



## SPIS TREŚCI NUMERU 3 (382)

Diagramy Venna <i>Wojciech Guzicki</i>	str. 1
Podziały przestrzeni euklidesowych <i>Paweł Janic</i>	str. 4
Skracanie w uogólnieniach <i>Krzysztof Oleś</i>	str. 5
Aktualności	str. 7
<b>Mała Delta:</b>	
Co można obliczyć <i>Marek Kordos</i>	str. 8
Minimalny, regularny podział	str. 9
Zadania	str. 9
(Nie)bezpieczne lądowanie <i>Piotr Zalewski</i>	str.10
Co można znaleźć nie dalej niż 5 pc od Słońca? <i>Marcin Kiraga</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Marzec	str.16
Przywrócić normalność <i>Rafał Sztencel</i>	str.17

**W następnym numerze:**  
 Euler i Nagel

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichocki, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:  
 Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,  
 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)  
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: 022-5328-731, lub -820, lub -816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Diagramy Venna

W tym artykule zajmiemy się nieco dokładniej diagramami Venna, opisanymi w znakomitym artykule [2]. Najpierw powiemy, co to jest niezależna rodzina zbiorów. Przypuśćmy, że mamy daną rodzinę  $\{A_1, \dots, A_n\}$  podzbiorów pewnego ustalonego zbioru  $S$ . Od tej pory wszystkie rozpatrywane zbiory będą podziorami tego zbioru  $S$  (będziemy go nazywać przestrzenią  $S$ ). Niech  $A'$  oznacza dopełnienie zbioru  $A$  do przestrzeni  $S$ , tzn.  $A' = S \setminus A$ . Oznaczmy następnie  $A_i^1 = A_i$  oraz  $A_i^0 = A_i'$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Każdy zbiór postaci  $A_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}$ , gdzie  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ , nazywamy **składową** rodziny  $\{A_1, \dots, A_n\}$ . Oczywiście każda  $n$ -elementowa rodzina zbiorów ma  $2^n$  składowych. Składowymi rodziny zbiorów  $\{A, B, C\}$  będą zbiory:

$$\begin{aligned} A^0 \cap B^0 \cap C^0 &= A' \cap B' \cap C', \\ A^1 \cap B^0 \cap C^0 &= A \cap B' \cap C', \\ A^0 \cap B^1 \cap C^0 &= A' \cap B \cap C', \\ A^1 \cap B^1 \cap C^0 &= A \cap B \cap C', \\ A^0 \cap B^0 \cap C^1 &= A' \cap B' \cap C, \\ A^1 \cap B^0 \cap C^1 &= A \cap B' \cap C, \\ A^0 \cap B^1 \cap C^1 &= A' \cap B \cap C, \\ A^1 \cap B^1 \cap C^1 &= A \cap B \cap C. \end{aligned}$$

Gdy wszystkie składowe rodziny  $\{A_1, \dots, A_n\}$  są różne i niepuste, rodzinę nazwiemy **niezależną**.

A oto przykład rodziny niezależnej  $\{A, B, C\}$  podzbiorów przestrzeni  $S = \{0, 1, \dots, 7\}$ :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 6\}, C = \{3, 4, 6, 7\}.$$

Rodziny niezależne są wykorzystywane w dowodach tożsamości z rachunku zbiorów. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

**Twierdzenie.** Niech  $W_1(A, B, C)$  i  $W_2(A, B, C)$  będą wyrażeniami rachunku zbiorów (tzn. występują w nich tylko zbiory  $A, B$  i  $C$  oraz symbole działań na zbiorach:  $\cup, \cap, \setminus$ ). Jeśli dla pewnej niezależnej rodziny  $\{P, Q, R\}$  podzbiorów pewnej przestrzeni  $S$  zachodzi równość  $W_1(P, Q, R) = W_2(P, Q, R)$ , to ta równość zachodzi także dla dowolnych zbiorów  $A, B$  i  $C$ .

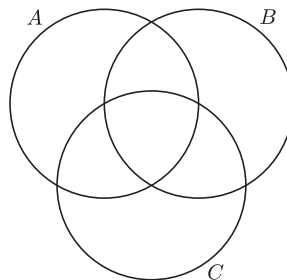
Twierdzenia tego nie będziemy dowodzić, popatrzymy natomiast na przykład jego zastosowania. Udowodnimy równość  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ . Dla naszej rodziny niezależnej mamy:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ (A \cup B) \setminus C &= \{1, 2, 5\}, \\ A \setminus C &= \{1, 2\}, \\ B \setminus C &= \{2, 5\}, \\ (A \setminus C) \cup (B \setminus C) &= \{1, 2, 5\}. \end{aligned}$$

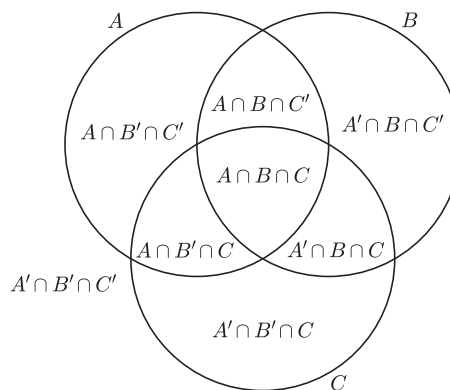
Okazało się, że dla tej rodziny niezależnej zachodzi dowiedziona równość. Zatem ta równość jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów  $A, B$  i  $C$ . Podobne twierdzenie jest prawdziwe dla wyrażen zawierających więcej zbiorów. Dowód znajduje się np. w książce [1].

# Wojciech GUZICKI\*

Dowody takie jak powyższy szczególnie łatwo przeprowadzić na rysunku. Rysujemy niezależną rodzinę podzbiorów pewnej przestrzeni  $S$  i zaznaczamy na tym rysunku zbiory występujące po obu stronach równości. Jeśli oba zaznaczone zbiory są identyczne, to równość zachodzi dla dowolnych zbiorów. Niezależną rodzinę zbiorów  $\{A, B, C\}$  najprościej narysować w następujący sposób.



Taki rysunek nazywamy diagramem Venna. Każdy z  $n$  zbiorów naszej rodziny niezależnej  $\{A_1, \dots, A_n\}$  jest narysowany w postaci pewnego podzbioru płaszczyzny (w naszym przypadku są to trzy koła), przy czym rozważana przestrzeń (u nas płaszczyzna) jest podzielona krzywymi ograniczającymi zbiory  $A_1, \dots, A_n$  na  $2^n$  (u nas  $2^3 = 8$ ) części. Każda z tych części odpowiada jednej składowej (zakładamy, że części te są spójne, czyli w jednym kawałku). A oto te składowe:



W dalszym ciągu ustalimy jednolity sposób numerowania składowych. Numerem składowej

$$A_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}$$

jest liczba, której kolejnymi cyframi w zapisie w systemie dwójkowym są:  $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ . Na przykład, jeśli naszą rodziną niezależną jest  $\{A, B, C\}$  (tzn.  $A_1 = A, A_2 = B$  oraz  $A_3 = C$ ), to składowa

$$A' \cap B \cap C = A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^1$$

ma numer 6, gdyż liczba 6 ma zapis dwójkowy 110. Podobnie składowa

$$A \cap B \cap C' = A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^0$$

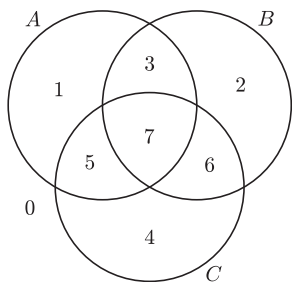
ma numer 3, gdyż liczba 3 ma zapis dwójkowy 011. W przypadku, gdy rodzina niezależna składa się z czterech zbiorów  $\{A, B, C, D\}$ , to składowa

$$A' \cap B \cap C' \cap D = A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cap A_4^1$$

ma numer 10, gdyż liczba 10 ma zapis dwójkowy 1010.

\* Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

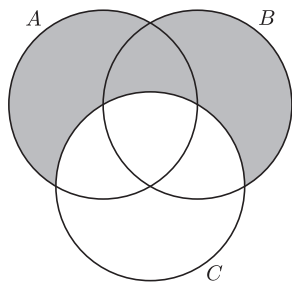
A oto nasz diagram Venna dla trzech zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  ze składowymi ponumerowanymi w ten sposób:



Czytelnik zechce sam sprawdzić, że zbiory po obu stronach równości

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

wyglądają w następujący sposób.



Z powyższych rozważań widać, że umiejętność rysowania niezależnych rodzin zbiorów (czyli diagramów Venna) może się przydać w praktyce do dowodzenia równości w rachunku zbiorów. We wspomnianym artykule została pokazana jedna metoda rysowania diagramów Venna. Jednak diagramy dla dużych liczb  $n$  były bardzo skomplikowane i mało czytelne. Powstaje naturalne pytanie, czy można narysować diagram Venna, w którym wszystkie zbiory mają stosunkowo prostą postać. Diagram Venna dla trzech zbiorów można było narysować za pomocą trzech okręgów. A czy można tak narysować cztery okręgi, by tworzyły diagram Venna dla czterech zbiorów?

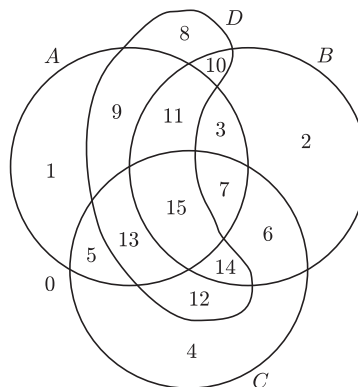
Okazuje się, że jest to niemożliwe. Mianowicie za pomocą trzech okręgów można podzielić płaszczyznę na co najwyżej 8 części. Cztery okręgi przecinają się w co najwyżej dwóch punktach; te punkty podzielą go zatem na co najwyżej 6 łuków. Każdy łuk dzieli jeden obszar na dwie części. Zatem cztery okręgi dzielą płaszczyznę na co najwyżej  $8 + 6 = 14$  części. Nie otrzymamy zatem diagramu Venna, gdyż taki diagram dla czterech zbiorów ma mieć 16 składowych. Rozumując w podobny sposób, można pokazać, że jeśli  $a_n$  oznacza maksymalną liczbę części, na jakie  $n$  okręgów może podzielić płaszczyznę, to ciąg  $(a_n)$  spełnia następujące równania rekurencyjne:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2n.$$

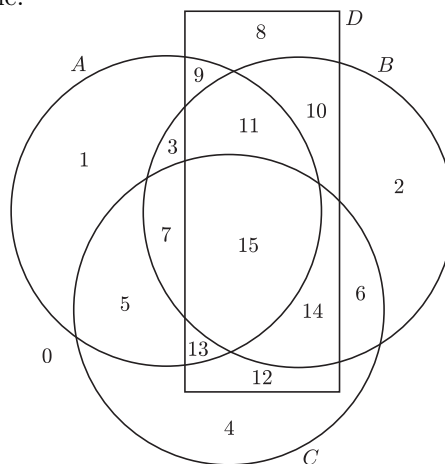
Nietrudno teraz dowieść przez indukcję, że  $a_n = n^2 - n + 2$ ; dla  $n = 4$  otrzymamy  $a_4 = 14$ . Zatem żadna konfiguracja czterech okręgów na płaszczyźnie nie tworzy diagramu Venna. Oczywiście, czwarty zbiór możemy dorysować do trzech okręgów inaczej.

2

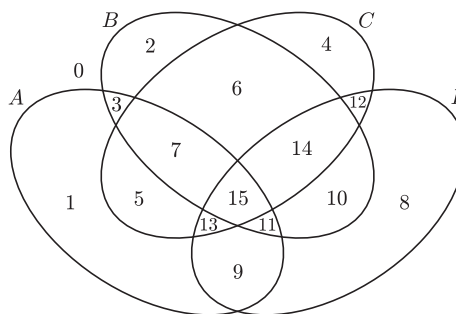
Na następnym rysunku mamy przykład takich czterech zbiorów.



Składowe na tym diagramie Venna zostały ponumerowane zgodnie z przyjętą wyżej zasadą. Powstaje oczywiście pytanie, czy można dorysować czwarty zbiór tak, by był on zbiorem wypukłym. Gdy byłem jeszcze studentem, wydawało mi się to oczywiście niemożliwe; zresztą tak uważało wielu moich kolegów. Następujący rysunek, który mimo wszystko kiedyś udało mi się narysować, wprawił mnie w zrozumiiałe zdumienie.



Inny diagram Venna otrzymamy, rysując cztery elipsy.



Jeszcze inny, składający się z czterech prostokątów, można łatwo narysować samemu. Prostokąty te mają wierzchołki w punktach o następujących współrzędnych:

$$A : (0, 6), (6, 0), (10, 4), (4, 10),$$

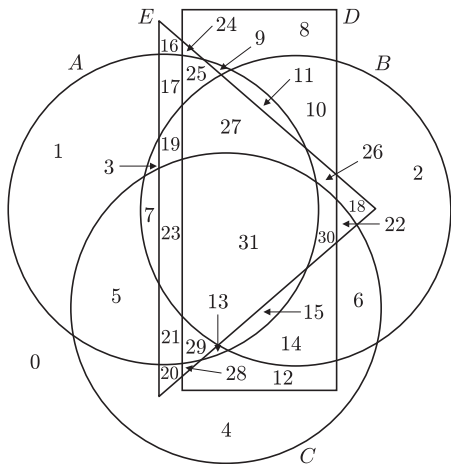
$$B : (14, 6), (10, 10), (4, 4), (8, 0),$$

$$C : (6, 10), (4, 8), (8, 4), (10, 6),$$

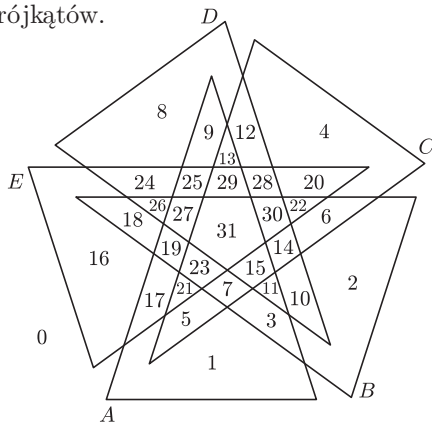
$$D : (8, 10), (4, 6), (6, 4), (10, 8).$$

Gdy udało się narysować diagram Venna, w którym wszystkie cztery zbiory były wypukłe, należało

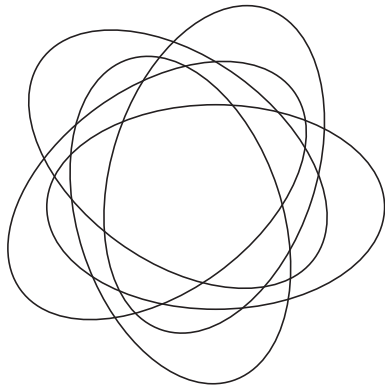
spróbować zrobić to samo dla pięciu zbiorów. Do trzech kół i prostokąta udało mi się dorysować jeszcze trójkąt.



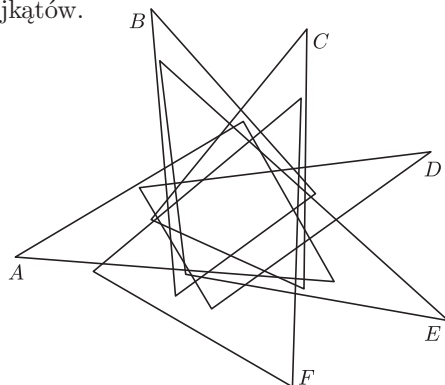
Można również narysować diagram Venna składający się z pięciu trójkątów.



Szczególnie ładny jest utworzony na podobnej zasadzie diagram Venna złożony z pięciu elips.



Można także narysować diagram Venna składający się z sześciu trójkątów.



Wierzchołki tych trójkątów mają następujące współrzędne:

- A : (221, 73), (0, 90), (158, 184),
- B : (111, 63), (94, 262), (208, 134),
- C : (200, 68), (94, 116), (202, 248),
- D : (136, 54), (86, 138), (288, 163),
- E : (300, 46), (118, 78), (100, 226),
- F : (192, 0), (54, 80), (198, 200).

Okazuje się jednak, że nie można narysować diagramu Venna złożonego z więcej niż sześciu trójkątów. Aby tego dowiedzieć, pokażemy najpierw, że jeśli  $t_n$  jest największą liczbą obszarów, na jakie  $n$  trójkątów może podzielić płaszczyznę, to ciąg  $(t_n)$  spełnia następujące równania rekurencyjne:  $t_1 = 2$ ,  $t_{n+1} = t_n + 6n$ . Jeden trójkąt oczywiście dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Przypuśćmy teraz, że mamy już  $n$  trójkątów na płaszczyźnie. Następny trójkąt przecina każdy z tych  $n$  trójkątów w co najwyżej 6 punktach. Te punkty przecięcia dzielą obwód tego ostatniego trójkąta na co najwyżej  $6n$  części; każda z tych części dzieli jeden obszar na dwie części. Zatem maksymalna liczba części, na jakie możemy podzielić płaszczyznę za pomocą  $n + 1$  trójkątów, wynosi co najwyżej  $t_n + 6n$  (pozostawimy jako ćwiczenie przekonanie się, że można tak umieścić  $n$  trójkątów na płaszczyźnie, by każde dwa przecinały się w dokładnie 6 punktach; taka konfiguracja da właśnie  $t_n$  części). Teraz można łatwo udowodnić przez indukcję, że  $t_n = 3n^2 - 3n + 2$ . Można również łatwo udowodnić, że jeśli  $n \geq 8$ , to  $3n^2 - 3n + 2 < 2^n$ . To pokazuje, że jeśli  $n \geq 8$ , to żadna konfiguracja  $n$  trójkątów na płaszczyźnie nie tworzy diagramu Venna. Jeśli zaś  $n = 7$ , to  $3n^2 - 3n + 2 = 3 \cdot 49 - 21 + 2 = 128 = 2^7$ . Zatem można tak umieścić 7 trójkątów na płaszczyźnie, by podzieliły one płaszczyznę na  $2^7$  obszarów. Jednak taka konfiguracja nie będzie diagramem Venna. Mianowicie każde dwa trójkąty muszą przecinać się w sześciu punktach, a więc wierzchołki każdego trójkąta leżą na zewnątrz każdego innego. Stąd wynika, że w każdym trójkącie trzy obszary wewnętrzne, na których brzegu leżą wierzchołki, zawarte są tylko w tym jednym trójkącie, a więc stanowią części tej samej składowej. A to znaczy, że ta konfiguracja nie jest diagramem Venna.

Widzimy więc, że istnieje diagram Venna złożony z sześciu trójkątów i nie istnieją diagramy Venna złożone z  $n$  trójkątów dla  $n \geq 7$ . A jak jest z czworokątami wypukłymi? Albo z pięciokątami wypukłymi? A czy dla każdego  $n$  istnieje diagram Venna złożony z wielokątów wypukłych? Odpowiedzi na niektóre tak postawione pytania są znane. Myślę jednak, że warto pokusić się o to, by na podobne pytania odpowiedzieć samemu. Obszerny przegląd wiadomości na temat diagramów Venna można znaleźć w [3]; tam też są odnośniki do wielu innych interesujących źródeł.

#### Bibliografia

- [1] W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wstęp do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości*. PWN Warszawa, 2005.
- [2] J. Tyszkiewicz, *Pizza Venna*, Delta 3(358), 2004, str. 10–11.
- [3] <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds5/VennEJC.html>

# Podziały przestrzeni euklidesowych

Paweł JANIC\*

\*student Wydziału Matematyki,  
Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu  
Warszawskiego

Jest to skrót pracy nagrodzonej  
srebrnym medalem na XXVII Konkursie  
Uczniowskich Prac z Matematyki w 2005  
roku.

**Problem.** Na ile maksymalnie kawałków  $k$  hiperpłaszczyzn  $(d-1)$ -wymiarowych może podzielić  $d$ -wymiarową hiperprzestrzeń?

Okazuje się, że rozwiązanie tego zadania, w połączeniu z kilkoma prostymi twierdzeniami, pozwala odpowiedzieć na szeroką klasę pytań związanych z podziałami przestrzeni. Dla wygody i zwięzłości zapisu wprowadźmy pewien symbol.

**Definicja 1.** Niech  $\Delta_k^d$  ( $d, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) oznacza maksymalną liczbę kawałków, jaką można otrzymać, dzieląc  $d$ -wymiarową hiperprzestrzeń  $k$  hiperpłaszczyznami  $(d-1)$ -wymiarowymi. Dla każdego  $k$  przyjmujemy, że  $\Delta_k^0 = 1$ .

Brzmi to groźnie, więc sens wyjaśnimy na przykładzie. Z podziału prostej ( $d=1$ ) 2 punktami otrzymamy 3 kawałki – jeden odcinek i 2 półproste, więc  $\Delta_2^1 = 3$ . Dzieląc płaszczyznę ( $d=2$ ) 3 liniami, maksymalnie możemy otrzymać 7 kawałków, więc  $\Delta_3^2 = 7$ . Dla przestrzeni 3-wymiarowej i 3 płaszczyzn mamy  $\Delta_3^3 = 8$ .

Rozpatrzmy przypadki szczególne problemu wyjściowego.

**Prosta.** Łatwo zauważyć, że  $k$  punktów dzieli prostą na  $k+1$  części, a ponieważ  $\forall_k \Delta_k^0 = 1$ , więc

$$(*) \quad \Delta_k^1 = \Delta_{k-1}^1 + \Delta_{k-1}^0.$$

**Płaszczyzna.** Załóżmy, że mamy już na płaszczyźnie  $k-1$  prostych, które dzielą ją na maksymalną liczbę kawałków, czyli  $\Delta_{k-1}^2$ . Prosta  $k$ -ta dodaje tyle samo obszarów, ile kawałków wyjdzie z podziału tej prostej przez  $k-1$  zastanych linii. Z (\*) wnioskujemy, że maksymalnie możemy ich otrzymać  $\Delta_{k-1}^1$ , bo  $k-1$  prostych może przeciąć inną prostą w co najwyżej  $k-1$  punktach, stąd

$$\Delta_k^2 = \Delta_{k-1}^2 + \Delta_{k-1}^1.$$

**Przestrzeń trójwymiarowa.** Liczba nowych trójwymiarowych obszarów zdefiniowanych przez  $k$ -tą płaszczyznę jest równa liczbie dwuwymiarowych obszarów wyznaczonych na płaszczyźnie cięciami przez jej przecięcia z innymi płaszczyznami, stąd wniosek:

$$\Delta_k^3 = \Delta_{k-1}^3 + \Delta_{k-1}^2.$$

Ogólnie zachodzi

$$\text{Twierdzenie 1. } \forall_{d,k \in \mathbb{N}} \Delta_k^d = \Delta_{k-1}^d + \Delta_{k-1}^{d-1}.$$

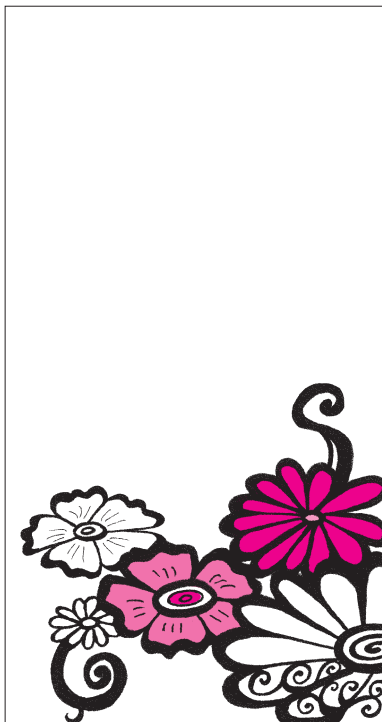
Dowód opiera się na ścisłej analogii między niższymi a wyższymi wymiarami, tak jak to miało miejsce np. między płaszczyzną a przestrzenią trójwymiarową. Postać rekurencyjna jest mało efektywna przy większych parametrach, dlatego warto dysponować „jawnym” wzorem na  $\Delta_k^d$ .

$$\text{Twierdzenie 2. } \forall_{d,k \in \mathbb{N}} \Delta_k^d = \sum_{i=0}^d \binom{k}{i}.$$

Co łatwo sprawdzić: wystarczy podstawić sumę do równania z twierdzenia 1, rozwinąć prawą stronę i połączyć w pary odpowiednie współczynniki. Bezpośrednio z twierdzenia 2 wynika, że  $\Delta_k^d$  wyraża się wielomianem stopnia  $d$  zmiennej  $k$ . Korzystając z lekko zmodyfikowanej metody dowodzenia z twierdzenia 1 oraz opierając się na twierdzeniu 2, można udowodnić

**Twierdzenie 3.** Maksymalna liczba kawałków, które można otrzymać z podziału  $d$ -wymiarowej hiperprzestrzeni  $k$  obiektami, wyraża się wielomianem zmiennej  $k$ , stopnia  $d$ .

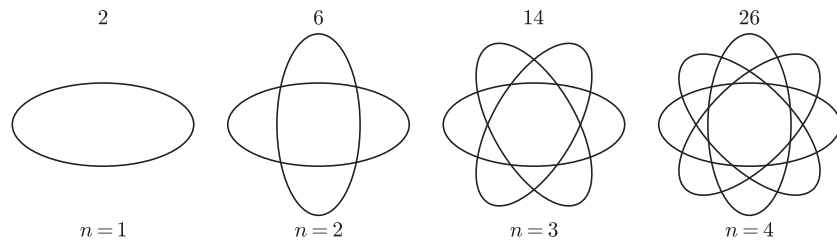
**Zastosowania.** Twierdzenie 3 pozwala na szybkie rozwiązywanie zadań związanych z podziałami przestrzeni. Znając stopień wielomianu, możemy ręcznie sprawdzić wartości początkowe, podstawić i obliczyć współczynniki, jednak dla wyższych wymiarów czy skomplikowanych obiektów sprawa



komplikuje się do tego stopnia, że to podejście staje się niepraktyczne. Wtedy można już tylko wykorzystać specjalne właściwości badanego kształtu lub wymodelować przypadki początkowe komputerowo.

**Zadanie.** Na ile maksymalnie kawałków może podzielić płaszczyznę 256 elips?

Odpowiedź jest wartość  $W(256)$ , przy czym  $W(n)$  jest wielomianem charakterystycznym dla elipsy. Sprawdźmy wartości początkowe.



Wiemy, że  $W(n)$  jest wielomianem stopnia 2. Podstawiając dowolną trójkę wartości  $n$  i  $W(n)$  z rysunku, otrzymujemy układ równań linowych. Po rozwiązaniu,  $W(n) = 2n^2 - 2n + 2$ . Odpowiedź:  $W(256) = 130\,562$ .



## Skracanie w uogólnieniach

Krzysztof OLEŚ\*

Spróbujmy uogólnić dodawanie i odejmowanie. Te operacje dobrze znamy (dopiero po pewnym czasie słyszymy, że działanie to funkcja, funkcja to relacja, relacja to zbiór – i popadamy w wątpliwości), możemy więc pokusić się o pewien eksperyment: spróbujmy dodawać i odejmować zbiory. Przed oczyma stają diagramy Venna i wszystko wydaje się oczywiste. My jednak pójdziemy w stronę arytmetyki.

Przypomnijmy, że  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ , oraz dla  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  możemy zdefiniować dodawanie i odejmowanie „po współrzędnych”, mianowicie  $x \pm y = (x_1 \pm y_1, \dots, x_n \pm y_n)$ . Ponadto, analogiczne  $x$  możemy przemnożyć przez  $\lambda \in \mathbb{R}$  w następujący sposób:  $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ . Po tej nużącej retrospekcji pojawiają się działania. Dla  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$(1) \quad A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Kiedy dodamy (nomen omen), że dla odejmowania sytuacja jest podobna, to całość staje się jasna. Czy aby na pewno?

Pojawiają się pytania dwojakiego rodzaju. Geometryczne, np. co otrzymamy sumując koło i jego brzeg? Arytmetyczne, np. czy prawdą jest, że  $A + A = 2A$ ?

W naszych rozważaniach zajmiemy się jednym z pytań arytmetycznych – sformulujemy je w postaci twierdzenia.

**Twierdzenie 1.** Niech  $A$  będzie niepustym i ograniczonym zbiorem w  $\mathbb{R}^n$ , niech ponadto  $B$  i  $C$  będą domkniętymi i wypukłymi zbiorami w  $\mathbb{R}^n$ . Jeśli  $A + B = A + C$ , to  $B = C$ .

Jan Tadeusz Stanisławski powiedziałby w tym momencie: i to by było na tyle. Ostatnia linijka twierdzenia to przecież takie zwykłe skracanie (chciałoby się nawet coś obustronnie poskreślać). Zasnąć spokojnie nie pozwalają jednak założenia. Z pewną taką nieśmiałością – zacznijmy bez nich. Niech  $D$  oznacza koło (na płaszczyźnie) o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1, a  $E$  jego brzeg. Łatwo zauważyć (osławione hasło-wytrych sygnalizujące zadanie dla Czytelnika), że  $D + D$  jest kołem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2, oraz że tym samym kołem jest  $D + E$ , natomiast  $D \neq E$ . Nie możemy bezkarnie skracać!

\*Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego



Wracamy zatem do założeń. Potrzebna nam będzie odległość w  $\mathbb{R}^n$ . Niech  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Odległością tych dwóch punktów nazywamy liczbę

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Zauważmy, że definicja ta uogólnia znane – dla  $n = 1, 2, 3$  – odległości. Analogie są znaczne, np. kulą w  $\mathbb{R}^n$  o środku w punkcie  $x$  i promieniu  $r > 0$  nazywamy zbiór  $\{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$ .

Po co nam kule? Otóż, zbiór jest ograniczony, jeśli można go umieścić w pewnej kuli.

Czas na domkniętość. Otóż, zbiór domknięty w  $\mathbb{R}^n$  ma tę własność, że granica ciągu jego elementów należy do tego zbioru. Przykładem zbioru, który nie jest domknięty w  $\mathbb{R}$  jest odcinek  $(0; 1)$ . Wystarczy rozważyć przykładowy ciąg  $a_m = 1 - \frac{1}{m}$  i jego granicę  $a = 1$ . W tym miejscu małe wyjaśnienie dla przypadków, w których  $n \neq 1$ . Jeśli  $(a_m)$  jest ciągiem elementów  $\mathbb{R}^n$ , to  $a$  jest jego granicą, wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy  $(d(a_m, a))$  jest zbieżny do zera.

I na koniec definicyjnego gderania jeszcze jedno przypomnienie: wypukłość.

Zbiór  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  nazywamy wypukłym, jeśli zachodzi warunek

$$(2) \quad \forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in [0; 1] \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

(jest to parametryczny opis odcinka).

Dodam, iż pojęcia „domkniętości” – w trochę innej wersji – i „wypukłości” wraz z konsekwencjami w *Delcie* już się pojawiły, m. in. [2].

Jesteśmy gotowi na danie główne. Podane twierdzenie jest prostą konsekwencją następującej obserwacji (była ona np. zadaniem na Międzynarodowym Konkursie Matematycznym im. Vojtêcha Jarníka w Ostrawie w roku 2001).

**Twierdzenie 2.** Niech  $A$  będzie niepustym i ograniczonym zbiorem w  $\mathbb{R}^n$ , niech ponadto  $C$  będzie domkniętym i wypukłym zbiorem w  $\mathbb{R}^n$ . Dla dowolnego  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  zachodzi warunek

$$A + B \subseteq A + C \Rightarrow B \subseteq C.$$

**Dowód.** Ustalmy  $a_0 \in A$ . Jeśli  $b \in B$ , to  $a_0 + b \in A + B \subseteq A + C$ , a zatem, na mocy (1), istnieją  $a_1 \in A$  oraz  $c_1 \in C$ , takie, że  $a_0 + b = a_1 + c_1$ . Analogicznie, dla  $a_1, \dots, a_{m-1} \in A$  istnieją  $a_2, \dots, a_m \in A$  oraz  $c_2, \dots, c_m \in C$ , takie, że:  $a_1 + b = a_2 + c_2$ ,  $a_2 + b = a_3 + c_3$ ,  $\dots$ ,  $a_{m-1} + b = a_m + c_m$ . Dodając te równania stronami i skracając, otrzymujemy  $a_0 + mb = a_m + c_1 + c_2 + \dots + c_m$ . Niech teraz

$$x_m = \frac{1}{m}(c_1 + c_2 + \dots + c_m).$$

Zauważmy, że na mocy wypukłości  $C$  i (rozwiniętego indukcyjnie) warunku (2) mamy  $x_m \in C$ .

Dowód kończą rachunki związane z odległością, mianowicie – po obliczeniach „na współrzędnych” – otrzymujemy

$$d(b, x_m) = \frac{1}{m}d(mb, mx_m) = \frac{1}{m}d(a_m, a_0).$$

Ze względu na ograniczoność zbioru  $A$  (a więc wspólną ograniczoność liczb  $d(a_m, a_0)$ ) możemy wnioskować, że dla  $m \rightarrow \infty$  mamy  $d(b, x_m) \rightarrow 0$ , a zatem  $b = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ . Z założonej domkniętości  $C$  wynika, że  $b \in C$  i ... koniec dowodu.

Na zakończenie pytanie do Czytelnika. Podaliśmy przykład uzasadniający założenie wypukłości. A co z domkniętością i ograniczeniem? Nie wystarczy przecież wykorzystanie ich w przytoczonym dowodzie... Zainteresowanych odsyłamy na stronę 16.

#### Bibliografia

- [1] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia*, PWN 1980
- [2] K. Oleś, *Twierdzenie bez założeń?*, Delta 3(346), 2003
- [3] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press 1994



## Magellan doboaszem

Od dawna wiadomo, że Droga Mleczna jest pofałdowana. Tę deformację góra-dół w stosunku do płaszczyzny symetrii Galaktyki najlepiej obserwuje się, rejestrując 21 centymetrową linię pochodzącą od cienkiego dysku wodoru leżącego w tej płaszczyźnie. Nikomu jednak nie udawało się do tej pory wyjaśnić powodu występowania tego pofałdowania.

Latem zeszłego roku zakończono dokładne przeglądy radioastronomiczne tego promieniowania, niezależnie dla północnej i południowej półkuli. Leo Blitz z Uniwersytetu Berkeley (Kalifornia) i jego koledzy, Evan Levine i Carl Heiles, wykonali na podstawie tych wyników najdokładniejszą, jak dotąd, mapę rozkładu gazowego wodoru. Okazało się, że dysk ten drży jak bęben, a wibrację tę można prawie całkowicie rozłożyć na trzy czyste mody. Otwarte jednak pozostało pytanie, kto ten rytm wybija.

Jednymi z pierwszych podejrzanych o gniecie Drogi Mlecznej były Obłoki Magellana, dwie największe jej satelitarne galaktyki. Niestety, zawsze okazywały się zbyt mało masywne, żeby wyjaśnić obserwowaną deformację.

Nie zrażając się tym, Martin D. Weinberg dołączył do grupy Blitz, żeby stworzyć model komputerowy oddziaływania Obłoków Magellana z Drogą Mleczną. Model ten uwzględnia, oprócz widzialnej materii, również materię ciemną, która stanowi, jak wynika z krzywych rotacyjnych, 80% masy Galaktyki. Nie zmienia to faktu, że nikt jeszcze nie wie, czym ta, nadal hipotetyczna, ciemna materia tak naprawdę jest.

Okazuje się, że uwzględnienie ciemnej materii wzmacnia wpływ Obłoków Magellana w sposób wystarczający, żeby to właśnie je uznać za doboasz. Jednocześnie wynik ten można traktować jako kolejny dowód na istnienie ciemnej materii. Modele, które próbują wyjaśniać obserwowane krzywe rotacyjne, nie odwołując się do ciemnej materii, tylko postulując odpowiednią modyfikację teorii grawitacji, będą miały kolejny twardy orzech do zgryzienia.

Natomiast autorzy wspomnianego modelu liczą na to, że dokładniejsza analiza pozwoli na lepsze niż dotychczas określenie rozkładu ciemnej materii w Drodze Mlecznej [1].

## Nauka chodzenia

Umiejętność chodzenia jest dla człowieka tak istotna, że nikt, kto nie ma z chodzeniem problemów, nad tym się nie zastanawia. Od dawna podejmowane są, mniej lub bardziej udane i mniej lub bardziej uzasadnione, próby nauczania tej sztuki przeróżnych automatów.

Jak małe może być urządzenie, które potrafi chodzić?

A jak już potrafi, to czy będzie robić to dobrze? Np. czy będzie umiało utrzymywać zadany kierunek?

Wiadomo, że z utrzymywaniem kierunku ludzie pozbawieni możliwości jego korekcji (za pomocą zmysłów wzroku, słuchu, zapachu) radzą sobie bardzo słabo. Wystarczy przypomnieć niezliczone historie błądzenia we mgle czy eksperyment, w którym przed ludźmi z zasłoniętymi oczami postawiono zadanie przejścia na wprost przez plac

Św. Marka w Wenecji i nie znalazł się nikt, komu by się to udało.

Wróćmy do odpowiedzi na postawione pytania. Najmniejszym obiektem, który potrafi chodzić i to idealnie po prostej, jest pojedyncza cząsteczka 9,10-ditioacetyloantracenu umieszczona na idealnie regularnej miedzianej powierzchni [2]. Nazwa tej cząsteczki może wśród niechemików budzić respekt, ale jest to związek o stosunkowo prostej budowie. Antracen składa się z trzech pierścieni benzenowych ułożonych jeden za drugim. Wykazuje stosunkowo wysoką reaktywność w pozycjach 9 i 10, czyli w „wolnych rogach” środkowego pierścienia. Po dołączeniu w tych miejscach grupy tioacetylowej (-S-CHO) otrzymuje się cząsteczkę, o której mowa.

Autorzy pracy porównują zachowanie się tej cząsteczki na powierzchni miedzi z ludzkim chodem, ale bardziej przypomina ono dreptanie kaczuszki. Środkowy pierścień to korpus, do którego przymocowane są nóżki. Pozostałe dwa pierścienie to kuperek i dziobek, które są w równym stopniu wygięte ku górze, natomiast najniżej znajdują się atomy siarki (tak przynajmniej wygląda ta cząsteczka położona na powierzchni miedzi, co można stwierdzić za pomocą mikroskopu skaningowego).

Cząsteczka chodzi na atomach siarki. Odległość pomiędzy nimi odpowiada dołkom pomiędzy atomami miedzi w czwartym rzędzie (atomy miedzi są ułożone tak, że linie wyznaczone przez nie biegną w trzech kierunkach). Dołki te są przesunięte względem linii prostopadłej do linii atomów o połowę minimalnej odległości między atomami miedzi. Z jednej strony energetycznie korzystne jest znalezienie się atomów siarki w tych dołkach, z drugiej strony antracen jest wtedy trochę przekręcony względem linii atomowych, a „chciałby” ułożyć się wzdłuż. W rezultacie, w wyniku termicznej dyfuzji, przy niezbyt wysokiej temperaturze cząsteczka przenosi jeden z atomów siarki z jednego dołka do następnego (albo poprzedniego). Cząsteczka chodzi więc dokładnie jak kaczka, ale tylko wzdłuż jednego z trzech wyróżnionych kierunków. Animację tego ruchu można zobaczyć na stronie autorów [3].

Autorzy przeszli do 10000 sukcesywnych kroków i nie stwierdzili zmiany kierunku.

Opisywane zachowanie jest ciekawe samo w sobie, ale może przynieść praktyczne zastosowania. Np. umożliwić konstrukcję nanoabakusów, które zostały zaproponowane dekadę temu jako alternatywa dla obecnie stosowanych pamięci komputerowych. W oryginalnym pomysle cząsteczki miały się poruszać po powierzchni wzdłuż czegoś w rodzaju szyn i nigdy nie udało się tego praktycznie zrealizować. W opisywanym przypadku szyny nie są potrzebne. Wystarczają miedziane kocie łby.

Piotr ZALEWSKI

[1] na podstawie <http://www.physorg.com/news9704.html> 9 stycznia 2006

[2] Ki-Young Kwon, Kin L. Wong, Greg Pawin, Ludwig Bartels, Sergey Stolbov i Talat S. Rahman *Unidirectional Adsorbate Motion on a High-Symmetry Surface: „Walking” Molecules Can Stay the Course* Phys. Rev. Lett. **95**(2005)166101

[3] <http://www.chem.ucr.edu/groups/bartels>

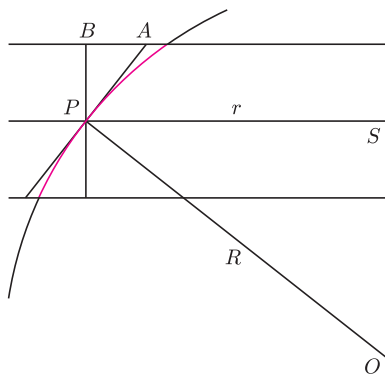




# mała delta

## Co można obliczyć

za pomocą wzoru  $\pi r^2$ ? Oczywiście, pole koła. Ale co jeszcze? Okazuje się, że także pole czaszy, takiego koła na sferze (czyli powierzchni kuli). A oto dlaczego.



Rys. 1.  $h = 2 \cdot BP$ ,  $l = 2 \cdot AP$ .

Zastosujmy sposób obliczania powierzchni sfery wymyślony przez Archimedesesa. Sferę o promieniu  $R$  dzielimy płaszczyznami równoległymi na warstwy o wysokości  $h$ . W połowie wysokości warstwy prowadzimy w pionowych płaszczyznach styczne do sfery. Styczne te tworzą powierzchnię boczną stożka ściętego; oznaczmy długość jego tworzącej przez  $l$ . Okazuje się, że pole tej powierzchni zależy jedynie od wysokości warstwy, a nie zależy od tego, która to warstwa. Rzeczywiście (przy oznaczeniach z rysunku 1) trójkąty  $OPS$  i  $APB$  są podobne, skąd

$$\frac{R}{r} = \frac{OP}{PS} = \frac{AP}{PB} = \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}h}, \text{ czyli } rl = Rh \text{ albo } 2\pi rl = 2\pi Rh.$$

A lewa strona ostatniej równości to właśnie pole powierzchni bocznej stożka ściętego. Bo pole powierzchni stożka ściętego to (jak napisano w każdym podręczniku czy tablicach)  $\pi(r_1 + r_2)l$ , czyli  $2\pi rl$ , gdy  $r$  jest średnią arytmetyczną  $r_1$  i  $r_2$ , a tak jest dla promienia poprowadzonego w połowie wysokości stożka ściętego.

Z tego, że pole zależy tylko od  $h$ , wynika, że gdy podzielimy warstwę na drobniejsze warstwy (na rysunku 2 na trzy), to suma powierzchni bocznej otrzymanych stożków będzie równa powierzchni bocznej poprzedniego, większego stożka.

(Bo gdy  $h = h_1 + h_2 + h_3$ , to  $2\pi Rh = 2\pi Rh_1 + 2\pi Rh_2 + 2\pi Rh_3$ .)

Ale dla bardzo cienkich warstw suma powierzchni bocznych stożków ściętych bardzo dobrze, dowolnie dobrze przybliży pole sfery. Zatem pole powierzchni warstwy sfery jest takie samo, jak pole powierzchni bocznej stycznego w połowie jej wysokości stożka ściętego, czyli  $2\pi Rh$ . Wynika stąd w szczególności, że pole całej sfery ( $h = 2R$ ) jest równe  $4\pi R^2$ .

Ale nas interesuje czasza. Jej pole powierzchni (rys. 3) to

$$2\pi Rh = \pi \cdot 2R \cdot h = \pi r^2,$$

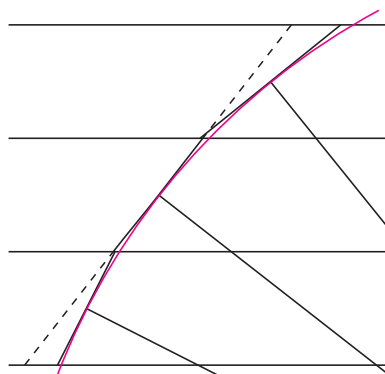
bowiem trójkąt  $KLM$  jest prostokątny ( $KM$  to średnica!) i wobec tego

$$\frac{h}{r} = \frac{r}{2R}, \text{ czyli } 2R \cdot h = r^2.$$

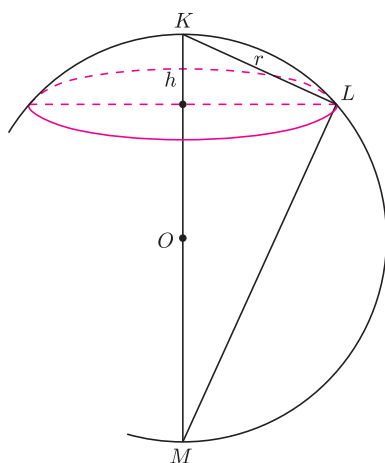
Okazuje się więc, że  $\pi r^2$  to wzór nie tylko na pole koła na płaszczyźnie, lecz także na pole czaszy, pod warunkiem jednak, że litera  $r$  będzie rozumiana w ogólniejszy sposób: jako odległość środka od brzegu. Zauważmy, że ten wzór pasuje też do całej sfery! W ten sposób wzór na pole koła staje się po prostu szczególnym przypadkiem ogólniejszej zależności.

A swoją drogą, czy nie peszy, że Archimedes wiedział o wzorze  $\pi r^2$  więcej, niż można się nauczyć w XXI-wiecznej szkole?

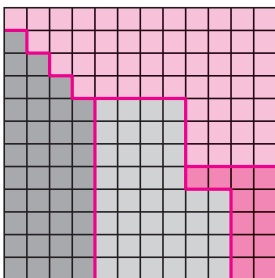
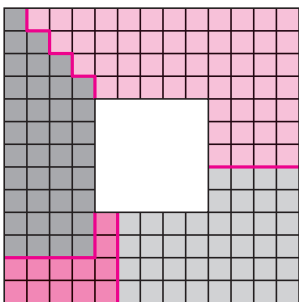
*Małą Deltę przygotował Marek KORDOS*



Rys. 2



Rys. 3



## Minimalny, regularny podział

W numerach 12/2004 i 1/2005 proponowaliśmy Czytelnikom podzielenie narysowanego na pokratkowanym papierze kwadratu o boku 13 z kwadratową dziurą o boku 5 na możliwie najmniejszą liczbę części, z których można będzie ułożyć kwadrat o boku 12.

Wydaje się rzeczą oczywistą, że podział na mniejszą liczbę części niż cztery nie jest możliwy (ale właściwie dlaczego? – może ktoś z Czytelników umie to wykazać; chętnie taki dowód opublikujemy). Ale jedyny podział na cztery części, jaki znaleźliśmy, składał się z części, które nie składały się z pełnych kratek i – na dodatek – dziura była „na bakier”. Miał on wprawdzie jedną zaletę: wszystkie części były jednakowe, ale to raczej nie równoważyło jego wad.

Okazuje się jednak, że istnieje podział na cztery części również, gdy dziura ma boki równoległe do boków kwadratu, a na dodatek każda z tych części składa się z pełnych kratek. Ponadto żadnej z części nie trzeba odwracać „na lewą stronę”.

Podział ten nadesłał nam Pan Adam Smólski.

Redakcja

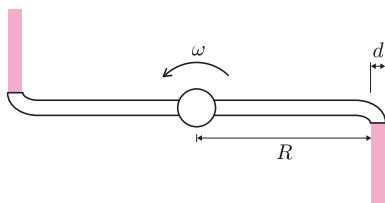


## Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

**F 663.** Pompa strażacka pozwala na pompowanie strumienia  $\mu$  metrów sześciennych wody na sekundę na odległość  $s$ , jeśli sikawka jest w pozycji  $45^\circ$  do poziomu. Jaka jest minimalna moc pompy? Przyjąć gęstość wody  $\rho$  za znaną. Rozwiązanie na str. 12

**F 664.** Zraszacz do trawy składa się z rurki o kształcie litery S o przekroju koła o średnicy  $d$  i długości ramion  $R$  (rys. 1) zamocowanej na łożysku pozwalającym na swobodny obrót. Do środka doprowadzana jest woda w ilości  $\mu$  metrów sześciennych na sekundę. Zraszacz obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Jaki jest działający na zraszacz moment siły oporu? Rozwiązanie na str. 12



Rys. 1

Redaguje Waldemar POMPE

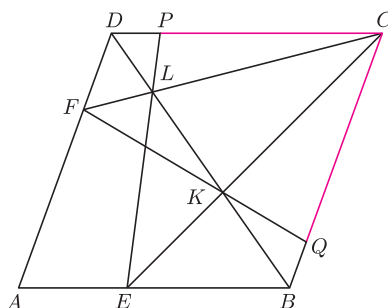
**M 1126.** Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 utworzono wszystkie możliwe liczby siedmiocyfrowe, przy czym każda cyfra występuje w każdej z uzyskanych liczb tylko raz. Rozstrzygnąć, czy spośród tych liczb można wybrać takie dwie różne,  $m$  i  $n$ , z których jedna jest podzielna przez drugą. Rozwiązanie na str. 16

**M 1127.** Punkty  $E$  i  $F$  leżą odpowiednio na bokach  $AB$  i  $AD$  rombu  $ABCD$  (rys. 2). Proste  $CE$  i  $CF$  przecinają przekątną  $BD$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Proste  $EL$  i  $FK$  przecinają boki  $CD$  i  $CB$  odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ . Dowieść, że  $CP = CQ$ . Rozwiązanie na str. 16

**M 1128.** Rozstrzygnąć, czy istnieje różnowartościowa funkcja  $f$  określona na zbiorze  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , o wartościach w zbiorze  $\{0, 1, 2, \dots\}$  i spełniająca dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich  $m, n$  równość

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

## (Nie)bezpieczne lądowanie

Do poturbowanego kolarza, który przed chwilą przeżył karambol, podchodzi dziennikarz i pyta: czy pan uprawia sport dla zdrowia czy dla przyjemności?

Sport wyczynowy to nie zabawa. Dotyczy to nie tylko dyscyplin olimpijskich. Szczególnie widoczne jest to w sportach ekstremalnych – „ekstremalne” jest to, czego nie byłby w stanie zrobić amator.

Przykładem może być jeżdżenie na nartach po... nienadających się do tego dziewiczych terenach. Jazda w głębokim śniegu po bardzo stromych stokach (dostępna dla zdolnego amatora) jest przerywana skokami z urwisk skalnych. Właśnie takie skoki czynią tę formę uprawiania narciarstwa dosłownie ekstremalną.

Pokrewną konkurencją stały się ewolucje na specjalnych skoczniach, tzw. skoki *big air* (nie należy ich mylić z olimpijską już konkurencją skoków akrobatycznych na jeszcze innej odmianie skoczni).

Choć w obu tych odmianach narciarstwa (i snowboardu) rozgrywane są zawody z mistrzostwami świata włącznie, to głównym zajęciem mistrzów tych konkurencji jest dostarczanie zdjęć do magazynów narciarskich (i snowboardowych).

W skokach typu *big air* przelatuje się od kilkunastu do kilkudziesięciu metrów, wznosząc się na wysokość kilku metrów i wykonując w locie salta, obroty lub jedno i drugie. Podobne ewolucje urozmaicają niektóre skoki ekstremalnej jazdy pozatraserowej. Na tylnej okładce pokazany jest przykład takiego przejazdu (niestety, niektóre ujęcia mogą być jednocześnie poglądową demonstracją zasady nieoznaczoności). Różnica wysokości przy drugim skoku wynosi około 10 metrów. Czy normalny człowiek może bez szkody dla zdrowia zeskoczyć z tak wysoka? Na zdjęciu widać zresztą, że narciarz nie ustał tego skoku. Czy tylko przypadkiem udało mu się wstać i pojechać dalej?

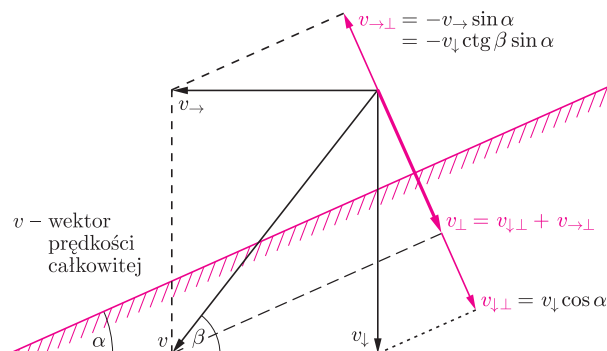
Na szczęście oprócz odwagi, sprawności i umiejętności miłośnicy białego (dosłownie) szaleństwa mają potężnego sprzymierzeńca – zasady fizyki.

To, z jakiej wysokości można po skoku bezpiecznie wylądować, zależy po pierwsze od tego, jak długa będzie droga hamowania. Przyjmijmy najkorzystniejszy wariant hamowania ze stałym przyspieszeniem. Wtedy przeciążenie wyraża się szczególnie prostym wzorem. Stosunek dodatkowego przyspieszenia do przyspieszenia ziemskiego jest po prostu równy stosunkowi wysokości skoku do długości drogi hamowania (wynika to z faktu, że praca wykonywana przez przyspieszenie w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest równa iloczynowi masy, przyspieszenia i przebytej drogi). Jeżeli hamowanie jest związane tylko z ugięciem nóg, to droga hamowania wynosi około pół metra. Już przy skoku z wysokości 5 metrów przeciążenie wynosiłoby więc 10 g. Przeciętny człowiek nie ma nóg mogących wytrzymać coś takiego bez poważnej kontuzji. Dlatego nikt rozsądny nie wyskakuje z drugiego piętra.

Czym różnią się skoki prezentowane na okładce od skoku z drugiego piętra? Bo przecież nie wysokością. Po pierwsze, spada się na miękki śnieg. Dzięki temu można uzyskać dodatkową drogę hamowania nawet

Piotr ZALEWSKI

rzędu metra. W tym konkretnym przypadku zysk wynosi jednak tylko około 20 cm. (Pokrywa świeżego śniegu nie jest głębsza niż wysokość butów narciarskich), co i tak zmniejsza przeciążenie (przy pierwszym skoku) do około 7 g. To, niestety, nadal sporo. Następne zmniejszenie przeciążenia jest związane z lądowaniem na stromym stoku. Wyhamować trzeba tylko składową prędkości prostopadłą do stoku. Ponieważ prędkość we wzorze na energię kinetyczną występuje w kwadracie, to pojawia się czynnik równy kwadratowi kosinusa kąta nachylenia. Im większa stromizna, tym łagodniejsze lądowanie! W sytuacji pierwszego skoku z okładki czynnik ten wynosi około 0,85. Ale to jeszcze nie koniec. Przecież narciarz ma pewną prędkość poziomą, która ma składową prostopadłą do stoku skierowaną od stoku w górę.



Lądowanie będzie tym łagodniejsze, im szybciej narciarz (poziomo) się porusza! Czynnik  $\cos^2 \alpha$  zmniejsza się więc i wynosi  $(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta)^2$ , co liczbowo, w sytuacji omawianego skoku, jest równe około 0,4. Ostatecznie szacowane przeciążenie przy pierwszym skoku wyniosło tylko około 3 g, czyli było równoważne zwykłemu skokowi z około półtora metra, co nie stanowi wielkiego wyczynu. Zauważmy, że na skoczni używanej do skoków *big air* można tak dobrać prędkość najazdową, żeby wektor prędkości całkowitej w momencie lądowania był prawie równoległy do zbocza, praktycznie eliminując przeciążenie.



Zamiast rozpatrywać drugi skok z okładki (który został wykonany w kierunku kamery, co utrudnia szczegółową analizę), zajmijmy się skokiem przedstawionym na następnej stronie. Jest on naprawdę straceńczy. Wysokość pokonanego skokiem urwiska wynosi około 40 metrów! W dodatku narciarz ma bardzo małą prędkość poziomą. Stok jest co prawda bardzo stromy i pokryty grubą warstwą świeżego śniegu, ale skok zakończył się praktycznie całkowitym zatrzymaniem narciarza. Dopiero po zatrzymaniu wstał on i pojechał dalej, co

dowodzi, że skok przeżył bez widocznego uszczerbku zdrowia. Ponowne lądowanie związane było z upadkiem

na plecy. Czy taki upadek jest elementem techniki lądowania? Ze zdjęcia można odczytać, jaka była całkowita droga hamowania.

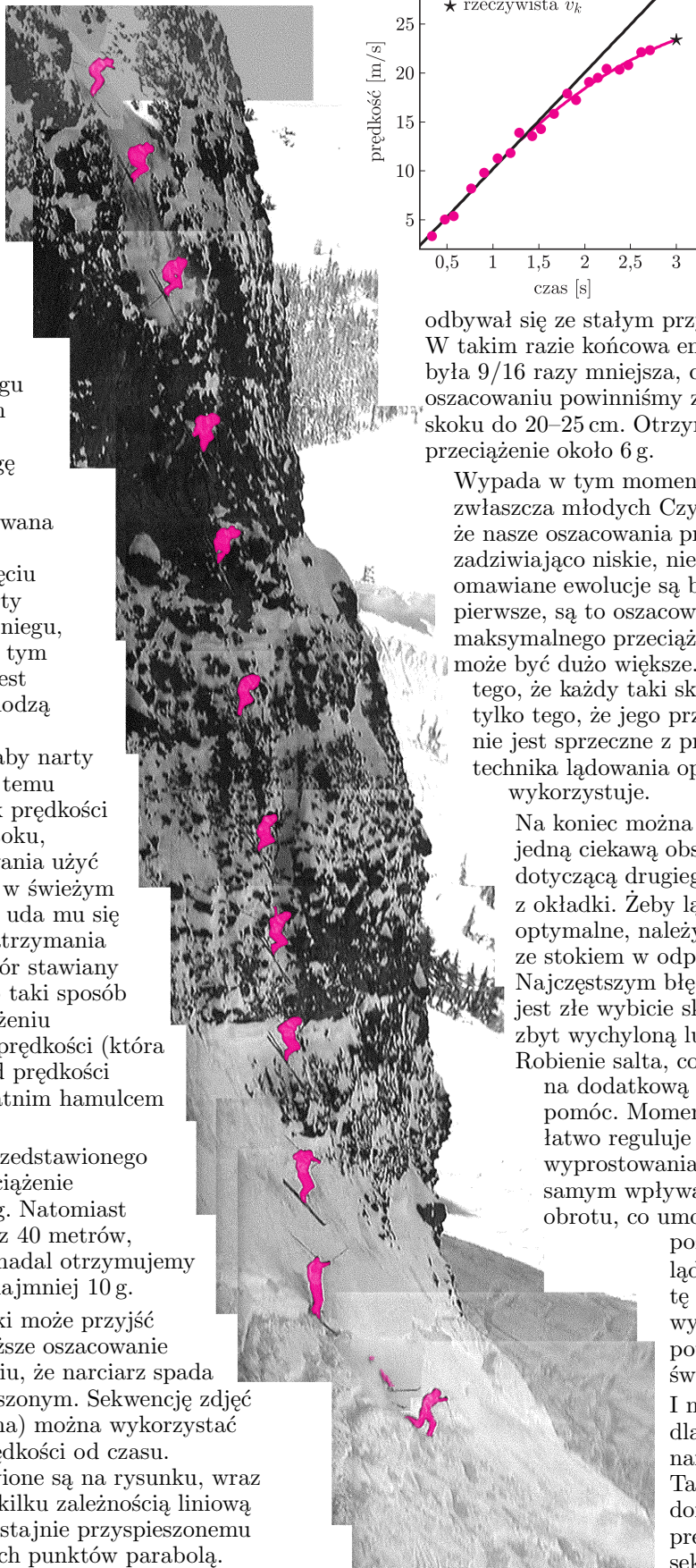
Jest to różnica wysokości środka masy (znajdującego się mniej więcej na wysokości biodra) w momencie pierwszego zetknięcia się nart ze śniegiem i domniemanego jego położenia w momencie zatrzymania (ten moment odpowiada ujęciu, na którym widać tylko wystające ze śniegu narty). Stosowana przy takich skokach technika lądowania maksymalnie wydłuża tę drogę hamowania.

W pierwszej fazie wykorzystywana jest sprężystość nart, których tyły wyginają się przy zetknięciu ze śniegiem. Jednocześnie narty przebijają się przez warstwę śniegu, której efektywna grubość jest tym większa, im bardziej stromy jest stok. W końcu tyły nart dochodzą do twardego podłoża i w tym momencie narciarz pozwala, aby narty wyjechały spod niego. Dzięki temu zaczyna się zmieniać kierunek prędkości narciarza na równoległy do stoku, a narciarz może do wyhamowania użyć całego ciała zapadającego się w świeżym śniegu, a nie tylko nóg. Jeżeli uda mu się rozpocząć dalszą jazdę bez zatrzymania (umiejętnie wykorzystując opór stawiany przez narty do powstania), to taki sposób lądowania odpowiada przeciążeniu związanemu tylko ze zmianą prędkości (która może być istotnie mniejsza od prędkości całkowitej). Jeżeli nie, to ostatnim hamulcem są nogi.

W sytuacji drugiego skoku przedstawionego na okładce maksymalne przeciążenie można oszacować na około 5 g. Natomiast na przedstawionym tu skoku z 40 metrów, z drogą hamowania 4 metry, nadal otrzymujemy oszacowanie na poziomie co najmniej 10 g.

Czy jeszcze jakieś prawo fizyki może przyjść narciarzowi z pomocą? Powyższe oszacowanie zostało zrobione przy założeniu, że narciarz spada ruchem jednostajnie przyspieszonym. Sekwencję zdjęć (bogatszą niż tu przedstawiona) można wykorzystać do oszacowania zależności prędkości od czasu. Otrzymane punkty przedstawione są na rysunku, wraz z dopasowaną do pierwszych kilku zależnością liniową odpowiadającą ruchowi jednostajnie przyspieszonymu oraz dopasowaną do wszystkich punktów parabolą.

Z porównania obu dopasowań można wnioskować, że na skutek oporu powietrza końcowa prędkość była o czynnik około 3/4 mniejsza, niż gdyby ruch



Pionowa składowa prędkości narciarza. Kolorowe punkty i poprowadzona przez nie linia odpowiadają rzeczywistości. Prosta czarna linia odpowiada zaniedbaniu oporu powietrza.

odbywał się ze stałym przyspieszeniem. W takim razie końcowa energia kinetyczna była 9/16 razy mniejsza, czyli w poprzednim oszacowaniu powinniśmy zmniejszyć wysokość skoku do 20–25 cm. Otrzymalibyśmy wtedy przeciążenie około 6 g.

Wypada w tym momencie ostrzec, zwłaszcza młodych Czytelników. Z faktu, że nasze oszacowania przeciążeń są zadziwiająco niskie, nie wynika, iż omawiane ewolucje są bezpieczne. Po pierwsze, są to oszacowania dolnej granicy maksymalnego przeciążenia, które chwilowo może być dużo większe. Dowodzą one nie tego, że każdy taki skok można przeżyć, tylko tego, że jego przetrwanie nie tylko nie jest sprzeczne z prawami fizyki, ale że technika lądowania optymalnie te prawa wykorzystuje.

Na koniec można zrobić jeszcze jedną ciekawą obserwację dotyczącą drugiego skoku z okładki. Żeby lądowanie było optymalne, należy zetknąć się ze stokiem w odpowiedniej pozycji. Najczęstszym błędem przy skokach jest złe wybicie skutkujące pozycją zbyt wychyloną lub zbyt odchylną. Robienie salta, co wygląda na dodatkową trudność, może pomóc. Moment bezwładności łatwo reguluje się poprzez stopień wyprostowania sylwetki, a tym samym wpływa się na tempo obrotu, co umożliwi kontrolę pozycji w momencie lądowania. Żeby tę możliwość wykorzystać, potrzebne jest jednak świetne wyczucie.

I na koniec uwaga dla miłośników narciarstwa. Tak, dobrze się domyślicie. W obu prezentowanych sekwencjach narciarskich

używany był sprzęt telemarkowy: free your heel, free your mind (uwolnij piętę, uwolnij umysł).

# Co można znaleźć nie dalej niż 5 pc od Słońca?



## Rozwiązanie zadania F 663.

Ze wzoru na zasięg rzutu ukośnego pod kątem  $45^\circ$  dostajemy prędkość wylotową wody  $v = \sqrt{gs}$ . W czasie  $\Delta t$  z pompy wypływa  $\mu\Delta t$  objętości wody o energii kinetycznej  $\frac{\mu v^2}{2} \Delta t$ . Moc pompy wynosi wobec tego co najmniej  $P = \frac{\mu g s^2}{2}$ .



## Rozwiązanie zadania F 664.

Z każdego końca zraszacz wypływa strumień wody o natężeniu  $\frac{\mu}{2}$ . Z równania ciągłości przepływu obliczamy prędkość wylotową wody liczoną względem obracającego się zraszacza:  $v_1 = \frac{2\mu}{\pi d^2}$ . Prędkość względem nieruchomego obserwatora wynosi więc  $v_2 = v_1 - \omega R$ . W czasie  $\Delta t$  zraszacz opuszcza wodę o momencie pędu  $\Delta J = \rho\mu R v_2 \Delta t$ , a więc z zasady zachowania momentu pędu moment siły działający na zraszacz wynosi

$$\tau = \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{2\rho\mu^2 R}{\pi d^2} - \rho\mu\omega R^2.$$

Ponieważ zraszacz obraca się ze stałą prędkością kątową, moment siły oporu jest również równy  $\tau$ .

Marcin KIRAGA\*

Słońce wraz z otaczającymi je planetami znajduje się blisko płaszczyzny dysku galaktycznego, w odległości około 8 kpc od centrum Galaktyki. W naszym sąsiedztwie spotykamy gwiazdy, które powstały w różnych miejscach i w różnym czasie. To, co je łączy, to obecne położenie w przestrzeni i możliwość dość dokładnego wyznaczenia ich parametrów. Blisko nas możemy dostrzec również obiekty o bardzo małej jasności, takie jak małowasywne czerwone karły, brązowe karły, stare białe karły, co może pomóc w ocenie, jaka jest ich prawdziwa gęstość w przestrzeni i na ile są niekompletne ich spisy na większych odległościach od Słońca.

Na początku 2005 roku listę gwiazd znajdujących się bliżej niż 5 pc otwierało Słońce i znajdowało się na niej jeszcze 49 układów gwiazdowych. Objętość kuli o takim promieniu wynosi blisko  $524 \text{ pc}^3$ . Jak widać, w naszym otoczeniu jeden układ gwiazdowy przypada na ponad  $10 \text{ pc}^3$ . Piszę o układach gwiazd, gdyż część gwiazd znajduje się w układach podwójnych, potrójnych, a nawet składających się z większej liczby składników. Do 50 interesujących nas układów należy 35 gwiazd pojedynczych, 10 podwójnych i 5 potrójnych, zawierających w sumie 70 obiektów. Spośród nich większość stanowią gwiazdy ciągu głównego: 1 gwiazda typu widmowego A (Syriusz A), 1 typu F (Procyon A), 3 typu G (Słońce,  $\alpha$  Cen,  $\tau$  Cet), 7 typu K i 46 gwiazd typu widmowego M. Oprócz tego 5 składników ciasnych układów podwójnych ma najprawdopodobniej typ widmowy M, lecz ze względu na małą odległość między składnikami nie były badane osobno, lecz razem z towarzyszem. W odległości do 5 pc nie ma żadnego olbrzyma, za to znamy 5 białych karłów – obiektów, które już zakończyły swoją ewolucję gwiazdową. Mamy też parę brązowych karłów, które ze względu na zbyt małą masę nie mają możliwości zamiany wodoru w hel poprzez reakcje termojądrowe.

\* Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Warszawskiego

Najjaśniejszą spośród tych gwiazd i zarazem najjaśniejszą gwiazdą nocnego nieba jest obecnie główny składnik Syriusza (Syriusz A), ponad 20 razy jaśniejszy od Słońca. Oprócz niego jaśniejsze od Słońca są: Procyon A (około 7 razy) i  $\alpha$  Cen (1,5 razy). W odległości minimalnie przewyższającej założone 5 pc znajduje się jeszcze Altair, który jest kilkanaście razy od Słońca jaśniejszy. Jak widać, w naszym sąsiedztwie (i nie tylko) większość gwiazd ma jasności mniejsze niż Słońce.

Większość z naszych sąsiadów to gwiazdy I populacji, związane z dyskiem Galaktyki, powstałe z materii, w której pierwiastki cięższe od helu (tzw. metale) stanowią już około jednej setnej masy. Gwiazdy II populacji, o mniejszej zawartości metali i niezwiązane z dyskiem Galaktyki, a wchodzące w skład jej sferoidu, stanowią rzadkość w naszym otoczeniu. Patrząc na skład chemiczny i dynamikę sąsiednich gwiazd, można wyróżnić tylko jeden obiekt II populacji. Jest to odległa o 4 pc gwiazda GJ 191 zwana Gwiazdą Kapteyna. Zawiera ona kilkadziesiąt razy mniej metali niż Słońce i jest zapewne najstarszą z sąsiednich gwiazd. Gwiazda Barnarda, u której obserwujemy największy ruch własny ( $10''/4$  na rok) zaliczana jest do populacji pośredniej.

Do gwiazd, które w ostatnim czasie szczególnie zwracały uwagę astronomów, należy układ  $\alpha$  Cen.

U obu składników obiegających się z okresem 80 lat udało się zaobserwować pulsacje analogiczne do pulsacji słonecznych. Dzięki znajomości masy składników, obserwacjom ich ruchu orbitalnego, dokładnie wyznaczonej odległości, jasności i danym astrosejsmologicznym udało się stwierdzić, że gwiazdy te liczą najprawdopodobniej 6,5 mld lat. Są więc od Słońca starsze, ale w materii, z której powstały, zawartość masowa metali była prawie dwa razy większa niż w materii słonecznej. Tak więc dla zawartości metali istotne jest nie tylko kiedy, ale i gdzie dana gwiazda powstała. Obserwacje astrosejsmologiczne zostały wykonane również dla Procyona A. Ta gwiazda, która wraz z towarzyszącym jej białym karłem obiega wspólny środek masy w ciągu 40 lat, ma około 2,5 mld lat.

Znajdujący się w odległości około 13 000 j.a. od  $\alpha$  Cen czerwony karzeł *Proxima* Cen jest obecnie (jak nazwa wskazuje) najbliższym sąsiadem Słońca. Duża odległość między  $\alpha$  Cen i Proximą uniemożliwia wyznaczenie ich wzajemnego ruchu orbitalnego. Nie istnieją nawet obserwacje, które definitywnie dowodziłyby, że Proxima jest grawitacyjnie związana z  $\alpha$  Cen (choć zapewne jest). Aby tak było, prędkość radialna Proximy może się różnić od prędkości radialnej środka masy układu  $\alpha$  Cen najwyżej o 500 m/s, natomiast obecnie podawany błąd wartości jej prędkości radialnej jest rzędu 1 km/s.

Obserwacje pobliskich czerwonych karłów należących do układów podwójnych pozwalają na dokładne pomiary mas tych najliczniej występujących, ale wciąż jeszcze stosunkowo mało poznanych gwiazd. Szczególnie interesujący okazał się potrójny układ GL 866.

Składniki A i C obiegają się raz na 3,8 doby, natomiast okres orbitalny składników A, C i B wynosi 823 doby. Dowodzi to, że masy składników A, B i C wynoszą odpowiednio 0,12, 0,12 i 0,10 masy Słońca, co stanowi dość cenne uzupełnienie wiadomości o masach i jasnościach najmniej masywnych gwiazd.

O ile czerwone karły nie powinny ulec zmianom ewolucyjnym przez najbliższe miliardy lat, to białe karły są pozostałościami po gwiazdach dużo masywniejszych i dużo szybciej kończących ewolucję. Najbardziej znanym z nich jest Syriusz B. Ma masę równą masie Słońca, a rozmiary podobne do rozmiarów Ziemi. Jest on również najgorętszym spośród obiektów w naszym otoczeniu. Jego temperatura efektywna wynosi blisko 25 000 K. Wiek układu Syriusza, w którym składniki obiegają się raz na 50 lat, jest szacowany na około 250 mln lat. Obecny Syriusz B był, jak można się domyślać, głównym składnikiem o początkowej masie około 5 mas Słońca i początkowej jasności 20 razy większej niż obecna jasność Syriusza A. Przejście przez wszystkie fazy gwiazdowej ewolucji zajęło mu około 120 mln lat i od około 120 mln lat stygnie jako biały karzeł, zmniejszając swoją jasność i temperaturę do obecnych wartości. Pozostałe cztery białe karły są już starsze i mniej masywne. Są to: Procyon B, jeden ze składników układu potrójnego 40 Eri (40 Eri B) oraz dwa pojedyncze białe karły: GJ 35 (Gwiazda van Maanena) i GJ 440.

Do 70 obiektów gwiazdowych, o których wspomiałem powyżej, zaliczyłem również dwa brązowe karły, tworzące bardzo interesujący układ podwójny związany z gwiazdą  $\epsilon$  Indi, znajdujący się w odległości 3,6 pc. Są one w odległości kątowej  $402''$  od głównego składnika, a więc odległość między nimi a widoczną gołym okiem gwiazdą typu widmowego K5 wynosi przynajmniej 1450 j.a. Ich masy zostały na razie oszacowane przez porównanie modeli stygnięcia brązowych karłów z obserwowaną jasnością i cechami spektroskopowymi. Należą one do typu widmowego T, który został wprowadzony dla brązowych karłów i charakteryzuje się obecnością linii widmowych pary wodnej i metanu. Wiek ich jest szacowany na od jednego do dwóch miliardów lat i oba składniki mają bardzo niskie temperatury efektywne, równe około 1300 i 900 K przy masach odpowiednio około 50 i 30 mas Jowisza (odpowiednio dla jaśniejszego i słabszego składnika). Ze względu na to mogą być obserwowane praktycznie tylko w podczerwieni. Układ ten jest bardzo interesujący ze względu na możliwość wyznaczenia masy brązowych karłów z trzeciego prawa Keplera. W sierpniu 2003 r. odległość kątowa między brązowymi karłami wynosiła  $0''{,}732$ , czyli co najmniej 2,6 j.a. Na dokładne określenie ich orbity trzeba będzie jeszcze poczekać przynajmniej

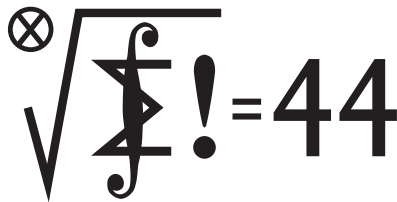
kilka lat. Bardzo ciekawe będzie jednak porównanie wartości mas składników układu wynikających z dynamiki i mas otrzymanych z modeli stygnięcia brązowych karłów.

Oprócz Słońca przynajmniej dwie z najbliższych nam gwiazd (najprawdopodobniej) mają planety. Stwierdzono to na podstawie bardzo dokładnych pomiarów zmian prędkości radialnych gwiazd. Bardzo interesujący jest układ planetarny gwiazdy GJ 876, znajdujący się w odległości 4,7 pc. Gwiazda macierzysta jest niewidocznym gołym okiem (jej wizualna jasność wynosi 10,2 mag) karłem typu widmowego M3, o masie około 0,3 masy Słońca. Obecnie znamy trzy obiegające ją planety; ich okresy obiegu wynoszą 1,94, 30,1 oraz 60,9 doby. Minimalne ich masy to 0,023, 0,56 i 1,94 masy Jowisza. Jeżeli porównamy ten układ z Układem Słonecznym, to wszystkie te trzy planety znajdują się w odległości od gwiazdy mniejszej niż Merkury od Słońca. Planeta zewnętrzna ma orbitę o niedużej eliptyczności, o wielkiej półosi 0,2 j.a., natomiast planeta środkowa zmienia swoją odległość od gwiazdy w zakresie od 0,09 do 0,16 j.a. Aż dziwne, że ten układ jeszcze istnieje!

Obecność planety przy  $\epsilon$  Eridani u niektórych astronomów budzi wątpliwości, gdyż aktywność chromosferyczna tej gwiazdy może być przyczyną zmian w liniach widmowych, które to zmiany mogą być interpretowane jako obecność planety. Na razie jednak w wykazach planet odkrytych poza Układem Słonecznym występuje  $\epsilon$  Eridani b, której okres orbitalny wynosi blisko siedem lat, minimalna masa jest równa 0,9 masy Jowisza, a mimośród orbity jest rzędu 0,5. Ponadto  $\epsilon$  Eridani otoczona jest masywnym dyskiem pyłowym, którego obecność może świadczyć o licznych zderzeniach zachodzących między planetoidami, a przyczyną jego obserwowanych deformacji może być obecność jeszcze jednej, bardziej odległej i mniej masywnej planety.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę, że za kilkadziesiąt tysięcy lat Słońce będzie miało już innych sąsiadów w swej wędrowce wokół centrum Galaktyki. Za około 27 000 lat Proxima Cen i  $\alpha$  Cen osiągną najmniejszą odległość od Słońca – znajdują się wtedy w odległości niecałego parseka. Na bliższe spotkanie Słońca ze znaną obecnie gwiazdą trzeba będzie poczekać ponad milion lat. Za 1,4 mln lat gwiazda GL 710 zbliży się do nas na odległość jednego roku świetlnego. Należy jednak wziąć pod uwagę, że gwiazda ta jest teraz odległa o 20 pc. W promieniu 20 pc od nas jest wciąż wiele nieodkrytych jeszcze słabo świecących gwiazd, które w przyszłości mogą być naszymi bliskimi sąsiadami.

Listę 100 najbliższych gwiazd można znaleźć pod adresem:  
<http://joy.chara.gsu.edu/RECONS/TOP100.htm>,  
a znacznie więcej informacji o wybranych gwiazdach na stronie:  
<http://www.solstation.com/index.html>.



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 V 2006

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

**402** ( $WT = 3,29$ ) i **403** ( $WT = 1,53$ )

z numeru 9/2005

Jerzy Witkowski – Radlin	43,98
Mateusz Łacki – Kraków	32,93
Konrad Kapcia – Częstochowa	27,70
Tomasz Tkocz – Rybnik	18,90
Andrzej Idzik – Bolesławiec	17,43
Jacek Konieczny – Poznań	14,91



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z matematyki nr 517, 518

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**517.** Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych  $x, y$ , dla których każda z liczb  $2x + y, 3x - 2y, 11x + 9y$  jest kwadratem liczby całkowitej.

**518.** Zbiór  $\{1, 2, \dots, 3n\}$  został podzielony w dowolny sposób na trzy rozłączne zbiory  $n$ -elementowe  $A, B, C$  ( $n$  jest dowolną liczbą naturalną). Udowodnić, że istnieją liczby  $a \in A, b \in B, c \in C$ , z których jedna jest równa sumie dwóch pozostałych.

Zadanie 518 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2005

Przypominamy treść zadań:

**509.** Dany jest nieskończony ciąg liczb dodatnich  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Niech  $c_n$  będzie największą liczbą całkowitą, której kwadrat nie przekracza

$$(a_1 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Wykazać, że ciąg  $c_1, c_2, c_3, \dots$  jest ściśle rosnący.

**510.** Dla ustalonej liczby naturalnej  $n$  rozważamy zbiór  $X$ , którego elementami są wszystkie ciągi  $(x_1, \dots, x_n)$  o wyrazach równych 0 lub 1. Określamy odległość

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

dla  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$ . Niech  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$  spełniają warunek  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \delta(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \ell$  (wierzchołki „trójkąta równobocznego” w przestrzeni metrycznej  $(X, \delta)$ ). Wyznaczyć (w zależności od  $\ell$ ) najmniejszą liczbę  $r$ , dla której istnieje taki punkt  $\mathbf{s} \in X$ , że  $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = r$ .

**509.** Oznaczając

$$s_n = a_1 + \dots + a_n, \quad t_n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n},$$

przepisujemy określenie  $c_n$  jako  $c_n = \lfloor \sqrt{s_n t_n} \rfloor$ . Mamy ciąg zależności

$$s_{n+1} t_{n+1} = (s_n + a_{n+1}) \left( t_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = s_n t_n + X_n + 1,$$

gdzie

$$X_n = a_{n+1} t_n + \frac{s_n}{a_{n+1}} \geq 2\sqrt{s_n t_n}$$

(średnia arytmetyczna i geometryczna). Zatem

$$s_{n+1} t_{n+1} \geq s_n t_n + 2\sqrt{s_n t_n} + 1 = (\sqrt{s_n t_n} + 1)^2,$$

czyli  $\sqrt{s_{n+1} t_{n+1}} \geq \sqrt{s_n t_n} + 1$ , skąd wniosek, że  $c_{n+1} \geq c_n + 1$ .

**510.** Jak łatwo sprawdzić, odległość  $\delta$  spełnia warunki wymagane od metryki – w szczególności warunek trójkąta. Jeśli więc punkty  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  są wierzchołkami „trójkąta równobocznego” o boku  $\ell$  i jeśli istnieje punkt  $\mathbf{s} \in X$  leżący w jednakowej  $\delta$ -odległości od każdego z nich, to  $\ell = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) + \delta(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = 2r$ . Pokażemy, że równość  $2r = \ell$  daje się zrealizować.

Niech  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ .

Określamy zbiory wskaźników

$$A = \{i: x_i = 1, y_i = 1, z_i = 1\}, \quad E = \{i: x_i = 1, y_i = 0, z_i = 0\},$$

$$B = \{i: x_i = 1, y_i = 1, z_i = 0\}, \quad F = \{i: x_i = 0, y_i = 1, z_i = 0\},$$

$$C = \{i: x_i = 1, y_i = 0, z_i = 1\}, \quad G = \{i: x_i = 0, y_i = 0, z_i = 1\},$$

$$D = \{i: x_i = 0, y_i = 1, z_i = 1\}, \quad H = \{i: x_i = 0, y_i = 0, z_i = 0\}.$$

Oznaczmy liczby elementów w zbiorach  $A, B, \dots, H$  odpowiednio małymi literami  $a, b, \dots, h$ . Wówczas

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d + e + c + f,$$

$$\delta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = c + f + b + g,$$

$$\delta(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = b + g + d + e.$$

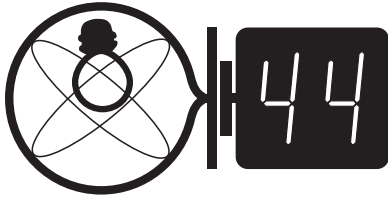
Te trzy liczby są z założenia równe  $\ell$ , skąd wynika, że  $d + e = c + f = b + g = \frac{1}{2}\ell$  (liczba  $\ell$  jest więc parzysta).

Wystarczy teraz przyjąć  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ ,

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \in A \cup B \cup C \cup D, \\ 0 & \text{dla } i \in E \cup F \cup G \cup H. \end{cases}$$

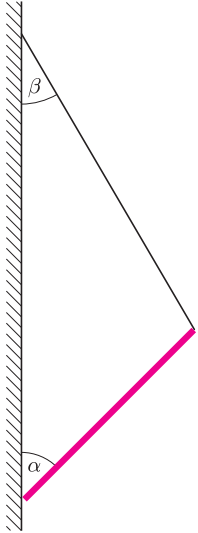
Tak określony punkt  $\mathbf{s}$  spełnia równości  $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = d + e, \delta(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = c + f, \delta(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = b + g$ ; każda z tych trzech liczb jest równa  $\frac{1}{2}\ell$ . Zatem  $r = \frac{1}{2}\ell$  jest minimalną liczbą o postulowanej własności.

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 V 2006



Rys. 1

**414.** Jednorodna belka jednym końcem opiera się o pionową ścianę, tworząc z nią kąt  $\alpha$ , a drugi jej koniec jest podtrzymywany przez linkę tworzącą ze ścianą kąt  $\beta$  (rys. 1). Jaki musi być współczynnik tarcia między belką a ścianą, aby belka nie zsunęła się w dół?

**415.** W pewnej metodzie rozdzielania dwóch izotopów  $A$  i  $B$  pewnego pierwiastka elementarną operacją jest rozdzielenie 2 moli mieszaniny zawierającej  $2p_A$  moli izotopu  $A$  na 1 mol mieszaniny, w której stosunek liczb moli jest  $r$  razy większy od wyjściowego

$$\frac{p'_A}{p'_B} = \frac{p_A}{p_B} r$$

i 1 mol pozostałości. Ponadto na każdym etapie dopuszczalne jest łączenie (mieszanie) dowolnie wybranych próbek. Jeśli  $r = 1,03$ , to ile elementarnych operacji trzeba przeprowadzić, aby z 1000 moli mieszaniny o składzie 50% $A$  i 50% $B$  wyodrębnić 400 moli mieszaniny zawierającej 80% izotopu  $A$ ?

Wystarczy odpowiedź przybliżona.

Wskazówka: Rozwiązanie może być oparte na obliczeniach komputerowych, albo też na wzorach na entropię mieszaniny.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2005

Przypominamy treść zadań:

**406.** Gęstość szkła wynosi  $2,5 \text{ g/cm}^3$ , a współczynnik załamania  $1,5$ . Obliczyć natężenie strumienia światła skierowanego w górę (moc na jednostkę powierzchni prostopadłej) niezbędne do tego, aby w nim lewitowała kulka o promieniu  $0,1 \text{ mm}$  wykonana z tego szkła. Odbicie światła od powierzchni kulki, absorpcję, a także efekty falowe (dyfrakcję) należy pominąć.

**407.** Obwód elektryczny składa się ze źródeł siły elektromotorycznej i oporników podlegających prawu Ohma; ponadto w obwodzie znajduje się amperomierz oraz opornik o zmiennej oporności (niekoniecznie sąsiadujące). Stwierdzono, że przy dwóch różnych wartościach oporności tego opornika amperomierz wskazywał jednakową wartość natężenia prądu. Czy jest możliwe, żeby przy jeszcze innej oporności tego samego opornika amperomierz zmienił wskazanie?

**406.** Jeśli promień światła pada na kulkę o promieniu  $R$  wykonaną ze szkła w odległości  $r$  od jej osi (zob. rys. 2), to kąt padania jest równy

$$\alpha = \arcsin(r/R),$$

kąt załamania

$$\beta = \arcsin(r/nR),$$

kąt odchylenia od kierunku początkowego

$$\gamma = 2(\alpha - \beta),$$

a zmiana składowej pędu promienia wzdłuż kierunku początkowego

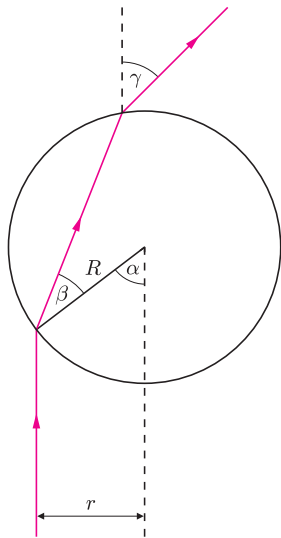
$$\Delta p = p(1 - \cos \gamma).$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenia

$n$  – współczynnik załamania,

$p$  – pęd początkowy. Moc

promieniowania  $dP$  padającego na kulkę w przedziale odległości od osi od  $r$  do  $r + dr$  jest równa iloczynowi natężenia światła  $I$  przez powierzchnię pierścienia o grubości  $dr$ , tzn.  $dP = I \cdot 2\pi r dr$ . Po podzieleniu tej wielkości przez prędkość światła  $c$  otrzymujemy pęd niesiony przez tę wiązkę promieniowania w ciągu 1 sekundy, czyli siłę, która byłaby wywierana przez wiązkę, gdyby uległa ona absorpcji. Jak wynika z poprzedniego rozumowania, rzeczywistą siłę  $F$  unoszącą kulkę otrzymamy mnożąc  $dP/c$  przez czynnik



Rys. 2

$(1 - \cos \gamma)$  i całkując od 0 do  $R$ . Po wprowadzeniu zmiennej  $u = r/R$  otrzymujemy wyrażenie

$$F = \frac{1}{c} 2\pi R^2 \int_0^1 \left\{ 1 - \cos \left[ 2 \left( \arcsin u - \arcsin \frac{u}{n} \right) \right] \right\} u du.$$

Występującą tu całkę można obliczyć prawdopodobnie tylko numerycznie – dla podanej wartości  $n$  okazuje się ona równa  $0,120$ . Po przyrównaniu  $F$  do ciężaru kulki  $\frac{4}{3}R^3\rho g$  ( $\rho$  – gęstość szkła) otrzymujemy

$$I = \frac{4}{3 \cdot 0,120} R \rho g c = 8,2 \text{ GW/m}^2 = 8,2 \text{ kW/mm}^2.$$

**407.** Żadna zmiana w rozkładzie prądów w obwodzie nie nastąpi, jeśli zamienimy opornik na źródło siły elektromotorycznej o wartości równej napięciu na tym oporniku. Zmiana oporu opornika jest równoważna zmianie tej siły elektromotorycznej (pomijamy banalny przypadek, gdy przez opornik prąd nie płynie i ta siła elektromotoryczna jest równa zero). Z drugiej strony, opisany obwód jest liniowy, tzn. natężenie prądu płynącego przez amperomierz jest liniową funkcją każdej z sił elektromotorycznych występujących w obwodzie. Funkcja liniowa przybierająca jednakową wartość dla dwóch różnych argumentów jest stała – dlatego zmiana wskazania amperomierza nie jest możliwa.

Można wykazać, że najogólniejszą postacią zależności natężenia prądu w wybranej gałęzi od oporu opornika jest funkcja homograficzna

$$I = \frac{aR + b}{cR + d}.$$





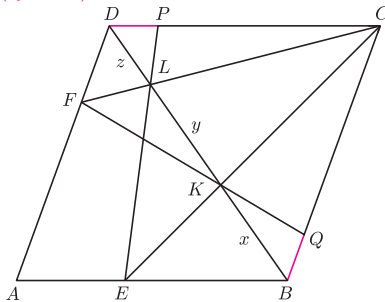
### Rozwiązanie zadania M 1126.

Przyjmijmy, że liczba  $n$  jest dzielnikiem liczby  $m$  oraz  $n < m$ . Wtedy  $n \mid m - n$ . Ponadto  $9 \mid m - n$ , gdyż sumy cyfr liczb  $m$  i  $n$  są jednakowe. Liczby  $n$  i  $9$  są względnie pierwsze, ponieważ liczba  $n$  daje z dzielenia przez  $3$  resztę  $1$ . Zatem  $9n \mid m - n$ , co jest niemożliwe, gdyż  $9n > m - n$  (liczba  $10n$  jest ośmiocyfrowa, a zatem większa od  $m$ ). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wśród uzyskanych liczb nie ma takich dwóch, z których jedna jest podzielna przez drugą.



### Rozwiązanie zadania M 1127.

Wystarczy udowodnić, że  $DP = BQ$  (rysunek).



Oznaczmy przez  $a$  długość boku rombu oraz niech  $BK = x$ ,  $KL = y$ ,  $LD = z$ . Na mocy twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{DP}{BE} = \frac{z}{x+y} \quad \text{oraz} \quad \frac{BE}{CD} = \frac{x}{y+z},$$

skąd  $DP = \frac{axz}{(x+y)(y+z)}$ .

Analogicznie obliczamy długość odcinka  $BQ$ :

$$\frac{BQ}{DF} = \frac{x}{y+z} \quad \text{oraz} \quad \frac{DF}{BC} = \frac{z}{x+y},$$

a zatem  $BQ = \frac{axz}{(x+y)(y+z)}$ .

Stąd teza.



### Rozwiązanie zadania M 1128.

Wykażemy, że taka funkcja nie istnieje. Przyjmijmy, że  $f$  jest funkcją spełniającą warunki zadania. Wstawiając  $m = n = 1$ , otrzymujemy  $f(1) = 0$ . Zatem  $f(n) \geq 1$  dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$ . W szczególności  $f(2) \geq 1$  oraz  $f(3) \geq 1$ . Jeśli  $k \geq 1$  jest ustaloną liczbą naturalną, to

$$\begin{aligned} f(m^k) &= f(m) + f(m^{k-1}) = \\ &= 2f(m) + f(m^{k-2}) = \dots = kf(m). \end{aligned}$$

Podstawmy  $k = f(2)$ ,  $m = 3$ . Wtedy

$$\begin{aligned} f(3^{f(2)}) &= f(2) \cdot f(3) = \\ &= f(3) \cdot f(2) = f(2^{f(3)}). \end{aligned}$$

Skoro  $f$  jest różnowartościowa, to  $3^{f(2)} = 2^{f(3)}$ . Uzyskaliśmy sprzeczność.

### Odpowiedź do pytania ze strony 6.

Ograniczoność: wystarczy rozważyć

$A = \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(0; 0)\}$ ,  $C = \{(1; 1)\}$ .

Domkniętość: wystarczy rozważyć

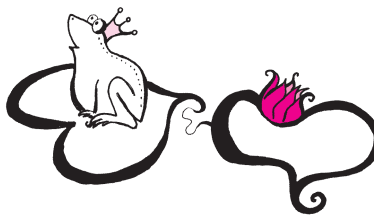
$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = (0; 1)$ ,  $C = (0; 1)$ .

## Patrz w niebo

Ponad 50% galaktyk to galaktyki spiralne. W przypadkach, gdy struktura galaktyki jest niezakłócona, ramiona są dwa i w dobrym przybliżeniu mają kształt spirali logarytmicznej. Od dawna wiadomo, że ramiona galaktyk to tzw. fale gęstościowe, czyli miejsca, gdzie gwiazdy (i materia międzygwiazdowa) są akurat upakowane gęściej niż między ramionami, przy czym gwiazdy w tych falach nieustannie się wymieniają. Wynika to z faktu, że materia tworząca ramiona (czyli gwiazdy i materia rozproszona) podlega grawitacji własnej, grawitacji centralnego zgęszczenia galaktyki, biorąc zarazem udział w rotacji galaktyki. Taki dość skomplikowany mechanizm tłumaczy zarówno kształt ramion, jak i to, że są one ostatecznie strukturami bardzo trwałymi – stąd tak duża ilość galaktyk spiralnych.

Gdy Teleskop Hubble'a zaczął dostarczać wysokiej jakości zdjęcia galaktyk spiralnych, okazało się, że u wielu takich galaktyk w centralnej części (*bulge*) widać mnóstwo delikatnych spiralnych włókien gwiazd i materii międzygwiazdowej sięgających samego centrum galaktyki i gęsto wypełniających obszar całego „centralnego zgęszczenia”. Dla wyjaśnienia tych struktur wysunięto pomysł, że są to obrazy fal akustycznych. Modelowe obliczenia wykazały, że obiegające centrum galaktyki zgęszczenia gwiazd mogą rzeczywiście wywoływać zgęszczenia materii rozproszonej, wyciągające się w długie włókna zaginające się ku centrum. Zdaniem badaczy tego problemu rozwiązywałoby to jednocześnie zagadkę: czym żywi się czarna dziura w centrum aktywnej galaktyki? Dostarczanie jej materii z otoczenia łatwo jest sobie wyobrazić, gdy galaktyka jest zaburzona przez inną sąsiednią. Natomiast w galaktyce „normalnej” odpowiedzialne za to byłyby właśnie fale akustyczne, nieuchronnie generujące w różnych miejscach centralnego zgęszczenia fale uderzeniowe, a jako dalszy skutek – chaotyczne ruchy gazu, którego jakaś część musiałaby stale opadać na centralną czarną dziurę.

Tomasz KWAST



## Marzec

Między dwiema bardzo jasnymi gwiazdami, Syriuszem i Procyonem, widocznymi w marcu na wieczornym niebie, leży gwiazdozbiór Jednorożca. Znajduje się w nim gromada otwarta gwiazd NGC 2244, o jasności 4,7 mag (czyli w zasadzie dostrzegalna gołym okiem), zawierająca niecałe 20 gwiazd i położona w odległości 5,8 pc. Gromada ta stanowi centrum pięknej mgławicy Rozeta, widocznej oczywiście dopiero na zdjęciach teleskopowych. W pobliżu znajduje się inna mgławica, Stożek, o jasności 4,4 mag i odległa o 1 kpc. Obie mgławice są aktywnymi obecnie obszarami gwiazdotwórczymi.

Wenus jest w Koziorożcu i wschodzi przed wschodem Słońca. W największej odległości od Słońca znajdzie się 25 III. Mars jest w Byku i widać go wieczorem w zachodniej części nieba. Jowisz jest w Wadze; wschodzi koło północy. Saturn jest w Raku; wieczorem znajduje się już dość wysoko na niebie i widać go do rana. Pełnia Księżyca wypada 15 III i nastąpi wtedy jego półcieniowe zaćmienie, z maksymalną fazą około godz. 1. Nów będzie 29 III i wtedy nastąpi całkowite zaćmienie Słońca, widoczne w Brazylii, Afryce, Turcji, południowo-zachodniej Rosji i północnej części Mongolii. Księżyc zakryje Spikę 17 III (widoczne z Hawajów i z najbardziej zachodniego skraju Ameryki Południowej) i Antaresa 21 III (widoczne z północno-wschodniego skraju Ameryki Południowej i południowego krańca Afryki). Wieczorem 20 III nastąpi równonoc wiosenna, a w nocy 25/26 III przechodzimy na czas letni.

T. K.

Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia  $A$  pod warunkiem, że zaszło zdarzenie  $B$  (o dodatnim prawdopodobieństwie) nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Znane są liczne przykłady prostych zadań, w których obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego daje zaskakujący wynik (patrz np. [2]). Punktem wyjścia będzie umiarkowany pod tym względem

**Przykład 1.** Losujemy jedną rodzinę spośród rodzin z dwojgiem dzieci. Jaka jest szansa, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiemy, że w tej rodzinie jest co najmniej jeden chłopiec?

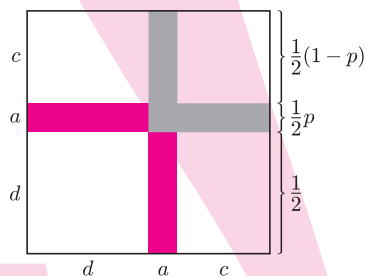
Rozwiązanie. Przyjmijmy, że zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  składa się z czterech jednakowo prawdopodobnych par:  $\{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$ , gdzie pierwszy element pary oznacza młodszego dziecko, a drugi – starsze. Obliczamy

$$P(\{(c, c)\} | \{(c, c), (d, c), (c, d)\}) = 1/3.$$

Teraz nieco bardziej zaskakujący

**Przykład 2.** Dowiedzieliśmy się, że w rodzinie z przykładu 1 jest chłopiec, który ma na drugie imię Antoni. Czy szansa, że w rodzinie jest dwóch chłopców, nadal wynosi 1/3?

Ostatecznie chłopiec musi mieć jakieś imię – czy zatem dowiedzieliśmy się czegoś istotnie nowego, co mogłoby zmienić szanse badanego zdarzenia? Zobaczmy. Mamy teraz trzy kategorie dzieci ( $c, a, d$ ) i dziewięć zdarzeń elementarnych. Antoni to rzadkie imię – chłopiec ma szansę  $p$ , że je otrzyma. Wbrew utartym zwyczajom niech  $\Omega$  będzie kwadratem jednostkowym – będziemy obliczać pola figur.



Szukane prawdopodobieństwo to stosunek pola części krzyża pomalowanej na szaro do pola całego krzyża:

$$\frac{\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^2}{p - \frac{1}{4}p^2} = \frac{2-p}{4-p}.$$

Ciężko w to uwierzyć; błędu rachunkowego chyba nie ma. Dla  $p = 1$  (każdy chłopiec to Antoni) uzyskujemy odpowiedź z przykładu 1. Ale i tak coś jest zasadniczo nie w porządku.

Zadanie to ukazało się w książce [1], napisanej przez psychologa, badającego reakcje ludzi na takie dziwne zadania. Zostało ubrane w tekst o osiedlu, na którym mieszkają wyłącznie rodziny z dwojgiem dzieci. Widząc ojca z synem na spacerze, dowiadujemy się, że syn ma na imię Antoni, etc.

Sprecyzujmy zatem warunki doświadczenia. Niech dzieci będą wyprowadzane na spacer w wyniku sprawiedliwego (inaczej rodzice ryzykują awanturę) losowania. Zbiór zdarzeń elementarnych będzie musiał zostać wzbogacony – oto typowe zdarzenie elementarne:  $(a, a; 1)$ , co czytamy: młodszy Antoni, starszy Antoni, na spacerze młodszy.

Teraz okazuje się, że już jest normalnie: jeśli na spacerze jest Antoni, to szansa, że w domu została dziewczynka, wynosi  $\frac{1}{2}$ , chłopiec (nie Antoni) –  $\frac{1}{2}(1-p)$ , wreszcie Antoni –  $\frac{1}{2}p$ , zgodnie z częstościami występowania wymienionych kategorii dzieci. Tak powinno być, ponieważ dokonujemy tu losowania dwuetapowego – najpierw rodziny, potem dziecka.

Powyższe wyniki można uzyskać, wypisując pracowicie zdarzenia elementarne, nic dziwnego więc, że wolimy wzór Bayesa.

Niech na przykład  $H_k$ ,  $k = 0, 1, 2$  oznacza zdarzenie „w rodzinie jest  $k$  dzieci o drugim imieniu Antoni”,  $A$  zaś – „Antoni jest na spacerze”. Obliczamy

$$\begin{aligned} P(H_2|A) &= \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \\ &= \frac{1 \cdot P(H_2)}{0 \cdot P(H_0) + \frac{1}{2} \cdot P(H_1) + 1 \cdot P(H_2)} = \\ &= \frac{2P(H_2)}{P(H_1) + 2P(H_2)} = \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{4}p^2}{p(1 - \frac{1}{2}p) + 2 \cdot \frac{1}{4}p^2} = \\ &= \frac{1}{2}p. \end{aligned}$$

Wobec tego w jakich warunkach można się spodziewać wyniku  $\frac{2-p}{4-p}$ ? Może w takich: w urzędzie gminy jest kartoteka z danymi o rodzinach z dwojgą dzieci. Znajomy urzędnik wyjmie losowo kartę i informuje nas, że w rodzinie jest syn o drugim imieniu Antoni. My oceniamy szansę, że w rodzinie jest dwóch synów (być może obaj o drugim imieniu Antoni).

## Literatura

- [1] Deborah J. Bennett, *Randomness*, Harvard University Press, 1998.
- [2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Prawdopodobieństwo warunkowe*, Delta, 10/2003.

\*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego