można go szukać przed wschodem Słońca. Pełnia Księżyca wypada 13 IV, a nów 27 IV. Księżyc zakryje Spikę 13 IV (zakrycie widoczne będzie w południowej Azji i w Australii), Antaresa 17 IV (widoczne w Ameryce Południowej) i Wenus 24 IV (widoczne w Ameryce Południowej i w Afryce). Około 21 IV można oczekiwać skromnego roju Lirydów (Lutnia wieczorem wschodzi na północnym wschodzie i jest widoczna przez całą noc).

T. K.



Dwóch graczy gra w piłkę do 60 punktów. Przy stanie 50:30 trzeba przerwać grę. Jak sprawiedliwie podzielić pulę?

W takim sformułowaniu zadanie to umieścił w pracy [5] Luca Pacioli (od roku 1475 franciszkanin z Borgo San Sepolcro w środkowych Włoszech). Wiadomo, że znane było ono znacznie wcześniej.

Pacioli proponuje podział proporcjonalny do liczby zebranych punktów. Rozwiązanie to spotkało się z krytyką Tartaglii ([6], rozdz. 20 pt. „Błąd brata Luki z Borgo”). Tartaglia proponuje podzielić pulę, do której każdy włożył 22 dukaty, w następujący sposób:

$$50 - 30 = 20; \quad \frac{20}{60} = \frac{1}{3}; \quad \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}.$$

Gracz, który uzyskał 50 punktów, dostanie  $22 + 7\frac{1}{3} = 29\frac{1}{3}$  dukata, drugi zaś  $14\frac{2}{3}$  dukata.

Tartaglia uważał, że odchylenie od połowy puli ma być proporcjonalne do różnicy zebranych punktów. Wtedy gracz, który zebrał więcej punktów, otrzymuje połowę puli plus sumę wyliczoną według tej zasady.

Jeszcze inny sposób podziału proponuje Cardano [1]. Jeśli gra się do  $S$  punktów, a gracze zebrali odpowiednio  $p$  i  $q$  punktów, to pulę dzielimy w stosunku  $[1 + 2 + 3 + \dots + (S - q)] : [1 + 2 + 3 + \dots + (S - p)]$ .

Zdaje się, że nie było w zwyczaju uzasadnianie podawanych reguł. Dopiero Pascal w liście do Fermata z roku 1654, rozpatrując przypadek gry do trzech wygranych przy stanie 2:1, przedstawia korespondentowi eleganckie rozumowanie:

Każdy z graczy włożył do puli 32 pistole. Gdyby w następnej partii pierwszy gracz wygrał, wzięłby 64 pistole. Gdyby przegrał, przy stanie 2:2 wzięłby 32 pistole. Ma zatem gwarantowane 32 pistole, a pozostałe 32 mogą równie dobrze przypaść jemu, jak i partnerowi – szanse są równe, więc należy podzielić się po połowie.

Pula zostaje zatem podzielona w stosunku 48:16, czyli 3:1. Okazuje się, że taki jest stosunek prawdopodobieństw wygranej dla obydwu graczy. Wyraźnie widać to w rozumowaniu Fermata (ten list Fermata zaginał, ale zachowała się odpowiedź Pascala) dotyczącym przypadku, gdy pierwszemu graczowi brakuje dwóch punktów, a drugiemu – trzech. Gra rozstrzygnie się zatem najpóźniej po czterech partiach. Fermat układa tablicę 16 możliwych wyników czterech partii (choć gra może zakończyć się wcześniej), z której widać, że pierwszemu graczowi sprzyja 11 wyników, a drugiemu 5. Wobec tego  $\frac{11}{16}$  puli otrzymuje pierwszy gracz, a resztę drugi.

Jaką przewagę nad innymi sposobami podziału puli ma reguła podziału według prawdopodobieństw wygranej? Czy nie jest przypadkiem równie arbitralna, jak poprzednie?

Wyobraźmy sobie, że widzimy Jana i Piotra w sytuacji rozważanej przez Fermata: Janowi brak dwóch punktów, Piotrowi trzech, w puli jest 16 pistoli. Muszą zakończyć grę, bowiem Jan ma niecierpiącą zwłoki sprawę do załatwienia. Żaden z nich nie zna sposobu Fermata i właśnie Jan zgodził się wziąć 10 pistoli, pozostawiając Piotrowi 6. Proponujemy Janowi 10 pistoli (a może nawet 10 i pół) za odstąpienie prawa do dokończenia

gry. Wszyscy są zadowoleni, my wygrywamy średnio 11/16 puli, czyli 11 pistoli.

Krótko mówiąc, Jan miał papier wartościowy, który wycenił na 10 pistoli. Znając jego prawdziwą wartość, mogliśmy go odkupić z zyskiem (dokładniej: jeśli operację powtórzymy wiele razy, to prawie na pewno zarobimy). Finansiści nazywają taką operację arbitrażem. Gdyby Jan kierował się regułą Fermata, arbitraż byłby niemożliwy – nikt nie mógłby zarobić na niewiedzy graczy.

Pojęcie średniej wygranej pojawiło się kilka lat później w pracy Huygensa *O rachubach w grze w kości* pod postacią *nadziei matematycznej*. We współczesnej terminologii jest to wartość oczekiwana (albo średnia) zmiennej losowej.

#### Literatura

- [1] H. Cardano, *Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis*, Milano 1539.
- [2] Ch. Huygens, *De ratiociniis in ludo aleae*, w: *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, Lugduni Batavorum 1657.
- [3] A. P. Juszkiewicz [red.], *Historia matematyki*, t. II, PWN, Warszawa 1976.
- [4] L. E. Majstrow, *Teorija wierojatnostiej. Istoriceskij oczerk.*, Nauka, Moskwa 1967.
- [5] L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Venetiae 1494.
- [6] N. Tartaglia, *General trattato di numeri et misure*, Venezia 1556–1560.

\*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego