

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (380)

Światło twardsze niż diament
Stanisław Bednarek

str. 1

Zadania

str. 3

Dzieje Słońca
Henryk Bilor

str. 4

Mała Delta:

O kulkach w pudełkach
Dariusz Zawisza

str. 6

Trzeba podleźć, gdzie się nie da
przeleźć, czyli o numerycznym
opisie ruchów
Jerzy Ginter

str. 8

Aktualności

str.11

Wyniki finału XXII edycji
Ogólnopolskiego Sejmiku
Matematyków

str.11

Klub 44

str.12

Patrz w niebo

str.14

Styczeń

str.14

Finał XXVII KUPzM

str.15

Regulamin Konkursu
Uczniowskich Prac
z Matematyki

str.15

Prawo małych liczb
Rafał Sztencel

str.16

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na II kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: 022-5328-731, lub -820, lub -816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:

Pierwszy nowoczesny zegarmistrz

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

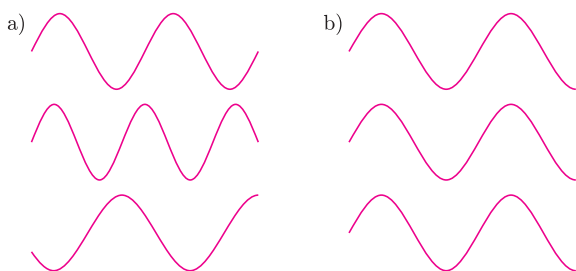
Światło twardsze niż diament

Stanisław BEDNAREK*

Na pierwszy rzut oka stwierdzenie zawarte w tym tytule wydaje się niezgodne z prawdą. W tablicach dotyczących właściwości materiałów bez trudu można znaleźć informację, że najtwardszym materiałem jest właśnie diament. Na diamencie nie można bowiem wykonać rysy żadnym innym materiałem. Fizycy umieją jednak precyzyjnie wycinać otwory w diamentowych płytkach, używając do tego celu wiązki światła. Nie jest to bynajmniej światło wysyłane przez zwykłą żarówkę, lecz ultrakrótkie impulsy światła wytwarzane przez lasery o bardzo dużej mocy. Warto więc poświęcić nieco czasu, żeby zrozumieć zasadę działania tej najnowszej generacji laserów, pozwalających uzyskać światło o tak niezwykłych właściwościach.

Ze słowem laser spotykamy się obecnie na co dzień. Wielu z nas używa choćby drukarek czy wskaźników laserowych. Słowo laser jest akronimem, czyli słowem utworzonym z pierwszych liter angielskiego wyrażenia „light amplification by stimulated emission of radiation” – po polsku oznacza to wzmocnienie światła przez wymuszoną emisję promieniowania. Pierwszy laser został zbudowany w Stanach Zjednoczonych przez T. Maimana. Było to w czerwcu 1960 r. W swojej konstrukcji Maiman wykorzystał opublikowane dwa lata wcześniej teoretyczne rozważania Ch. Townesa i A. Schawlowa.

Zobaczmy, jaka jest różnica między światłem laserowym a światłem pochodzącym ze zwykłych źródeł, np. świecy czy żarówki. W tym celu porównajmy rys. 1 a) i b).

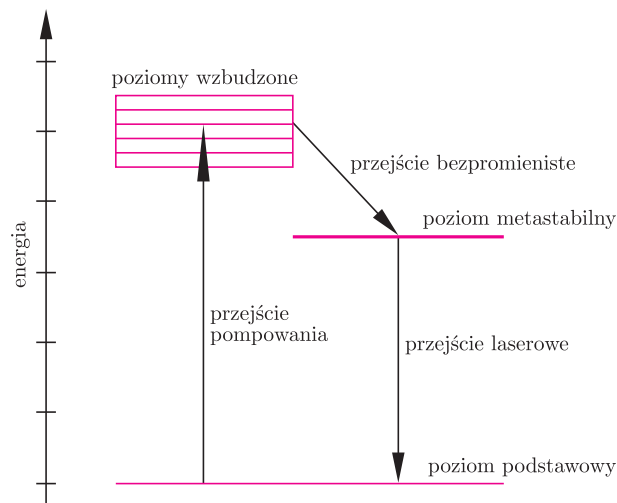


Rys. 1. Wykresy fal elektromagnetycznych a) o przypadkowych długościach i fazach wysyłanych, np. przez żarówkę; b) o jednakowych długościach i fazach wysyłanych przez laser.

Światło, jak wiadomo, jest wiązką fal elektromagnetycznych, którym odpowiadają określone długości i fazy drgań. Charakterystycznymi cechami światła laserowego są: monochromatyczność, spójność – nazywana też koherencją – i równoległość wiązki. Pierwsza z tych cech oznacza taką samą długość wszystkich fal, a druga taką samą fazę, czyli jednakowy argument funkcji sinus lub cosinus przedstawiającej wykres tej fali. Zwykle źródła światła wysyłają natomiast fale o różnych długościach i przypadkowych fazach. Równoległość wiązki, czyli jej kolimacja, umożliwia uzyskanie niewielkiej plamki światła w odległości kilkudziesięciu metrów od wskaźnika laserowego.

Aby ciało, np. włókno żarówki, mogło świecić, konieczne jest wzbudzenie jego atomów lub cząsteczek. Wzbudzenie to polega na dostarczeniu ciału energii, w tym przypadku przez ogrzanie przepływającym prądem elektrycznym. Energia ta jest pochłaniana przez elektrony, które przechodzą ze stanu o najniższej energii – poziomu podstawowego, do stanów o wyższej energii – poziomów wzbudzonych. Poziomy wzbudzone są stanami nietrwałymi i elektrony szybko wracają do poziomu podstawowego, oddając różnicę energii przez wypromieniowanie fal elektromagnetycznych, co przejawia się jako świecenie.

W celu wytworzenia światła laserowego konieczne jest zaistnienie szczególnego układu poziomów energetycznych (rys. 2).

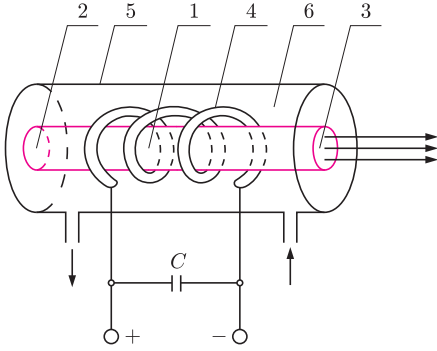


Rys. 2. Najprostszyszy schemat poziomów energetycznych w osrodku wysylajacym swiatlo laserowe.

Charakterystyczną cechą takiego układu jest występowanie tzw. poziomu metastabilnego, na którym elektrony mogą znajdować się przez znacznie dłuższy czas niż na innych poziomach wzbudzonych. Początkowo zachodzi przechodzenie elektronów z poziomu podstawowego na poziomy wzbudzone. Proces ten nazywa się pompowaniem i może być realizowany np. przez silny błysk światła lub wyładowanie elektryczne. Elektrony z poziomów wzbudzonych przechodzą następnie na poziom metastabilny. W pewnym momencie na tym poziomie znajduje się więcej elektronów niż na poziomie podstawowym. Stan taki nazywa się inwersją, czyli odwróceniem obsadzeń. Wówczas rozpoczyna się akcja laserowa, polegająca na wymuszonych przejściach elektronów ze stanu metastabilnego do stanu podstawowego. Towarzyszy jej wysyłanie monochromatycznego, spójnego i skolimowanego promieniowania. Opisany układ trzech poziomów energetycznych z jednym poziomem metastabilnym jest najprostszym układem, w którym może zachodzić akcja laserowa. Obecnie budowane lasery wykorzystują bardziej złożone układy wielu poziomów energetycznych.

*Instytut Fizyki Uniwersytetu Łódzkiego

Akcja laserowa może zachodzić w ośrodku stałym, ciekłym lub gazowym. Pierwszym laserem był laser rubinowy, dający światło czerwone o długości fali $0,6943 \mu\text{m}$ (rys. 3).

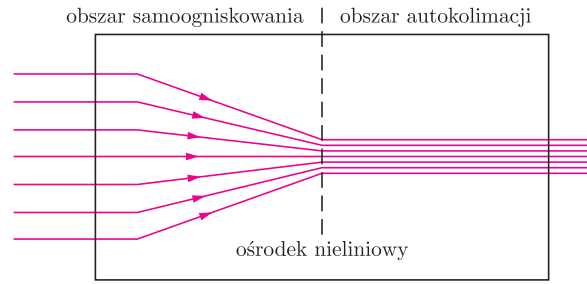


Rys. 3. Budowa lasera rubinowego; 1 – pręt rubinu domieszkowany chromem, 2 – zwierciadło całkowicie odbijające, 3 – zwierciadło częściowo przepuszczające, 4 – lampa błyskowa, 5 – obudowa, 6 – ciecz chłodząca, C – bateria kondensatorów.

Do jego pompowania wykorzystano ksenonową lampę błyskową zasilaną z baterii kondensatorów. Laser ten pracował w sposób impulsowy. Przejście laserowe zachodziło między poziomami energetycznymi atomów chromu, którymi domieszkowany był pręt rubinu. Zwierciadło półprzepuszczalne pozwalało na wyjście wiązki światła laserowego z pręta. Energia jednego impulsu typowego lasera rubinowego nie jest imponująca i wynosi kilkadziesiąt dżuli. Energia ta wypromieniowywana jest jednak w czasie kilkunastu miliardowych części sekundy. Dlatego moc lasera rubinowego w impulsie jest ogromna i osiąga miliardy watów – tyle co moc dużej elektrowni. Takie impulsy laser rubinowy może wytwarzać kilkakrotnie w czasie minuty.

Ogromnym mocom światła laserowego odpowiadają bardzo duże natężenia pola elektrycznego i magnetycznego. Przy tak dużych natężeniach ośrodek, w którym rozchodzi się impuls, staje się nieliniowy. Oznacza to, że współczynnik załamania światła jest funkcją, np. kwadratową, natężenia pola elektrycznego. W takim ośrodku równoległa wiązka światła przekształca się w wiązkę zbieżną, a ta z kolei w wiązkę równoległą, ale o znacznie mniejszej średnicy (rys. 4). Zachodzące tu zjawiska nazywa się samoogniskowaniem i autokolimacją. Samoogniskowanie i autokolimacja prowadzą do dalszego zwiększenia gęstości mocy światła laserowego. Znane są również

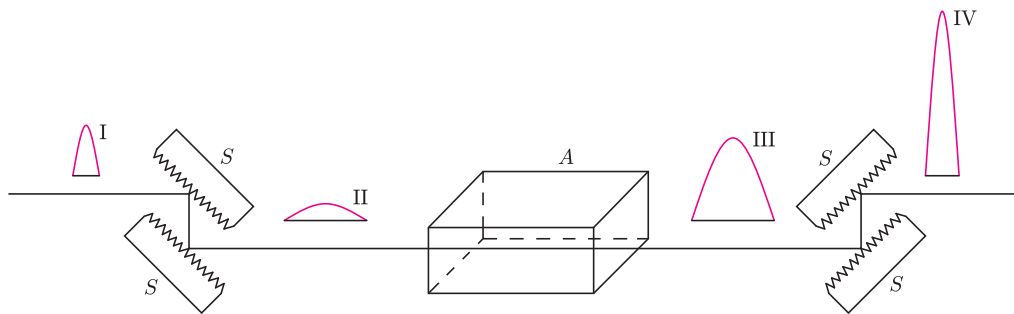
ośrodki nieliniowe, w których może zachodzić przekształcenie równoległej wiązki światła w wiązkę rozbieżną o zwiększonej średnicy. Zależy to od tego, jaką funkcją natężenia pola elektrycznego – rosnącą czy malejącą – jest współczynnik załamania światła ośrodka.



Rys. 4. Samoogniskowanie i autokolimacja wiązki światła w ośrodku nieliniowym.

W połowie lat osiemdziesiątych G. Mourou przedstawił nową koncepcję lasera, pozwalającą na wytwarzanie impulsów światła o jeszcze większej mocy. Pomysł polegał na zastosowaniu odbiciowych siatek dyfrakcyjnych do zmiany czasu trwania impulsu. Schemat budowy takiego lasera przedstawia rys. 5. Impuls wejściowy wytwarzany przez laser zasilający pada na pierwszą parę siatek dyfrakcyjnych, która powoduje wydłużenie czasu jego trwania 10^3 – 10^5 razy. Zgodnie z zasadą zachowania energii zachodzi przy tym zmniejszenie mocy impulsu. Moc rozciągniętego impulsu jest na tyle mała, że może być on bez zniekształcenia wzmocniony przez ośrodek wzmacniający. Po wzmocnieniu impuls przechodzi przez drugą parę odbiciowych siatek dyfrakcyjnych, która tym razem działa odwrotnie, powodując skrócenie czasu trwania impulsu i zwiększenie jego mocy.

Typowy laser działający według opisanej zasady daje impuls o mocy 10^{13} W, trwający 10^{-13} s. Dla porównania, moc ta równa jest sumie mocy wszystkich elektrowni pracujących obecnie na kuli ziemskiej. Skolimowana wiązka światła z takiego lasera o średnicy $36 \mu\text{m}$ ma gęstość mocy 10^{22} W/m². Daje się ona jeszcze zogniskować w obszarze o średnicy około $1 \mu\text{m}$ i wówczas jej gęstość mocy przekracza 10^{25} W/m². Przy tej gęstości mocy natężenie pola elektrycznego osiąga 10^{14} V/m, a indukcja pola magnetycznego 10^5 T. Są to rekordowe parametry pola wytworzonego przez człowieka. Pola takie w szczególny sposób oddziałują z materią, powodując efekt nazywany fotodestrukcją.



Rys. 5. Zasada działania lasera wzmacniającego rozciągnięty impuls; A – ośrodek wzmacniający, S – odbiciowa siatka dyfrakcyjna, I – impuls wejściowy, II – rozciągnięty impuls wejściowy, III – impuls wzmocniony, IV – ściśnięty impuls wzmocniony.

Fotodestrukcja polega na lokalnej jonizacji atomów ośrodka przez niezwykle silne pole elektryczne.

Powstające przy tym swobodne elektrony i jony tworzą mikroobszar wypełniony plazmą o temperaturze rzędu 10^4 K. Plazma ta bardzo szybko rozszerza się – prędkość rozszerzania dochodzi do kilku km/s. Skutkiem tego w ośrodku zaczyna rozchodzić się fala uderzeniowa niszcząca jego strukturę. Działające przy tym siły powodują odrzucenie materii zwane ablacją. W konsekwencji tego, przy użyciu odpowiednio silnego impulsu światła laserowego, możliwe jest wspomniane na wstępie wydrążenie otworu o średnicy kilku tysięcznych milimetra w tak twardych materiałach jak diament czy węgiel tytanu. Warty uwagi jest fakt, że powstały otwór ma gładkie ścianki, a struktura materiału w jego otoczeniu pozostaje nieuszkodzona.

Obróbka najtwardszych materiałów nie jest jedyną dziedziną zastosowań ultrakrótkich impulsów światła laserowego. Bardzo silne pole elektryczne działając na cząstki naładowane, nadaje im ogromne przyspieszenia. W przypadku protonów przyspieszenia te są 10^{22} razy większe od przyspieszenia ziemskiego, a dla elektronów stosunek ten wynosi aż 10^{25} . Dzięki temu oddziaływanie impulsów światła laserowego

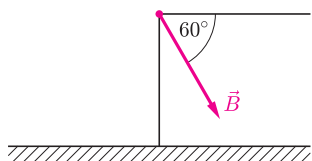
wykorzystuje się jako bardzo efektywny sposób rozpędzania cząstek naładowanych. W niedalekiej przyszłości może to doprowadzić do powstania nowej generacji akceleratorów. Ich rozmiary będą nieporównywalnie mniejsze od rozmiarów obecnie działających akceleratorów. Lasery działające na zasadzie wzmacniania rozciągniętego impulsu są bowiem na tyle małe, że z powodzeniem można zmieścić je na biurku.

Na zakończenie warto dodać, że ultrakrótkie impulsy światła laserowego znalazły również zastosowanie w chemii do badania bardzo szybko zachodzących reakcji chemicznych, których czas trwania jest rzędu 10^{-15} s. W tym czasie następują przeskoiki elektronów tworzących niektóre wiązania chemiczne. Obrazowo przedstawiając sprawę, można powiedzieć, że takie ultrakrótkie impulsy światła laserowego są w stanie spełniać rolę swoistej lampy błyskowej, pozwalającej uwidocznić i zarejestrować ten proces. Metodę tę opracował i rozwijał w latach dziewięćdziesiątych XX wieku Egipcjanin A. Zewail. Znaczenie poznawcze tej metody zostało w krótkim czasie docenione przez społeczność naukową i Zewail w 1999 r. otrzymał Nagrodę Nobla w dziedzinie chemii.



Zadania

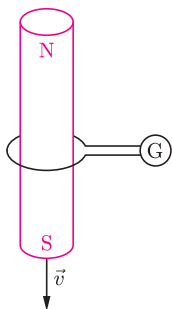
Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



Rys. 1

F 659. Samochód jedzie z prędkością $v = 100$ km/h w kierunku zachodnim. Do samochodu dołączona jest pionowa antena o długości $d = 40$ cm. Obliczyć różnicę potencjałów na końcach anteny spowodowaną przez ziemskie pole magnetyczne. Inklinationa tego pola, czyli kąt między wektorem pola magnetycznego a poziomem, wynosi w tym miejscu $\alpha = 60^\circ$ (rys. 1), a jego pozioma składowa skierowana jest dokładnie na północ (deklinacja wynosi zero). Indukcja ziemskiego pola magnetycznego w tym miejscu wynosi $B = 4 \cdot 10^{-5}$ T. Czy różnica potencjałów powoduje jakieś dodatkowe opory ruchu?

Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

F 660. Przez pętelkę z drutu, podłączoną do galwanometru, przelatuje (ze stałą prędkością) magnes sztabkowy w kształcie wydłużonego cylindra (rys. 2). W jakim momencie ruchu magnesu wskazania galwanometru będą największe? Wskazówka: narysować w przybliżeniu linie pola magnetycznego magnesu.

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Waldemar POMPE

M 1120. Dane są liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c o sumie równej 1. Dowieść, że

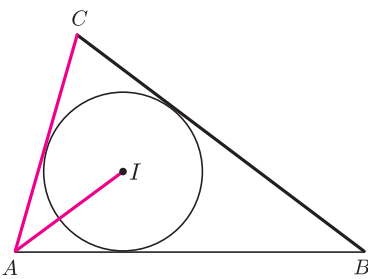
$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} + b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} + c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

Rozwiązanie na str. 10

M 1121. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , przy czym $AC + AI = BC$ (rys. 3). Wyznaczyć stosunek miary kąta BAC do miary kąta ABC .
Rozwiązanie na str. 14

M 1122. Każde pole szachownicy $n \times n$ pomalowano na czarno lub biało. Okazało się, że żadne cztery pola, których środki są wierzchołkami prostokąta o bokach równoległych do krawędzi szachownicy, nie zostały pomalowane tym samym kolorem. Dla jakiej największej wartości n jest to możliwe?

Rozwiązanie na str. 10



Rys. 3

Dzieje Słońca

Henryk BILOR

¹Gwiazdy zmienne – gwiazdy zmieniające swoją jasność na skutek zmiany temperatury lub rozmiarów (co na ogół zachodzi jednocześnie). Gwiazdy zmienne zaćmieniowe (układy gwiazd wzajemnie przesłaniających się) nie interesują nas w tym artykule.

Kurczenie następowało nadal i zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu następowało przyspieszenie prędkości obrotowej całego układu (podobnie jak łyżwiarz kręcący piruety zwiększa tempo obrotów przez złożenie rąk). Z cząstek pyłu krążącego wokół protogwiazdy zaczęły powstawać okruchy skał, a następnie, gdy wiele z nich zlepilo się, tworzyły się planety. Jednej z protoplanet niewiele brakowało, aby sama stała się małą gwiazdą – brązowym karłem. Był to Jowisz, jednak zgromadził zbyt mało gazu, by mogły rozpocząć się w nim reakcje termojądrowe. Ten olbrzymi glob, który stale grawitacyjnie się kurczy (w ten sposób produkuje ciepło), promieniuje więcej ciepła, niż otrzymuje od Słońca. Większość pierwiastków, z których składa się Ziemia, tworzyła naszą planetę już w jej początkowym okresie. Od tego czasu przybywa ich jedynie z upadkami ogromnej ilości meteoroidów. Gdy temperatura w jądrze Protosłońca osiągnęła 10 milionów stopni, rozpoczęły się reakcje termojądrowe polegające na łączeniu się jąder wodoru i powstawaniu jąder helu. Narodziło się Słońce. Przez pierwsze kilkadziesiąt milionów lat było niestabilne, co objawiało się głównie zmianami jasności (w okresie maksymalnej jasności gwiazda może być kilkaset razy jaśniejsza niż w okresie minimalnej jasności). Przechodziło okresy, w których obecnie znajdują się gwiazdy typu FU Orionis, a następnie typu T Tauri (reprezentowane przez T Tauri północną, fot. 1).



Fot. 1. Gwiazda T Tauri wraz z mgławicą NGC 1555 (autor: Dominik Woś).

Blisko pięć miliardów lat temu obserwator znajdujący się na skraju naszej Galaktyki zauważył wybuch pobliskiej gwiazdy supernowej. Wybuch ten utworzył falę uderzeniową rozprzestrzeniającą się także w kierunku olbrzymiej mgławicy zbudowanej głównie z wodoru i helu. Mgławica o średnicy kilkudziesięciu lat świetlnych (odległość najbliższej Słońcu gwiazdy wynosi nieco ponad 4 lata świetlne) do tej pory pozostawała względnie stabilna. Fala uderzeniowa zaburzyła tę stabilność – mgławica zasilona wieloma wytworzonymi w supernowej pierwiastkami (w tym węglem, tlenem, azotem, krzemem) zaczęła się lokalnie zagęszczać. Jedno z takich zagęszczeń miało stać się w przyszłości naszą gwiazdą dzienną. Po kilkuset tysiącach lat lokalne zagęszczenie skurczyło się do rozmiarów naszego dzisiejszego Układu Słonecznego. Wraz z kurczeniem się obłoku gazu temperatura w jego wnętrzu zaczęła rosnąć, zaczęło się wydzielać ciepło w postaci promieniowania podczerwonego. Gdy temperatura osiągnęła około 50 tysięcy stopni, narodziło się Protosłońce. Był to mniej więcej taki etap ewolucji, na jakim obecnie znajduje się gwiazda zmienna T Tauri południowa¹.

Gwiazdę T Tauri możemy obserwować już dobrą lornetką w gwiazdozbiorze Byka, tuż obok otwartej gromady gwiazd, Hiad. Na zdjęciach T Tauri widoczna jest mgławica otaczająca gwiazdę. Powstanie z niej układ planetarny, być może podobny do naszego, a za kilka miliardów lat może na którejś z planet powstanie życie. Wewnątrz tej mgławicy znajduje się wspomniana wcześniej T Tauri południowa, która na razie widoczna jest jedynie w podczerwieni. Te dwie gwiazdy tworzą fizyczny układ podwójny.

Następnie Słońce „uspokoilo się” i w takim stabilnym stanie trwa przez ostatnie 4,5 miliarda lat aż do dzisiejszego dnia, zwiększając stopniowo swoją jasność (na początku świeciło z jasnością 0,7 aktualnej). Obecnie jest bardzo spokojną gwiazdą, powodując jedynie przez swoje „grymasy” piękne zorze polarne (fot. 2) czy zaburzenia w łączności satelitarnej.



Fot. 2. Zorza polarna (autor: Wojciech Burzyński).

Promieniowanie słoneczne dostarcza energii do życia, umożliwia roślinom „produkcję” żywności, a nam zdobywanie ładnej opalenizny, ale także (gdy w nadmiarze) oparzeń. A wszystko to dzięki zamianie 570 milionów ton wodoru na hel w każdej sekundzie. Jednocześnie z promieniowaniem Słońce w każdej sekundzie traci około 4 milionów ton swojej masy w postaci cząstek. Za następne około 5 miliardów lat wyczerpią się zapasy wodoru w jądrze Słońca, a temperatura będzie zbyt niska, żeby funkcję źródła energii zajęła przemiana helu w węgiel. Podczas gdy jądro będzie się kurczyło, zwiększając temperaturę, zapali się wodór w płaszczu otaczającym helowy środek gwiazdy.

Zwiększające się ciśnienie spowoduje spęcznienie zewnętrznych warstw Słońca z jednoczesnym spadkiem powierzchniowej temperatury, dzięki czemu Słońce będzie coraz bardziej czerwone. Podczas zwiększania swoich rozmiarów pochłonie Merkurego, jednak dzięki utracie masy na skutek emisji silnego wiatru słonecznego przyciąganie grawitacyjne Słońca zmniejszy się, co spowoduje przesunięcie się planet na dalsze orbity i prawdopodobnie uchroni Ziemię i być może Wenus przed losom najbliższej Słońcu planety. Jednak życia już dawno na Ziemi nie będzie. Wzrost promieniowania otrzymywanego od Słońca spowoduje znaczne podniesienie się temperatury jej powierzchni, co, oczywiście, spowoduje odparowanie oceanów, a być może nawet całkowite „zdmuchnięcie” atmosfery. Ziemia stanie się wypalonym, suchym, niegościnnym miejscem.

W tym czasie Słońce na diagramie Hertzsprunga–Russella (pokazującym zależność jasności absolutnej gwiazdy od jej barwy) przesunie się wyraźnie do góry i w prawo, co znaczy, że zmniejszy się temperatura powierzchniowa, jednak dzięki znacznie większej powierzchni zwiększy się jego jasność.

Następnie, gdy temperatura w jądrze Słońca osiągnie około 100 milionów stopni, rozpocznie się reakcja przemiany helu w węgiel i tlen. Nastąpi tzw. błysk helowy, czyli wyzwolenie ogromnej ilości energii, która jednak w znikomej części spowoduje zwiększenie jasności gwiazdy, gdyż zostanie pochłonięta przez wewnętrzne warstwy. Następnie bardzo szybko Słońce zmniejszy swoje rozmiary, aby ponownie zacząć je powiększać w momencie zapalenia helu w otocze jądra. W tym czasie może się zdarzyć, że przetnie tzw. pas niestabilności na diagramie H-R i stanie się gwiazdą pulsującą – mirydą. Ten etap ewolucji możemy podziwiać nawet gołym okiem (w okresach maksimum jasności) w kilku miejscach nieba. Najwcześniej opisaną, bo już w XVII wieku, jest gwiazda omikron Wieloryba, zwana inaczej Cudowną (Mira). Gwiazda ta w okresach największej jasności bywa najjaśniejsza w gwiazdozbiore Wieloryba (fot. 3), a w minimum jasności jest widoczna za pomocą dobrych lornetek. W pewnym momencie Słońce odrzuci otoczkę, odsłaniając gorące jądro – powstanie mgławica planetarna i w środku biały karzeł; patrz okładka.



Fot. 3. Mira w pobliżu minimum i maksimum jasności (autor: Leszek Marcinek).

Gwiazda ta, nie mając dosyć masy, by zapoczątkować przemianę węgla i tlenu w cięższe pierwiastki, znacznie powoli stygnąć, przemieniając się w czarnego karła. I będzie to ostatnie stadium gwiazdy podobnej naszemu Słońcu. Będzie to jednocześnie najdłuższy, trwający kilkadziesiąt miliardów lat etap życia gwiazdy.

Bezstronny obserwator przemieści się w inne miejsce, by oglądać narodziny kolejnej gwiazdy. Gdzie my wtedy będziemy?

Gwiazdy wymienione w artykule:

Supernowa – wybuch starej, masywnej gwiazdy, podczas którego zwiększa ona jasność setki milionów razy, osiągając jasność porównywalną z jasnością całej galaktyki. Podczas wybuchu wyrzucane są w przestrzeń ciężkie pierwiastki wyprodukowane w gwieździe. Pozostałościami po wybuchu są gwiazda neutronowa lub czarna dziura, otoczone mgławicą (np. słynna mgławica Krab w Byku).

T Tauri – prototyp gwiazd wykazujących niewielkie, nieprzewidywalne wahania jasności spowodowane niestabilnością dysku otaczającego gwiazdę, wybuchami w atmosferze lub przesłonięciem przez obłok, z którego powstały.

Białe karły – małe gwiazdy o rozmiarach zbliżonych do rozmiarów Ziemi, których materia osiąga gęstość rzędu 1000 kg/cm^3 .

Mirydy – czerwone olbrzymy (o średnicy kilkaset razy większej niż średnica Słońca) o zmiennych rozmiarach i – co się z tym wiąże – zmiennej jasności, w okresie 90–1000 dni. Pulsują one w miarę regularnie.

FU Orionis – prototyp gwiazd charakteryzujących się znacznym wzrostem jasności (do kilkuset razy) w ciągu kilku miesięcy, a następnie (po okresie niezmienności) powolnym jej spadkiem w ciągu wielu lat. Wszystkie znane tego typu gwiazdy są otoczone mgławicą.

Podyskutować na temat artykułu, znaleźć mapki konieczne do obserwacji gwiazd zmiennych, jak i dowiadywać się na bieżąco o ciekawostkach ze „świata” gwiazd zmiennych można na forum astronomicznym: <http://astro4u.net/yabbse/index.php>.



O kulkach w pudełkach

Zaczniemy od następującego zadania:

Na ile sposobów można rozmieścić 14 identycznych przedmiotów (np. kulek) w 3 pudełkach tak, by w żadnym z pudełek nie znalazło się więcej niż 7 przedmiotów?

Jego rozwiązanie nie powinno nam przysporzyć większych trudności. Możemy po prostu wypisać wszystkie sposoby. Oto niektóre z nich:

I	II	III
0	7	7
1	6	7
2	5	7
2	6	6
3	4	7
3	5	6
4	4	6
4	5	5

Pozostałe możliwości są permutacjami powyższych. Łatwo policzyć, że wszystkich jest 36.

Ta metoda może okazać się nieco mniej przyjemna, gdy zechcemy zastosować ją do analogicznego zadania, ale z większą liczbą przedmiotów i pudełek. Warto zatem zastanowić się nad innym rozwiązaniem.

Na początek policzmy wszystkie sposoby rozmieszczenia 14 przedmiotów w trzech pudełkach. Jeżeli w pierwszym pudełku znajdzie się m przedmiotów, wówczas drugie pudełko możemy wypełnić na $15 - m$ sposobów. Liczba przedmiotów w trzecim pudełku będzie wyznaczona jednoznacznie przez ich liczbę w pierwszym oraz drugim. Wszystkich sposobów jest zatem

$$\sum_{m=0}^{14} (15 - m) = 120.$$

Następnie zauważmy, że więcej niż 7 przedmiotów może znajdować się w dokładnie jednym pudełku. Dla ustalenia uwagi założmy, że w pierwszym. Musi się w nim znaleźć co najmniej 8 przedmiotów, wystarczy więc policzyć sposoby rozdzielania pozostałych 6 do 3 pudełek. Licząc tak, jak poprzednio, otrzymamy

$$\sum_{m=0}^6 (7 - m) = 28.$$

Teraz już widać, że sposobów spełniających wszystkie nasze warunki jest $120 - 3 \times 28 = 36$.

Możemy teraz zastanowić się nad problemem bardziej ogólnym:

Na ile sposobów możemy rozmieścić n jednakowych przedmiotów w k pudełkach?

Najpierw rozpatrzmy przypadek $n = 6$ oraz $k = 4$. Niech przedmioty będą reprezentowane zerami; wypiszmy je jedno za drugim – tak, jakbyśmy kładli po kolei te przedmioty. Teraz między wypisane zera wstawmy trzy jedyinki; pokażą one, w którym miejscu zmieniamy pudełko, a więc służą do rozdzielania przedmiotów do czterech pudełek. Może się zdarzyć, że dwie jedyinki stoją koło siebie – to znaczy, że któreś pudełko będzie puste. Nietrudno zauważyć, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ciągami złożonymi z sześciu zer i trzech jedynek a sposobami rozmieszczenia tych sześciu zer w czterech pudełkach. Mianowicie, dany ciąg odpowiada umieszczeniu wszystkich zer występujących przed pierwszą jedyneką w pierwszym pudełku, w drugim pudełku zer, które leżą między pierwszą a drugą jedyneką, w trzecim pudełku zer, które leżą między drugą a trzecią jedyneką, i zer występujących po ostatniej jedynce w pudełku czwartym. Na przykład

$$010100010 \rightarrow 0|0|000|0 \rightarrow \boxed{0} \boxed{0} \boxed{000} \boxed{0}$$

Wystarczy teraz tylko policzyć, ile jest ciągów mających dokładnie sześć zer i trzy jedyinki. Aby wyznaczyć taki ciąg, wystarczy wskazać miejsca, na których stoją jedyinki. Na przykład w poniższym ciągu jedynka występuje na miejscu pierwszym, trzecim i szóstym.

$$101001000$$

Takich ciągów będzie zatem tyle, ile jest sposobów na wybranie 3 miejsc (w których postawimy jedyinki) spośród 9 dostępnych, czyli $\binom{9}{3}$.

W przypadku ogólnym rozpatrujemy ciągi złożone z n zer i $k - 1$ jedynek; będzie ich $\binom{n+k-1}{k-1}$ i, tak jak poprzednio, istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między tymi ciągami a rozmieszczeniami n zer w k pudełkach.

Ta metoda okazuje się mieć zastosowanie nie tylko do zadań o kulkach w pudełkach; jest ona daleko bogatsza i nieraz bardzo przydatna. Rozważmy na przykład problem taki:

Ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$$

w liczbach całkowitych nieujemnych?

Spróbujmy podać interpretację rozwiązań powyższego równania. Szukamy tak naprawdę sposobów rozdzielania zbioru n -elementowego na k części. Dlatego można powiedzieć, że rozwiązania te są algebraicznym opisem sposobów rozmieszczenia n przedmiotów w k pudełkach.

Na tym jednak nie kończą się zastosowania tej zasady. Wiele jest problemów, przede wszystkim kombinatorycznych, które można rozwiązać przez zliczenie rozmieszczeń n przedmiotów w k pudełkach. Jako ćwiczenie polecam zadanie:

Ile jest liczb między 0 a 999, których suma cyfr jest równa 20?

Małą Deltę przygotował Dariusz ZAWISZA

Wstęp

Istnieje w fizyce wiele zagadnień, które – choć w zasadzie proste pojęciowo – prowadzą do znacznych trudności przy ich opisie matematycznym. Na przykład: aby omówić ilościowo ruch kulki na sprężynie, czyli oscylatora harmonicznego, wystarczy znajomość funkcji sinus. Ale do opisu wahadła matematycznego, czyli ciężarka zawieszono na nitce, trzeba znać całki eliptyczne. Podobnie – przy dyfrakcji na szczelinie zależność natężenia światła od kąta odchylenia wyraża się przez funkcje elementarne – czyli po prostu przez $\sin^2 x/x^2$. Ale aby opisać analitycznie dyfrakcję światła na otworze kołowym, trzeba znać funkcje Bessela. I tak dalej.

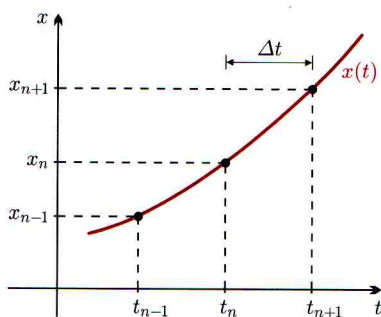
W bardzo wielu takich przypadkach można jednak podać numeryczny opis zagadnień, stosując proste algorytmy i ogólnie dostępne programy. Zastosujemy teraz ten sposób do rozwiązywania newtonowskich równań ruchu.

Numeryczne obliczanie przyspieszenia, sposób nienaukowy

Przypuśćmy na początek, że zależność położenia ciała w jednowymiarowym układzie współrzędnych x od czasu t opisana jest funkcją $x(t)$. Interesować nas będą trzy położenia w wybranych chwilach, równo oddalonych od siebie o Δt (rys. 1):

- położenie w chwili $t_{n-1} = (n-1)\Delta t$, czyli $x_{n-1} \equiv x(t_{n-1})$,
- położenie x_n w chwili $t_n = n\Delta t$,
- położenie x_{n+1} w chwili $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$.

Chcemy obliczyć przyspieszenie ciała w chwili t_n , czyli wielkość a_n .



Rys. 1. Obliczanie przyspieszenia ciała w chwili t_n .

Najpierw jednak musimy obliczyć prędkości. Średnia prędkość w przedziale czasu pomiędzy t_{n-1} a t_n jest bliska prędkości chwilowej w środku przedziału, czyli w czasie $t_{n-\frac{1}{2}} = (n-\frac{1}{2})\Delta t$ (wątpiącym przypominamy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej). Napiszemy więc

$$(1) \quad v_{n-\frac{1}{2}} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}.$$

Podobnie średnia prędkość w przedziale czasu pomiędzy t_n a t_{n+1} jest bliska prędkości chwilowej w czasie $t_{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\Delta t$:

$$(2) \quad v_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}.$$

Za pomocą wzorów (1) i (2) możemy obliczyć interesujące nas przyspieszenie:

$$(3) \quad a_n = \frac{v_{n+\frac{1}{2}} - v_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} - \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n}{\Delta t^2}.$$

Podsumujmy: jeżeli znamy położenia ciała w trzech kolejnych równo odległych chwilach, za pomocą wzoru (3) możemy w przybliżeniu obliczyć przyspieszenie ciała w chwili środkowej.

Numeryczne obliczanie przyspieszenia, sposób naukowy

Przedstawiony powyżej prymitywny sposób wprowadzenia wyrażenia na przyspieszenie możemy oczywiście unaukować. Przyspieszenie jest drugą pochodną położenia względem czasu $x''(t)$. Napiszmy rozkład funkcji $x(t)$ na szereg Taylora w okolicy chwili t_n :

$$(4) \quad x_{n+1} \equiv x(t_n + \Delta t) = x(t_n) + \frac{x'(t_n)}{1!}\Delta t + \frac{x''(t_n)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{x'''(t_n)}{3!}(\Delta t)^3 + \dots = x(t_n) + x'(t_n)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t_n)(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}x'''(t_n)(\Delta t)^3 \dots$$

Podobnie

$$(5) \quad x_{n-1} \equiv x(t_n - \Delta t) = x(t_n) - \frac{x'(t_n)}{1!}\Delta t + \frac{x''(t_n)}{2!}(\Delta t)^2 - \frac{x'''(t_n)}{3!}(\Delta t)^3 + \dots = x(t_n) - x'(t_n)\Delta t + \frac{1}{2}x''(t_n)(\Delta t)^2 - \frac{1}{6}x'''(t_n)(\Delta t)^3 \dots$$

Po zsumowaniu tych wyrażeń dostaniemy (człony z nieparzystymi potęgami Δt się redukują)

$$(6) \quad x_{n+1} + x_{n-1} \approx 2x(t_n) + x''(t_n)(\Delta t)^2.$$

Stąd natychmiast wynika wzór (3).

II zasada dynamiki i algorytm obliczeń numerycznych

W ramach mechaniki klasycznej przyspieszenie ciała a jest proporcjonalne do działającej siły F , co zapisujemy w postaci

$$(7) \quad F = ma,$$

gdzie m jest masą ciała. Dla chwili t_n napiszemy więc

$$(8) \quad F_n = ma_n,$$

czyli

$$(9) \quad F_n = ma_n = m \frac{x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n}{\Delta t^2}.$$

*Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Po prostych przekształceniach dostaniemy

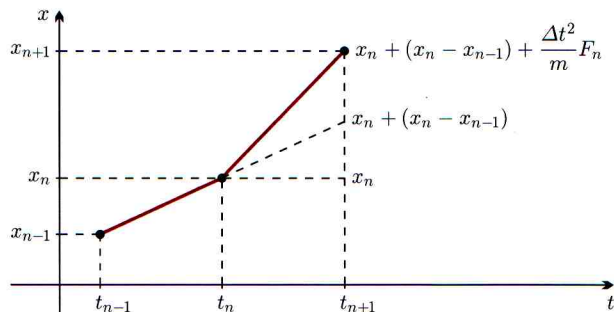
$$(10) \quad x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n = \frac{\Delta t^2}{m} F_n,$$

a stąd

$$(11) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} F_n.$$

Wzór ten może stanowić podstawę numerycznego obliczania zależności położenia od czasu dla dowolnego jednowymiarowego ruchu. Jeżeli znamy położenia w chwilach t_{n-1} i t_n , oraz wartość siły F_n w chwili t_n , możemy obliczyć położenie ciała w chwili t_{n+1} . Możemy więc prowadzić obliczenia krok po kroku, dla kolejnych wartości n . Wzór (11) ma prostą interpretację, którą zauważymy, przekształcając go do postaci

$$(12) \quad x_{n+1} = x_n + (x_n - x_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{m} F_n.$$



Rys. 2. Graficzna interpretacja wzoru (12).

Gdyby siła F_n była równa zero, przyrost wartości x pomiędzy czasem t_n a t_{n+1} byłby taki sam, jak pomiędzy czasami t_{n-1} i t_n . Wykres byłby linią prostą, mielibyśmy do czynienia z ruchem jednostajnym. Istnienie ostatniego członu we wzorze (12) zakrzywia wykres zależności $x(t)$: ku górze, jeżeli F_n jest dodatnie, ku dołowi, jeżeli F_n jest ujemne.

Warunki początkowe

Aby rozpocząć rachunek krok po kroku w oparciu o wzór (11), musimy w zasadzie znać x_0 i x_1 . Zwykle jednak wygodniej wybrać inną parę wielkości początkowych:

1. położenie w chwili zero, czyli x_0 ,
2. prędkość w chwili zero, czyli v_0 .

Aby obliczyć x_1 , mówimy: w krótkim przedziale czasu Δt działająca siła mało się zmienia. Ruch możemy więc potraktować jako jednostajnie przyspieszony ze stałym przyspieszeniem $a_0 = F_0/m$. Wynika stąd wyrażenie na x_1

$$(13) \quad x_1 = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{F_0 \Delta t^2}{2m}.$$

Siła zależna od położenia

W dalszym ciągu ograniczymy się do przypadku, kiedy siła zależy tylko od położenia x , czyli $F_n = F(x_n)$. Wtedy algorytm obliczeniowy ma postać:

$$(14) \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} F(x_n),$$

z dodatkowym wzorem (13) na x_1 . Zastosujemy go do dwóch przypadków:

1. oscylatora harmonicznego – aby sprawdzić, jak algorytm działa;
2. prostego oscylatora anharmonicznego.

Obliczenia przeprowadzone zostały za pomocą ogólnie dostępnego programu *Excel* (powszechnie potępianej firmy *Microsoft*).

Oscylator harmoniczny

Jak wiadomo, dla oscylatora harmonicznego siła jest – z przeciwnym znakiem – proporcjonalna do wychylenia:

$$(15) \quad F(x) = -kx,$$

Dla warunku początkowego $v_0 = 0$ zależność położenia od czasu opisana jest funkcją

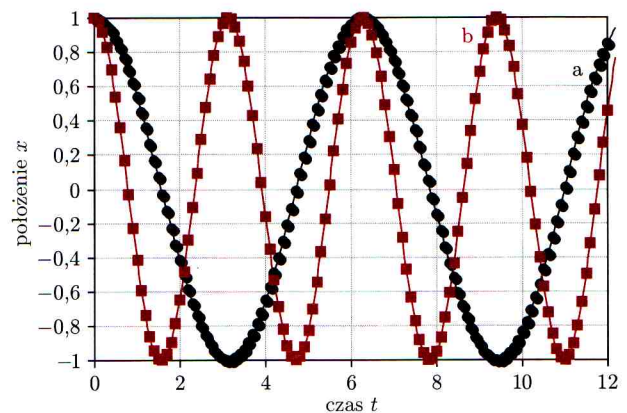
$$(16) \quad x(t) = A \cos(\omega t).$$

Częstość kołowa ω dana jest wzorem

$$(17) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

i nie zależy od amplitudy drgań. W szczególności dla $k = 1$ i $m = 1$ także $\omega = 1$, a $T = 2\pi/\omega = 2\pi$.

Program *Harmoniczny* służy do numerycznego obliczania zależności położenia od czasu dla oscylatora harmonicznego. Można dowolnie wybrać masę oscylatora m , stałą sprężystości k , krok prowadzonych obliczeń Δt , położenie początkowe x_0 i prędkość początkową v_0 . Aby można było porównać dwa zestawy parametrów, w programie obok siebie zostały umieszczone dwie identyczne kolumny obliczeniowe. Wyniki obu serii obliczeń zostały umieszczone na wspólnym wykresie. Można stwierdzić, że rachunki numeryczne odtwarzają z rozsądną dokładnością wszystkie własności oscylatora harmonicznego (rys. 3).



Rys. 3. Obliczona numerycznie zależność położenia od czasu dla oscylatora harmonicznego. Dwa zestawy parametrów:

- a. $k = 1$, $m = 1$, $x_0 = 1$ i $v_0 = 0$;
- b. $k = 4$, $m = 1$, $x_0 = 1$ i $v_0 = 0$.

Oscylator anharmoniczny

Jako przykład drugi rozważymy oscylator anharmoniczny, dla którego siła zależy od wychylenia jak

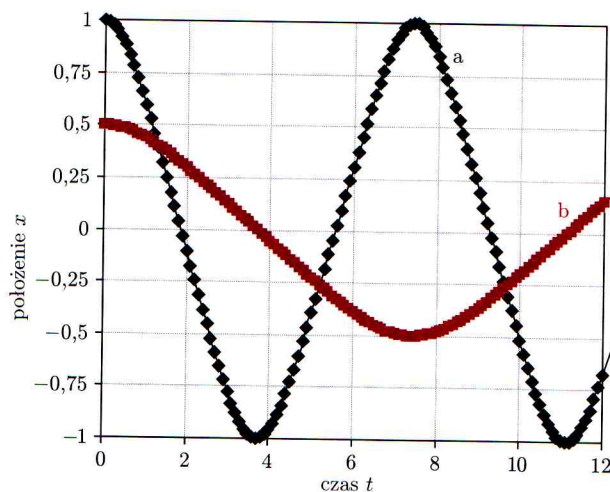
$$(18) \quad F(x) = -Lx^3.$$

Odpowiada to zależności energii potencjalnej od położenia:

$$(19) \quad E_P(x) = \frac{1}{4}Lx^4.$$

Program *Anharmoniczny* działa identycznie jak omówiony powyżej program dla oscylatora harmonicznego. Na rysunku 4 widzimy, że:

1. Funkcja, opisująca zależność $x(t)$ jest funkcją okresową, ale jej kształt wyraźnie odbiega od sinusoidy.
2. Okres – przy ustalonych parametrach L i m – nie jest stały, ale zależy od amplitudy drgań. Zmieniając wartość x_0 można zauważyć, że okres jest odwrotnie proporcjonalny do amplitudy.



Rys. 4. Obliczona numerycznie zależność położenia od czasu dla oscylatora anharmonicznego 1. Dwa zestawy parametrów:
a. $L = 1$, $m = 1$, $x_0 = 1$ i $v_0 = 0$,
b. $L = 1$, $m = 1$, $x_0 = 2$ i $v_0 = 0$.

Wpływ zmiany innych parametrów na zależność $x(t)$ Czytelnik może prześledzić samodzielnie.

Zadania domowe

Przykłady ruchów można dowolnie mnożyć. Proponuję, aby Czytelnik samodzielnie rozważył dwa przykłady:

1. Drgania cząsteczki dwuatomowej, dla której energię potencjalną oddziaływania między atomami można przybliżyć tak zwanym „potencjałem 6-12”:

$$(20) \quad E_P(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} \right);$$

z którego wynika wyrażenie na siłę:

$$(21) \quad F(x) = \frac{1}{x^{13}} - \frac{1}{x^7}.$$

Warto rozważyć dwa przypadki warunków początkowych:

$$v_0 = 0 \quad \text{i} \quad 1/\sqrt[6]{2} < x_0 < 1$$

oraz

$$v_0 = 0 \quad \text{i} \quad 0 < x_0 < 1/\sqrt[6]{2} \quad (1/\sqrt[6]{2} \approx 0,891).$$

2. Wahadło matematyczne. W tym przypadku w naszym algorytmie x będzie oznaczać kąt wychylenia, a wielkość F – moment siły. Dla wahadła przyjmujemy

$$(22) \quad F(x) = -\sin(x).$$

Warto rozważyć dwa przypadki warunków początkowych: $x_0 = 0$ i $v_0 < 2$ oraz $x_0 = 0$ i $v_0 > 2$.

Programy

Programy obliczeniowe dla wszystkich omawianych przykładów znajdują się na stronie internetowej *Delty*.



Rozwiązanie zadania F 659.

Składowa pionowa siły Lorentza działającej na elektron w antenie jest stała wzdłuż anteny i wynosi $F = eBv \cos \alpha$, a więc różnica potencjałów między końcami anteny to $U = Bvd \cos \alpha = 2$ mV. Ta różnica potencjałów, przy braku innego połączenia między biegunami anteny, kompensowana jest statycznym rozkładem ładunku wzdłuż anteny. Nie ma więc przepływu prądu elektrycznego w antenie, a zatem brak dodatkowych sił działających na antenę.



Rozwiązanie zadania M 1120.

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną a średnią arytmetyczną, otrzymujemy

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} \leq a \cdot \frac{1+1+(1+b-c)}{3} = a + \frac{ab-ac}{3}.$$

Analogicznie mamy

$$b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} \leq b + \frac{bc-ba}{3}$$

oraz

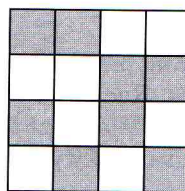
$$c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq c + \frac{ca-cb}{3}.$$

Dodając stronami uzyskane nierówności, uzyskujemy tezę.

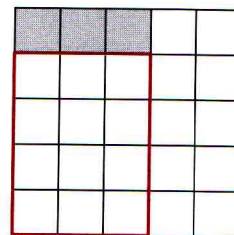


Rozwiązanie zadania M 1122.

Odp.: $n = 4$. Dla $n = 4$ żądane pokolorowanie pokazano na rys. 1. Wykażemy, że takie pokolorowanie nie jest możliwe, jeśli $n = 5$.



Rys. 1



Rys. 2

Przypuścimy, że udało się pokolorować pola szachownicy 5×5 w żądany sposób. Górny wiersz szachownicy 5×5 zawiera co najmniej trzy pola tego samego koloru, powiedzmy czarnego. Przystawiając kolumny możemy doprowadzić do sytuacji, w której pierwsze trzy pola pierwszego rzędu są czarne (rys. 2). Wówczas każdy z pozostałych czterech wierszy zawiera w pierwszych trzech kolumnach co najmniej dwa pola białe. Ponieważ spośród trzech kolumn można wybrać dwie na dokładnie trzy sposoby, więc środki pewnych czterech pól białych (leżących w części z kolorową obwódką, rys. 2) tworzą prostokąt o bokach równoległych do krawędzi szachownicy. Uzyskaliśmy sprzeczność.

Bardzo cenny grzebień

Dziś o drugiej połowie Nagrody Nobla z fizyki za rok 2005 przyznanej Johnowi L. Hallowi i Theodorowi W. Hänschowi za precyzyjną spektroskopię laserową i technikę grzebieńa częstotliwości.

Znaczącą część fizyki stanowią precyzyjne pomiary. Im dokładniej coś potrafimy zmierzyć, tym dokładniej możemy konfrontować teorię z doświadczeniem. Każde dobrze potwierdzone odstępstwo sygnalizuje, że czegoś nie rozumiemy i stanowi impuls do głębszego zrozumienia natury.

Precyzyjny pomiar nie jest możliwy bez odpowiednio precyzyjnej miarki. Wytworzenie takiej precyzyjnej i – najlepiej – wygodnej w użyciu miarki natychmiast znajduje praktyczne zastosowanie.

Trudno sobie wyobrazić bardziej podstawowe wielkości niż czas i odległość. Podstawowymi jednostkami są odpowiednio sekunda i metr, ale jak długie są te jednostki? Po chwili zastanowienia rozumiemy, że na tak postawione pytanie nie można udzielić odpowiedzi. Jedyne, co można zrobić, to opracować metodę, która sprawi, że sekunda będzie sekundą, a metr metrem. Innymi słowy, potrzebne są fizyczne wzorce, które umożliwią odmierzenie z jak największą dokładnością.

Czas i przestrzeń wiążą się poprzez fundamentalną stałą przyrody – prędkość światła. Coraz bardziej precyzyjne pomiary tej stałej prowadzone, między innymi, przez J. Halla doprowadziły do sytuacji, w której ograniczeniem dalszego postępu stał się wzorzec metra (którym od 1960 roku była określona liczba długości fali pewnej linii spektralnej kryptonu). W związku z tym, w roku 1983, ustalono prędkość światła na dokładnie 299 792 458 m/s, a tym samym wzorzec metra na dystans pokonywany przez światło w 1/299 792 458 s.

W ten sposób wzorzec sekundy, którym od 1967 roku jest 9 192 631 770 okresów fali świetlnej nadsubtelnego przejścia Cezu 133, jest podstawą wzorca metra. Żeby go zrealizować za pomocą światła widzialnego, trzeba umieć określić jego długość fali, czyli, de facto, zmierzyć jej częstotliwość, która jest rzędu 10^{15} Hz. Natomiast częstotliwość wzorca sekundy jest

w zakresie radiowym 5 rzędów wielkości mniejsza (mała częstotliwość, a więc mały pęd emitowanego fotonu, minimalizuje dopplerowskie rozmycie linii widmowej). Porównywanie wymagało użycia żmudnego, wielokrotnego poddawania częstotliwości. W dodatku taką metodą precyzyjnie można zmierzyć tylko ograniczony zakres częstotliwości.

Powyższy sposób nie jest już stosowany, bo zastąpił go tytułowy grzebień częstotliwości (ang. *frequency comb*). Jest to odpowiednio uformowane światło lasera impulsowego o ustalonej różnicy faz (ang. *mode locking*) między częstotliwością podstawową a częstotliwością repetycji. Dzięki ustaleniu różnicy faz widmo takiego lasera może składać się z bardzo dużej liczby częstotliwości precyzyjnie różniących się o stałą wartość odpowiadającą częstotliwości repetycji, czyli odwrotności czasu pomiędzy impulsami (zdeterminowanego podwojoną długością optyczną rezonatora).

Gdyby różnica faz była zerowa, to częstotliwości grzebieńa byłyby po prostu wielokrotnościami częstotliwości repetycji f_r . Ponieważ jest to praktycznie niemożliwe do osiągnięcia, pojawia się pewne przesunięcie f_0 (ang. *carrier-envelope offset CEO frequency*) i ostatecznie częstotliwości grzebieńa wyrażają się wzorem $f_n = f_0 + n \cdot f_r$. Zakres zmienności n jest, oczywiście, ograniczony, ale jeżeli rozciąga się on na pełną oktawę, czyli jeżeli istnieje takie n , dla którego częstotliwość f_{2n} jest jeszcze w widmie, to możliwe jest zmierzenie częstotliwości f_0 poprzez zmierzenie częstotliwości dudnienia między częstotliwościami f_{2n} i $2f_n$:

$$2f_n - f_{2n} = 2(f_0 + n \cdot f_r) - (f_0 + 2n \cdot f_r) = f_0.$$

To oznacza otrzymanie precyzyjnie wyskalowanej miarki – którą można już nawet kupić!

Obaj nobliści przyczynili się w decydującym stopniu do rozwoju technik, które umożliwiły realizację opisanej w telegraficznym skrócie idei optycznego grzebieńa częstotliwości. Zakres zastosowań rozciąga się od sprawdzania najbardziej podstawowych praw natury, np. za pomocą testowania identyczności materii i antymaterii, do lepszej kalibracji systemu GPS.

Alfred Nobel byłby zadowolony. Trudno o lepszy przykład pożytecznych badań podstawowych.

Wyniki finału XXII edycji Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych (wraz z bibliografią) przez Jury lub tematu własnego oraz, w przypadku zakwalifikowania się do finału, krótkim zreferowaniu publicznie tego opracowania.

Konkursy organizuje Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach przy współudziale Uniwersytetu Śląskiego.

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, dr Michał Baczyński, mgr Tomasz Bielaczyc, mgr Włodzimierz Fechner, mgr Żywilla Fechner, dr Maria Górniołek, mgr Barbara Przebieracz, mgr Bonifacy Szczepanik, dr Anna Maria Szczerba-Zubek, przyznało

I miejsce **Tomaszowi Tkoczowi** z II LO w Rybniku za pracę *Twierdzenia o wartości średniej*;

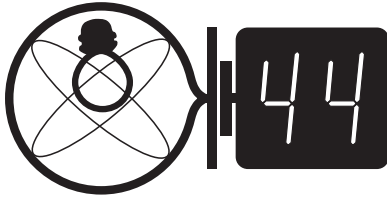
II miejsce **Magdalenie Żuk** z I LO w Prudniku za pracę *Liczby, jakich nie znamy – liczby kardynalne*;

III miejsce **Annie Ściążko** z Pracowni Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach za pracę *Interpolacja wielomianowa*;

IV miejsce **Rafałowi Kelmowi** z VIII LO w Katowicach za pracę *Imponujące, lecz mało znane... O liczbach zespolonych i innych rozwinięciach liczb rzeczywistych*.

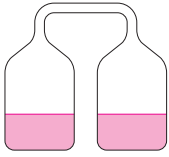
Wyniki głosowania publiczności na najlepszy referat:

nauczyciele wybrali referat Anny Ściążko, uczniowie wybrali referat Magdaleny Żuk.

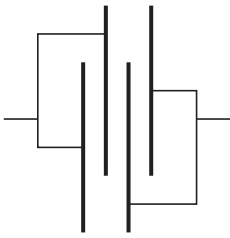


Termin nadsyłania rozwiązań:

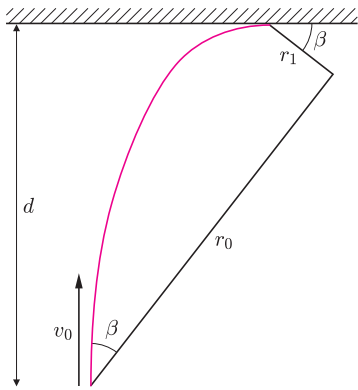
31 III 2006



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

410. Ocenic orientacyjnie stosunek masy niezbędnego paliwa do masy statku kosmicznego wprowadzonego na niską ($h_o = 500$ km) orbitę okołozemską. Dane: prędkość wylotowa gazów względem rakiety $v_g = 3$ km/s, stosunek siły ciągu silników do ciężaru startowego $n = 1,75$. Dla uproszczenia pominać opór powietrza podczas startu i korzyści wynikające z zastosowania rakiety kilkustopniowej.

Jak dużą oszczędność paliwa daje wystrzelenie statku kosmicznego z kosmodromu na równiku w porównaniu z kosmodromem na biegunie (gdymby istniał tam kosmodrom)?

411. W jednym naczyniu znajduje się czysta woda, a w drugim identycznym naczyniu – roztwór soli w wodzie. Naczynia połączone rurką (rys. 1) i pozostawiono na bardzo długi czas. Czy poziom wody w naczyniach pozostanie stały, a jeśli nie, to jak się będzie zmieniał? Jak zależy przebieg zjawiska od tego, czy w naczyniach znajduje się powietrze?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2005

Przypominamy treść zadań:

402. Samochód wyposażono w opony, których współczynnik tarcia statycznego wzdłuż kierunku jazdy wynosi (na pewnym ustalonym podłożu) $f_1 = 0,5$, w kierunku prostopadłym do kierunku jazdy $f_2 = 0,8$, a gdy siła tarcia jest skierowana pod kątem α względem kierunku jazdy, współczynnik tarcia statycznego jest dany wzorem $f = f_1 \cos^2 \alpha + f_2 \sin^2 \alpha$.

a) Jeśli samochód jedzie w stronę długiej prostopadłej ściany, to jak najlepiej uniknąć zderzenia: hamując wzdłuż linii prostej, czy skręcając bez hamowania?

b) Czy skręcając i jednocześnie hamując można uniknąć zderzenia lepiej (tzn. przy większej prędkości początkowej lub przy mniejszej odległości od przeszkody), niż w obu powyższych przypadkach?

c) Czy dobierając nacisk na hamulec i kąt skręcenia kierownicy tak, aby kąt α zmieniał się w czasie jazdy, można lepiej uniknąć zderzenia, niż dla stałej wartości α ?

Porównanie dotyczy optymalnego wyboru w zakresie każdej z tych metod, tzn. najlepszego stałego kąta α i najlepszego przebiegu zmian tego kąta. Rozmiary samochodu należy uznać za małe w porównaniu z przebytymi odległościami. W przypadku poślizgu siła tarcia silnie maleje, dlatego zakładamy, że hamowanie poślizgiem kontrolowanym nie będzie skuteczne.

403. Dwa jednakowe kondensatory płaskie o pojemności C połączone równolegle. Obliczyć pojemność tego układu kondensatorów, jeśli jedną z okładek jednego z nich wsunęto między okładki drugiego w połowie odległości między nimi, a powierzchnia części wsuniętej wynosi $2/3$ całkowitej powierzchni okładki (rys. 2). Grubość okładek i efekty brzegowe (wynikające z ich skończonych rozmiarów) należy pominąć.

402. a) Droga hamowania wzdłuż prostej jest równa $\frac{v_0^2}{2f_1 g}$, a promień skrętu – $\frac{v_0^2}{f_2 g}$, gdzie v_0 jest prędkością początkową. Ponieważ $2f_1 > f_2$, więc lepiej jest hamować wzdłuż prostej.

b) Przyjmijmy, że kąt α jest stały. Wtedy przyspieszenie styczne jest również stałe i równe $a_{st} = g f \cos \alpha$, a prędkość v po przebyciu drogi s wzdłuż krzywej jest dana wzorem $v^2 = v_0^2 - 2a_{st}s$. Promień krzywizny R wyznaczmy natomiast ze wzoru $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 - 2a_{st}s}{a_n}$, gdzie w mianowniku mamy składową normalną przyspieszenia $a_n = g f \sin \alpha$. Widzimy, że promień krzywizny jest liniową funkcją długości łuku. Jak można sprawdzić (lub znaleźć w poradnikach matematycznych), krzywą o tej własności jest spirala logarytmiczna, opisana we współrzędnych biegunowych równaniem $r = a \exp(-k\varphi)$. Spirala ta przecina pod stałym kątem β wszystkie promienie wychodzące z bieguna, a parametr k jest cotangensem tego kąta. Długość łuku spirali jest powiązana z promieniem r wzorem $s \cos \beta = r_0 - r$, a promień krzywizny wynosi $R = r / \sin \beta$.

Porównanie naszego wzoru na R z powyższymi związkami pozwala stwierdzić, że $k = 2a_{st}/a_n = 2 \operatorname{ctg} \alpha$, a początkową wartość r można wyznaczyć ze wzoru $v_0^2 = a_n r_0 \sqrt{1 + k^2}$. Jak widać z rysunku 3, maksymalne przesunięcie wzdłuż

kierunku początkowego odpowiada zmianie kąta φ o $\pi/2$, a jego wartość jest dana wzorem $d = r_0 \cos \beta + r_1 \sin \beta$. Po podstawieniach otrzymujemy

$$d = \frac{v_0^2}{a_n(1 + k^2)}(k + \exp(-k\pi/2))$$

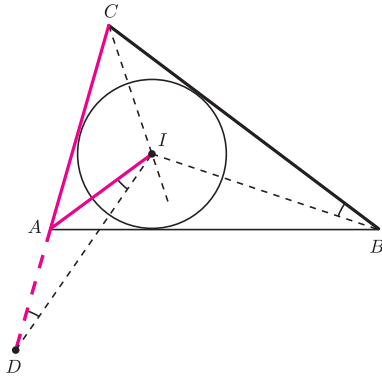
Wyrażenie to zależy od kąta α za pośrednictwem parametrów k i a_n , a jego minimalną wartość można znaleźć numerycznie. Przy danych wartościach f_1 i f_2 minimum występuje dla $\alpha = 0,88$ rad, wtedy $d = 0,885 v_0^2/g$. Widać, że odpowiedź na pytanie b) jest pozytywna.

c) Sklejając dwie spirale odpowiadające różnym kątom α (zgodnie z intuicją – początkowo mniejszy, potem większy) autorowi udało się otrzymać jeszcze nieco krótszą drogę hamowania. Niemalże umiejętności potrzebne są kierowcy rajdowemu!

403. W obszarze między okładkami o jednakowym potencjale pole elektryczne nie występuje. Przedstawiony układ jest więc równoważny połączeniu równoległemu dwóch kondensatorów o powierzchni okładek $(1/3)S$ i ich odległości d oraz kondensatora o powierzchni okładek $(2/3)S$ i ich odległości $(1/2)d$, gdzie S i d są odpowiednimi parametrami wyjściowych kondensatorów. Pojemność zastępcza wynosi $2C$, przy czym głębokość wsunięcia nie ma znaczenia.



Rozwiązanie zadania M 1121.
Oznaczmy przez D punkt symetryczny do punktu B względem prostej CI .



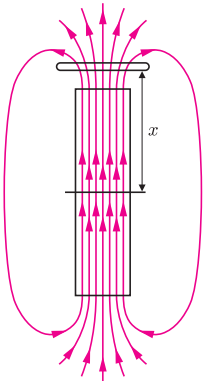
Ponieważ prosta CI jest dwusieczną kąta ACB , więc punkt D leży na prostej AC oraz $BC = DC$. Z danej w treści zadania równości wnosimy zatem, że $AD = AI$. Stąd

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAC &= 2 \sphericalangle IAC = 2(\sphericalangle ADI + \sphericalangle AID}) = \\ &= 4 \sphericalangle ADI = 4 \sphericalangle CBI = 2 \sphericalangle ABC. \end{aligned}$$

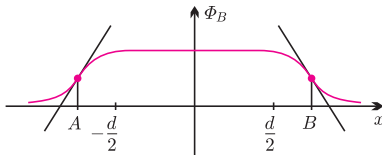
Szukany stosunek wynosi więc 2.



Rozwiązanie zadania F 660.
Siła elektromotoryczna proporcjonalna jest do zmiany strumienia pola magnetycznego Φ_B przechodzącego przez wnętrze pętli w czasie.



Z rysunku wynika, że wykres Φ_B w zależności od położenia magnesu wygląda mniej więcej jak na wykresie



(gdy magnes jest daleko, strumień jest mały, rośnie, gdy magnes zbliża się, jest mniej więcej stały pośrodku, a potem znów maleje).

Zmiana strumienia pola w czasie jest największa tam, gdzie ten wykres ma największe nachylenie, a więc wtedy, gdy magnes wchodzi do pętli jednym końcem bądź wychodzi drugim.

Patrz w niebo

Skoro pozasłonecznych planet znamy już ponad setkę, można pokusić się o jakieś statystyki i wnioski ogólne. Co prawda „znamy” to za mocno powiedziane – po prostu wiemy o istnieniu kilkudziesięciu gwiazd obieganych przez planety. Dość wcześnie ustalono pierwszą prawidłowość: gwiazdy, którym towarzyszą planety, są bogate w metale (metalami żargonowo nazywane są pierwiastki cięższe od helu). Badacze tych zagadnień uważają wręcz, że widmo bogate w linie pierwiastków ciężkich jest pierwszym wskaźnikiem tego, iż gwiazda może mieć układ planetarny. Może tak być w zasadzie z dwóch powodów. Po pierwsze, można sobie wyobrazić, że do powstania układu planetarnego potrzeba od samego początku materii bogatej w metale. Z niej powstają zarówno planety, które same w sobie są kulami metali, jak i gwiazda centralna o oczekiwanych cechach widmowych. W tym modelu planety olbrzymie typu Jowisza tworzyłyby się dopiero później, mianowicie wskutek akrecji wielkich ilości wodoru i helu przez małe i gęste metaliczne planety typu Ziemi. Według drugiej propozycji nadmiar metali w gwiazdzie centralnej miałby powstać w wyniku połknięcia przez nią własnej planety lub planet. Jest to całkiem prawdopodobne, gdyż młody układ planetarny tworzy się wewnątrz ciągle gęstej mgławicy, co powoduje, że planety muszą po spiralach przynajmniej zbliżyć się do gwiazdy centralnej, a niekiedy pewnie i spaść na własną gwiazdę. Jej atmosfera zostałaby wtedy „zaśmiecona” materią planety.

Jest jednak argument przeciw tej drugiej możliwości. Mianowicie młode gwiazdy ciągu głównego mają przy powierzchni warstwę konwektywną tym cieńszą, im gorętsza jest gwiazda. Materia planety, która spadłaby na gwiazdę, musiałaby zostać szybko rozproszona po całej warstwie konwektywnej (głębsze obszary gwiazdy są praktycznie odizolowane od warstwy konwektywnej). W cienkiej warstwie metaliczne „śmieci” byłyby silnie skoncentrowane, zatem linie metali powinny być silniejsze w przypadku gwiazd gorętszych. Tego jednak statystyczna analiza materiału obserwacyjnego nie potwierdza. Pozostaje fakt fenomenologiczny: im więcej metali jest w gwiazdzie, tym większe jest prawdopodobieństwo znalezienia przy niej układu planetarnego obecnie stosowanymi metodami.

Tomasz KWAST

Styczeń

W zimowe wieczory z północnego zachodu na południowy wschód przecina niebo Droga Mleczna. Prawie w zenicie widać Perseusza, a na południe od niego dwie, gołym okiem widoczne, gromady otwarte, Hiady i Plejady – obie leżące w Byku. Jeżeli w Plejadach widać – powiedzmy – siedem gwiazd, to już uważa się, że obserwator ma dobry wzrok i powietrze jest czyste. Naprawdę jest ich tam około 250, a niektórzy twierdzą, że nieuzbrojone oko może dostrzec dziesięć z nich. Ta dziesiątka najjaśniejszych gwiazd Plejad ma nazwy własne, którymi są imiona Atlasa i Plejone oraz ich córek. Przypadkowo jest więc podobnie, jak z nazwami obiektów topograficznych na Wenus: jedna nazwa męska, a reszta to żeńskie. Plejady to młoda gromada odległa o 120 pc. Na zdjęciach teleskopowych widać, że gwiazdy zanurzone są w resztkach mgławicy, z której gromada powstała.

Wenus jest w Strzelcu, ale jest tam też Słońce, zatem nie widać jej teraz. Mars jest w Baranie i widać go w pierwszej połowie nocy. Jowisz jest w Wadze, wschodzi więc nad ranem. Saturn jest w Raku i widać go praktycznie przez całą noc (27 I ma opozycję, czyli znajduje się w kierunku przeciwnym niż Słońce). Pełnia Księżycy wypada 14 I, a nów 29 I. W styczniu Księżyc zakryje: Spikę (21 I, co będzie widać w centralnej Azji, na Filipinach i na Nowej Gwinei) i Antaresa (25 I, zakrycie widoczne będzie w Ameryce Południowej). Jak co roku, 4 I Ziemia znajdzie się najbliżej Słońca. Z meteorów 3 I można spodziewać się umiarkowanie obfitego roju Kwadrantydów – przypominamy: takiego gwiazdozbioru nie ma, ale tak nazywał się kiedyś fragment nieba wchodzący obecnie w skład Wolarza.

T. K.

Protokół posiedzenia Jury XXVII Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Redakcja *Delty* serdecznie dziękuje firmie Gambit za ufundowanie nagród w postaci pakietów MathCad dla najlepszych trzech laureatów Konkursu.

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Marek Kordos, Witold Sadowski, Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, Jarosław Wróblewski, na posiedzeniu w dniu 6 września 2005 roku we Wrocławiu, po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść pracy i sposób jej prezentacji postanowiło:

- 1) przyznać złoty medal i nagrodę pieniężną 400 zł oraz pakiet MathCad firmy Wolfram, ufundowany przez firmę Gambit,
Michałowi Marcinkowskiemu z III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu za pracę *Prz(e)chodzi Euler do Nagela...*;
 - 2) przyznać dwa srebrne medale i nagrody pieniężne po 300 zł oraz pakiety MathCad firmy Wolfram, ufundowane przez firmę Gambit,
Pawłowi Janicowi z II LO im. Jana Śniadeckiego w Kielcach za pracę *Podziały przestrzeni euklidesowych*,
Tomaszowi Warszawskiemu z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie za pracę *O cyklach i klikach*;
 - 3) przyznać trzy brązowe medale i nagrody pieniężne po 300 zł
Arkadiuszowi Męclowi z I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie za pracę *Symetrie różniczkowe*,
Marcinowi Piterze z II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie za pracę *Kilka problemów na szachownicy*,
Janowi Szejce z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *Dwusieczna, wysokość i środkowa przecinające się w jednym punkcie*;
 - 4) przyznać wyróżnienie i nagrodę pieniężną 200 zł
Jarosławowi Pyzikowi z II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie za pracę *O sumach, ich właściwościach i wykorzystaniu*;
- (ponadto wszyscy finaliści otrzymali nagrody książkowe);
- 5) wyrazić podziękowania i wręczyć dyplomy honorowe oraz nagrody pieniężne po 200 zł nauczycielom – opiekunom laureatów: **Jackowi Dymelowi, Ryszardowi Grucy, Mariuszowi Kołodyńskiemu, Pawłowi Rudeckiemu, Przemysławowi Szczepaniakowi**.

Jak widać, ubiegłoroczny finał stał na wyjątkowo wysokim poziomie i był bardzo wyrównany. Mamy nadzieję, że tegoroczny w niczym nie będzie mu ustępował.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje:
 - adres prywatny autora,
 - klasa, nazwa i adres szkoły;
 - imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy oraz wyróżnienia.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Jeśli rzucamy n razy monetą, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p , to szansa uzyskania dokładnie k orłów jest równa

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Innymi słowy, liczba orłów jest zmienną losową S_n , $P(S_n = k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Powiemy, że S_n ma rozkład Bernoulliego z parametrami n, p .

Jeśli n i k są duże, obliczenie p_k może być kłopotliwe. Okazuje się jednak, że gdy iloczyn np jest nieduży, istnieje proste przybliżenie. Niech $np = \lambda$. Wtedy

$$p_k \approx \pi_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Nietrudno stwierdzić, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1.$$

Zatem (nieujemne) liczby π_k definiują pewien rozkład prawdopodobieństwa, zwany rozkładem Poissona z parametrem λ . Będziemy go oznaczać $Pois(\lambda)$.

Często można przeczytać, że przybliżenie $p_k \approx \pi_k$ opiera się na następującym twierdzeniu granicznym:

Twierdzenie Poissona. *Jeśli $n \rightarrow \infty$, $p_n \rightarrow 0$, $np_n \rightarrow \lambda$, to dla ustalonego $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$*

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Jeśli n jest duże, to mamy do czynienia z dalekim wyrazem ciągu, którego granicą jest π_k , więc pewnie uwierzmy, że wyraz ten jest bliski π_k . W takim razie dlaczego napisaliśmy wcześniej, że np ma być „nieduże”? Wszystko to wygląda raczej na metodologię empiryczną, tym bardziej że twierdzenie Poissona nie zawiera żadnych informacji o szybkości zbieżności. Może dałoby się uzyskać jakieś informacje, analizując jego dowód?

Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego przeprowadzenia dowodu (nie jest taki trudny) i sprawdzenia, czy da się elegancko oszacować $|p_k - \pi_k|$.

Twierdzenie Poissona – w sformułowaniu innym niż przytoczone – pojawiło się w pracy [2] z roku 1837, poświęconej tzw. prawdopodobieństwu sądowemu. Natomiast w pracy Bortkiewicza [1] z roku 1898 pt. „Prawo małych liczb” można znaleźć cztery przykłady pokazujące, że rozkład Poissona pojawia się, gdy mamy do czynienia ze zdarzeniami rzadkimi. U Bortkiewicza są to samobójstwa wśród dzieci w Prusach (60 wypadków w latach 1869–1893), samobójstwa wśród kobiet w ośmiu krajach niemieckich (po kilkadziesiąt wypadków w latach 1881–1894), śmiertelne wypadki przy pracy wśród członków jedenastu związków zawodowych (61 wypadków w latach 1886–1894), i wreszcie zgony na skutek kopnięcia przez konia w czternastu korpusedach armii pruskiej (196 wypadków w latach 1875–1894).

Poniżej zamieszczamy oryginalną tabelę z pracy Bortkiewicza. Dane te są dość często cytowane w okrojonej postaci, mianowicie z wyłączeniem korpusu gwardii (G) oraz korpusów I, VI i XI, miały one bowiem nietypowy skład.

24

Zweites Kapitel. § 12.

	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
G	—	2	2	1	—	—	1	1	—	3	—	2	1	—	—	1	—	1	—	1
I	—	—	—	2	—	3	—	—	—	1	1	—	1	1	—	2	—	3	1	—
II	—	—	—	2	—	2	—	—	—	1	1	—	2	1	1	—	—	2	—	—
III	—	—	—	1	1	1	2	—	—	2	—	—	1	1	—	2	1	—	—	—
IV	—	1	—	1	1	1	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	1	—	—
V	—	—	—	2	1	—	—	—	—	1	—	1	—	—	1	1	1	1	1	—
VI	—	—	1	—	2	—	—	1	2	—	1	1	3	1	1	—	—	3	—	—
VII	1	—	1	—	—	—	1	—	1	1	—	—	2	—	—	2	1	—	2	—
VIII	1	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	—	1	1	—	1
IX	—	—	—	—	2	1	1	1	—	2	1	1	—	—	1	2	—	1	—	—
X	—	—	1	1	—	1	—	2	—	2	—	—	—	—	2	1	3	—	1	1
XI	—	—	—	—	2	4	—	1	3	—	1	1	1	1	2	1	3	1	3	1
XIV	1	1	2	1	1	3	—	4	—	1	—	3	2	1	—	2	1	1	—	—
XV	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	2	2	—	—	—	—

Liczba wypadków w danym korpusie w ciągu roku powinna mieć rozkład Poissona. Oto argument: szansa na wypadek w krótkim przedziale czasu (np. jednej godziny) jest niedużą liczbą p . Rok ma $n = 8760$ godzin, można uwierzyć, że np. wypadek o 6:30 rano 3 kwietnia nie wpłynie na szanse wypadku między 7:00 a 8:00 dnia 31 października. Niezależność prowadzi do schematu Bernoulliego, a rozkład Bernoulliego przybliżamy rozkładem Poissona.

Dane z tabeli pozwalają na obliczenie średniej liczby wypadków w korpusie w ciągu roku: jest to $\frac{196}{280} = 0,7$. Ale wartość średnia zmiennej losowej o rozkładzie $Pois(\lambda)$ jest równa λ , skąd naturalny pomysł, żeby zbadać zgodność danych z rozkładem $Pois(0,7)$.

Dokładniej, rozkład Poissona przewiduje, że prawdopodobieństwo roku bez wypadku jest równe

$$\pi_0 = e^{-\lambda} = 0,49658\dots,$$

zatem w $n = 280$ eksperymentach można się spodziewać średnio $n\pi_0 = 139,04$ takich przypadków, a otrzymano 144. W kolejnej tabeli porównujemy teoretyczną prognozę liczby korpusów, gdzie miało miejsce 0, 1, 2, ... wypadków ($n\pi_k$) z danymi empirycznymi (n_k).

k	π_k	n_k	$n \cdot \pi_k$
0	0,4966	144	139,04
1	0,3476	91	97,33
2	0,1217	32	34,07
3	0,0284	11	7,95
4	0,0050	2	1,39
≥ 5	0,0007	0	0,20

Zgodność jest na pierwszy rzut oka niezła, tym bardziej że dopasowanie rozkładu Poissona metodą średniej nie musi być przecież najlepsze. Wybór metody i ocena jakości dopasowania to już domena statystyki.

Pokażemy teraz, jak uzyskać oszacowanie błędów w przybliżeniu Poissona. Udowodnimy

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Twierdzenie. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie:

$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0),$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Niech $\lambda = np$, $\pi_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Wtedy dla każdego zbioru $B \subset \{0, 1, 2, \dots\}$ mamy

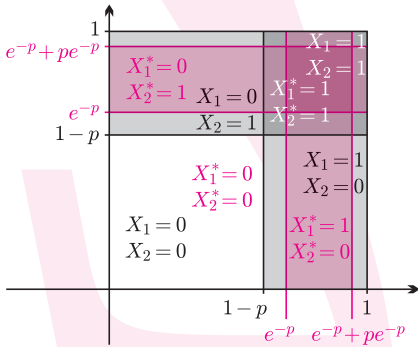
$$\left| P(S_n \in B) - \sum_{k \in B} \pi_k \right| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Mamy tu oszacowanie dotyczące nie tylko pojedynczych różnic $p_k - \pi_k$, ale prawdopodobieństw wszystkich możliwych zdarzeń!

Wynika stąd oczywiście twierdzenie Poissona (wystarczy wziąć $B = \{k\}$), a nawet więcej: zbieżność zachodzi, gdy $np_n \rightarrow \infty$, ale $np_n^2 \rightarrow 0$. Jak widać, uzasadniona jest zdroworozsądkowa reguła mówiąca, kiedy przybliżenie jest dobre: n ma być duże, p — małe, np — nieduże. Teraz jednak konkretne oszacowanie pozwala na podjęcie decyzji, czy przybliżenie uznajemy za wystarczająco dobre.

Warto zwrócić uwagę na dwa chwytty, których użyjemy w dowodzie. Po pierwsze, liczba sukcesów S_n w schemacie Bernoulliego jest sumą n niezależnych (i bardzo prostych) zmiennych losowych X_i , które liczą sukcesy w pojedynczych doświadczeniach. W dowodzie porównamy je ze zmiennymi losowymi X_i^* , które są niezależne i mają rozkład *Pois*(p).

Po drugie, żeby zobaczyć, jak dalece X_i i X_i^* różnią się, wymodelujemy je na zbiorze zdarzeń elementarnych $\Omega = [0, 1]^n$, czyli kostce n -wymiarowej. Prawdopodobieństwo P jest n -wymiarowym odpowiednikiem objętości (szczerze mówiąc, miarą Lebesgue'a); przypadek $n = 2$ da się narysować.



Zmienne losowe X_1, X_2, X_1^*, X_2^* (Ω to $[0, 1] \times [0, 1]$).

To rzadki przykład, kiedy faktycznie zbiór Ω nie jest jedynie uciążliwym, choć niezbędnym, elementem teorii.

Być może Czytelnik domyśla się, że potrzebujemy jeszcze jednego faktu:

Lemat. Suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie *Pois*(a) i *Pois*(b) ma rozkład *Pois*($a + b$).

Dowód lematu. Niech $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ i niech X i Y będą zmiennymi losowymi, o których mowa w lemacie.

Mamy

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{j=0}^k P(X = j, Y = k - j) = \\ &= \sum_{j=0}^k P(X = j)P(Y = k - j) = \sum_{j=0}^k \frac{a^j}{j!} e^{-a} \cdot \frac{b^{k-j}}{(k-j)!} e^{-b} = \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{a^j b^{k-j}}{j!(k-j)!} e^{-(a+b)} = \frac{1}{k!} e^{-(a+b)} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j} = \\ &= \frac{(a+b)^k}{k!} e^{-(a+b)}. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia. Określmy formalnie zmienne losowe X_k :

$$X_k(\omega) = X_k(\omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega_k < 1 - p, \\ 1 & \text{dla } \omega_k \geq 1 - p. \end{cases}$$

Są one niezależne. Dalej, niech

$$X_k^*(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega_k < e^{-p}, \\ k & \text{dla } \omega_k \in [a_{k-1}, a_k), \end{cases}$$

gdzie $a_k = \sum_{m=0}^k \pi_m$. Wtedy X_k^* są niezależne i na mocy lematu $S_n^* = X_1^* + \dots + X_n^*$ ma rozkład Poissona z parametrem np .

W takim razie

$$\begin{aligned} \left| P(S_n \in B) - \sum_{k \in B} \pi_k \right| &\leq \\ &\leq |P(S_n \in B) - P(S_n^* \in B)| \leq P(S_n \neq S_n^*), \end{aligned}$$

co wynika z elementarnej nierówności:

$$|P(A) - P(C)| \leq P(A \Delta C),$$

(gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną zbiorów) i stąd, że zdarzenie $\{S_n \in B\} \Delta \{S_n^* \in B\}$, polegające na tym, że jeśli $S_n \in B$, to $S_n^* \notin B$ i odwrotnie, w oczywisty sposób pociąga za sobą, że $S_n \neq S_n^*$. Teraz

$$P(S_n \neq S_n^*) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^n \{X_k \neq X_k^*\}\right) \leq \sum_{k=1}^n P(X_k \neq X_k^*).$$

Zmienne losowe X_k i X_k^* różnią się na dwóch zbiorach: $\{\omega: \omega_k \in [1-p, e^{-p})\}$ (tu $X_k = 0, X_k^* = 1$) oraz $\{\omega: \omega_k \in [e^{-p} + pe^{-p}, 1]\}$ (tu $X_k = 1$ i $X_k^* > 1$), których łączna miara nie przekracza p^2 . Istotnie, ponieważ $e^{-p} \geq 1 - p$, więc

$$e^{-p} - (1 - p) + 1 - e^{-p} - pe^{-p} = p(1 - e^{-p}) \leq p^2.$$

Ostatecznie $P(S_n \neq S_n^*) \leq np^2 = \frac{\lambda^2}{n}$.

Wróćmy teraz do wypadków w armii pruskiej. Dzielimy rok na $n = 8760$ godzin i przyjmujemy, że szansa wypadku w korpusie w ciągu godziny jest równa $p = 0,000079908$, tak by $\lambda = np = 0,7$. Wygląda na to, że szansa dwóch lub większej liczby wypadków w ciągu godziny jest zanedbywalnie mała. Zatem liczba wypadków ma z dobrym przybliżeniem rozkład Bernoulliego z parametrami n, p , a ten przybliża się rozkładem *Pois*(λ) z dokładnością $\frac{\lambda^2}{n} = 0,000055936$.

Literatura

[1] Ladislaus von Bortkiewicz, *Das Gesetz der kleinen Zahlen*, B.G. Teubner, Leipzig 1898.

[2] Siméon D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédée des règles générales du calcul des probabilités*, 1837.