

Nagrodę Dziekanów

dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie*
w roku akademickim 2004/2005

uzyskał

Janusz Skalski

za artykuł *Kwanty światła, efekt fotoelektryczny i realność fotonów*
zamieszczony w *Delcie* 6(273)/2005

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (381)

Pierwszy nowoczesny
zegarmistrz
Marek Kordos

Mała Delta:

Nieskończona zabawa
Wiktor Bartol

Reakcje oscylacyjne
Ewa Gudowska-Nowak

Zadania

Kolorowe czapeczki –
kontynuacja
Andrzej Dąbrowski

Aktualności

Klub 44

Patrz w niebo

Luty

Rozkład św. Mikołaja
Rafał Sztencel

str. 1

str. 5

str. 6

str. 7

str. 8

str.10

str.11

str.16

str.16

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichocki, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: 022-5328-731, lub -820, lub -816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Diagramy Venna

Twierdzenia o sile odśrodkowej wywołanej jednostajnym ruchem po kole.

I. Jeśli dwa jednakowe ciała w jednakowym czasie obiegają niejednakowe okręgi, to ich siły odśrodkowe są proporcjonalne do długości tych okręgów czy też do ich średnic.

II. Jeśli dwa jednakowe ciała krążą z jednakową prędkością po różnych okręgach, to ich siły odśrodkowe są odwrotnie proporcjonalne do średnic tych okręgów.

III. Jeśli dwa jednakowe ciała krążą po jednakowych okręgach z różnymi prędkościami, to ich siły odśrodkowe są proporcjonalne do kwadratów tych prędkości.

IV. Jeśli dwa jednakowe ciała krążą po różnych okręgach, wywołując takie same siły odśrodkowe, to okresy ich obiegu są proporcjonalne do pierwiastków kwadratowych ze średnic.

V. Jeśli ciało krąży po okręgu z taką prędkością, jaką by osiągnęło spadając z wysokości $1/4$ średnicy okręgu, to wywołana przez nie siła odśrodkowa jest równa jego ciężarowi, czyli ciągnie ono za nić, którą jest przymocowane do środka, z taką siłą, z jaką ciągnęłoby za nią swobodnie zwisając.

VI. Jeśli ciało biegnie po różnych poziomych okręgach leżących na jednej paraboloidzie obrotowej, to czas obiegu jest taki sam, niezależnie od tego, czy zakreślone okręgi są większe czy mniejsze; czas ten jest dwukrotnie dłuższy od okresu drgań wahadła, którego długość jest równa połowie parametru paraboli tworzącej tej paraboloidy.

Co to jest? Są to twierdzenia zawarte w V części księgi Christiaana Huygensa „Zegar wahadłowy” (1673), podsumowującej badania nad jego ulubionym tematem.

CV – tak, jak teraz wypada, krótkie

Christiaan Huygens urodził się w Hadze (Holandia) 14 kwietnia 1629 roku. Studiował w Lejdzie i Bredzie. W latach 1665–81 mieszkał w Paryżu, został zresztą wybrany członkiem Paryskiej Akademii Nauk. Potem powrócił do Hagi, gdzie zmarł 8 lipca 1695 roku.

Był astronomem, fizykiem, mechanikiem i matematykiem. Najwięcej czasu zabrały mu prace nad doskonaleniem – tak teoretycznym, jak praktycznym – zegarów. Uzyskał tu piękne wyniki w badaniach nad wahadłami. Skonstruował pierwszy zegar wahadłowy, stworzył wahadło izochroniczne płaskie i stożkowe, a także rozwiązał zagadnienie wahadła fizycznego – o tym będzie mowa w zasadniczej części tego tekstu. Zaczął swoje badania od prostszej mechaniki – w wieku 17 lat podjął trud opisania rzutu poziomego. Tu jednak mądrzy nauczyciele podsunęli mu do czytania prace niedawno zmarłego Galileusza – Christiaan orzekł, że „nie ma sensu pisanie *Iliady* po Homerze”, a pełnym czci i zapału kontynuatorem Galileusza pozostał do końca życia.

Nic więc dziwnego, że zajął się doskonaleniem zbudowanego przez Galileusza (w 1609 roku) teleskopu. Było to znaczne udoskonalenie, bo uzyskał 92-krotne powiększenie (Galileusz 20-krotne), a powstały przy tej okazji okular do tej pory nosi jego nazwisko i jest stosowany w praktyce. Za pomocą tego teleskopu odkrył pierścienie Saturna i Tytana – jego satelitę, co obalilo

panujące od pół wieku przekonanie, że – poza Ziemią – satelity ma tylko Jowisz (Galileusz nazwał satelity Jowisza Gwiazdami Medycejskimi i twierdził, że żaden inny ród na swoje gwiazdy nie zasłużył). Jako zapalony mechanik skonstruował też „maszynę planetarną” – pierwowzór planetarium. Zajmował się także kształtem Ziemi i twierdził, że ma ona kształt dysku, a nie wrzeciona, jak przypuszczał Kartezjusz (podobnie Newton obstawał przy dysku – potwierdzone to zostało w stulecie później przez pomiary Maupertuisa).

Kolejny ważny krąg zainteresowań Huygensa to światło. Właśnie sformułowanie (niezależnie od Hooke’a) falowej teorii światła i wyjaśnienie z jej pomocą szeregu zjawisk optycznych stało się bezpośrednim powodem przyjęcia go do Akademii Paryskiej. Podsumowuje to „Traktat o świetle” (1690).

Zegarmistrz

Dla matematyka najciekawsze są jednak jego prace dotyczące zegarów. Najpierw rozwiązał problem mechaniczny. Do tej pory zegary były poruszane przez wagi, których tempo obniżania się było regulowane przez rozmaite zaciski (wiadomo np., że Tycho Brahe swoje zegary codziennie podregulowywał młotkiem). Galileusz stwierdził, że do regulacji tempa poruszania się wskazówek musi być użyte jakieś zjawisko periodyczne, a jedynym takim, znanym wówczas, było wahadło. Huygens zbudował więc pierwszy zegar z wahadłem (patent Stanów Holenderskich z czerwca 1657). Tempo opuszczania się wagi reguluje w nim, używany do dziś, typ wychwyty, mechanizm w kształcie kotwiczki z ukośnie przyciętymi zębami.

Jako perfekcjonista zwrócił jednak uwagę na istotny brak klasycznego (dziś) zegara wahadłowego. Jak to już stwierdził Galileusz, okres zwykłego wahadła, jak mówi się na lekcjach fizyki, nie zależy od wychyleń tylko wtedy, gdy wychylenia są małe (ciekawe, że są tacy, którzy nie dostrzegają w takim sformułowaniu paradoksu). Sprawa, dla której Huygens podniósł tę kwestię, miała jednak wymiar nie logiczny, lecz ściśle praktyczny. Otóż bez zegara nie było możliwe określenie długości geograficznej. I chciano, by taki zegar mógł chodzić na kołyszącym się okręcie, gdzie o jedynie małe wychylenia wahadła nie sposób było zadbać.

Długość geograficzną (przed GPS) określa się np. przez stwierdzenie, która godzina jest w Londynie, podczas gdy u nas jest południe. Różnicę czasu (w godzinach) dzielimy przez 15 i to jest długość geograficzna – wschodnia, gdy południe jest wcześniej niż w Londynie, – zachodnia, gdy później. Do mierzenia szerokości wystarczy (na półkuli północnej) natomiast tylko zmierzenie kąta wzniesienia Gwiazdy Polarnej – to właśnie jest szerokość. Bowiem szerokość jest pojęciem obiektywnie określonym przez przyrodę, a długość jest tylko umownym pojęciem wprowadzonym przez ludzi.

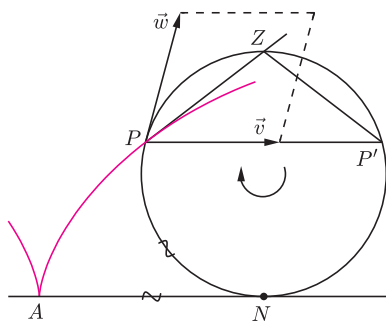
Wiek XVII to czas niesłychanego rozwoju floty tak angielskiej, jak holenderskiej, to czas, gdy europejskie żaglowce opływały całą kulę ziemską. Problem okrętowego zegara miał więc ogromną wagę. Już w 1636 roku holenderski admirał, Real, zwrócił się z takim zamówieniem do Galileusza, ten jednak zamówienia nie wykonał. Po śmierci Galileusza z kolei admiralicja

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

angielska ogłosiła konkurs na konstrukcję zegara okrętowego, oferując ogromną nagrodę 20 tys. funtów (co odpowiada dziś około 2 mln funtów). Jest rzeczą charakterystyczną, że swoje prace nad zegarem wahadłowym odpornym na kołysanie Huygens rozpoczął od rozważań matematycznych. Punkt materialny na nieważkiej nici, czyli teoretyczne płaskie wahadło, porusza się po okręgu i stąd się bierze zależność okresu od wychylenia. Dla małych wychyleń

Tautochrona (albo *izochrona*) to linia w płaszczyźnie pionowej, mająca tę własność, że położona na niej w dowolnym miejscu kulka (pod wpływem grawitacji, przy zaniechaniu oporów ruchu) stoczy się do jej najniższego punktu w takim samym czasie. Huygens rozpoczął od znalezienia takiej linii. Udowodnił, że jest nią cykloida.

Warto podkreślić, że dowód Huygensa, iż cykloida jest tautochroną, w całości jest dostępny dla średnio zdolnego gimnazjalisty.



Rys. 1

Cykloida to droga ustalonego punktu okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej. Linia ta składa się z arkad łączących się ostrzami, przy czym łuk okręgu od punktu cykloidy do punktu styczności z prostą jest równej długości z odcinkiem od tego punktu styczności do ostrza. Trudniej dostrzec, że styczna do cykloidy zawsze przechodzi przez (aktualnie) najwyższy punkt wyznaczającego ją okręgu. Istotnie, skoro ruch odbywa się bez poślizgu, więc wektor \vec{v} jego prędkości w ruchu (poziomym) po prostej jest tej samej długości, co wektor \vec{w} prędkości liniowej jego ruchu obrotowego. Wektory te tworzą zatem romb, którego przekątną jest ich wypadkowa. Aby wykazać, że przechodzi ona przez najwyższy punkt okręgu, wystarczy (oznaczenia z rysunku) wykazać, że \vec{PZ} jest dwusieczną kąta $\vec{v}\vec{w}$ (gdyż przekątne rombu są dwusiecznymi jego kątów). Ale kąt wpisany $PP'Z$ jest równy kątowi między zamykającą go cięciwą PZ i styczną do okręgu (wektor \vec{w}), kąty zaś $PP'Z$ i $P'PZ$ są równe, bo trójkąt $PP'Z$ jest równoramienny (PP' jest poziomy, a Z jest najwyższym).

Oczywiście, cykloida, jako tautochrona, występuje „do góry rogami”. Na niej położmy kulkę w punkcie P (leżącym na wysokości H nad najniższym punktem cykloidy) i pozwólmy jej się staczać. Po upływie czasu t znajdzie się ona w punkcie K (leżącym na wysokości $h(t)$). Zajmować się będziemy tylko wysokością, na której jest kulka. Dlatego też z wektora jej prędkości \vec{v} interesować nas będzie jedynie jego pionowa składowa \vec{v}_\perp .

po torze, z którym sobie rachunkowo poradzimy: będzie to półokrąg o średnicy H . A związana z rzeczywistą kulką będzie przez założenie, że obniża się w tym samym tempie, co kulka realna, czyli też interesować się będziemy tylko pionową składową jej ruchu. Tym razem mamy

$$\frac{|\vec{w}_\perp|}{|\vec{w}|} = \frac{K'L'}{K'S} = \frac{\sqrt{PL' \cdot L'Q}}{PS} = \frac{\sqrt{(H-h(t)) \cdot h(t)}}{\frac{H}{2}}$$

Jak poprzednio, korzystamy najpierw z podobieństwa trójkątów (mają boki odpowiednio prostopadłe), a potem z własności trójkąta prostokątnego (jest nim $PK'Q$). Z założenia składowe pionowe obu prędkości mają być równe, co daje

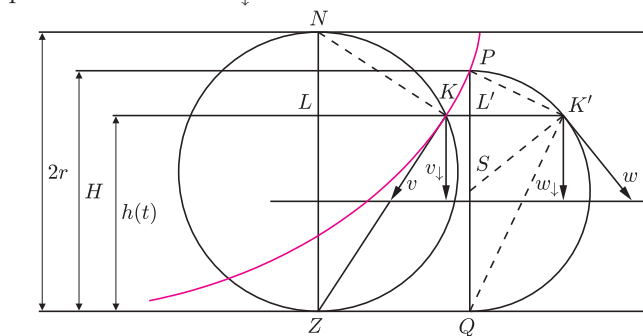
$$|\vec{v}| \cdot \sqrt{\frac{h(t)}{2r}} = |\vec{v}_\perp| = |\vec{w}_\perp| = |\vec{w}| \cdot \frac{2\sqrt{(H-h(t)) \cdot h(t)}}{H},$$

czyli

$$(*) \quad |\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \frac{H}{2} \sqrt{\frac{1}{2r(H-h(t))}}.$$

Zauważmy, że do tej pory nigdzie nie został wykorzystany fakt, iż mamy do czynienia ze spadkiem realnej kulki pod wpływem grawitacji. Ten aspekt ruchu wyraża się np. w fakcie, że energia kinetyczna równa jest utracie energii potencjalnej, a więc $\frac{m\vec{v}^2}{2} = mg(H-h(t))$, czyli $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{2g(H-h(t))}$. Wstawiając to do (*), stwierdzamy, że $|\vec{w}| = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{r}}$, co nie zawiera t – ruch kulki wirtualnej jest więc jednostajny. Skoro tak, to można łatwo obliczyć, ile trwa: $T = \frac{\pi \frac{H}{g}}{\frac{H}{2}} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Jest więc stały – nie zależy od H , a więc od wysokości, na jakiej położyliśmy kulkę. Cykloida faktycznie jest tautochroną.

No dobrze, ale jak zrobić wahadło tautochroniczne, jak zmusić kulkę na nitce, by wahała się po cykloidzie?



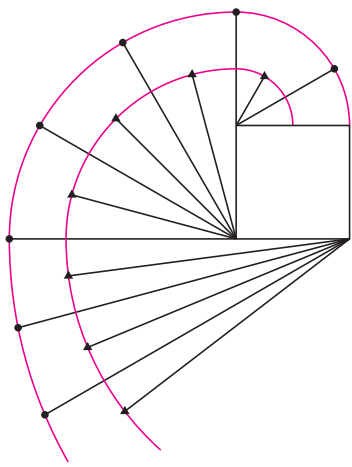
Rys. 2

Posługując się rysunkiem, stwierdzamy, że

$$\frac{|\vec{v}_\perp|}{|\vec{v}|} = \frac{LZ}{KZ} = \frac{LZ}{\sqrt{LZ \cdot NZ}} = \sqrt{\frac{LZ}{NZ}} = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}}.$$

Pierwsza z tych równości wynika ze wskazanej przed chwilą własności stycznej – skoro wektor \vec{v} wskazuje na punkt Z , więc trójkąt utworzony przez wektory \vec{v} i \vec{v}_\perp jest podobny do trójkąta ZKL . Druga z równości bierze się stąd, że trójkąt ZKN jest prostokątny (kąt ZKN jest oparty na średnicy).

Co robić dalej? Genialny pomysł Huygensa to wprowadzenie kulki wirtualnej – ma ona poruszać się



Rys. 3

Pomysł Huygensa był prosty: wyciąć np. z drewna odpowiednie kształtki, ograniczające ruch nici. Odpowiednie, to znaczy jakie? I znów w ruch poszła matematyka.

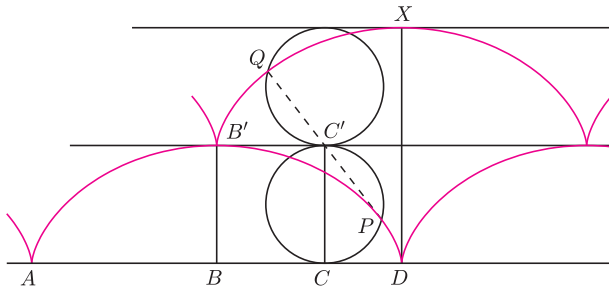
Tym razem Huygens wprowadził nowe pojęcie – ewolwentę.

Rozwijanie nici

Weźmy (nieruchomą) szpulkę o jakimkolwiek przekroju i rozwijajmy z niej nitkę, trzymając za jej koniec w taki sposób, by nitka stale była napięta (czyli, by stale była styczna do szpulki). Linia, którą zakresli koniec nitki, to właśnie ewolwenta obwodu szpulki. Oczywiście, matematyka dziś dysponuje bardziej wyrafinowanymi definicjami tego pojęcia, ale Huygens wprowadził je właśnie za pomocą rozwijania nici. Dla przykładu: ewolwenta kwadratu to suma gładko sklejonych ćwierćokręgów, w której każdy kolejny ma promień dłuższy o długość boku kwadratu. Na rysunku są narysowane dwie różne ewolwenty – żaden kawałek jednej nie da się nałożyć na żaden kawałek drugiej (prawda?) – obierając koniec nici w różnych punktach, otrzymujemy na ogół różne ewolwenty.

Huygens poszukiwał takiej krzywej, której ewolwenta byłaby cykloidą. I odkrył, że cykloidą jest jedna z ewolwent... cykloidy. Dokładniej: ewolwentą cykloidy jest, między innymi, cykloida stojąca ostrzami na jej najwyższych punktach. A oto dowód tego faktu.

Tworzymy dwie cykloidy – drugą zakresła okrąg toczący się po prostej stycznej do najwyższych punktów pierwszej cykloidy, przy czym druga cykloida ma ostrze właśnie w takim punkcie styczności.

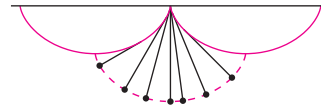


Rys. 4

Rozpatrzmy sytuację, gdy okręgi zakreslające obie cykloidy są styczne. Ponieważ toczenie okręgów odbywa się bez poślizgu, więc odpowiednie odcinki i łuki są równej długości: $\langle QC' \rangle = B'C' = BC = AC - AB = \langle CC'P \rangle - \langle CC' \rangle = \langle C'P \rangle$ (długość łuku XY jest

oznaczona przez $\langle XY \rangle$). Zatem suma łuków QC' i $C'P$, jako suma równych łuków stycznych okręgów o tym samym promieniu, ma środek symetrii C' ; w szczególności wynika stąd, że punkty Q , C' i P leżą na jednej prostej. Co więcej, prosta ta jest styczna do dolnej cykloidy (dlaczego?) i prostopadła do stycznej do drugiej cykloidy w punkcie Q (z tego samego powodu) – jest to zatem nić rozwijająca się z pierwszej cykloidy.

Od razu widać, jak zrobić (płaskie) wahadło tautochroniczne. Należy wyciąć z drewna kształtki w kształcie cykloid i pomiędzy ich łukami przywiązać ciężarek na nici o długości $4r$ – dlaczemu taka ma być ta długość, widać na poprzednim rysunku: jest to suma średnic okręgów wyznaczających obie narysowane tam cykloidy.



Rys. 5

Przy okazji, mimochodem, obliczyliśmy długość łuku cykloidy: przecież ta nić to długość łuku $B'D$, czyli jego połówka. Zatem cykloida zakreslona przez punkt okręgu o promieniu r ma długość $8r$.

Wahadło stożkowe

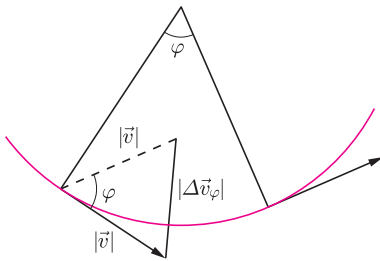
Drugi matematycznie opracowany przez Huygensa rodzaj wahadła tautochronicznego to wahadło stożkowe. Tutaj ciężarek na nici krąży po okręgu. Nić ta zatem zakresła powierzchnię boczną stożka obrotowego – stąd nazwa. Problem, jaki rozważał Huygens, był następujący: przy jakim tempie obrotu siła odśrodkowa równoważy siłę ciężkości. Doprowadziło go to najpierw do podania wzoru na siłę odśrodkową (uczynił to jako pierwszy!).

Spójrzmy na ciało poruszające się jednostajnie po okręgu o promieniu R z prędkością \vec{v} . W ciągu czasu t przebywa ono łuk okręgu o kącie środkowym φ . O taki sam kąt zmienia się, oczywiście, kierunek jego prędkości. Zmiana ta ma wielkość $|\Delta \vec{v}_\varphi| = 2 \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$. Nas natomiast interesuje przyspieszenie, czyli granica tej wielkości przy czasie zmierzającym do zera. Na szczęście można się przy tym obyć bez różniczkowania.

Ponieważ ruch jest jednostajny, więc podzielimy różnicę prędkości przez czas i zobaczymy, co się dzieje, gdy czas ten zmierza do zera. Czas t to droga $R\varphi$ podzielona przez prędkość $|\vec{v}|$, więc

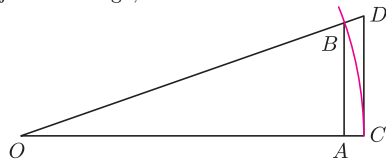
$$\frac{|\Delta \vec{v}_\varphi|}{t} = \frac{2|\vec{v}| \sin \varphi \cdot |\vec{v}|}{R\varphi} = \frac{\vec{v}^2}{R} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \rightarrow \frac{\vec{v}^2}{R}.$$

Tu już, niestety, nie da się obejść bez odrobiny matematyki nieco wyższej niż gimnazjalna. Ale jeszcze przez pewien czas jednak nie wyjdziemy poza liceum.



Rys. 6

Dygresja: Pola figur OAB , OBC i OCD , gdzie BC jest łukiem okręgu jednostkowego,



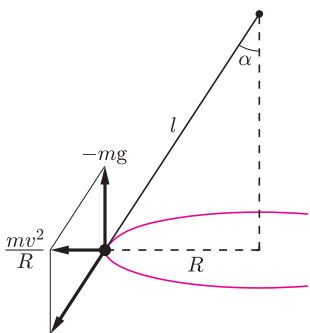
Rys. 7

spełniają oczywistą nierówność $\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \leq \frac{1}{2} \alpha \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Zatem, po podzieleniu przez $\sin \alpha$, mamy

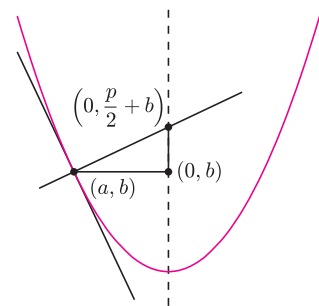
$$\cos \alpha \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Ponieważ przy α dążącym do zera pierwsze i trzecie wyrażenie dąży do 1, więc dąży tam i środkowe.

Poszukiwaną krzywą – przekrojem – okazała się parabola. Styczna do paraboli danej równaniem $x^2 = py$ w punkcie (a, b) dana jest (co dziś wiadomo ze szkoły) równaniem $ax = \frac{1}{2}p(y + b)$. Zatem prostopadła do stycznej ma równanie postaci $\frac{1}{2}px = -ay + A$, a gdy ma przechodzić przez (a, b) , musi być $A = a(\frac{1}{2}p + b)$.



Rys. 8



Rys. 9

Prosta ta przecina zatem oś paraboli w punkcie $(0, y_0)$, gdzie $0 = -ay_0 + a(\frac{1}{2}p + b)$, czyli $y_0 = \frac{1}{2}p + b$, z czego natychmiast wynika, że wyrażenie $l \cos \alpha$ ma stałą wartość $\frac{1}{2}p$, a zatem dla wszystkich wahań stabilnych biegających po poziomych przekrojach powierzchni, powstałej z obracania paraboli $x^2 = py$ wokół jej osi, okres obiegu jest taki sam i wynosi $T = 2\pi\sqrt{\frac{p}{2g}}$.

Proszę zwrócić uwagę na podobieństwo tego wzoru do wzoru na okres tautochronicznego wahadła płaskiego. Właściwie jest to dobry moment na zauważenie, że wszystkie twierdzenia, od których zaczyna się ten artykuł, zostały już dowiedzione.

Znowu nici

I znowu Huygens podjął rozważania o ewolwentach: jaki przekrój powinna mieć szpulka, aby rozwijana z niej nici miała swój koniec na paraboli, czyli dla jakiej krzywej parabola jest ewolwentą. Tu już, niestety, jego tok myślenia bardziej przypomina geometrię różniczkową niż matematykę szkolną. Ale popatrzmy na wynik. Jest nim parabola półsześcienne zwana inaczej parabolą Neilla. Parabola $x^2 = py$ jest ewolwentą paraboli półsześciennej o równaniu $x^2 = \frac{2}{27p}(2y - p)^3$. Mimo pewnego podobieństwa do przypadku ewolwenty

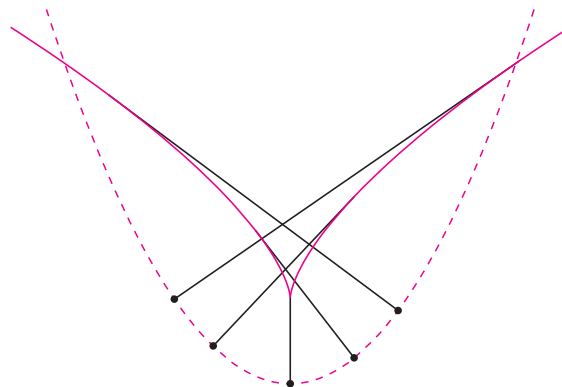
Trzeba tutaj wiedzieć, że $(\sin \alpha)/\alpha$, gdy α zmierza do zera, zmierza do 1, ale to wiedział już (oczywiście inaczej to formułując) Archimedes. Siła odśrodkowa to, rzecz jasna, otrzymana wielkość pomnożona przez masę (jako że $|\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$).

Nakładając warunek, by wahadło stożkowe było stabilne, czyli by jego obroty wywoływały siłę odśrodkową równoważącą siłę ciężkości, otrzymujemy (jak widać na rysunku 8) $\frac{m\vec{v}^2}{R} = mg \operatorname{tg} \alpha$, czyli $|\vec{v}| = \sqrt{gR \operatorname{tg} \alpha}$, co pozwala obliczyć okres obiegu stabilnego wahadła stożkowego: $T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g} \operatorname{ctg} \alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$.

Huygens wyciągnął z tego oczywisty wniosek: stabilne wahadła stożkowe mają ten sam okres, gdy wyrażenie w liczniku ostatniego ułamka jest dla nich równe, czyli gdy rzut nici na oś ma tę samą długość. I zaczął szukać krzywej mogącej być przekrojem osiowym obrotowej powierzchni o tej własności, że po jej każdym poziomym przekroju biegałoby stabilne wahadło o tym samym okresie. Przydatność takiej powierzchni do budowy zegara morskiego jest oczywista: jeśli kołysanie przeniesie kulkę wahadła z jednego poziomu na drugi, okres pozostanie taki sam.

cykloidy sytuacja jest jakby odwrotna – nic odwijamy „z przeciwnej strony”.

Kilka szczegółów: gdy nic zwisa z „dziobka”, ma długość $\frac{1}{2}p$; koniec nici stycznej w punkcie $(\sqrt{2p}, 2p)$, gdzie parabola półsześcienne przecina parabolę, jest na poziomie „dziobka” – rozwinięte jest wtedy $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}p$ nici.



Rys. 10

To, że sytuacja jest odmienna od sytuacji z wahadłem płaskim, polega także na tym, iż tutaj nie może być mowy o nieruchomych kształtkach, z których nic będzie się odwijać. Huygens konstruował tylko leżącą po jednej stronie osi połowę jednej paraboli półsześciennej, która obracała się wraz z nicią.

Tym sposobem doszliśmy do sprawy technicznej realizacji tych pięknych pomysłów. Stosowne zegary powstały, ale żaden z nich nie spełnił pokładanych w nich nadziei tak Huygensa, jak brytyjskiej admiralicji, na to, że będą mogły być zegarami okrętowymi.

Faktyczny zegar okrętowy, sprężynowy, stosowany później przez blisko dwa stulecia, skonstruował – już po śmierci Huygensa – John Harrison. Potrzebował jednak aż 30 lat, by przekonać admiralicję w 1735 roku, że obiecana nagroda mu się należy.

Trwająca wiele lat przygoda Huygensa z zegarami przyniosła jednak bardzo wiele matematyce. Jego pomysły znacznie popchnęły do przodu rachunek wariacyjny i geometrię różniczkową. Ale przede wszystkim wskazują, w jak bardzo praktycznych problemach jest źródło nowych pojęć matematyki.



mała delta

Nieskończona zabawa

Czytelnicy *Delta* znają z pewnością liczne własności trójkąta Pascala i potrafią odkryć w nim mnóstwo ciekawych ciągów: ciąg liczb trójkątnych, ciąg liczb czworościennych (tetraedralnych) itp. Być może jednak niewielu czytelników zetknęło się z inną, znacznie późniejszą konstrukcją, w której także ukrytych jest wiele ciągów i własności.

Oto ona:

0	1		1	2	3	5	8	13	21	34	...
1	3		4	7	11	18	29	47	76	123	...
2	4		6	10	16	26	42	68	110	178	...
3	6		9	15	24	39	63	102	165	267	...
4	8		12	20	32	52	84	136	220	356	...
5	9		14	23	37	60	97	157	254	411	...
6	11		17	28	45	73	118	191	309	500	...
...

Zobaczmy, jak zbudowana jest ta nieskończona macierz, zwana macierzą Wythoffa. Pierwsze dwie kolumny stanowią jedynie materiał wyjściowy dla całej konstrukcji i nie należą do macierzy. W pierwszej mamy numer wiersza, poczynając od 0. W drugiej... Najpierw krótkie przygotowanie. Każdą liczbę naturalną możemy przedstawić jednoznacznie w postaci sumy różnych liczb Fibonacciego, tak że żadne dwa składniki tej sumy nie sąsiadują w ciągu Fibonacciego (patrz *Delta* 10/2005). Na przykład, $50 = 34 + 13 + 3$. Jeśli w rozkładzie liczby m zastąpimy każdy składnik liczbą następującą bezpośrednio po niej w ciągu Fibonacciego, otrzymamy następnik Fibonacciego liczby m , który oznaczymy $S(m)$ (uwaga: 1 zastępujemy przez 2!). Na przykład, $S(50) = 55 + 21 + 5 = 81$. Otóż w drugiej kolumnie, w wierszu o numerze n mamy liczbę $S(n) + 1$. Dalej już łatwo: każda następna liczba w danym wierszu jest sumą dwóch liczb poprzedzających ją w tym samym wierszu.

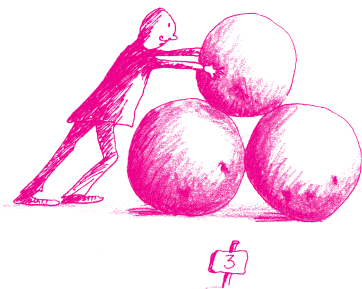
Cóż ciekawego jest w takiej nieskończonej tablicy? Poszukajmy.

W pierwszym wierszu występuje we własnej osobie sam ciąg Fibonacciego. Niewielka to niespodzianka: zaczęliśmy od 0 i 1 i potem stosowaliśmy regułę budowania tego ciągu. Nieco bardziej zaskakujący jest fakt, że każdy wiersz macierzy zaczyna się od pierwszej liczby, która nie pojawiła się w poprzednich wierszach tej macierzy. A czy przypadkiem jest to, że każda kolejna liczba w wierszu jest następnikiem Fibonacciego poprzedniej? Czy można wyjaśnić, dlaczego różnice między liczbami z , na przykład, trzeciego i pierwszego wiersza tej samej kolumny są jakie są? A czy różnice między liczbami z , na przykład, czwartego i pierwszego wiersza też się tak ciekawie układają? A różnice między liczbami z sąsiednich wierszy? Zapraszam do wyszukiwania wszelkich ciekawych faktów dotyczących macierzy Wythoffa. Jak już je zauważycie, może zechcecie pomyśleć, dlaczego tak jest?

A przy okazji wybierzcie dwie liczby całkowite dodatnie, a potem – traktując je jako pierwsze dwa wyrazy – zbudujcie na nich ciąg na takiej samej zasadzie, na jakiej jest zbudowany ciąg Fibonacciego. Rozejrzyjcie się po macierzy Wythoffa: czy Wasz ciąg przypadkiem nie występuje w którymś wierszu? No, może niekoniecznie od pierwszego wyrazu ...

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

Oto piętnaście początkowych liczb Fibonacciego: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

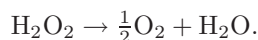


Ewa GUDOWSKA-NOWAK*

W przyrodzie bardzo często obserwujemy rozmaite procesy oscylacyjne. Znane są one zarówno w fizyce i astronomii, jak i biologii czy chemii. Jeszcze kilkadziesiąt lat temu spostrzeżenia dotyczące oscylacji w układach chemicznych miały charakter przypadkowy, a ich autorzy narażeni byli na zarzut niestarannego i nie dość dokładnego prowadzenia doświadczeń. Źródłem nieporozumienia były „klasyczne” poglądy na przebieg reakcji chemicznych, sformułowane w XIX wieku przez Clausiusa. Według ówczesnych teorii układ pozbawiony dopływu materii i energii z otoczenia powinien w sposób gładki zmierzać do stanu równowagi ze wzrastającą w miarę postępu reakcji chemicznej entropią. Periodyczna zmiana własności układu, wskazująca na okresowy wzrost uporządkowania pewnych reagentów, wydawała się zatem zaprzeczeniem drugiej zasady termodynamiki.

*Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

W roku 1921 William Bray (USA) badał stężenie jodanu IO_3^- podczas reakcji katalitycznego rozkładu nadtlenu wodoru:



Zaobserwował periodyczne zmiany stężenia katalizatora podczas biegu reakcji. Prace Braya uznano za artefakty. 30 lat później Borys Pawłowicz Bielousow napisał pracę dotyczącą badań reakcji kwasu cytrynowego z bromianem potasu w obecności soli ceru. Manuskrypt powędrował do redakcji jednego z czasopism chemicznych, gdzie został odrzucony z uwagą recenzenta, że opisane zjawiska chemiczne „są niemożliwe”. W tym czasie chemia fizyczna powoli dorastała już do zrozumienia na gruncie termodynamiki nierównowagowej fenomenu reakcji oscylacyjnych. Ilija Prigogine (laureat Nagrody Nobla z 1978 roku) z Université Libre w Brukseli wykazał, że klasyczna termodynamika (a więc to, co postulował Clausius) wymaga nie tylko braku wymiany materii i energii z otoczeniem, ale i bliskości stanu równowagi. W układach dalekich od tego stanu można zaobserwować tzw. struktury dyssypatywne – są to np. oscylacje pośrednich produktów reakcji. Natomiast stężenia substratów i produktów końcowych nie oscylują, zmierzając ku stanowi równowagi. Systematyczne badania nad reakcją odkrytą przez Bielousowa podjął w latach sześćdziesiątych Anatol Żabotyński. Określił on dokładnie warunki, w jakich reakcja ta może przebiegać, między innymi dowiódł wpływu stężeń substratów na charakter drgań. Dokładny opis reakcji Bielousowa–Żabotyńskiego (nazwa reakcji przyjęła się w uznaniu zasług obydwu tych uczonych w jej odkryciu i badaniu), wyjaśniający mechanizm reakcji w świetle podanej sekwencji wszystkich reakcji elementarnych składających się na cały proces, został zaproponowany dopiero w latach siedemdziesiątych. W roku 1972 Field, Köros i Noyes, pracujący na Oregon State University, zaproponowali schemat mechanizmu reakcji składających się z osiemnastu etapów. Symulacja komputerowa przeprowadzona dwa lata później dowiodła prawdziwości tego schematu.

SCHEMAT REAKCJI BIELOUSOWA–ŻABOTYŃSKIEGO

Substratami są trzy związki nieorganiczne: jony bromianowe (BrO_3^-), jony bromkowe (Br^-) i jony cerawe (Ce^{3+}) oraz kwas malonowy ($\text{CH}_2(\text{COOH})_2$).

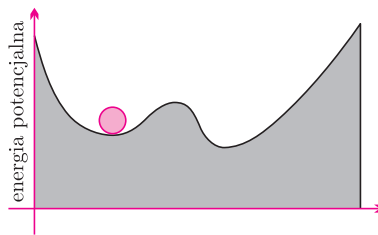
- $2\text{H} + \text{Br}^- + \text{BrO}_3^- \rightleftharpoons \text{HOBr} + \text{HBrO}_2$
- $\text{H}^+ + \text{HBrO}_2 + \text{Br}^- \rightleftharpoons 2\text{HOBr}$
- $\text{CH}_2(\text{COOH})_2 \rightleftharpoons (\text{OH})_2\text{C}=\text{CHCOOH}$
- $\text{HOBr} + \text{Br}^- + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{Br}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- $\text{Br}_2 + (\text{OH})_2\text{C}=\text{CHCOOH} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{Br}^- + \text{BrCH}(\text{COOH})_2$
- $\text{HBrO}_2 + \text{BrO}_3^- + \text{H}^+ \rightleftharpoons 2\text{BrO}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- $\text{BrO}_2 + \text{Ce}^{3+} + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{Ce}^{4+} + \text{HBrO}_2$
- $\text{Ce}^{4+} + \text{BrO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{BrO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{Ce}^{3+}$
- $2\text{HBrO}_2 \rightleftharpoons \text{HOBr} + \text{BrO}_3^- + \text{H}^+$
- $\text{Ce}^{4+} + \text{CH}_2(\text{COOH})_2 \rightleftharpoons \text{CH}(\text{COOH})_2 + \text{Ce}^{3+} + \text{H}^+$
- $\text{CH}(\text{COOH})_2 + \text{BrCH}(\text{COOH})_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Br}^- + \text{CH}_2(\text{COOH})_2 + \text{HOC}(\text{COOH})_2 + \text{H}^+$
- $\text{Ce}^{4+} + \text{BrCH}(\text{COOH})_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Br}^- + \text{HOC}(\text{COOH})_2 + \text{Ce}^{3+} + 2\text{H}^+$
- $2\text{HOC}(\text{COOH})_2 \rightleftharpoons \text{HOCH}(\text{COOH})_2 + \text{O}=\text{CHCOOH} + \text{CO}_2$
- $\text{Ce}^{4+} + \text{HOCH}(\text{COOH})_2 \rightleftharpoons \text{HOC}(\text{COOH})_2 + \text{Ce}^{3+} + \text{H}^+$
- $\text{Ce}^{4+} + \text{O}=\text{CHCOOH} \rightleftharpoons \text{O}=\text{CCOOH} + \text{Ce}^{3+} + \text{H}^+$
- $2\text{O}=\text{CCOOH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{O}=\text{CHCOOH} + \text{HCOOH} + \text{CO}_2$
- $\text{Br}_2 + \text{HCOOH} \rightarrow 2\text{Br}^- + \text{CO}_2 + 2\text{H}^+$
- $2\text{CH}(\text{COOH})_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{CH}_2(\text{COOH})_2 + \text{HOCH}(\text{COOH})_2$

Produktami końcowymi są: dwutlenek węgla, kwas mrówkowy (HCOOH) i kwas bromomalonowy ($\text{BrCH}(\text{COOH})_2$). Barwa roztworu oscyluje pomiędzy żółtą (cer na czwartym stopniu utlenienia) i przezrystą (cer na trzecim stopniu utlenienia).

Wyjaśnienie reakcji Bielousowa-Żabotyńskiego obudziło nadzieję na głębsze zrozumienie innych procesów oscylacyjnych. Próby podjęte przez grupę z Oregonu, a kontynuowane potem także na Université Libre w Brukseli, pozwoliły na zdefiniowanie warunków niezbędnych do zapoczątkowania oscylacji chemicznych. Pokróćce można je streścić w następujących punktach:

1. Układ musi być daleko od stanu równowagi.
2. W układzie musi znajdować się pętla sprzężenia zwrotnego – produkt przynajmniej jednej reakcji elementarnej powinien kontrolować tempo własnego powstawania.

3. Układ musi być dwustabilny – znaczy to, że w tych samych warunkach zewnętrznych możliwe są dwa różne, stabilne stany stacjonarne.



Prosty przykład układu dwustabilnego

Czytelników zainteresowanych reakcją Bielousowa-Żabotyńskiego oraz powstawaniem chemicznych struktur dyssypatywnych (ich kształt uzależniony jest od geometrii naczynia, w którym prowadzona jest reakcja) – odsyłamy do kilku artykułów, jakie można znaleźć w sieci.

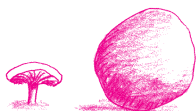
<http://www.musc.edu/~alievr/rubin.html>

<http://www.clubtre.sky.net.ua/denis/recipes.html>

<http://neon.chem.ox.ac.uk/vrchemistry/FilmStudio/oscillating/HTML/page03.htm>

http://www.chem.leeds.ac.uk/People/SKS/sks_research/sks_group_page.htm

<http://hopf.chem.brandeis.edu/anatol.htm>



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1123. Dany jest sześciokąt wypukły. Każdy z trzech odcinków łączących środki przeciwległych boków tego sześciokąta dzieli go na dwa pięciokąty o równych polach (rys. 1). Dowieść, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie na str. 16

M 1124. Dane są liczby całkowite a, b, c, d . Wykazać, że liczba

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

jest podzielna przez 12.

Rozwiązanie na str. 16

M 1125. Dany jest okrąg ω o środku O i promieniu 1 (rys. 2). Rozpatrujemy wszystkie kwadraty $ABCD$, których wierzchołki A i D leżą na okręgu ω .

Wyznaczyć największą wartość długości odcinka OC .

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 661. Dwie soczewki wykonano z dwóch różnych rodzajów szkła. Szkła różnią się współczynnikami załamania dla światła czerwonego – odpowiednio n_1 i n_2 – i niebieskiego: $n_1 + \Delta n_1$ oraz $n_2 - \Delta n_2$. Soczewki umieszczone razem w niewielkiej odległości od siebie tworzą układ o ogniskowej f identycznej dla światła obu barw (układ achromatyczny). Ile wynoszą ogniskowe soczewek dla światła czerwonego?

Rozwiązanie na str. 15

F 662. W atmosferze ziemskiej na wysokości od poziomu gruntu do $h = 100$ m występuje niekiedy tzw. inwersja temperatury, czyli wzrost temperatury

z wysokością. Jaka musi być różnica temperatur, aby światło załamane na warstwach atmosfery o różnej gęstości mogło okrążyć Ziemię na stałej wysokości? Przyjąć, że temperatura przy gruncie wynosi $T = 0$ °C, a ciśnienie na wysokości $h = 0$ m równe jest $p_0 = 1013$ hPa i spada wraz z wysokością o 0,1 hPa na metr. Zależność między współczynnikiem załamania światła oraz ciśnieniem i temperaturą (przy stałym składzie chemicznym) dana jest fenomenologiczną zależnością $n = 1 + p/A - T/B$, gdzie $A = 3,2 \cdot 10^6$ hPa, a $B = 8,6 \cdot 10^5$ °C.

Rozwiązanie na str. 15

ⁱ Delta 7/2005

Niedługo po ukazaniu się mojego artykułu *Kolorowe czapeczki*ⁱ do redakcji przyszedł list od wieloletniego Czytelnika Delty, Jana Błaszczynskiego, z propozycją rozwiązania postawionego tam problemu. Proste rozwiązanie Jana Błaszczynskiego, w przeciwieństwie do przedstawionego w moim artykule, jest deterministyczneⁱⁱ, i na dodatek pozwala rozstrzygnąć problem dla dowolnej liczby kolorów czapeczek i dowolnej liczby krasnoludków.

ⁱⁱ A więc zawsze daje poprawne rozwiązanie.

Dwa dni później przyszedł list od innego Czytelnika artykułu, studenta pierwszego roku matematyki stosowanej na Politechnice Gdańskiej, Marcina Krzywkowskiego, proponujący inne rozwiązanie, też proste i deterministyczne. Propozycja Marcina Krzywkowskiego omija dodatkowe założenie zawarte w rozwiązaniu Jana Błaszczynskiego, ale ogranicza się do dwóch rodzajów czapeczek.

Oryginalne zadanie było takie:

Królowna Śnieżka wezwała siedmiu krasnoludków i oświadczyła, że w związku z wielkim świętem w najbliższą niedzielę postanowiła nagrodzić ich pracowitość.

– Przygotowałam dla was białe i kolorowe czapeczki. Nie powiem wam, ani ile białych, ani ile kolorowych czapeczek przygotowałam. Każdemu z was nałożę jedną z czapeczek na głowę, ale by było bardziej uroczyście, przedtem zgaszę światło. Po zapaleniu światła zobaczycie czapeczki u swoich

kolegów, ale swojej nie będziecie mogli zobaczyć. Każdy z was dostanie 2 kartki ze swoim imieniem i napisem: **Mam białą czapeczkę** albo **Mam kolorową czapeczkę**. Jeśli któryś z was zechce, powinien wybrać jedną z nich i wrzucić do koszyka na środku sali. Ale pamiętajcie! Nie wolno wam się porozumiewać! Wspaniała nagroda – tu Królowna uśmiechnęła się tajemniczo – będzie wam wręczona, jeśli okaże się, że nikt się nie pomylił, a przynajmniej jedna osoba zgadła, jaką ma czapeczkę na głowie.

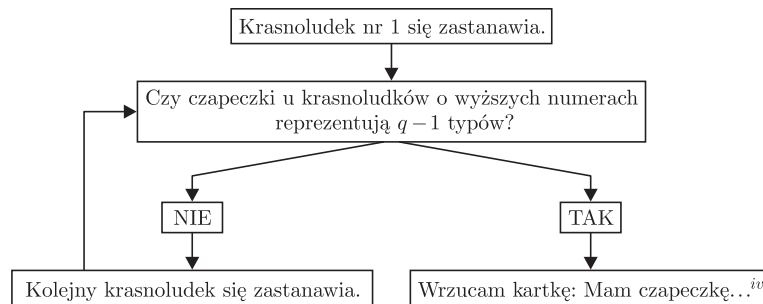
Rozwiązania Czytelników Delty

Warunki zadania pozwalają ustalić wcześniej strategię postępowania. W obu rozwiązaniach krasnoludki umawiają się działać „na tempo”. W rozwiązaniu Jana Błaszczynskiego tempo wyznacza kolejność, w jakiej krasnoludki będą wrzucać kartki do koszyka. Marcin Krzywkowski proponuje, aby krasnoludki podejmowały działanie co ustalony odcinek czasu, na przykład co 5 sekund.

ⁱⁱⁱ Śnieżka jest tak złośliwa, że może nawet nałożyć krasnoludkom czapeczki jednego typu. Tak – potwierdził Gburek – nawet gdyby wszyscy dookoła mnie mieli takie same czapeczki, to i tak nie będę wiedział, co mam na głowie (cytat z artykułu „Kolorowe czapeczki”) Informacja o liczbie rodzajów czapeczek mówi jedynie o maksymalnej ich liczbie...

Jan Błaszczynski zaproponował rozwiązanie przy dodatkowym założeniu, że na głowach krasnoludków są wszystkie rodzaje czapeczek. *Warunkiem koniecznym do rozwiązania jest ubranie krasnoludków we wszystkie rodzaje czapeczek – skoro Śnieżka przygotowała białe i czerwone czapeczki, to z każdego rodzaju istnieje co najmniej jedna* – pisze autorⁱⁱⁱ. Warunek ten przenosi on na przypadek dowolnej liczby rodzajów czapeczek – ma być reprezentowany każdy spośród q typów czapeczek.

Rozwiązanie to najprościej przedstawić w postaci grafu.



^{iv} Tu krasnoludek wpisuje typ, którego brakuje.

Gdy krasnoludek nr 1 widzi czapeczki $q - 1$ typów, wie, że jego czapeczka ma typ, którego brakuje i daje odpowiedź poprawną. Gdy krasnoludek nr 1 nie wrzuca kartki, to oznacza, że nie widzi $q - 1$ typów czapeczek. Gdyby tych typów było mniej niż $q - 1$, to wraz z jego czapeczką mogłoby być mniej niż q typów, co jest sprzeczne z założeniem, że wszystkie typy czapeczek są reprezentowane. Tak więc na głowach krasnoludków innych niż nr 1 są reprezentowane wszystkie typy. Sytuacja początkowa się powtarza, ale z mniejszą o 1 liczbą krasnoludków. W k -tym kroku albo krasnoludek zobaczy $q - 1$ typów czapeczek, albo wśród $n - k$ pozostałych krasnoludków

*Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

^v Na q kroków przed końcem zgadywania.

^{vi} Bez dodatkowego założenia, że wszystkie kolory są reprezentowane.

^{vii} W oryginalnej propozycji jest $n = 7$, ale łatwo zobaczyć, że podane rozwiązanie jest poprawne dla dowolnego n .

^{viii} Pozostali widzą na jego głowie inny kolor. W przeciwnym przypadku przynajmniej jeszcze jeden krasnoludek podszedłby do koszyka.

^{ix} Tak naprawdę wtedy podejną wszystkie krasnoludki.

^x Jeżeli jakiś krasnoludek widzi dokładnie jedną czapkę koloru A, to musi widzieć więcej niż jedną czapkę koloru B. W przeciwnym przypadku, gdy krasnoludek ten widzi jedną czapkę A i jedną czapkę koloru B (a tak może być w przypadku $n = 3$), to jego kolega z czapką A na głowie musiałby widzieć, że pierwszy krasnoludek ma na głowie czapkę A, więc trzeci krasnoludek z czapką B widzi tylko jeden kolor A. A to stanowi sprzeczność z faktem, że każdy widzi co najmniej dwa kolory.

^{xi} Gdyby krasnoludek ten miał czapkę koloru B, to jedyny krasnoludek z czapką A widziałby wyłącznie jeden kolor B, a to stanowi sprzeczność.

^{xii} Rozumowanie jest analogiczne do przedstawionego w kroku 1.

są reprezentowane wszystkie typy czapek. Najpóźniej $(n + 1 - q)$ -ty krasnoludek^v zobaczy u swoich kolegów o wyższych numerach $q - 1$ różnych typów, co kończy zgadywanie.

Podobne w pomysłach rozwiązanie dla dwóch kolorów czapek^{vii} i dowolnej liczby $n > 1$ krasnoludków proponuje Marcin Krzywkowski^{viii}.

Krok 0 (5 sekund od początku)

Do koszyka podchodzą wyłącznie ci, którzy widzą czapki jednego koloru. Są możliwe 3 przypadki:

- Podszedł jeden krasnoludek – wtedy wrzuca kartkę z kolorem innym niż widzi^{viii}.
- Podszedł więcej niż jeden krasnoludek – wtedy każdy z nich wrzuca kartkę z kolorem takim, jak widzi^{ix}.
- Nie podszedł żaden krasnoludek – wtedy każdy krasnoludek widzi co najmniej jedną czapkę każdego koloru.

Krok 1 (10 sekund od początku)

Do koszyka podchodzą wyłącznie ci, którzy widzą dokładnie jedną czapkę koloru A i więcej niż jedną czapkę koloru B^x. Każdy z nich wnioskuje, że ma na głowie czapkę koloru A i taką kartkę wrzuca do koszyka^{xi}.

Jeżeli do koszyka nie podszedł żaden krasnoludek, to każdy z nich widzi co najmniej po dwie czapki każdego koloru.

Krok 2 (15 sekund od początku)

Do koszyka podchodzą wyłącznie ci, którzy widzą dokładnie dwie czapki koloru A i więcej niż dwie czapki koloru B^{xii}. Każdy z nich wnioskuje, że ma na głowie czapkę koloru A i taką kartkę wrzuca do koszyka.

Jeżeli do koszyka nie podszedł żaden krasnoludek, to każdy z nich widzi co najmniej po trzy czapki każdego koloru. Wykonujemy krok 3.

Ogólnie, jeżeli w $k - 1$ kroku do koszyka nie podszedł żaden krasnoludek, to każdy z nich widzi co najmniej po k czapek każdego koloru. I wtedy wykonuje się następujący krok.

Krok k ($5 \cdot (k - 1)$ sekund od początku)

Do koszyka podchodzą wyłącznie ci, którzy widzą dokładnie k czapek koloru A i więcej niż k czapek koloru B. Każdy z nich wnioskuje, że ma na głowie czapkę koloru A i taką kartkę wrzuca do koszyka.

Postępowanie to musi się skończyć sukcesem wcześniej niż w kroku o numerze $(n - 1)/2$.

Dlaczego oryginalne rozwiązanie jest tak skomplikowane?

Oba rozwiązania przysłane przez Czytelników łamią założenie o tym, że podczas zgadywania nie wolno się porozumiewać. Przedstawione rozwiązania pozwalają kolejnym krasnoludkom przekazać swoją wiedzę poprzez fakt wstrzymania się od wrzucania kartek i wykonywanie tych gestów w kolejnych „krokach”. Takie działanie jest z założenia niedozwolone.

To jednak ja nieświadomie sprowokowałem możliwość innej interpretacji założeń. W pierwotnej wersji artykułu każdy krasnoludek miał do wyboru *trzy* kartki: **Mam białą czapkę**, **Mam kolorową czapkę** i **Rezygnuję z odpowiedzi**. Ponadto na dany sygnał każdy z krasnoludków w tym samym czasie musiałby wrzucić do koszyka jedną z trzech kartek.

Złośliwy chochlik namówił mnie, żeby skrócić opis i zamiast polecenia wrzucenia kartki **Rezygnuję z odpowiedzi** zaproponowałem rezygnację z wrzucania. Przy okazji wypadł z tekstu artykułu nakaz jednoczesnego wrzucenia kartek. Dzięki temu poznaliśmy jednak dwa ciekawe rozwiązania nieco innego zadania.

Propozycja

Nie jest znane rozwiązanie dla 3 typów czapek i n krasnoludków. Rozwiązanie Wesołka z artykułu^{xiii} daje prawdopodobieństwo sukcesu $p = 1/3$. Oczekujemy propozycji rozwiązań o jak największym prawdopodobieństwie sukcesu dla 3 typów czapek i n krasnoludków. Na początek dla $n = 3$. Najciekawsze rozwiązania przedstawimy w *Delcie*.

^{xiii} Niech Nieśmiałek wrzuci kartkę **Mam białą czapkę**, a reszta niech wrzuci kartkę **Rezygnuję z odpowiedzi**.

Ruchome piaski groźne inaczej

Podróże kształcą. Daniel Bonn z podróży do Iranu, ojczyzny swojej żony, przywiózł do macierzystego laboratorium na Uniwersytecie Amsterdamskim oryginalną pamiątkę – próbkę ruchomych piasków.

Pułapka ta, często wykorzystywana w powieściach i filmach przygodowych, nie jest mitem, tylko mieszaniną piasku, gliny i wody morskiej, w której grzęzną drugoplanowi bohaterowie (żeby móc być wyratowanymi przez pierwszoplanowych) lub toną złe charaktery (które nie są przeznaczone do ostatecznej rozgrywki z głównym bohaterem pozytywnym).

Mniej groźną odmianę ruchomych piasków można znaleźć nawet na wybrzeżu Bałtyku. Są to świeżo utworzone płycizny, w których można zapaść się po kolana.

Opublikowane w *Nature* badania Daniela i współpracowników [1] dowodzą, że utonięcie w ruchomych piaskach można między bajki włożyć. Ponieważ gęstość ruchomych piasków jest około dwa razy większa niż gęstość wody, więc przedmiot o gęstości ciała ludzkiego zapada się w nich do połowy i żadne potrząsanie czy ruchy uwięzionego ciała nie są w stanie tego istotnie zmienić.

Skąd więc wzięła się zła sława ruchomych piasków? Jednym z miejsc, gdzie oficjalnie ostrzega się przed tym niebezpieczeństwem, są okolice Mont Saint Michel we Francji. To słynne średniowieczne sanktuarium, położone na skalistej wysepce (połączonej groblą ze stałym lądem) w Kanale La Manche, jest oblewane wodą tylko w czasie przyływu. Morze następnie odpływa nawet na kilkanaście kilometrów, osuszając na kilka godzin całą zatokę. Turyści ostrzegani są, że pokusa wędrówki przez dno zatoki może doprowadzić do wpadnięcia w pułapkę ruchomych piasków.

Niebezpieczeństwo jest realne. W ruchomych piaskach utonąć nie można, ale można w nich ugrzęznąć tak, że niemożliwe jest wydostanie się o własnych siłach, a nieumiejętnie niosący pomoc mogą podzielić los ratowanych. Wtedy kolejna fala przyływu nieuchronnie prowadzi do zguby.

Ważenie Amazonki

Nietrudno się domyślić, że do ważenia rzeki, zwłaszcza tak potężnej jak Amazonka, należy użyć wagi o rozmiarach Ziemi. Najprościej wziąć więc po prostu Ziemię. Językiem takiej wagi może być GPS (Global Positioning Service), który pozwala określić średnią pozycję punktu na powierzchni Ziemi z dokładnością do około 1 mm w poziomie i 9 mm w pionie. Amplituda

typowych sezonowych pionowych ruchów skorupy ziemskiej wynosi od dwóch do dziesięciu milimetrów. Przez wiele lat monitorowano takie ruchy dla Amazonii i niedawno opublikowano [2], że stacja w Manaus w pobliżu centrum dorzecza Amazonki obniża się i podnosi aż o 50–75 mm. Ruchy te są odwrotnie proporcjonalne do lokalnego poziomu rzeki i nie wykazują praktycznie żadnego opóźnienia. Za pomocą prostego modelu hydrodynamicznego autorzy dowodzą, że efekt jest skorelowany z obciążeniem wywołanym przez powódzie w promieniu 200 km od badanej stacji. Duża ilość wody powoduje zanurzanie się skorupy ziemskiej, a mała jej wynurzenie. Naukowcy oczekiwali takiego efektu, ale twierdzą, że są zaskoczeni jego wielkością.

Wieloryb udający trampolinę

W latach pięćdziesiątych po raz pierwszy usłyszano dziwny dźwięk o częstotliwości około 100 Hz dochodzący z oceanu. Przypomina on odgłos wydawany przez trampolinę po skoku. Amerykanie określają takie dźwięki (często wydawane przez skaczące postacie kreskówek) *boing*.

Po latach udało się przypisać ten dźwięk stosunkowo niewielkim wielorybom minke (*Balaenoptera acutorostrata scammoni*) [3]. Tego, i innych, dźwięków wydawanych przez walenie można posłuchać poprzez stronę [4]. Ta charakterystyczna wokaliza ma modulowaną zarówno częstotliwość, jak i amplitudę.

Źródło udało się zidentyfikować dzięki porównaniu danych hydroakustycznych z wizualnymi dla północnego Pacyfiku. Przy okazji okazało się, że istnieje pewna graniczna długość geograficzna, przekroczenie której powoduje zmianę dominującej częstotliwości dźwięku. Na wschodzie częstotliwość wynosi 92 Hz, a na zachodzie 135 Hz.

Dlaczego walenie śpiewają różnymi głosami, nadal nie wiadomo. Wyróżnia się, co prawda, kilka gatunków wielorybów minke, ale są one geograficznie rozdzielone. W Antarktyce żyją *Balaenoptera bonaerensis*, a w północnym Atlantyku *Balaenoptera acutorostrata acutorostrata*. Zew oceanu zawiera jeszcze wiele zagadek.

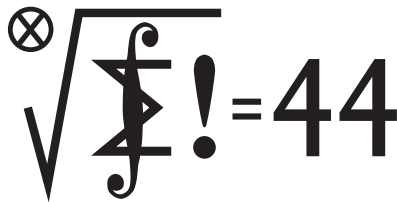
Piotr ZALEWSKI

[1] A. Khaldoun, E. Eiser, G.H. Wegdam i Daniel Bonn, *Liquefaction of quicksand under stress*, *Nature* **437**,635 (29 września 2005)

[2] M. Bevis i inni, *Seasonal fluctuations in the mass of the Amazon River system and Earth's elastic response*, *Geophysical Research Letters* **32**, L16308 (24 sierpnia 2005)

[3] S. Rankin i J. Barlow, *Source of the North Pacific „boing” sound attributed to minke whales*, *J. Acoust. Soc. Am.* **118**(2005)3346

[4] <http://swfsc.nmfs.noaa.gov/PRD/PROGRAMS/CMMP/acccsurv.html>



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 IV 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
503 ($WT = 1,21$) i **504** ($WT = 2,22$)
z numeru 6/2005

Zbigniew Sewartowski	45,16
Marian Lupieżowicz	40,93
Andrzej Jóźwik	40,64
Tomasz Rawlik	5-39,35
Paweł Najman	1-38,28
Zbigniew Galias	1-38,09
Michał Jóźwikowski	38,07
Marcin Kasperski	2-36,86
Janusz Olszewski	7-36,01
Andrzej Daniluk	1-34,80
Adam Dzedzej	31,71
Marek Prauza	3-30,56
Tomasz Wietecha	6-29,76
Leszek Grzanka	29,14
Mieczysław Jędrzejowski	27,23
Paweł Walter	26,78
Jan Czardybon	26,21
Michał Kieza	1-26,15
Krzysztof Kamiński	25,30
Franciszek Sikorski	23,28
Michał Jastrzębski	22,99
Grzegorz Karpowicz	22,24
Dariusz Kurpiel	2-22,21
Maciej Mostowski	1-20,04

Witamy kolejnego (101.) członka Klubu 44 M, którym został pan **Zbigniew Sewartowski**.

Legenda (przykładowo): stan konta 7-36,01 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 36,01 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy występują następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;

– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2003, 2004 lub 2005.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (5), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (9), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (7), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (6), T. Jóźficzek, J. Witkowski (4), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczański, M. Adamaszek, P. Kubit, J. Cisło (4), W. Bednarek

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 515, 516

Redaguje Marcin E. KUCZMA

515. W ścianę $ABCD$ sześcianu o krawędzi 1 wpisany jest okrąg ω . Wierzchołek E jest końcem krawędzi AE prostopadłej do AB i AD . Okrąg Ω jest opisany na trójkącie BDE . Obliczyć długość najkrótszego odcinka łączącego punkt okręgu ω z punktem okręgu Ω .

516. Rozważamy operację, która uporządkowanej parze dodatnich liczb całkowitych (a, b) przyporządkowuje parę $(a', b') = \begin{cases} (2a, b-a) & \text{gdy } a < b, \\ (a-b, 2b) & \text{gdy } a \geq b. \end{cases}$

Startujemy od zadanej pary (a_0, b_0) liczb całkowitych dodatnich i powtarzamy algorytm. Przerywamy, gdy pojawi się para liczb, z których jedna jest zerem. Scharakteryzować te pary początkowe (a_0, b_0) , dla których algorytm zatrzyma się w skończonym czasie.

Zadanie 516 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2005

Przypominamy treść zadań:

507. (a) Czy zbiór wszystkich liczb wymiernych większych od 1 można przedstawić jako sumę dwóch zbiorów rozłącznych A, B , co najmniej dwuelementowych tak, aby

• suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru A była elementem zbioru A oraz

• suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru B była elementem zbioru B ?

(b) To samo pytanie, po zastąpieniu wyrażenia *suma dowolnych dwóch różnych liczb przez iloczyn dowolnych dwóch różnych liczb*.

508. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Boki AB, BC, CD, DA są do tego okręgu styczne odpowiednio w punktach K, L, M, N . Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S . Wykazać, że

$$\frac{|KS|}{|MS|} = \frac{|AK| \cdot |BK|}{|AB|} \cdot \frac{|CD|}{|CM| \cdot |DM|}.$$

507. (a) Wykażemy, że nie istnieje rozbitcie o podanej własności.

Przypuśćmy bowiem, że istnieje, i weźmy parę różnych liczb $a, a' \in A$ oraz parę różnych liczb $b, b' \in B$. Dla każdej czwórki liczb całkowitych dodatnich k, k', l, l' mamy

$$ka + k'a' \in A, \quad lb + l'b' \in B$$

(uzasadnienie indukcyjne: jeśli $s = ka + k'a' \in A$, to w myśl podanego warunku $s + a \in A, s + a' \in A$; analogicznie dla zbioru B).

Niech q będzie dowolnym wspólnym mianownikiem liczb wymiernych a, a', b, b' . Zachodzi równość $(bq)a + (b'q)a' = (aq)b + (a'q)b'$. Ale, zgodnie z wykazaną własnością, suma po lewej stronie jest elementem zbioru A , a suma po prawej – elementem zbioru B . To daje oczekiwaną sprzeczność, bo zbiory A i B są rozłączne.

(b) Odpowiedź zmieni się, gdy w rozważanym warunku zastąpimy *sumę* przez *iloczyn*. Oto przykład żądanego rozbitcia:

$$A = \{n/p : n, p \in \mathbf{N}, n > p; \quad n \text{ nieparzyste, } p \text{ parzyste}\},$$

$$B = \{l/m : l, m \in \mathbf{N}, l > m; \quad m \text{ nieparzyste, } l \text{ parzyste}\},$$

każdy z tych zbiorów jest zamknięty względem mnożenia.

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kieza, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłega, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, P. Najman, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, T. Warszawski, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zajac, Z. Zaus, K. Zawislowski, P. Żmijewski.



508. Przyjmijmy oznaczenia:

$$a = |AN| = |AK|, b = |BK| = |BL|, \\ c = |CL| = |CM|, d = |DM| = |DN|.$$

Weźmy pod uwagę wektory

$$\vec{SK} = \frac{b}{a+b}\vec{SA} + \frac{a}{a+b}\vec{SB} = \frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a}\vec{SA} + \frac{1}{b}\vec{SB}\right),$$

$$\vec{SM} = \frac{d}{c+d}\vec{SC} + \frac{c}{c+d}\vec{SD} = \frac{cd}{c+d}\left(\frac{1}{c}\vec{SC} + \frac{1}{d}\vec{SD}\right)$$

i zauważmy, że

$$(1) \quad cd(a+b)\vec{SK} + ab(c+d)\vec{SM} = \\ = abcd\left(\frac{1}{a}\vec{SA} + \frac{1}{b}\vec{SB} + \frac{1}{c}\vec{SC} + \frac{1}{d}\vec{SD}\right).$$

Przez cykliczne przesunięcie oznaczeń otrzymujemy analogiczną równość

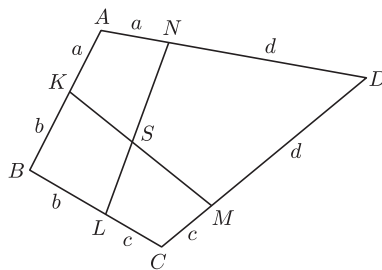
$$(2) \quad da(b+c)\vec{SL} + bc(d+a)\vec{SN} = \\ = bcda\left(\frac{1}{b}\vec{SB} + \frac{1}{c}\vec{SC} + \frac{1}{d}\vec{SD} + \frac{1}{a}\vec{SA}\right).$$

Lewa strona wzoru (1) przedstawia wektor równoległy do \vec{SK} , a lewa strona (2) – wektor równoległy do \vec{SL} . Ale wektory \vec{SK} i \vec{SL} nie są równoległe, a prawe strony (1) i (2) są równe. Stąd wniosek, że zarówno wektor (1), jak i wektor (2) – to wektor zerowy. W szczególności więc

$$cd(a+b)\vec{SK} = -ab(c+d)\vec{SM}$$

i wystarczy przyrównać długości tych wektorów, aby otrzymać tezę zadania:

$$|CM| \cdot |DM| \cdot |AB| \cdot |SK| = |AK| \cdot |BK| \cdot |CD| \cdot |SM|.$$



Co ciekawego w lidze matematycznej? Niewątpliwym hitem minionego sezonu było ukończenie dziewiątej rundy przez jednego z uczestników. Przypomnijmy: członkiem Klubu 44 zostaje się po zgromadzeniu 44 punktów. Te czterdziestkiczwórki można dowolnie wiele razy powtarzać... Przez długie lata niekwestionowanym liderem był **Jerzy Janowicz** z Bolesławca, który już pod koniec roku 1993 zamknął ósme okrążenie. Długo czekaliśmy, by ktoś wykonał dziewięć rund. Zrobił to **Piotr Kumor** z Olsztyna. Serdecznie gratulujemy! Oczekujemy kontynuacji (po n -tym okrążeniu zawsze przecież może być $(n+1)$ -sze) i zapraszamy innych uczestników do podjęcia tego współzawodnictwa.

Matematyczny Klub 44 liczy już przeszło setkę. Z numerami 99, 100, 101 weszli: **Michał Kieza** z Warszawy, **Tomasz Warszawski** z Krakowa, **Zbigniew Sewartowski** z Wieliczki.

Przejdźmy do zadań. Jest o czym mówić; było w tym roku kilka zadań rzetelnie trudnych. Spora w tym zasługa (a może raczej: za to odpowiedzialność) właśnie naszego (9×44)-laureata **P. Kumora**, autora fascynujących zadań 492 i 500, nie tylko trudnych, ale i eleganckich w treści. Jak zobaczymy z omówienia, klasą dla siebie wśród rozwiązujących był **Jerzy Cisło** z Wrocławia – rozwiązał bezbłędnie wszystkie 20 zadań, w tym jako jedyny (!) geometryczne zadanie 501 (które wbrew oczekiwaniu i zamierzeniu redaktora ligi okazało się najtrudniejsze).

Omówienie rozwiązań będzie skrótowe; na pełne uzasadnienia wszystkich kroków potrzeba by było znacznie więcej miejsca. Czytelników, których to czy inne zadanie zainteresuje, zachęcamy do samodzielnego uzupełnienia pominiętych szczegółów.

Zadanie 490. [Ile jest permutacji π zbioru $\{1, \dots, n\}$ o własności $|\pi(i+1) - \pi(i)| > 1$, gdy $n = 15$?] (współczynnik trudności $WT=2,61$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=4$). Rozwiązanie firmowe to był zestaw kilku wymyślnych rekurencji. **P. Kumor** znalazł dwie z nich, co pozwoliło

zredukować problem do numerycznego przebadania permutacji zbioru 13-elementowego. **Z. Galias** zaatakował problem numerycznie od razu dla $n = 15$, też z powodzeniem. Bardziej elegancka metoda była oparta na wzorze włączeń i wyłączeń; tą metodą rozwiązali zadanie **J. Cisło** i **J. Olszewski**:

Jeśli $A_i = \{\pi \in \Omega : |\pi(i+1) - \pi(i)| = 1\}$ ($i = 1, \dots, n-1$), gdzie Ω jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$, to

$$\left| \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| = |\Omega| + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

$$a_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Gdy indeksy i_1, \dots, i_k tworzą j rozdzielonych bloków spójnych, to (nietrudno zobaczyć, że)

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = 2^j (n-k)!.$$

Na ile sposobów można wybrać indeksy $i_1 < \dots < i_k$ tak, aby mieć j rozdzielonych bloków? Ciąg $(0, 1, \dots, n-1, n)$ rozbijamy na $2j+1$ niepustych bloków, numerując je kolejno od lewej strony tak, żeby suma bloków o numerach parzystych była zbiorem k -elementowym – ta suma da zbiór indeksów. Problem sprowadza się do podziału liczby k na j niezerowych składników oraz (niezależnie) liczby $n+1-k$

na $j+1$ niezerowych składników; wynikiem jest iloczyn $\binom{k-1}{j-1} \binom{n-k}{j}$. Stąd ostateczny wynik

$$\left| \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| = n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \sum_{j \geq 1} \binom{k-1}{j-1} \binom{n-k}{j} 2^j,$$

który dla $n = 15$ daje wartość liczbową 175 203 184 374. Ciekawe, czy wzór ogólny da się zwinąć do bardziej zwartej postaci...

Zadanie 492. [Dane $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0$; $S_k = a^k + b^k + c^k$, $T_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$; $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2$, $S_3 > T_3 \Rightarrow S_n > T_n$ dla $n > 3$] (WT=3,59; LPR=2). Autor zadania, **Piotr**

Kumor, udowodnił tę implikację stosując mnożniki Lagrange'a (w \mathbb{R}^6 - pracochłonne badanie licznych konfiguracji brzegowych). Rozwiązanie firmowe pochodzi od redaktora ligi. Dwa dowody znalezione przez uczestników konkursu są jeszcze całkiem odmienne, i chyba zgrabniejsze.

Jerzy Cisko wprowadził funkcje tworzące

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k, \quad T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k x^k$$

oraz pomocnicze wielomiany

$$\begin{aligned} (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x) &=: H(x), \\ (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x) &= H(x) - \lambda x^3, \\ \lambda &= abc - \alpha\beta\gamma > 0, \end{aligned}$$

i uzyskał tożsamość

$$S(x) = T(x)F(x),$$

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m H(x)^{-m} x^{3m} =: \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n;$$

współczynniki F_n są nieujemne (co wynika z potęgowego rozwinięcia $(1 - \alpha x)^{-1}$), przy czym $F_0 = 1$, $F_1 = F_2 = 0$, $F_3 = \lambda > 0$; zatem dla $n > 3$

$$\begin{aligned} S_n &= F_0 T_n + F_3 T_{n-3} + (F_4 T_{n-4} + \dots + F_n T_0) \geq \\ &\geq T_n + \lambda T_{n-3} > T_n. \end{aligned}$$

To podejście bardzo profesjonalne. Znacznie bardziej elementarne rozwiązanie przedstawił **Paweł Najman**:

Dla ustalonych wartości $S_1 = T_1$, $S_2 = T_2$ niech J będzie zbiorem tych wartości „parametru” x , dla których układ równań $x + y + z = S_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = S_2$ ma rozwiązanie y, z , spełniające warunek $x \geq y \geq z \geq 0$; zbiór J okazuje się być przedziałem, a niewiadome y, z są dla $x \in J$ dane wzorami

$$y(x) = \frac{1}{2}(S_1 - x + \sqrt{\Delta}), \quad z(x) = \frac{1}{2}(S_1 - x - \sqrt{\Delta}),$$

gdzie $\Delta = -3x^2 + 2S_1x - S_1^2 + 2S_2$. Przyjmując, że $a \geq b \geq c$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, mamy $y(a) = b$, $z(a) = c$, $y(\alpha) = \beta$, $z(\alpha) = \gamma$. Niech

$$f_n(x) = x^n + y(x)^n + z(x)^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, x \in J.$$

Funkcje $f_1 \equiv S_1$, $f_2 \equiv S_2$ są stałe, więc $y' + z' = -1$, $yy' + zz' = -x$; korzystając z tych równań można stwierdzić (rachunki), że $f'_n > 0$ wewnątrz J dla $n \geq 3$. Z warunku zadania $f_3(a) > f_3(\alpha)$; stąd $a > \alpha$, więc $f_n(a) > f_n(\alpha)$ dla wszystkich $n \geq 3$, czyli $S_n > T_n$.

Zadanie 493. [Wielościąg wypukły, krawędzie 2-kolorowane $\Rightarrow \exists$ wierzchołek, wokół niego ≤ 2 zmiany koloru] (WT=2,71; LPR=3). Jak nam uświadomił **J. Cisko**, to twierdzenie znajduje się w książce M. Aigner, G. M. Ziegler

Dowody z Księgi. Tam na stronie 80 znajdują Czytelniczki prosty dowód, oparty na wzorze Eulera (zgrabniejszy niż indukcyjne rozwiązanie firmowe). Dokładnie taki sam dowód przedstawili autorzy pozostałych dwóch dobrych rozwiązań **J. Olszewski** i **T. Warszawski**.

Zadanie 498. [$a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 1$; $a_i \in \mathbb{N}$, $\sum a_i = 2n$; $a_{i_1} + \dots + a_{i_k} \neq n$ dla $i_1 < \dots < i_k \Rightarrow (a_1, \dots, a_n) = ?$] (WT=2,58; LPR=12). Większość rozwiązań - à la firmowe, lub indukcyjny dowód tezy ($a_2 = 1$ lub $a_n > 1$). Na uwagę zasługuje prostsze rozumowanie, które przeprowadzili **K. Dorobisz**, **M. Kieza**, **T. Warszawski**:

Niech $s_k = a_1 + \dots + a_k$; rozważamy n liczb $a_1, a_n, a_n + s_1, a_n + s_2, \dots, a_n + s_{n-2}$; z założeń wynika, że są one niepodzielne przez n oraz że usunięcie jednej z pierwszych dwóch liczb (a_1 lub a_n) daje układ $n-1$ liczb parami różnych (mod n). Stąd wniosek, że $a_1 \equiv a_n \pmod{n}$, więc albo $a_1 = a_n + n$, albo $a_1 = a_n$; pierwsza możliwość wyznacza ciąg $(n+1, 1, 1, \dots, 1)$, a druga $(2, 2, \dots, 2)$ (dobry, gdy n nieparzyste).

Zadanie 500. [Znaleźć liczbę $n \in \mathbb{N}$ (im mniejsza tym lepiej) o własności:

$\forall A \subset \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($|A| = n$) $\exists a_1, \dots, a_5 \in A$: $\frac{1}{5}(a_1 + \dots + a_5) \in \mathbb{Z}^2$] (WT=3,12; LPR=?). Trudno tu mówić o „poprawnych rozwiązaniach”, bo w zadaniu chodziło o podanie *jakiegokolwiek* „dobrego” n .

W rozwiązaniu firmowym pokazano, że $n = 16$ jest za małe oraz że dobre są np. $n = 101$ (trywialnie), $n = 41$ (też dość łatwo). Te dwie wartości wskazywali na ogół rozwiązujący. Autor zadania **Piotr Kumor** wykazał, że $n = 33$ jest dobre. Liczyliśmy na poprawienie tego wyniku przez uczestników ligi. I nie zawiedliśmy się!

Jerzy Cisko wykazał, że $n = 17$ jest dobre - uzyskał zatem wartość optymalną. Taka teza nietrudno wynika z następującego lematu: *W zbiorze $\mathbb{Z}_5^2 = \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$ każdy z niżej wypisanych ciągów zawiera pięciowyrazowy podciąg o sumie zerowej (mod (5, 5)) (różne litery oznaczają dowolne różne punkty zbioru \mathbb{Z}_5^2)*

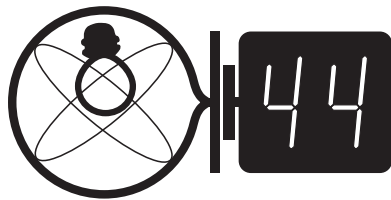
$(a, a, b, b, c, c, d, d, e, e),$
 $(a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, d, d, e),$
 $(a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, d, e, f, g),$
 $(a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, e, f, g, h),$
 $(a, b, c, d, e, f, g, h, i).$

Autor pracy przyznał, że dla ciągu tej ostatniej postaci ma jedynie uzasadnienie numeryczne; dla pozostałych - również teoretyczne (wiele przypadków), choć oczywiście i one dadzą się sprawdzić komputerowo (w czasie bliskim zeru).

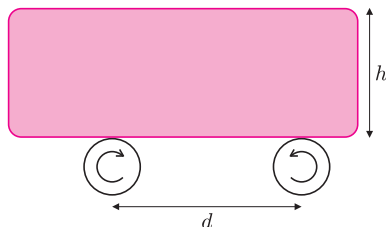
Można rozważać analogiczne zagadnienie w \mathbb{Z}_m^2 , dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ (u nas $m = 5$). Hipotezę A. Kemnitz (1983) głoszącą, że $\min n = 4m - 3$, udowodnili (2003) niezależnie dwaj młodzi matematycy: C. Reiher oraz C. di Fiore (o czym dowiedzieliśmy się niedawno). Dla wyższych wymiarów (\mathbb{Z}_m^d , $d > 2$) problem jest otwarty.

Zadanie 501. [Współśrodkowe okręgi Ω, ω (promienie $R > r$); czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω ; półproste $AB^\rightarrow, BC^\rightarrow, CD^\rightarrow, DA^\rightarrow$ w przecięciu z Ω wyznaczają drugi czworokąt; stosunek obwodów tych czworokątów $= R/r$; obliczyć te obwody] (WT=3,75; LPR=1). Trudność tego zadania zdecydowanie przerosła oczekiwania! Jedynie pełne rozwiązanie (**J. Cisko**) nie różniło się w sposób istotny od firmowego.

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2006



412. Proces fermentacji win musujących trwa jeszcze – jak wiadomo – po rozlaniu ich do butelek i zakorkowaniu, przy czym powstaje mętny osad, który usuwa się na ostatnim etapie produkcji wina. Dokonuje się tego następująco: butelka jest wtedy przechowywana szyjką do dołu, zatem osad skupia się w szyjce. Szyjkę tę się zamraża, tak że przy korku powstaje warstwa lodu, odwraca się butelkę do pozycji normalnej, wyciąga korek wraz z lodem i zawartym w nim osadem i korkuje butelkę ponownie. Wino jest wtedy już nasycone dwutlenkiem węgla pod ciśnieniem. Dlaczego więc przy otwieraniu butelki wino się nie pieni i nie „ucieka” z butelki, tak jak podczas zwykłego otwarcia?

413. Na dwóch walcach obracających się w przeciwne strony położono jednorodny klocek (rys.) tak, że jego środek był początkowo nieco bliżej jednego z walców. Odległość osi walców jest równa d , wysokość klocka – h , a współczynnik tarcia walców o klocek – f . Podać warunki, przy których ruch klocka jest harmoniczny i obliczyć okres drgań.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2005

Przypominamy treść zadań:

404. Istnieją dwa różne mechanizmy fizyczne i fizjologiczne dające efekt słyszenia przestrzennego (określenia kierunku fali dźwiękowej), przy czym jeden z nich działa głównie dla częstotliwości powyżej około 5 kHz, a drugi głównie dla częstotliwości poniżej około 2 kHz. Na czym polegają te dwa mechanizmy i dlaczego mają ograniczone zakresy działania?

405. Opór przewodu na jednostkę długości jest równy ρ . Przewodem tym przesłano prąd na odległość l do odbiornika o oporze R , przy czym drugi przewód jest bezoporowy (można przyjąć, że jest nim ziemia). Obliczyć sprawność przesyłu energii, jeśli przewodnictwo między przewodami (odwrotność oporu) na jednostkę długości jest równe σ .

404. Zmysł słuchu może reagować na różnicę natężeń dźwięku dobiegającego do uszu lub na różnicę faz. Pierwszy mechanizm działa silniej dla fal krótkich, których ugięcie na głowie jest słabsze, natomiast drugi – silniej dla fal długich. Przykładowo, dla dźwięku o częstotliwości 5 kHz długość fali wynosi około 7 cm, co oznacza, że przesunięcie fazy między sygnałami odbieranymi przez oboje uszu jest zbyt duże i zbyt silnie zależne od częstotliwości, aby system nerwowy mógł je łatwo przeanalizować.

405. Zarówno natężenie prądu I , jak i napięcie U , są zmiennymi – funkcjami odległości x od źródła zasilania. Oporność przewodu powoduje na odcinku dx spadek napięcia zgodnie ze wzorem $dU = -I\rho dx$, a przepływ prądu między przewodami powoduje spadek natężenia prądu według wzoru $dI = -U\sigma dx$. Rozwiązaniem tego układu równań różniczkowych są funkcje

$$U = U_1 e^{\lambda x} + U_2 e^{-\lambda x}, \quad I = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} (U_2 e^{-\lambda x} - U_1 e^{\lambda x})$$

gdzie $\lambda = \sqrt{\rho\sigma}$. W punkcie $x = 0$ napięcie jest równe napięciu źródła U_0 , a w punkcie $x = l$ (przy odbiorniku) nakładamy warunek $U = IR$. Stąd po przekształceniach otrzymujemy

$$U_1 = \frac{U_0(\kappa - 1)}{e^{2\lambda l}(\kappa + 1) + \kappa - 1}, \quad U_2 = \frac{U_0(\kappa + 1)}{e^{-2\lambda l}(\kappa - 1) + \kappa + 1}$$

gdzie wprowadzono bezwymiarowy parametr $\kappa = R\sqrt{\sigma/\rho}$. Moc źródła jest równa

$$P_0 = U_0 I_0 = U_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{e^{2\lambda l}(\kappa + 1) - (\kappa - 1)}{e^{2\lambda l}(\kappa + 1) + \kappa - 1}$$

Podobnie obliczamy moc odbiornika

$$P = U_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{4\kappa e^{2\lambda l}}{(e^{2\lambda l}(\kappa + 1) + \kappa - 1)^2}$$

Ostatecznie sprawność wynosi

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{4\kappa}{e^{2\lambda l}(\kappa + 1)^2 - e^{-2\lambda l}(\kappa - 1)^2}$$

A teraz omówienie wybranych zadań z ostatniego rocznika.

Zadanie 384 [Obliczenie masy Księżyca na podstawie wysokości pływów] (współczynnik trudności $WT = 1,30$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 5$). Problem ten nie jest, ma się rozumieć, całkowicie oryginalny, dlatego **M. Łacki** mógł posłużyć się rozwiązaniem zawartym w podręczniku Szczeniowskiego, a **K. Kapcia** – oprzeć się na artykule M. Korzyńskiego z Delt 1/2004. Autorem trzeciego bezbłędnego rozwiązania był **A. Idzik**, a dobre odpowiedzi przysłali także **J. Witkowski** i **Oliwia Madej**.

Zadanie 389 [Wyznaczyć moment maksymalnego zbliżenia źródła dźwięku na podstawie przebiegu odbieranej częstotliwości] ($WT = 3,21$, $LPR = 0$). W treści zadania pominięty został warunek, że źródło porusza się ruchem jednostajnym. Nie każde przeoczenie autora może skorygować „fizyczny zdrowy rozsądek”, którego tak zazdrościł p. Marcin Kuczma fizykom w swoim omówieniu ligi matematycznej rok

Zbigniew Galias	– Kraków	42,38
Jerzy Witkowski	– Radlin	41,14
Tomasz Rudny	– Warszawa	31,48
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	30,22
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	1 - 29,30
Mateusz Łącki	– Kraków	28,77
Konrad Kapcia	– Częstochowa	25,19
Tomasz Wietecha	– Tarnów	5 - 19,44
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	6 - 17,43
Tomasz Tkocz	– Rybnik	17,37
Michał Józwiowski	– Błonie	14,77
Leszek Grzanka	– Chechło	14,03
Piotr Kumor	– Olsztyn	13,92
Jacek Konieczny	– Poznań	13,38
Piotr Ładyżyński	– Michalin	10,21
Kazimierz Gryszko	– Gliwice	9,18
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	8,65
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	2 - 7,45

Lista obejmując uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2003–2005 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

temu (kiedy to zabrakło pewnego oczywistego, a niezbędnego warunku w treści jednego z zadań). Na szczęście, nie to okazało się główną przyczyną trudności. Najwyższe oceny uzyskali **K. Kapcia** i **J. Witkowski**, nie przekraczając jednak bariery połowy punktów.

Zadanie 393 [Szybkość spadania magnesów w rurze miedzianej] ($WT = 3,33$, $LPR = 1$). Zadanie to stało się powodem dłuższej dyskusji w redakcji Delt, a przeprowadzone doświadczenia pozwoliły uniknąć nadmiernych uproszczeń w rozwiązaniu początkowo przewidzianym do druku (dziękuję kol. Piotrowi Zalewskiemu za wnikliwą krytykę). Dodatkowe doświadczenia ukazały jeszcze jedną niewymienioną poprzednio subtelną: gdy liczba połączonych magnesów jest dobrana tak, aby spadały szczególnie wolno, istnieje taka grubość rozdzielającej je przekładki, z którą te magnesy spadają najszybciej, w szczególności szybciej niż bez przekładki i szybciej niż dwie połówki oddzielnie (które można uważać za części rozdzielone przekładką nieskończenie grubą). Sądzę, że wyjaśnienie tego efektu wymaga tylko przywołania dwóch konkurujących mechanizmów wskazanych w rozwiązaniu z Delt 6/2005: złączone magnesy wytwarzają silniejsze pole przy biegunach (tzn. z zewnętrznej strony), a rozsunięte na dużą odległość mają za to faktycznie cztery bieguny zamiast dwóch. Najwidoczniej istnieje takie rozsuniecie magnesów, które znacząco osłabia zewnętrzne bieguny nie pozwalając jeszcze efektywnie działać biegunom wewnętrznym. Jedyne dobre rozwiązanie tego zadania przysłał **K. Kapcia**.

Zadanie 394 [Domek z kart] ($WT = 3,10$, $LPR = 2$). Oto zdumiewający przykład „wahnięcia” współczynnika trudności – zadanie było łatwe i standardowe, a wyniki okazały się gorsze od wielu nieporównanie trudniejszych! Autorem bezbłędnego rozwiązania jest **T. Tkocz**, a dobrego – **M. Łupieżowiec**.

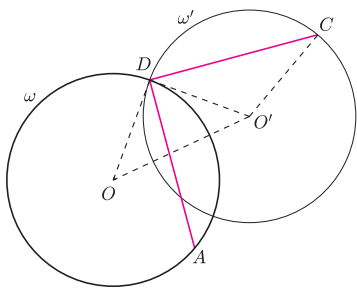
Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (6), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;

„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielwicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.



Rozwiązanie zadania M 1125.

Bez straty ogólności możemy założyć, że punkt D jest ustalony, tzn. jedynym punktem okręgu ω zmieniającym położenie jest punkt A (rys.). Punkt C otrzymujemy obracając punkt A wokół punktu D o 90° . Zatem wierzchołek C każdego spośród rozpatrywanych kwadratów leży na okręgu ω' , który powstaje z okręgu ω przez obrót o 90° wokół punktu D . Zadanie sprowadza się tym samym do wyznaczenia odległości od punktu O do najdalszego punktu okręgu ω' . Bez trudu stwierdzamy, że odległość ta wynosi $OO' + 1 = \sqrt{2} + 1$, gdzie O' oznacza środek okręgu ω' .



Rozwiązanie zadania F 661.

Niech f_1 i f_2 oznaczają ogniskowe soczewek dla światła czerwonego. Ze wzoru na ogniskową cienkiej soczewki wiemy, że ogniskowe dla światła niebieskiego wynoszą odpowiednio

$$f_1 \frac{n_1 - 1}{n_1 + \Delta n_1 - 1} \quad \text{oraz} \quad f_2 \frac{n_2 - 1}{n_2 - \Delta n_2 - 1}.$$

Stąd ogniskowa układu bardzo blisko położonych soczewek to $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ dla światła czerwonego i

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} \left(1 + \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1}\right) + \frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1}\right)$$

dla niebieskiego. Z tych wzorów obliczamy, że

$$f_1 = f \left(1 + \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}\right) \quad \text{i} \quad f_2 = f \left(1 + \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}\right).$$



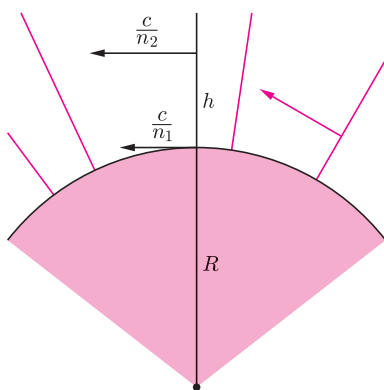
Rozwiązanie zadania F 662.

Niech $R = 6400$ km oznacza promień Ziemi. Aby promienie były zaginane zgodnie z krzywizną Ziemi, czoła fali muszą poruszać się jak na rysunku, czyli prędkość światła musi być proporcjonalna do odległości od środka Ziemi. Wtedy opóźnienie dolnej części powierzchni czoła fali w stosunku do górnej jest odpowiednio, by zagiąć tor fali: $\frac{c_2}{R+h} = \frac{c_1}{R}$. Stąd $n_2 = n_1 \frac{R}{R+h}$. Wstawiając wzór na współczynnik załamania dostajemy

$$1 + \frac{1003}{A} - \frac{T}{B} = \frac{6400}{6400,1} \cdot \left(1 + \frac{1013}{A}\right),$$

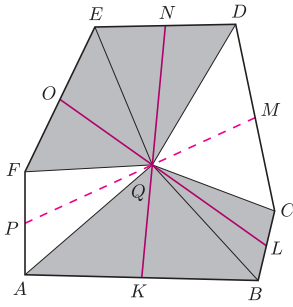
a po obliczeniu $T = 10$ °C.

Takie warunki – wzrost temperatury o 10 °C na 100 m wysokości – są niezwykle rzadkie, ale mogą prowadzić do ciekawych zjawisk, jak obrazy budowli, światła lub gór znajdujących się za horyzontem.



**Rozwiązanie zadania M 1123.**

Niech $ABCDEF$ będzie danym sześciokątem. Oznaczmy przez K, L, M, N, O, P odpowiednio środki boków AB, BC, CD, DE, EF, FA . Przyjmijmy ponadto, że proste KN i LO przecinają się w punkcie Q .



Wówczas

$$[KBCDN] = \frac{1}{2}[ABCDEF] = [OLCDE],$$

gdzie przez $[F]$ oznaczono pole figury F . Stąd $[KBLQ] = [NEOQ]$. Mnożąc ostatnią równość stronami przez 2 oraz korzystając z faktu, że środkowa w trójkącie dzieli go na dwa trójkąty o równych polach dostajemy

$$[ABCQ] = [DEFQ].$$

Korzystając raz jeszcze ze wspomnianego faktu wnioskujemy, że łamana PQM dzieli sześciokąt $ABCDEF$ na dwie figury o równych polach. Punkt Q należy więc do odcinka PM .

Patrz w niebo

Około roku 2000 grupa amerykańskich astronomów za pomocą rentgenowskiego satelity Chandra przebadła drugą co do jasności gromadę kulistą całego nieba, 47 Tucanae (NGC 104). W centralnej części gromady, w obszarze $5' \times 5'$, znaleziono co najmniej 108 źródeł promieniowania rentgenowskiego, z których połowa to zapewne tzw. milisekundowe pulsary. Oceniono, że takich milisekundowych pulsarów w całej gromadzie może być ponad setka. Pozornie można by ten wynik zwyczajnie przyjąć do wiadomości, kłopot jednak w tym, że jest to liczba nadspodziewanie wielka.

Pulsary milisekundowe to gwiazdy neutronowe (oczywiście z polem magnetycznym) wchodzące w skład ciasnych układów podwójnych. Materia przepływająca z towarzyszącej gwiazdzie neutronowej zwykłej gwiazdy przekazuje jej własny moment pędu, rozpędzając ją do prędkości kątowej setek obrotów na sekundę. Zarazem materia ta na powierzchni gwiazdy neutronowej ogrzewa się do milionów stopni emitując promieniowanie rentgenowskie. Dopiero, gdy przepływ materii ustanie, rozpędzona gwiazda neutronowa staje się widoczna jako pulsar w zakresie radiowym. Radioastronomowie znaleźli w centralnym obszarze 47 Tucanae 15 milisekundowych pulsarów. Satelita Chandra pulsów wprawdzie nie rejestrował, rozpoznał jednak wszystkie te obiekty jako źródła rentgenowskie, w dodatku o cechach takich, jak u wielu innych źródeł – stąd wzięła się ocena liczby pulsarów w gromadzie. A jest to za dużo, gdyż w 47 Tucanae są obecne co najwyżej trzy rentgenowskie układy podwójne, w których w przyszłości mogłyby powstać milisekundowe pulsary. Na gruncie obecnej wiedzy o tempie powstawania pulsarów i ich całej ewolucji ocenia się, że tych „rodziców” pulsarów powinno być o rząd wielkości więcej. Morał: musi istnieć jeszcze inny mechanizm powstawania milisekundowych pulsarów. Przypuszcza się, że mogłaby to być np. bezpośrednia zapaść białego karła. W każdym razie badacze tego zagadnienia uznają, że wiedza na temat milisekundowych pulsarów jest jeszcze mocno niepełna.

Tomasz KWAST

**Rozwiązanie zadania M 1124.**

Pewne dwie spośród czterech liczb a, b, c, d dają takie same reszty z dzielenia przez 3. Zatem któryś z sześciu czynników iloczynu

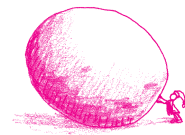
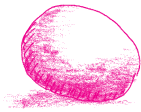
$$A = (a - b)(a - c)(a - d) \cdot (b - c)(b - d)(c - d),$$

a co za tym idzie również ten iloczyn, jest podzielny przez 3.

Pozostaje wykazać, że liczba A jest podzielna przez 4.

Jeśli pewne dwie spośród liczb a, b, c, d dają taką samą resztę z dzielenia przez 4, to jeden z sześciu czynników liczby A jest podzielny przez 4.

Przyjmijmy zatem, że liczby a, b, c, d dają różne reszty z dzielenia przez 4, odpowiednio równe 0, 1, 2, 3. Wtedy czynniki $(a - c)$ oraz $(b - d)$ są parzyste. Zatem również i w tym przypadku liczba A jest podzielna przez 4.

**Luty**

W lutowe wieczory niewątpliwie przyciąga wzrok okazały Orion. Na północ od niego, niemal w zenicie, widać jasną gwiazdę – jest to Capella, alfa Woźnicy, jedna najjaśniejszych gwiazd nieba (0,08 mag, typ widmowy zbliżony do słonecznego). Znajduje się w odległości 14 pc, a z tych wszystkich danych wynika, że świeci z mocą 150 razy większą niż Słońce. Jest to w dodatku gwiazda podwójna, czego amatorskimi metodami stwierdzić się nie da. Można natomiast w tym leżącym w Drodze Mlecznej gwiazdozbiornie przez niedużą lunetę dostrzec co najmniej sześć gromad otwartych. Trzy z nich są na granicy zasięgu nieuzbrojonego oka, a dalsze trzy mają jasności w przybliżeniu do 10 mag. Wszystkie leżą w odległości zbliżonej do 1,5 kpc.

Wenus jest w Strzelcu i widać ją na wschodzie przed wschodem Słońca. Mars jest na granicy Barana i Byka, widać go więc w pierwszej połowie nocy. Jowisz jest w Wadze i widać go w drugiej połowie nocy. Saturn jest w Raku i widać go przez całą noc. Pełnia Księżyca wypada 13 II, a nów 28 II. Księżyc zakryje Spikę 18 II, co zobaczą mieszkańcy Ameryki Północnej i centralnej Afryki, i 21 II Antaresa, a to zobaczą mieszkańcy Indonezji i Australii. Merkury znajdzie się najdalej od Słońca 24 II i można go szukać na niebie po zachodzie Słońca.

T. K.

W każdym chyba zbiorze zadań z rachunku prawdopodobieństwa występuje następujące

Zadanie. Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Jaka jest szansa, że $\pi(k) \neq k$ dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$?

Będzie ono bardziej zrozumiałe, gdy ubierzemy je w tekst o roztrzępanej sekretarce, wkładającej losowo listy do zaadresowanych kopert, albo o uczestnikach przyjęcia, którzy wychodząc wkładają losowo kapelusze. Pytamy wtedy o szansę, że żaden list nie trafi do właściwej koperty, albo żaden kapelusznik na właściwą głowę.

Jeśli dla pewnego k mamy $\pi(k) = k$, mówimy o koincydencji. Pytamy zatem o prawdopodobieństwo $p_{0,n}$, że liczba koincydencji będzie równa zero. Można je obliczyć ze wzoru włączeń i wyłączeń:

$$p_{0,n} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \approx e^{-1}.$$

W wielu zbiorach zadań każe się ponadto obliczyć prawdopodobieństwa $p_{k,n}$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Jeśli chcemy, by dokładnie k osób miało na głowach swoje kapelusze, to musimy wybrać te osoby (na $\binom{n}{k}$ sposobów), rozdać im kapelusze (na 1 sposób), i wreszcie przydzielić pozostałym $n - k$ osobom kapelusze tak, by żaden nie dostał własnego (na $p_{0,n-k} \cdot (n - k)!$ sposobów). Wynika stąd, że

$$p_{k,n} = \frac{\binom{n}{k} \cdot p_{0,n-k} \cdot (n - k)!}{n!} = \frac{1}{k!} p_{0,n-k} = \frac{1}{k!} \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{(n - k)!} \right).$$

Zwróćmy uwagę, że $p_{n-1,n} = 0$ (dlaczego?). Gdy $n \rightarrow \infty$, to

$$p_{k,n} = \frac{1}{k!} \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{(n - k)!} \right) \rightarrow \frac{1}{k!} e^{-1}.$$

Wobec tego dla dużych n liczba koincydencji ma rozkład zbliżony do rozkładu Poissona z parametrem 1. Zapytajmy teraz, jaka jest średnia liczba koincydencji? Wystarczy obliczyć

$$(1) \quad e_n = \sum_{k=0}^n k \cdot p_{k,n},$$

co jest możliwe, choć nieprzyjemne. Pewną wskazówką mogą być średnie $e_1 = e_2 = 1$ oraz średnia w rozkładzie Poissona — równa parametrowi rozkładu, czyli 1. Spróbujmy obliczyć e_3 za pomocą tabeli wszystkich permutacji:

①	②	③	3
2	3	1	0
3	1	2	0
3	②	1	1
①	3	2	1
2	1	③	1
2	2	2	6

Jest 6 możliwych permutacji. Sumując liczby koincydencji w wierszach, widzimy, że jest ich $3 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 6$, czyli średnio jedna na jedną permutację. Nieco inaczej: z tabeli widać, że

$$p_{0,3} = \frac{1}{3}, \quad p_{1,3} = \frac{1}{2}, \quad p_{2,3} = 0, \quad p_{3,3} = \frac{1}{6},$$

zatem wzór (1) przybiera postać

$$e_3 = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

Koincydencje pojawiają się w wierszach dość nieregularnie, dlatego dowód faktu, że $e_n = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest pracochłonny. Spójrzmy teraz na kolumny tabeli — w każdej kolumnie są 2 koincydencje! W ogólnym przypadku jest n kolumn, w każdej $\frac{1}{n} \cdot n! = (n - 1)!$ koincydencji, czyli łącznie $n!$, zatem znów średnio jedna na jedną permutację. Wynika to z symetrii, bowiem w każdej kolumnie jest tyle samo jedynek, dwójek, itd. Udowodniliśmy, że $e_n = 1$ dla $n = 1, 2, \dots$

Argument ten można przedstawić w języku zmiennych losowych. Niech X_k oznacza liczbę właściwych kapeluszy na głowie k -tej osoby. Obliczamy średnią (czyli wartość oczekiwaną):

$$EX_k = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n - 1}{n} = \frac{1}{n},$$

bowiem — ze względu na symetrię — każdy kapelusznik ma takie same szanse znalezienia się na głowie k -tej osoby. Jeśli X jest liczbą właściwych kapeluszy na głowach, to

$$EX = E(X_1 + \dots + X_n) = EX_1 + \dots + EX_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Na zakończenie powinniśmy wyjaśnić, skąd się wziął tytuł artykułu. Piszący te słowa brał kilkakrotnie udział w szkolnej imprezie mikołajkowej. Prawie zawsze po wylosowaniu prezentów ktoś dostawał swój własny (chyba nigdy się nie zdarzyło, żeby aż dwa prezenty wróciły do fundatorów). Może więc rozkład liczby powracających prezentów powinien wziąć nazwę od św. Mikołaja?

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego