

Dnia 15 października 2005 roku
zmarł
Tadeusz Jarzębowski
Astronom, Członek Komitetu Redakcyjnego
i Autor *Delty*

SPIS TREŚCI NUMERU 12 (379)

Kosmiczna daktyloskopia, czyli o klasyfikacji widmowej gwiazd <i>Krzysztof Rochowicz</i>	str. 1
Jak mnożyć przeguby? <i>Paweł Goldstein</i>	str. 4
Zadania	str. 6
Mała Delta:	
MiniMaraton Matematyczny <i>Małgorzata Mikołajczyk</i>	str. 7
MEG – magnetoencefalogram <i>Wiesław Wiktor Jędrzejczak</i>	str.10
Odpowiedzi i punktacja zadań MiniMaratonu Matematycznego <i>Małgorzata Mikołajczyk</i>	str.11
Aktualności	str.14
Klub 44	str.15
Patrz w niebo	str.16
Grudzień	str.16
Kącik biologiczny	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, **doc. dr Tadeusz Jarzębowski**, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nacz. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delty”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. (22) 55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. (22) 663-87-52, (22) 663-11-46)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

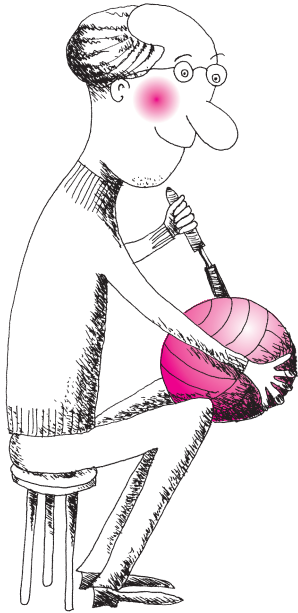
W następnym numerze:

Dzieje Słońca

Kosmiczna daktyloskopia, czyli o klasyfikacji widmowej gwiazd

Krzysztof ROCHOWICZ*

Astronomowie lubią bawić się w detektywów. Od niepamiętnych czasów śledzą ruchy ciał niebieskich i próbują ustalić przyczyny zaobserwowanych zjawisk. Potrafią też na podstawie poszlak (czyli docierającego do nas promieniowania) wskazać sprawcę, a nawet szczegółowo go opisać. Światło docierające do nas od każdej gwiazdy niesie bowiem w sobie zakodowaną w formie linii widmowych informację o warunkach fizycznych i chemicznych macierzystego środowiska. Badanie widm odległych gwiazd zaczęło się na dobre w drugiej połowie XIX wieku i wtedy to pojawiła się potrzeba sklasyfikowania rosnącej liczby tego rodzaju danych.



Siedem linii w widmie Słońca jako pierwszy zaobserwował w roku 1802 angielski przyrodnik William H. Wollaston. W roku 1814 niemiecki fizyk Joseph Fraunhofer odkrył i opisał ich już ponad 600. Kilka lat później ten bawarski optyk za pomocą skonstruowanego przez siebie spektroskopu przebadał światło docierające do nas od najjaśniejszych gwiazd, zauważając podobieństwo linii występujących w widmie Polluksa (jaśniejszego z Bliźniąt) do linii widma słonecznego oraz odstępstwa w widmach Syriusza i Betelgezy. Ta różnorodność mogła początkowo niepokoić, ale dość szybko William Huggins ustalił, że linie widmowe pochodzą od tych samych pierwiastków, które występują na Ziemi. Jednak ich natężenia u różnych gwiazd odbiegały niekiedy dość znacznie od natężeń linii w widmie słonecznym. W widmie naszej Dzielnej Gwiazdy rzucają się w oczy przede wszystkim absorpcje sodu i zjonizowanego wapnia. Widma takich gwiazd jak Wega, Altair czy Syriusz zdominowane są przez linie absorpcyjne wodoru, a gwiazdy o czerwonej barwie – takie jak Betelgeza czy Antares – linii wodoru w ogóle nie mają, za to w ich widmach występują bardzo silne pasma tlenu tytanu. Aby odpowiedzieć na pytanie, skąd biorą się te różnice, należało przede wszystkim cały ten inwentarz uporządkować.

W roku 1863 włoski jezuita i astronom Angelo Secchi podzielił gwiazdy według ich widm i barw na pięć typów.

Secchi		Harvard	
I	Silne linie wodoru	A	Silne, szerokie linie wodoru
		B	J.w. plus tzw. „linie Oriona” (zaobserwowane u wielu gwiazd Oriona, później zidentyfikowane jako He I)
		C	Podwójne linie wodoru
		D	Obecne linie emisyjne
II	Liczne linie metali	E	Widoczne linie „H” i „K” oraz H_{β}
		F	Podobne do E, ale widoczne są wszystkie linie wodoru
		G	J.w. z dodatkowymi liniami
		H	Tak jak F, ale widoczny spadek natężenia w niebieskiej części widma
		I	J.w. z dodatkowymi liniami
		K	Pojawiają się pasma
L	Osobliwe odmiany typu K		
III	W widmie dominują pasma	M	Typ III w klasyfikacji Secchiego
IV	Gwiazdy ciemno-czerwone	N	Typ IV w klasyfikacji Secchiego
V	Jasne linie widmowe	O	Widma o wielu jasnych liniach (również gwiazdy WR)
		P	Mgławice planetarne
		Q	Pozostałe widma (od roku 1922 gwiazdy nowe)

Rzymskie oznaczenia od I do V określały odpowiednio: biało-niebieskie gwiazdy z liniami wodoru (Wega, Syriusz), gwiazdy z licznymi liniami metali,



Rozwiązanie zadania F 657.

Odległość pulsara od Ziemi jest dana równaniem

$$l = D + \frac{d}{2} \sin 2\pi t/T.$$

Puls nadany w chwili t jest więc opóźniony bądź przyspieszony w stosunku do nadanego w momencie $t = 0$ o

$$\frac{d}{2c} \sin 2\pi t/T.$$

Dwa kolejne pulsary są więc opóźnione lub przyspieszone względem siebie o

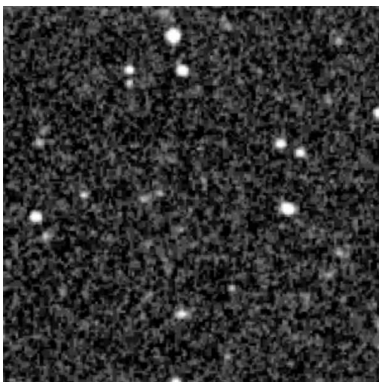
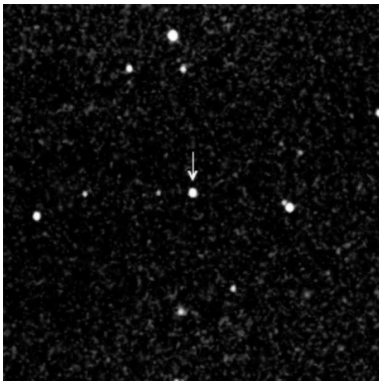
$$\frac{d}{2c} \sin 2\pi(t+1/f)/T - \frac{d}{2c} \sin 2\pi t/T \approx \frac{2\pi d}{2fcT} \cos 2\pi t/T.$$

Czas między obserwowanym na Ziemi przybyciem dwóch pulsów wynosi wobec tego

$$\Delta t = 1/f + \frac{2\pi d}{2fcT} \cos 2\pi t/T,$$

a więc częstotliwość to

$$f_1 = \frac{1}{\Delta t} \approx f - \frac{2\pi df}{2cT} \cos 2\pi t/T.$$



Fot. Porównanie obrazów tego samego fragmentu konstelacji Lwa. Obiekt oznaczony 2MASS J1146+2230 – karzeł typu widmowego L – wskazany jest strzałką na obrazie z zakresu bliskiej podczerwieni. W zakresie optycznym nie jest on widoczny.

tj. żargonowo pierwiastków cięższych od helu (Słońce, Aldebaran, Arktur), pomarańczowo-czerwone gwiazdy z pasmami (Betelgeza), gwiazdy czerwone o złożonych pasmach (19 Piscium) oraz obiekty zawierające jednocześnie emisje i absorpcje (γ Cassiopeiae, β Lyrae).

Był to, jak się okazało, trochę zbyt uproszczony podział. Astronomom przyszła z pomocą fotografia. W roku 1872 Henry Draper uzyskał pierwsze zdjęcie widma gwiazdy (Wegi). Choć ten nowojorski fizyk i astronom wkrótce zmarł, przekazane przezeń środki finansowe pozwoliły zbudować nowej klasy teleskop, przeznaczony specjalnie do fotografowania widm gwiazd (instrument ten znajduje się dziś w Piwnicach koło Torunia jako dar Stanów Zjednoczonych dla budującego się po II wojnie światowej obserwatorium). Za jego pomocą Edward C. Pickering, dyrektor obserwatorium Harvarda, wraz z Williamą Fleming przystąpili do tworzenia nowego schematu klasyfikacji widm, oznaczając poszczególne typy kolejnymi literami alfabetu łącińskiego (tabelka).

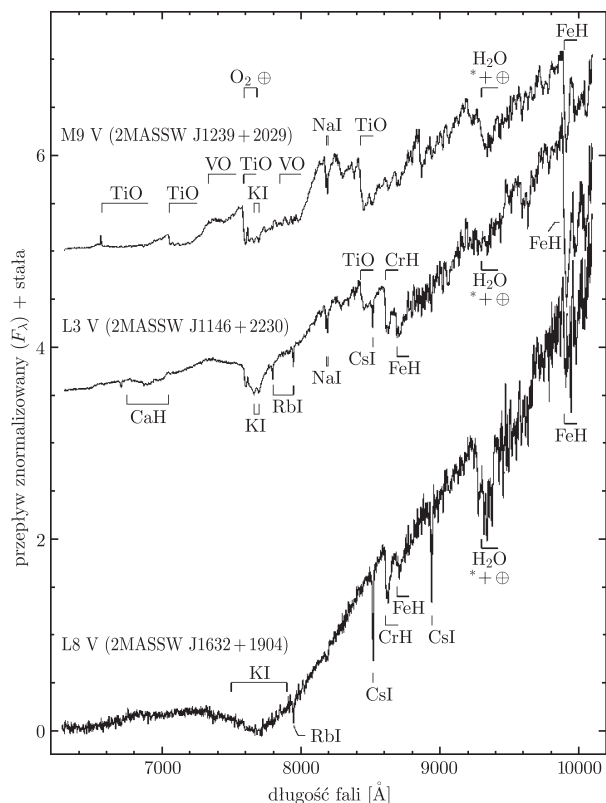
Podstawą sekwencji od A do O było malejące natężenie linii wodoru, ponadto oznaczenia P i Q zarezerwowano dla obiektów, które nie mieściły się w tym schemacie klasyfikacji. Późniejsze prace pokazały, że nie wszystkie wyróżnione typy znajdowały uzasadnienie – niektóre z nich usunięto, a część połączono w jedno. Dwie asystentki, Antonia Maury i Annie Jump Cannon, zauważyły, że – biorąc pod uwagę natężenia linii absorpcyjnych innych niż wodorowe – lepiej byłoby ustawić klasę B przed A, jeszcze wcześniej, na samym początku sekwencji, umieścić typ O. Tak oto narodził się ów klucz typów widmowych – OBAFGKM – który znamy do dziś. Annie Cannon zawdzięczamy podział poszczególnych typów na podtypy, oznaczane cyframi od 0 do 9. Przez jakiś czas na końcu sekwencji utrzymywał się jeszcze typ N, tj. gwiazd równie chłodnych i czerwonych jak obiekty typu M, z tym że w ich widmach zamiast pasm tlenku tytanu obserwowano linie węgla. Gdy znaleziono więcej gwiazd bogatych w węgiel, wykazujących jednak nieco odmienne cechy widmowe, pojawił się dodatkowo typ R (czasem R i N zastępuje się wspólnym oznaczeniem C), a gwiazdy o silnych pasmach tlenku cyrkonu oznaczono przez S. Podobnie jak N i R, uważa się je dziś raczej za osobliwe, niemieszczące się w zasadniczym ciągu klasyfikacyjnym. Wydawałoby się, że ciąg OBAFGKM trwać już będzie w niezmienionej postaci. Tymczasem w ostatnich latach astronomowie dodali na końcu owej siedmioliterowej sekwencji dwa nowe symbole: L i T. Dzięki nowej technologii i wnikliwym obserwacjom odkryte zostały obiekty o widmach wykraczających poza dotychczasowy schemat klasyfikacji.

W tym miejscu należy sobie uświadomić, że o widmie gwiazdy decyduje przede wszystkim temperatura, a w znacznie mniejszym stopniu ciśnienie i skład chemiczny jej atmosfery. To od temperatury zależy, w jakim stopniu będą zjonizowane i wzbudzone atomy poszczególnych pierwiastków (jak to pokazali fizyk austriacki L.E. Boltzmann oraz hinduski fizyk i astronom M. Saha). Skład chemiczny zaś prawie wszystkich gwiazd jest podobny, nie jest więc głównym czynnikiem różnicującym widma.

Do niedawna najchłodniejsze gwiazdy ciągu głównego określano jako M 9,5 (takie „połówki” pojawiały się już wcześniej od czasu do czasu, gdy brakowało cyfr na pomieszczenie więcej niż 10 podtypów). Problem pojawił się, kiedy zaczęto odkrywać obiekty jeszcze chłodniejsze – brązowe karły. To przewidywane już wcześniej przez teoretyków niedosłe gwiazdy, o masie poniżej 8% masy Słońca – czyli trochę za małe do zapoczątkowania klasycznych reakcji syntezy helu. Jak się jednak okazuje, nawet te niedosłe gwiazdy też świecą, a przynajmniej „żarzą się” kosztem energii grawitacyjnej kontrakcji oraz w pewnej mierze dzięki fuzji deuteru. Obiekty tego typu zaczęto odkrywać w ramach programów obserwacyjnych prowadzonych w podczerwieni, np. DENIS (*Deep Near Infrared Survey of the Southern Sky*) czy 2MASS (*Two Micron All Sky Survey* – fotografia).

Jak zatem oznaczyć owe karły, by uzupełnić dotychczasowy schemat klasyfikacji, a równocześnie nie wprowadzać symboli, które w jakiś sposób kojarzyłyby się

z używanymi już w astronomii? Zasadniczo pozostały do dyspozycji litery H, L, T oraz Y. Dość naturalną drogą wybór padł na L, choć w ten sposób znów naruszona została alfabetyczna kolejność. Typ L dobrze pasuje się w dotychczasowym schemacie klasyfikacji (rys. 1); miejsce pasm tlenków metali zajmują w widmach tego rodzaju pasma wodorków i samych metali.



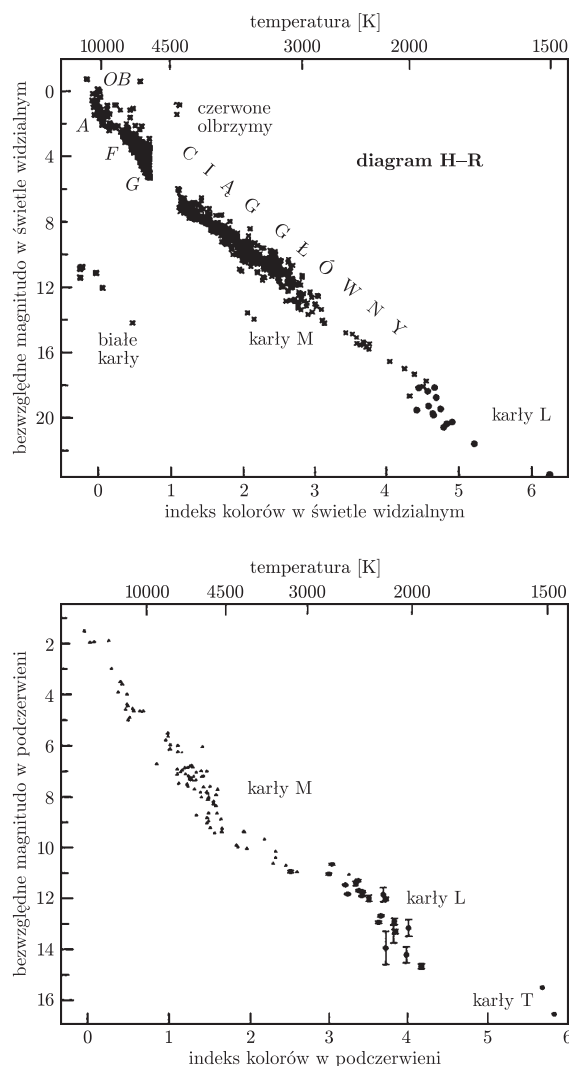
Rys. 1. Widma trzech karłów (typów M9, L3 i L8) w zakresie bliskiej podczerwieni. Najsilniejsze linie zostały zidentyfikowane, wskazano też położenie pochodzących z atmosfery Ziemi absorpcji tlenu i pary wodnej.

Już w późnych podtypach M rośnie natężenie linii tlenku wanadu, osiągając maksimum w L0; linie te znikają w podtypie L4. Z kolei w widmach typu L7 pasma tlenku tytanu stają się prawie niewidoczne. Z malejącą temperaturą rośnie natężenie absorpcji metali alkalicznych – potasu, rubidu i cezu. Absorpcja potasu staje się szczególnie silna i szeroka w podtypie L8.

Jak się ocenia, tylko około jednej trzeciej obiektów typu L to brązowe karły. Rozpoznaje się je dzięki obecności w widmie absorpcji litu. Pierwiastek ten nie ma szans na przetrwanie w materii, w której zachodzi przemiana wodoru w hel – toteż występować może jedynie w atmosferach bardzo młodych gwiazd lub właśnie brązowych karłów.

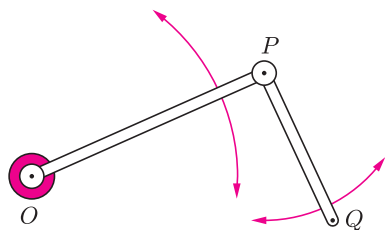
Ciągowi podtypów od L0 do L8 (L9 na razie pozostawiono w rezerwie) odpowiada ciąg malejących temperatur powierzchni od 2000 K do 1300 K (rys. 2). W tak niskich temperaturach część materii może

przyjmoać postać stałą (np. tlenek wanadu czy chlorek litu; tytan wiąże się z tlenem i wapniem w związek CaTiO_3 , znany w formie perowskitu). Wokół tak chłodnego obiektu może zatem powstać mglista otoczka złożona z ziaren minerałów.



Rys. 2. Położenie karłów typów widmowych L i T na diagramie HR.

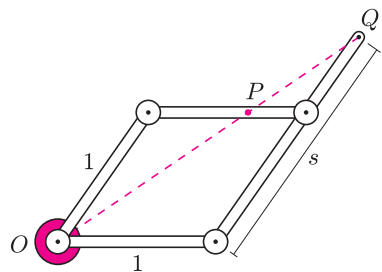
To jeszcze nie koniec niezwyklej menażerii niedoszłych gwiazd. Temperaturę karła Gliese 229B wyznaczono na zaledwie 1000 K! Nietypowe wskaźniki barwy kilku podobnych obiektów i ich skomplikowane widma, bogate w linie metanu, pozwoliły na wyodrębnienie jeszcze jednego typu widmowego – T. Na razie obserwacje są zbyt skąpe, by dokonać podziału na podtypy tej ostatniej klasy karłów. Czas już jednak oswajać się z rozszerzoną sekwencją typów widmowych: OBAFGKMLT. Dotychczasowe oceny sugerują, że brązowych karłów powinno być w naszej Galaktyce nawet dwa razy więcej niż normalnych gwiazd. Oznacza to, że przypada im w udziale jakieś 15% masy zawartej w gwiazdach. Nie rozwiązuje to, co prawda, problemu brakującej ciemnej materii, ale na pewno świadczy o tym, że otaczający nas Wszechświat kryje w sobie jeszcze wiele niespodzianek.



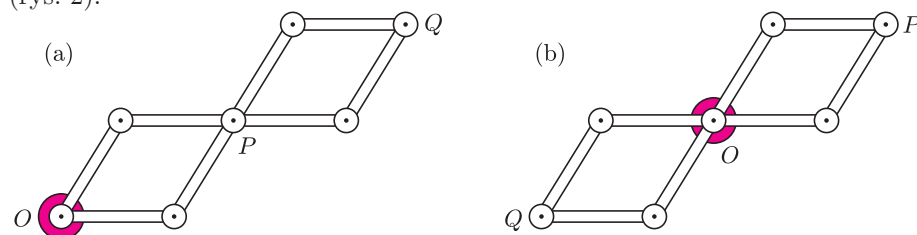
Rys. 1. Przegub jest w punkcie O zamocowany na stałe do podłoża.

Przegubem (lub – precyzyjniej – płaskim mechanizmem przegubowym) nazywamy mechanizm złożony z pewnej liczby sztywnych prętów, połączonych w taki sposób, by mogły się obracać wokół punktu połączenia. Przegub jest w pewnych punktach na stałe zamocowany do podłoża; również wokół tych punktów przegub może się obracać (rys. 1).

Jednym z najstarszych i najpowszechniej znanych przegubów jest *pantograf* (rys. 2).



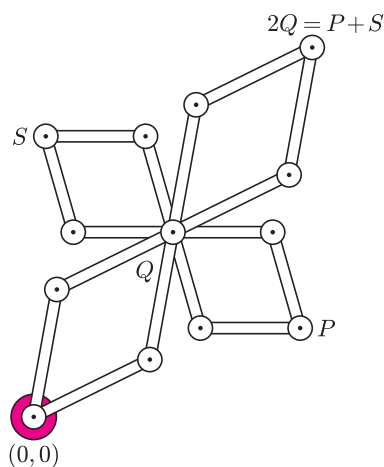
Rys. 3. Uproszczony pantograf.



Rys. 2. (a) Pantograf o skali $s = 2$; (b) pantograf o skali $s = -1$.

Zauważmy, że gdy punktem P wodzimy po pewnej krzywej, punkt Q zakreśla obraz tej krzywej względem jednokładności o środku w O i skali s . Rysunek (b) ukazuje pantograf realizujący jednokładność o ujemnej skali. Możemy też skonstruować pantograf złożony tylko z 4 prętów (rys. 3).

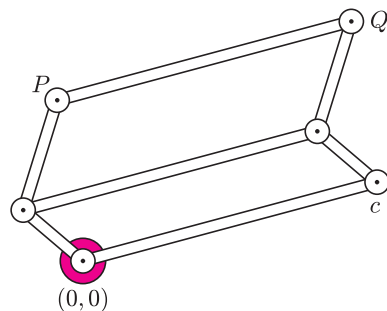
Nazwa *pantograf* po grecku oznacza „rysujący wszystko”. I rzeczywiście – pantograf jest „pra-kserografem”. W renesansie, a zapewne i wcześniej, używano go do kopiowania dokumentów, a także obrazów. Wiadomo, że korzystał z niego Leonardo da Vinci.



Rys. 4. Dodawacz (dwa skrzyżowane pantografy ze stałą 2).

Nieco później, w XVIII wieku, zaczęto stosować go do odwzorowywania obiektów przestrzennych; używano go, między innymi, do kopiowania rzeźb, a także czcionek drukarskich. Gdy byłem dzieckiem, plastikowe pantografy były popularną zabawką – w punkcie P umieszczony był rysik, w punkcie Q można było zamocować kredkę. Niestety, robiono je z mało sztywnego, wyginającego się plastiku i do rysowania niezbyt się nadawały.

Zauważmy, że jeżeli utożsamimy płaszczyznę ze zbiorem liczb zespolonych, przypisując punktom S , P i Q odpowiednio liczby z_S , z_P i z_Q , otrzymamy zależność: $z_Q = z_S + s(z_P - z_S)$. W szczególności mając do dyspozycji dwa pantografy: do rysowania w skali 2 i w skali 1/2, możemy skonstruować przyrząd do dodawania liczb zespolonych (a więc i wektorów). W rzeczywistości możemy użyć dwóch przegubów o skali 2, zamieniając w jednym z nich role punktów P i Q (rys. 4).

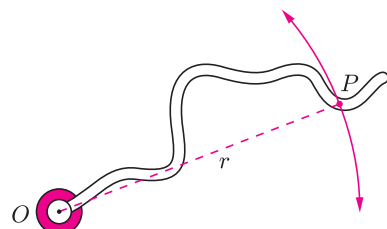


Rys. 5. Przesuwacz.

Oczywiście, $z_Q = z_S + \frac{1}{2}(z_P - z_S) = \frac{1}{2}(z_S + z_P)$. Możemy teraz „pomnożyć” punkt Q przez 2 – przekształcić go przez jednokładność o skali 2 za pomocą drugiego pantografu, zamocowanego w punkcie $(0, 0)$.

Trochę łatwiej dodaje się do liczby zespolonej z liczbę c o znanym, ustalonym module. Odpowiada to przesunięciu punktu P o wektor o danej długości. Można to zrobić za pomocą „przesuwacza” z rysunku 5.

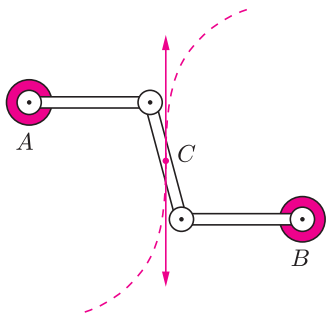
Oczywiście, $z_Q = z_P + c$.



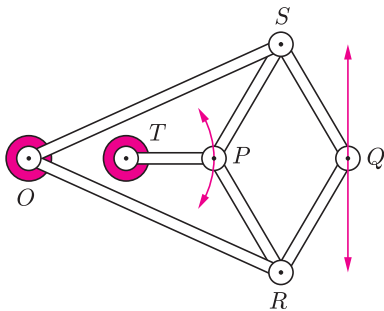
Rys. 6. Bardzo krzywy „cyrkiel”.

Inną, bardzo ważną grupą przegubów są tzw. inwersory. Służą one bądź do zamiany ruchu po okręgu na ruch po prostej, bądź odwrotnie – z ruchu po prostej na ruch po okręgu. Aby zrozumieć wagę pierwszego zastosowania, zastanówmy się, jak zazwyczaj rysujemy linie proste. Podstawowym, szkolnym narzędziem jest tu linijka; milcząco zakładamy, że jej brzeg jest dostatecznie prosty. Zauważmy, że kreślenie okręgu nie jest obciążone tego typu niedokładnością: gdy zamocujemy koniec nawet bardzo krzywego pręta w pewnym punkcie, jego drugi koniec (i każdy inny punkt pręta) będzie zataczał okrąg. Gdybyśmy mieli więc przegub zamieniający ten ruch po okręgu na ruch po prostej, zyskalibyśmy precyzyjniejsze narzędzie do kreślenia prostych niż linijka.

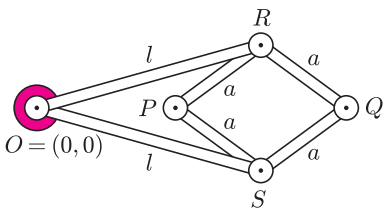
*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 7. Prostowód Watta. Punkty A i B są zamocowane na stałe, punkt C porusza się w przybliżeniu po prostej (kreskami zaznaczono krzywą, po której w rzeczywistości porusza się C).



Rys. 8. Inwersor Peaucelliera-Lipkina. $|OS| = |OR|$, $|PS| = |PR| = |SQ| = |QR|$, $|OT| = |PT|$. Gdy punkt P porusza się po okręgu o środku w T, punkt Q porusza się po prostej prostopadłej do odcinka OT (dlaczego?).



Rys. 9. Uproszczony inwersor Peaucelliera. Jak poprzednio, $|OS| = |OR|$, czworokąt PSQR jest rombem. Jeśli X jest środkiem PQ, to

$$\begin{aligned} |OP| \cdot |OQ| &= \\ &= (|OX| - |PX|)(|OX| + |PX|) = \\ &= |OX|^2 - |PX|^2 = \\ &= (|OR|^2 - |RX|^2) - |PX|^2 = \\ &= |OR|^2 - (|RX|^2 + |PX|^2) = l^2 - a^2, \end{aligned}$$

a więc iloczyn ten nie zależy od położenia ruchomych punktów przegubu, lecz jedynie od długości jego prętów.

Historia drugiego zastosowania inwersorów – zamiany ruchu posuwistego (ruchu po odcinku) na ruch kołowy – związana jest nierozdzielnie z silnikiem parowym. Nie będziemy wchodzić w szczegóły techniczne, ważne jest, że ruch tłoka (w przód i w tył) należy w nim zamienić na ruch obrotowy koła zamachowego. James Watt, twórca ulepszonego silnika parowego, skonstruował w 1784 roku prosty przegub (rys. 7) rozwiązujący to zagadnienie w sposób przybliżony (uważał go za jedno ze swoich największych odkryć). Konstrukcja ta, zwana prostowodem Watta, stosowana jest dziś powszechnie w bardzo różnych mechanizmach.

Przez następne 100 lat konstruowano inne przybliżone inwersory – zajmowali się tym m.in. Evans i Czebyszew. Powszechnie wierzone, że dokładne (nie przybliżone) rozwiązanie zagadnienia nie istnieje. Poprawne rozwiązanie, przedstawione w 1864 roku przez C.N. Peaucelliera, oficera armii francuskiej, przeszło niezauważone; dopiero gdy 9 lat później L.I. Lipkin, który niezależnie skonstruował ten sam przegub, przedstawił go na Wystawie Światowej w Wiedniu, wynalazek ów został powszechnie doceniony (rys. 8).

Wiele różnych modeli inwersorów przedstawił w *Delcie* 1/2004 Marek Kordos w artykule *Jak narysować linię prostą?* Wykład pod tym tytułem Alfred Bray Kempe wygłosił w 1876 roku w South Kensington Museum w Londynie. Kempe (1849–1922) był bardzo szanowanym prawnikiem londyńskim, specjalizującym się w prawie kanonicznym. Matematykę traktował jako hobby, był jednak do jej uprawiania doskonale przygotowany – ukończył studia matematyczne, był uczniem wybitnego angielskiego algebraika Artura Cayleya. Artykuł, w którym zawarł tekst wspomnianego, bardzo interesującego wykładu, można znaleźć na stronach Uniwersytetu Cornell (<http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=Kemp009&seq=5>).

Przyjrzyjmy się starannie (nieznacznie zmodyfikowanemu) inwersorowi Peaucelliera (rys. 9).

Jeżeli w tym inwersorze dobierzemy l i a tak, by $l^2 - a^2 = 1$, zauważymy, że $|z_P||z_Q| = 1$, a że z_P i z_Q leżą na tej samej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, mamy $z_Q = \lambda z_P$ dla pewnej (dodatniej) liczby rzeczywistej λ . Z tych dwóch równości dostajemy natychmiast, że $\lambda = 1/|z_P|^2$, a więc $z_Q = \lambda z_P = z_P / (|z_P|^2) = z_P / (z_P \bar{z}_P) = 1/\bar{z}_P$ (przez \bar{z}_P oznaczyłem sprzężenie zespolone liczby z_P : $x + iy = x - iy$).

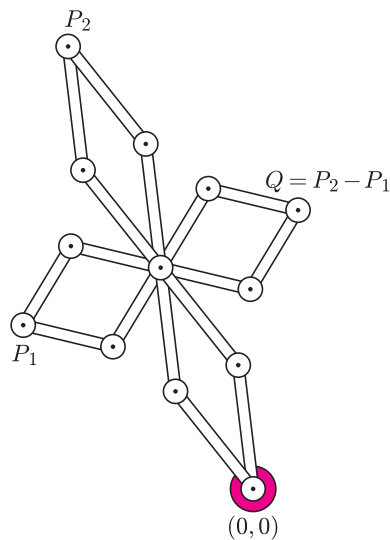
Takie przekształcenie płaszczyzny zespolonej nazywamy inwersją (ściślej – inwersją względem okręgu jednostkowego), stąd też pochodzi nazwa naszych przegubów.

Zauważmy, że wszystkie przedstawione w artykule przeguby miały jedno lub dwa („dodawacz”) „wejścia” (najczęściej oznaczane przez P , ew. liczbę zespoloną z_P) oraz „wyjście” (Q lub z_Q), przy czym przegub dokonywał pewnych przekształceń na „danych wejściowych”, wynik podając na „wyjściu”. Przy takim podejściu łatwo zrozumieć, że przeguby można ze sobą „składać” – wystarczy połączyć „wyjście” jednego z nich z „wejściem” drugiego. Odpowiada to złożeniu przekształceń, jakie realizują te dwa przeguby.

Na razie potrafimy skonstruować przeguby realizujące przekształcenia:

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + c \text{ (przesuwacz),} & z &\mapsto az \text{ (pantograf),} \\ (z, w) &\mapsto z + w \text{ (dodawacz)} & \text{oraz} & z &\mapsto 1/\bar{z} \text{ (inwersor).} \end{aligned}$$

Składając na przykład dodawacz z inwersorem, możemy teraz zbudować przegub realizujący przekształcenie $(z, w) \mapsto w + 1/\bar{z}$, a składając je w przeciwnej kolejności $(z, w) \mapsto 1/(\bar{z} + \bar{w}) = 1/(\bar{z} + \bar{w})$. Oczywiście, w dodawaczu możemy zamienić „wyjście” z jednym z „wejść” – dostaniemy w ten sposób „odejmowacz”, czyli przegub realizujący przekształcenie $(z, w) \mapsto z - w$. Do kompletu działań za pomocą przegubów brak nam mnożenia i dzielenia dwóch liczb zespolonych.



Rys. 10. Dodawacz jako odejmowacz.

Przy konstrukcji przegubu mnożącego kluczowym spostrzeżeniem jest to, że wystarczy, gdy skonstruujemy przegub podnoszący do kwadratu, gdyż $zw = 1/4 [(z+w)^2 - (z-w)^2]$, a więc składając odpowiednio pantograf mnożący przez $1/4$, dwa przeguby podnoszące do kwadratu i trzy dodawacze (w tym dwa pełniące w rzeczywistości funkcję „odejmowaczy”), dostaniemy przegub mnożący. Czy potrafimy więc podnieść przegubem liczbę do kwadratu?

Okazuje się, że wszystkie potrzebne narzędzia już mamy, gdyż

$$z^2 = 2 \left[\frac{1}{1/(z-1) - 1/(z+1)} + 1 \right],$$

możemy więc podnieść z do kwadratu za pomocą trzech inwersorów, odejmowacza, trzech przesuwaczy (dodających i odejmujących 1) i pantografu mnożącego przez 2.

Strach pomyśleć, jak złożony byłby przegub mnożący, zbudowany wedle powyższego przepisu. A może któryś z Czytelników potrafi podać prostszą konstrukcję?

Wreszcie, co z dzieleniem? Wykręcamy się tu w taki sam sposób, jak to zrobiliśmy z odejmowaniem: wystarczy zamienić „wyjście” przegubu mnożącego z jednym z „wejść”. Zauważmy, że mając przeguby realizujące wszystkie cztery działania oraz dodawanie i mnożenie przez ustalone liczby zespolone, możemy zbudować przegub realizujący dowolne przekształcenie postaci

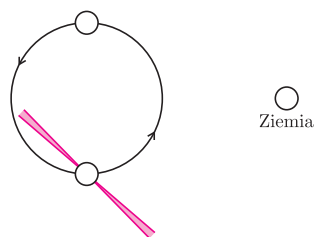
$$z \mapsto W(z),$$

gdzie $W(z)$ jest wielomianem. Wiedział o tym zapewne już Kempe, pierwsze dowody przedstawili na przełomie XIX i XX wieku G. Koenigs i A. Emch.



Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



Rys. 1



Rys. 2

F 657. Układ podwójny składa się z pulsara o masie M i białego karła o takiej samej masie, obiegających środek ciężkości po kołowej orbicie o okresie T , położonej na płaszczyźnie przechodzącej przez Ziemię (rys. 1). Pulsar wykonuje szybkie obroty wokół własnej osi z częstotliwością f tak, że w czasie jednego obrotu stożek emisji pulsara omiata Ziemię raz. Obliczyć, jakie będzie wahanie obserwowanej na Ziemi częstotliwości pulsara na skutek zmiany odległości pulsara i Ziemi (efekt Rømera). Rozwiązanie na str. 2

F 658. Astronomowie obserwują w bardzo dużej odległości D ciało poruszające się ze stałą prędkością v pod kątem β do osi ciało–Ziemia i w kierunku Ziemi (rys. 2). Nie są w stanie mierzyć bezpośrednio składowej radialnej prędkości ruchu, mierzą jednak pozorną prędkość transwersalną obiektu (jako prędkość ruchu ciała po sferze niebieskiej razy odległość D). Jaka musi być relacja między v oraz β , aby ciało wydawało się poruszać z prędkością nadświetlną? Uwzględnić opóźnienie Rømera sygnałów świetlnych docierających do Ziemi. (W astronomii sytuacje takie zdarzają się dosyć często, np. wyrzut materii ze źródła gamma GRS1915+105, odkryty w 1994 roku, wydawał się poruszać z prędkością $8c$.) Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Waldemar POMPE

M 1117. Wykazać, że liczba postaci $111 \dots 1222 \dots 2$ (w której występuje dokładnie 1000 jedynek i dokładnie 1000 dwójek) jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Rozwiązanie na str. 15

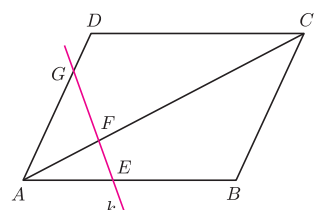
M 1118. Dany jest równoległobok $ABCD$. Prosta k przecina odcinki AB , AC , AD odpowiednio w punktach E , F , G (rys. 3). Dowieść, że

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AG} = \frac{AC}{AF}.$$

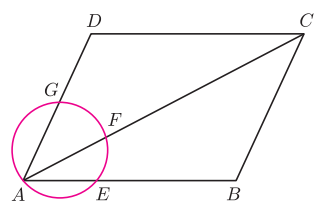
Rozwiązanie na str. 16

M 1119. Dany jest równoległobok $ABCD$. Pewien okrąg przechodzący przez punkt A przecina odcinki AB , AC , AD odpowiednio w punktach E , F , G (rys. 4). Dowieść, że $AB \cdot AE + AD \cdot AG = AC \cdot AF$.

Rozwiązanie na str. 15



Rys. 3



Rys. 4



Już po raz drugi gościmy w *Delcie* miesięcznik mmm, czyli Magazyn Miłośników Matematyki. Jedną ze specjalności mmm są Maratony Matematyczne. Taki Maraton to zawody wieloetapowe (i długotrwałe – stąd nazwa) polegające na rozwiązywaniu zadań. *Delta* ma zbyt małą objętość, by przedstawić zadania z pełnego Maratonu. Dlatego *Delta* przedstawia

MiniMaraton Matematyczny Białystok, wrzesień 2004

Wzięło w nim udział ponad 100 uczniów. Maraton składał się z sześciu 45-minutowych rund (mini w nazwie wzięło się właśnie ze z góry ograniczonego czasu trwania zawodów). Najlepszym do końca wiernie kibicowali pod drzwiami koledzy, nauczyciele i rodzice. Zwycięzcami zostali: Joachim Jelisiejew (I m.), Grzegorz Mironowicz (II m.) i Marcin Kamiński (III m.), którym raz jeszcze gratulujemy.

Poniżej przedstawiamy wyciąg z regulaminu konkursu i maratonowe zadania. Dalej zamieszczamy prawidłowe odpowiedzi i sposób oceniania, a także szkice rozwiązań. Jeśli ktoś z Czytelników *Delty* uzna zadania maratonu za interesujące na tyle, by je rozwiązać, lub sam pomysł maratonu ciekawy na tyle, by go wykorzystać, będzie nam bardzo miło. Przy okazji dziękujemy Redakcji *Delty* za gościnne przyjęcie nas na jej stronach.

Redakcja MMM
<http://www.mmm.ig.pl>

Regulamin Zawodów

- 1) W konkursie biorą udział uczniowie gimnazjów, bez podziału na kategorie wiekowe.
- 2) MMM obejmuje 6 rund, które rozpoczynają się o pełnych godzinach. W każdej rundzie zawodnicy otrzymują do rozwiązania 6 łamigłówek w ciągu 45 minut. W ciągu następnych 15 minut następuje sprawdzenie zadań i ogłoszenie wyników.
- 3) Na karcie odpowiedzi wpisuje się tylko ostateczne wyniki zadań, bez szczegółowych rozwiązań i rachunków. Tylko one podlegają ocenie jury.
- 4) Po każdej rundzie odpadają zawodnicy z najsłabszymi wynikami. Próg punktów jest każdorazowo ustalany przez jury.
- 5) Każdy uczestnik MMM może w dowolnym momencie wycofać się z dalszej gry na własne życzenie. Może też zostać zdyskwalifikowany za niesamodzielną pracę.
- 6) O zwycięstwie w MMM decyduje wynik ostatniej rundy, a jeśli te wyniki będą równe – suma punktów uzyskanych od początku rozgrywki.
- 7) Uczestnicy przynoszą papier na brudnopis i długopisy. Zabronione jest używanie kalkulatorów, tablic i innych pomocy.
- 8) Przed wejściem na salę należy wyłączyć telefony komórkowe.
- 9) Środki dopingujące w postaci czekolady i napojów bezalkoholowych mile widziane.
- 10) Organizatorzy zastrzegają sobie prawo losowego pobierania próbek moczu, krwi i śliny od uczestników w celu przeprowadzenia laboratoryjnej kontroli antydopingowej.
- 11) W przypadku pozytywnego wyniku kontroli zawodnik zostaje dożywotnio zdyskwalifikowany.
- 12) Wszyscy uczestnicy MMM otrzymują dyplomy pamiątkowe, a zdobywcy pierwszych pięciu miejsc – dyplomy honorowe i cenne nagrody-niespodzianki.





Zadania

Runda I

1. Skrzynia jest zamknięta na zamek z 6-cyfrowym kodem. Gdy jest zamknięta, układ cyfr tworzy liczbę 499244. W zamku nie można zmieniać cyfr niezależnie, dopuszczalne są jedynie dwie operacje: jeśli po cyfrze 4 występuje 9, to parę 49 można zastąpić parą 24, jeśli po cyfrze 2 występuje 4, to parę 24 można zastąpić parą 92. Kod otwierający skrzynię to najmniejsza z liczb, jakie można otrzymać z 499244, stosując te operacje. Jaki to kod?
2. Gdy Piotr miał połowę tych lat, ile ma obecnie Paweł, obaj bracia mieli w sumie 18 lat. Za 5 lat będą razem mieli 40 lat. Ile lat mają obecnie?
3. Palindromy czytają się jednakowo od przodu i od tyłu. Ile jest liczb-palindromów pomiędzy sto a milionem?
4. Cheapland jest krajem z galopującą deflacją. Ceny towarów są tu zawsze liczbami naturalnymi i z roku na rok spadają. Zestaw do masażu jest dziś znacznie tańszy niż przed rokiem. Jego obecna cena jest równa wskaźnikowi spadku ceny w ciągu roku wyrażonemu w procentach. Rok temu cena zestawu była niższa niż 100. Ile wynosi dziś?
5. Ze względów bezpieczeństwa hasło do komputera jest codziennie zmieniane. Dzisiejsze jest liczbą czterocyfrową, której zapis nie zaczyna się i nie kończy zerem. Liczba ta jest kwadratem, a jej cyfry mają jednakową parzystość. Jakie może być to hasło?
6. Nad przepaścią przerzucony jest most linowy. Jest uszkodzony, dlatego jednocześnie mogą stać na nim co najwyżej dwie osoby. Jest ciemno, więc trzeba się po nim poruszać z latarką. Na jednym skraju przepaści stanęło czterech towarzyszy. Mają tylko jedną latarkę. Jednemu z nich przeprawa przez most zabiera 10 minut w każdą stronę, drugiemu 5, trzeciemu 2, a czwartemu tylko 1 minutę. Panowie nie są zbyt sprawni fizycznie i każdemu wzięcie któregośkolwiek z kolegów „na barana” opóźni czas przejścia dziesięciokrotnie. W jakim najkrótszym czasie wędrowcy mogą przeprowadzić się przez most?

Runda II

1. Jadąc po prostej drodze, mijamy 5 miejscowości: A , B , C , D i E . Z A do B jest 16 km, z A do D – 6 km, z A do E – 16 km, z C do D – 6 km i z D do E są 22 km. W jakiej kolejności mijamy te miejscowości, jeśli przez D przejeżdżamy wcześniej niż przez A ?
2. Z odpadów produkcyjnych powstałych przy produkcji 6 zniczy nagrobkowych można wytworzyć nowy znicz. W magazynie zalega

materiał odpadowy z produkcji 600 zniczy. Ile zniczy można wytworzyć z tego materiału?

3. Ile jest różnych (nieprzystających) siatek danego sześciianu?
4. W konkursie matematycznym startowało dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt. Każdy z uczestników zdobył 8, 9 albo 10 punktów. Wszyscy razem uzyskali 156 punktów. Ile dziewcząt startowało w konkursie?
5. Jaś zapisał liczbę trzycyfrową, a kiedy przeczytał ją od tyłu, miała 45 razy mniejszą wartość. Jaką liczbę zapisał? Podaj wszystkie możliwości.
6. Na przyjęciu imieninowym byli: Alicja, Barbara, Czesława, Dorota, Edward, Franciszek, Gerwazy i Hubert. Są to 4 małżeństwa. W ostatnim tańcu Basia tańczyła z Edwardem, Alicja z mężem Doroty, Czesława – z mężem Alicji, Franciszek – z żoną Huberta, a Hubert z żoną Edwarda. Kto jest mężem Alicji, a kto żoną Edwarda?

Runda III

1. Spytano mnie pewnego razu, kto jest przedstawiony na portrecie wiszącym na ścianie. Odpowiedziałem: „Ojciec sportretowanej osoby jest jedynym synem tego, który mówi”. Czyj to portret?
2. Klasa Tomka liczy nie więcej niż 40 uczniów. Grzecznych dzieci jest w niej trzykrotnie więcej niż niegrzecznych, natomiast grupa złożona z grzecznych dziewczynek i niegrzecznych chłopców jest dwukrotnie liczniejsza od grupy złożonej z grzecznych chłopców i niegrzecznych dziewczynek. Chłopców w klasie jest tyle, ile grzecznych dziewczynek. To znaczy ilu?
3. Podczas wojny rzymsko-żydowskiej Flawiusz wraz z grupą 40 żydowskich powstańców schronił się w jaskini, którą wkrótce otoczyli Rzymianie. Osaczeni nie mieli żadnych szans i postanowili raczej zginąć niż się poddać. Postanowili utworzyć krąg i pozbawiać życia kolejno co trzecią osobę. Ostatni miał popełnić samobójstwo. Flawiusz z przyjacielem nie chcieli ginąć. Gdzie powinni stanąć, aby ująć z życiem? Podaj ich numery w początkowym kręgu, jeśli osoba, od której rozpoczyna się odliczanie, ma numer 1.
4. W koszu jest 16 owoców. Są tam jabłka, gruszki i pomarańcze. Pomarańczy jest co najmniej tyle, co jabłek, a jabłek jest więcej niż gruszek. Jeśli z koszyka wybierzemy losowo 9 owoców, to będą wśród nich zawsze owoce dwóch rodzajów, a jeśli wybierzemy 14 owoców, to zawsze będą wśród nich wszystkie rodzaje. Ile pomarańczy, jabłek i gruszek jest w koszu? Podaj wszystkie możliwości.



5. Nauczyciel polecił Jankowi, aby z 9 cyfr (bez zera) utworzył trzy liczby trzycyfrowe, wykorzystując każdą z cyfr tylko raz. Janek napisał takie liczby, a potem obliczył ich sumę, która okazała się czterocyfrowym palindromem. Jaka to liczba?

6. Na film „Reksio i tajemnica zielonej budy” przyszło kilkadziesiąt osób, z których dokładnie połowa to panie. W chwilę po rozpoczęciu projekcji weszła jeszcze jedna pani i wtedy stanowiły one po zaokrągleniu do dziesiątych części procenta 51,3% widzów. Ile osób przyszło w sumie do kina?

Runda IV

1. Adam, Bartek i Czesław pojechali na wycieczkę. Okazało się, że roztargniony Adaś zapomniał prowiantu. Koledzy postanowili się z nim podzielić swoimi zapasami. Bartek miał 3 cebularze, a Czesław 4. Chłopcy zebrali je razem i podzielili na trzy równe porcje. Adam, znając cenę cebularza, oszacował swój udział w posiłku na 2,80 zł i wręczył tę kwotę kolegom. Jak powinni oni podzielić te pieniądze między siebie?

2. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, która dzieli się przez 13, ma sumę cyfr 13 i dwucyfrową końcówkę 13.

3. Piotr jest dyslektykiem i ma poważne problemy z matematyką. Zamiast mnożyć zawsze dzieli, a zamiast odejmować – dodaje. Nauczyciel polecił mu odjąć 60 od iloczynu podanych dwóch liczb naturalnych. Szczęśliwym trafem tym razem Piotr uzyskał poprawny wynik. Jaki wynik mógł uzyskać? Podaj wszystkie możliwości.

4. Jaka liczba zaczyna, a jaka kończy alfabetyczny spis liczebników od 1 do 100 w języku polskim?

5. Na jaką największą liczbę części prosta może rozciąć wielokąt o 2003 bokach?

6. Sześciąt dzielimy na 6 przystających ostrosłupów o podstawach będących ścianami tego sześciąta i wspólnym wierzchołku w środku symetrii sześciąta. Następnie ostrosłupy te naklejamy podstawami na ściany sześciąta przystającego do wyjściowego. Ile ścian ma otrzymana bryła?

Runda V

1. Czterech chłopców: Anatol, Barnaba, Cezary i Damian i cztery dziewczyny: Eulalia, Franciszka, Genowefa i Henryka są zakochani w jednej z pozostałych osób, ale (rzecz przykra) uczucia żadnego z nich nie są odwzajemnione. Jeszcze gorzej byłoby, gdyby dwóch chłopców zakochanych było w jednej dziewczynie, a wprost tragicznie, gdyby dwie dziewczyny kochały się w jednym chłopcu. Ale aż tak źle nie jest. Wiadomo, że:

- Barnaba nie jest kochany przez Franciszkę,
- Cezary kocha dziewczynę zakochaną w Damianie,
- ukochany Eulalii nie kocha Franciszki,
- Anatol kocha dziewczynę, która kocha chłopca zakochanego w Henryce,

- w Genowefie kocha się chłopiec, który jest kochany przez ukochaną Barnaby.

Kto kocha Genowefę, a kto Barnabę?

2. Jakie trzycyfrowe palindromy są kwadratami liczb całkowitych?

3. Czarnoksiężnik powierzył swojemu uczniowi magiczny wzór, który zaczynał się od litery A i składał z nieskończonej liczby par liter AB i BA. Uczeń, chcąc zyskać na czasie, zapisał ten wzór, zastępując każdą parę AB przez A, a parę BA przez B. O dziwo, magiczny wzór nie zmienił się. Jakie litery stały na miejscach o numerach od 2002 do 2008?

4. Znaleźć najmniejsze trzy kolejne liczby naturalne trzycyfrowe, z których pierwsza ma sumę cyfr podzieloną przez 5, środkowa przez 4, a ostatnia przez 3.

5. Na ile sposobów można za pomocą jednego cięcia wzdłuż prostej podzielić prostokąt na dwie identyczne części?

6. Koń orał pole przez cały dzień. Od między do między pole rozciągało się na 95 m. Koń wystawiał nogę zawsze na 0,5 m naprzód. Ile śladów kopyt zostało w ostatniej bruździe?

Runda VI

1. Znaleźć największą liczbę zapisaną cyframi 1, 2 i 3 o tej własności, że wybrane z jej zapisu liczby dwucyfrowe są wszystkie różne.

2. Podaj siedem kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, których suma jest sześciątem liczb pierwszej.

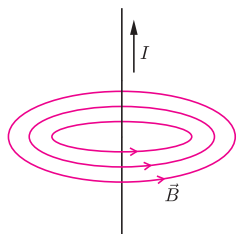
3. W trójkącie ABC , w którym $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, kąt BAC podzielono na 3 równe części. Jedna z dzielących go półprostych zawiera wysokość trójkąta. Jaka jest miara $\sphericalangle BAC$?

4. Na okręgu zaznaczono wierzchołki dwunastokąta foremnego, a następnie wybrano 9 spośród nich i łącząc kolejno, wyznaczono pewien wielokąt. Ile nieprzystających wielokątów można w ten sposób uzyskać?

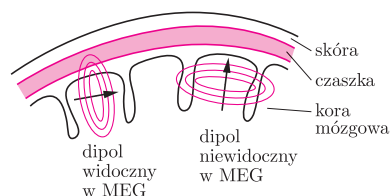
5. Ile jest pięciocyfrowych liczb podzielnych przez 3, które nie mają cyfr innych niż 1, 2 i 3?

6. Dyrektor szkoły zamknął pytania egzaminacyjne w kasie pancernej, której drzwi otwiera specjalny kod. Jest on liczbą naturalną, co najwyżej pięciocyfrową, nie zaczyna się i nie kończy się zerem i ma następującą własność: jeżeli wykreślimy w nim pewną cyfrę, to otrzymana nowa liczba jest równa $1/9$ liczby początkowej, a jeśli ponownie wykreślimy jedną cyfrę tej drugiej liczby, to otrzymamy dokładnie $1/81$ kodu początkowego. Jaki jest kod kasy pancernej w szkole? Podaj wszystkie możliwości.

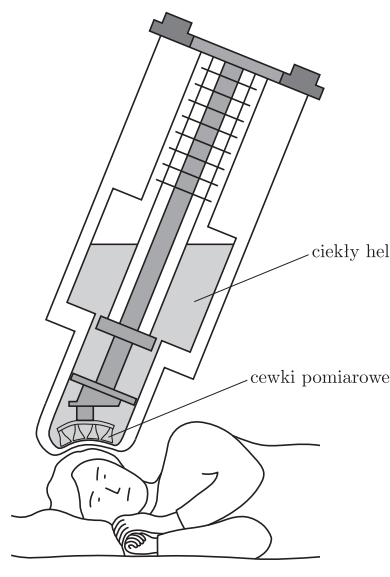




Rys. 1. Linie pola magnetycznego generowanego przez dipol prądowy.



Rys. 2. Źródła ułożone prostopadle i równoległe do powierzchni głowy wraz z ich liniami pola magnetycznego.



Rys. 3. Aparatura do pomiaru MEG.

Magnetoencefalogram (MEG) mierzy tę samą zsynchronizowaną aktywność komórek nerwowych (neuronów) mózgu co EEG (elektroencefalogram – zapis czynności elektrycznej mózgu). Nazwa magnetoencefalogram pochodzi od wyrazów *magneto* – magnetyczny, *enkephalo* – mózg, *graphein* – rysować.

Pole magnetyczne mózgu

Skąd się bierze pole magnetyczne mózgu? W artykule poświęconym pomiarowi EEG (*Delta* 4/2005) omawiałem powstawanie pola elektrycznego mózgu. Jest ono generowane przez synchroniczną aktywność postsynaptyczną równoległe ułożonych grup komórek nerwowych (neuronów) kory mózgowej. Dla uproszczenia możemy traktować takie przestrzennie uporządkowane grupy neuronów jako dipole prądowe. Jak wiadomo, przepływ ładunku przez taki dipol powoduje powstawanie pola magnetycznego prostopadłego do kierunku prądu i radialnie go otaczającego (tzw. zasada prawej ręki) (rys. 1).

Magnetoencefalogram to zapis pola magnetycznego mózgu, generowanego przez zmienne pole elektryczne. Ponieważ pole magnetyczne jest ułożone prostopadle do pola elektrycznego, MEG rejestruje sygnały ze źródeł równoległych do powierzchni głowy, podczas gdy źródła prostopadłe do powierzchni głowy generują pole magnetyczne, które nie jest mierzalne na zewnątrz głowy (rys. 2). Dlatego też MEG znacznie lepiej rejestruje sygnały z warstw neuronów ułożonych równoległe do detektorów, czyli leżących w bruzdach kory mózgowej (rys. 2).

Pomiar MEG

Urządzenia pomiarowe składają się zwykle z kilkudziesięciu cewek tworzących matrycę przykładaną do powierzchni głowy (rys. 3). Zasada pomiaru MEG opiera się na prawie Faradaya, zgodnie z którym zmienne pole magnetyczne powoduje przepływ prądu przez cewkę. Sygnały mózgowie są bardzo słabe (około 10^{-12} tesli) w porównaniu z innymi polami wokół nas. Przykładowo, pole magnetyczne Ziemi wynosi około $5 \cdot 10^{-5}$ T. Dlatego do detekcji pola magnetycznego mózgu trzeba używać cewek z nadprzewodnika, a pomiary przeprowadzać w ekranowanych pomieszczeniach, aby zminimalizować wpływ zewnętrznych pól magnetycznych.

Do pomiaru MEG wykorzystuje się technologię SQUID (Superconducting Quantum Interference Device – Nadprzewodzący Kwantowy Interferometr Magnetyczny). Działanie takich urządzeń oparte jest na efekcie Josephsona. Pętla z nadprzewodnika jest podzielona nieprzewodzącą warstwą, tak cienką, że możliwe jest przeskakiwanie przez nią elektronów. Pojedynczy detektor, oprócz samego SQUIDu, składa się z dwóch cewek leżących jedna nad drugą połączonych szeregowo, ale przeciwnie skręconych. Taki układ jest niewrażliwy na jednorodne zmiany pola tła, lecz odbiera zmiany niejednorodne w pobliżu cewki.

MEG a EEG

Jakie są różnice pomiędzy pomiarami MEG i EEG? Czy pomiar MEG wnosi jakąkolwiek nową informację na temat procesów zachodzących w mózgu?

MEG jest czuły na dipole równoległe do powierzchni głowy, czyli znajdujące się głównie w bruzdach kory mózgowej. Tak się składa, że niektóre obszary sensoryczne mózgu: słuchowy, wzrokowy i somatosensoryczny, leżą właśnie w bruzdach. Z kolei EEG wykrywa wprawdzie wszystkie składowe prądowe, jednakże dipole umieszczone w bruzdach kory mózgowej mają zmniejszoną amplitudę. Jest to związane z tym, że pofałdowanie warstw neuronów kory mózgowej powoduje, iż elektroda może „widzieć” naraz dwie warstwy przeciwnie skierowane, a wtedy ich pola mogą się odejmować.

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 658.

Zakładamy, że ciało porusza się ruchem jednostajnym i prostoliniowym. Odległość ciała od Ziemi zmienia się zgodnie ze wzorem

$$l = D - vt \cos \beta,$$

a więc światło wysłane w kierunku Ziemi w chwili t dotrze do ziemi w chwili

$$t_1 = t + l/c = t - (vt/c) \cos \beta + D/c.$$

Odległość na sferze niebieskiej z kolei zmienia się według wzoru $s \approx v \sin \beta t$. Łącząc oba wzory, dostajemy zależność

$$s \approx \frac{vt_1 \sin \beta}{1 - (\cos \beta)v/c} - \frac{vD/c \sin \beta}{1 - (\cos \beta)v/c}.$$

Wobec tego pozorna prędkość ruchu ciała po niebie to

$$v_a = v \frac{\sin \beta}{1 - (\cos \beta)v/c}.$$

Warunek $v_a > c$ można przekształcić do najprostszej postaci jako

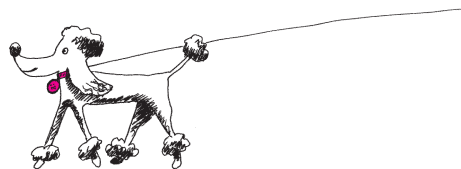
$$v(\sin \beta + \cos \beta) > c.$$

Pole elektryczne jest dużo bardziej tłumione przez małą przewodność czaszki i skóry niż pole magnetyczne. Także nieregularności tych tkanek powodują zniekształcenia w rozkładzie potencjałów na powierzchni głowy w stosunku do ich rozkładu bezpośrednio na korze. Pole magnetyczne pochodzi z kolei głównie od prądów płynących we w miarę jednorodnych obszarach wewnątrzczaszkowych. Ze względu na słabą elektryczną przewodność czaszki nieregularne prądy w czaszce i skórze są słabe i mają bardzo mały wkład do zewnętrznego pola magnetycznego. Dlatego też MEG ma lepszą rozdzielczość przestrzenną niż EEG, dochodzącą nawet do kilku milimetrów. Pomiary MEG mogą być wykonane dużo szybciej, ponieważ nie jest potrzebny kontakt elektrod ze skórą. Z drugiej strony, ze względu na to, że nie ma bezpośredniego kontaktu czujników ze skórą, a także z uwagi na rozmiar aparatury pacjent musi być nieruchomy podczas pomiaru. Natomiast przy pomiarach EEG jest możliwy ruch pacjenta, co przekłada się na większy wachlarz zastosowań eksperymentalnych.

Najciekawsze wydaje się jednoczesne stosowanie pomiarów MEG i EEG. Na przykład w badaniach czynności mózgu podczas snu występują wyraźne różnice pomiędzy obydwojma zapisami. W MEG pojawiają się głównie rytmy teta nieobecne w EEG. Połączenie MEG i EEG umożliwia także lokalizację ognisk padaczki na poziomie zbliżonym do zapisów wykonywanych bezpośrednio z kory mózgowej.

Bibliografia

Hamalainen M., Hari R., Ilmoniemi R., Knuutila J., Lounasmaa O. (1993). *Magnetoencephalography—theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain*. Rev. Mod. Phys, 65: 1-93.



Odpowiedzi i punktacja zadań MiniMaratonu Matematycznego

Runda I

Zad. 1. 222242. [0 lub 1 pkt.]

Dążymy do jak największej liczby początkowych dwójek, np. tak:

$$\underline{4}99244 \rightarrow \underline{24}9244 \rightarrow \underline{224}244 \rightarrow \underline{2249}24 \rightarrow \underline{2224}24 \rightarrow \underline{22249}2 \rightarrow \underline{22224}2.$$

Mniejszych liczb, tzn. 222222, 222224 i 222229 nie da się uzyskać. Pierwszej się nie da, bo każda zmiana wprowadza czwórkę lub dziewiątkę. Ostatniej się nie da, bo dziewiątka nigdy nie powstaje na końcu. Aby uzyskać drugą, trzeba by albo nie zmieniać ostatniej cyfry z układu początkowego, co jest niemożliwe, bo wszystkie pozostałe cyfry musiałyby być dwójkami, co jak już stwierdziliśmy, nie jest możliwe, albo końcowa czwórka musiałaby powstać z układu ...49, ale dziewiątki na końcu nie da się uzyskać. Zatem otrzymany wynik jest najmniejszy.

Zad. 2. Piotr 14, Paweł 16. [0 lub 1 pkt.]

Niech x oznacza obecny wiek Piotra, a y – Pawła. Ponieważ za 5 lat suma ich lat zwiększy się o 10, mamy: $x + y + 10 = 40$, czyli $x + y = 30$. Ponieważ $18 = 30 - 12 = x + y - 12$, sześć lat temu bracia mieli w sumie 18 lat. Z zadania mamy więc $x - 6 = y/2$ oraz $x + y = 30$, czyli otrzymujemy układ równań o rozwiązaniu: $x = 14$, $y = 16$.

Zad. 3. 1980. [0 lub 1 pkt.]

Palindromów 3- i 4-cyfrowych jest po 90 ($9 \cdot 10 \cdot 1$ i $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1$), 5- i 6-cyfrowych po 900 ($9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1$ i $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$), co daje $90 + 90 + 900 + 900 = 1980$.

Zad. 4. 20. [0 lub 1 pkt.]

Niech x będzie wyjściową ceną, a w ceną obecną (i wskaźnikiem spadku ceny w %). Mamy

$$w = \frac{100 - w}{100}x,$$

skąd dochodzimy do równości

$$w = \frac{100x}{100 + x} = \frac{100}{\frac{100}{x} + 1},$$

z czego wynika, że x dzieli 100. Niech zatem $n \cdot x = 100$. Wtedy podstawiając x do pierwszej równości, otrzymamy $(n + 1) \cdot w = 100$, z czego wynika, że zarówno n , jak i $n + 1$ dzielą 100. Jedyne kolejne dzielniki 100 to 1 i 2 oraz 4 i 5. Tylko ta druga para pasuje do treści zadania, więc $x = 25$, a $w = 20$.

Zad. 5. 4624, 6084, 8464. [0, 1, 2 lub 3 pkt.]

Czterocyfrowe kwadraty powstają z liczb od 32 do 99. Reszta z dzielenia kwadratu przez 4 daje 0 lub 1, ale w tym drugim przypadku kwadrat byłby nieparzysty i wszystkie jego cyfry musiałyby być nieparzyste. Jedyne możliwe dwucyfrowe końcówki, które spełniałyby te warunki, to: 13, 17, 33, 37, 53, 57, 73, 77, ale kwadraty liczb nieparzystych nie kończą się na 3 ani na 7. Wobec tego szukana liczba i wszystkie jej cyfry są parzyste. Wystarczy więc badać kwadraty liczb parzystych, które wypadają w przedziałach [2000, 3000), [4000, 5000), [6000, 7000) i [8000, 9000). Dla pierwszego przedziału wystarczy sprawdzić 46, 48, 52 i 54. Jednak żaden z ich kwadratów nie spełnia warunków zadania. W pozostałych przedziałach znajdujemy po jednym rozwiązaniu: 68^2 , 78^2 , 92^2 .

Zad. 6. 17 minut. [0 lub 1 pkt.]

Aby zminimalizować czas, najwolniejsi powinni iść razem i nie mogą iść jako pierwsza para. Niech numerem turysty będzie czas jego przejścia przez most. Kolejne przejścia mogą być np. takie: idą 1 i 2, wraca 1, idą 5 i 10, wraca 2, idą 1 i 2. Czas całkowity to $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$.

Runda II

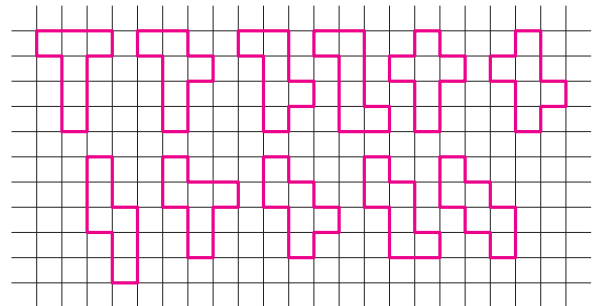
Zad. 1. B, C, D, A, E. [0 lub 1 pkt.]

A musi leżeć pomiędzy D i E. Teraz wystarczy zrobić rysunek.

Zad. 2. 119 zniczy. [za 119 – 2 pkt., za 118 – 1 pkt.]

Z odpadów powstanie 100 zniczy, ale przy ich produkcji nadal powstaną odpadki. $100 : 6 = 16$, reszty 4, a $20 : 6 = 3$, reszty 2, co oznacza, że łącznie nowych zniczy powstało $100 + 16 + 3 = 119$ i zostały jeszcze odpady z 2 zniczy.

Zad. 3. 11. [za 11 – 3 pkt., za 10 lub 12 – 2 pkt., za 9 lub 13 – 1 pkt., za inne 0 pkt.]



Zad. 4. 6 dziewcząt. [0 lub 1 pkt.]

$156 : 8 = 19,5$ i $156 : 10 = 15,6$, co oznacza, że liczba uczestników konkursu jest większa niż 15 i mniejsza od 20. Musi być też podzielna przez 3, więc może to być tylko 18. Dziewczęta stanowią $1/3$ tej liczby.

Zad. 5. 810. [0 lub 1 pkt.]

Iloraz liczby trzycyfrowej przez 45 może być najwyżej dwucyfrowy, więc cyfrą jednościaną napisanej liczby musi być 0. Mamy więc $\overline{ab0} : 45 = \overline{ba}$, czyli $100a + 10b = 450b + 45a$, co daje $55a = 440b$, czyli $a = 8b$, a ponieważ a i b są cyframi więc $b = 1$ i $a = 8$.

Zad. 6. Alicja-Hubert, Edward-Czesława. [0, 1 lub 2 pkt.]

Dane z zadania wystarczy wpisać do tabeli, w której górna połowa pola koduje małżeństwo, a dolna – taniec. Początkowy stan tabeli jest taki, jak na rysunku. Dalej wypełnia się ją niemal mechanicznie, analizując warunki zadania (i wpisując jak najwięcej minusów).

	A	B	C	D
E	-	+	-	-
F	-	-	-	-
G	-	-	-	-
H	-	-	-	-

Runda III

Zad. 1. Wnuka. [0 lub 1 pkt.]

–

Zad. 2. 17. [0 lub 1 pkt.]

Wprowadzając oczywiste oznaczenia, otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} 3(nd + nc) = gd + gc \\ 2(gc + nd) = gd + nc \end{cases}$$

Ponieważ $gd = gc + nc$, mamy stąd:

$$\begin{cases} 3nd + 2nc = 2gc \\ gc + 2nd = 2nc \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} nd/2 = nc/7 \\ nd = gc/5 \end{cases}$$

skąd widać, że nd musi być liczbą parzystą, więc gc dzieli się przez 10. $gc = 0$ dawałoby klasę bez uczniów, $gc = 10$ daje: $nd = 2$, $nc = 7$, $gd = 17$, czyli klasę 36-osobową, a dla większych wartości gc klasa byłaby zbyt liczna. Chłopców jest więc 17.

Zad. 3. 13, 28. [0, 1 lub 2 pkt.]

Najprościej (chyba?) wypisać liczby od 1 do 40 i skreślając „w kółko” co trzecią nieskreśloną, pozostawić dwie.

Zad. 4. (8, 5, 3), (7, 6, 3), (7, 5, 4), (6, 6, 4). [Po 1 pkt. za każdą odpowiedź. Za każdą niepoprawną –1 pkt. do zera.] Ciąg (P, J, G) jest nierosnący, przy czym $J > G$, P nie przekracza 8, $P + J$ nie przekracza 13, a $P + J + G = 16$. Wystarczy więc wypisać kolejne możliwości, zaczynając od $P = 8$, i zmniejszać liczby.

Zad. 5. 1881. [0 lub 1 pkt.]

Pierwszą (i ostatnią) cyfrą wyniku może być tylko 1 lub 2. Musi być on również podzielny przez 9 (jest sumą iloczynów wszystkich liczb jednocyfrowych przez 1, 10 lub 100). W grę wchodzi więc liczba 1881 i 2772. Każda z liczb Janka jest na pewno mniejsza od 1000, co najmniej dwie z nich – od 900, a co najmniej jedna od 800 („zużywane” kolejno największe cyfry setek), więc suma nie przekracza $1000 + 900 + 800 = 2700$. Zostaje zatem tylko liczba 1881.

Zad. 6. 39. [0 lub 1 pkt.]

Jeśli x jest początkową liczbą kobiet, to

$$\frac{51,25}{100} \leq \frac{x+1}{2x+1} < \frac{51,35}{100},$$

stąd otrzymujemy

$$18\frac{1}{54} < x \leq 19,5,$$

ale x jest całkowite, więc wynosi 19.

Runda IV

Zad. 1. Bartek 0,80 zł, Czesław 2,00 zł. [0 lub 1 pkt.]

Wartość całego posiłku to $2,80 \cdot 3 = 8,40$. Cena 1 cebularza to $8,40 : 7 = 1,20$. Każdy chłopiec zjadł $7 : 3 = 2\frac{1}{3}$ cebularza. Bartek powinien dostać $(3 - 2\frac{1}{3}) \cdot 1,20 = 0,80$ zł, a Czesław resztę.

Zad. 2. 11713. [0 lub 1 pkt.]

Dwucyfrową końcówką liczby jest 13, czyli początek powinien mieć sumę cyfr 9. Tworzy on zatem liczbę podzielną przez 9. Musi też dzielić się przez 13. Najmniejsza liczba o tych własnościach to $9 \cdot 13 = 117$.

Zad. 3. 61, 65, 68, 75, 100. [Po 1 pkt. za każdą odpowiedź.]

Mamy:

$$a \cdot b - 60 = \frac{a}{b} + 60, \quad \text{czyli} \quad ab = \frac{a}{b} + 120,$$

a ponieważ $\frac{a}{b}$ musi być liczbą naturalną, niech więc $a = k \cdot b$. Wobec tego mamy

$$k \cdot b^2 = k + 120, \quad \text{czyli} \quad b^2 = 1 + \frac{120}{k}.$$

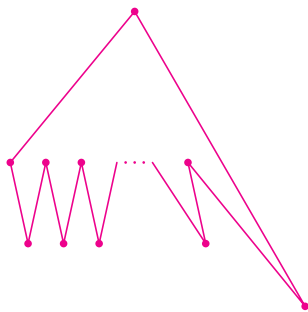
Zatem k jest dzielnikiem 120. Dzielniki 120, które powiększone o 1 są kwadratami to 3, 8, 15, 24 i 120, co daje $k \in \{40, 15, 8, 5, 1\}$. Dla każdego z tych przypadków otrzymujemy możliwy wynik Piotrka (równy $k + 60$).

Zad. 4. Zaczyna 40, kończy 13. [0, 1 lub 2 pkt.]

–

Zad. 5. 1002. [0 lub 1 pkt.]

Musi to być wielokąt wklęsły, jak na rysunku.



Zad. 6. 12. [0 lub 1 pkt.]

Ściany ostrosłupów zawierające tę samą krawędź sześcianu leżą w jednej płaszczyźnie. Powstaje dwunastościan rombowy.

Runda V

Zad. 1. Genowefę – Cezary, Barnabę – Eulalia. [0, 1 lub 2 pkt.]

Stany zakochania zakodujemy ciągami: CX_1D , AX_2Y_1H , BX_3Y_2G (każdy kocha osobę występującą w ciągu bezpośrednio po nim, X_i to jakieś dziewczyny (niekoniecznie różne), a Y_i to jacyś chłopcy (niekoniecznie różni).

Stąd i z warunków zadania widać, że X_1 to H albo G .

W pierwszym przypadku dawałoby to zależności AX_2CHD i BX_3Y_2G , więc Y_2 to A , co dawałoby ciąg X_4BX_3AGCHD , gdzie X_3 i X_4 to E i F , co wobec warunków zadania nie jest możliwe. Mamy zatem $X_1 = G$ i zależności: AX_2Y_1H , BX_3CGD , skąd teraz $Y_1 = B$, czyli $AX_2BHCGDX_4$, a dalej z treści zadania X_2 to nie F , więc E .

Zad. 2. 121, 484, 676. [0, 1, 2 lub 3 pkt.]

Kwadraty mogą kończyć się na 1, 4, 5, 6, 9, w grę wchodzi więc liczby postaci $1 \square 1$, $4 \square 4$, $5 \square 5$, $6 \square 6$, $9 \square 9$. Z zakończonych na 5 wystarczy sprawdzić 525 i 575 (muszą dzielić się przez 25). Zakończone na 4 i 6 muszą dzielić się przez 4 (kwadraty parzyste muszą być też podzielne przez 4). Wystarczy więc sprawdzić 404, 424, 444, 464, 484 oraz 616, 636, 656, 686. Podobnie zakończone na 1 i 9 muszą dać resztę 1 z dzielenia przez 4 – czyli sprawdzamy 121, 141, 161, 181 oraz 909, 929, 949, 969, 989. W sprawdzaniach można wykorzystać własność, że kwadraty przy dzieleniu przez 3 dają resztę 0 lub 1.

Zad. 3. BBABAAB. [Bez błędnie – 2 pkt., jedna pomyłka – 1 pkt, więcej pomyłek – 0 pkt.]

Litera stojąca na miejscu $2k - 1$ jest inna od litery następnej, a taka sama jak litera z miejsca k . Zatem litera nr 2001 jest taka jak z miejsca 1001, a ta z kolei taka jak litery z miejsc 501 i 251 oraz 126. Ta jest inna niż litera nr 125, a ta taka sama jak litery 65, 33, 17, 9, 5, 3, 2. Druga litera to B. Zatem B stoi też na miejscach 3, 5, 9, 17, 33, 65, 125, a na miejscach 126, 251, 501, 1001 i 2001 stoi A. Zatem litera nr 2002 to B. Litera nr 2003 jest taka jak litera na pozycji 1002, czyli B. Na miejscu 2004 stoi więc A. Litera nr 2005 jest taka jak litera nr 1003, a ta taka jak litera nr 502, którą jest B. Dalej na miejscu 2006 mamy A i kolejne dwie litery to po analogicznej analizie A i B.

Zad. 4. 799, 800, 801. [0 lub 1 pkt.]

Oznaczmy kolejne cyfry najmniejszej z tych liczb przez a , b , c . Gdyby kolejnymi liczbami były $ab(c+1)$ i $ab(c+2)$, sumami ich cyfr byłyby trzy kolejne liczby naturalne pomiędzy 1 a 27. Jak łatwo sprawdzić, wśród takich liczb

po wielokrotnościach piątki nigdy nie występują kolejne wielokrotności 4 i wielokrotności 3. Druga albo trzecia z szukanych liczb musi się więc kończyć zerem. Mamy więc dla nich następujące możliwości:

$$\overline{a(b+1)0} \text{ i } \overline{a(b+1)1} \quad (c=9, b < 9);$$

$$\overline{ab9} \text{ i } \overline{a(b+1)0} \quad (c=8, b < 9);$$

$$\overline{(a+1)00} \text{ i } \overline{(a+1)01} \quad (c=9, b=9, a < 9);$$

$$\overline{a99} \text{ i } \overline{(a+1)00} \quad (c=8, b=9, a < 9).$$

Uwzględniając teraz w każdym z tych przypadków warunki zadania, otrzymujemy rozwiązanie: $c = b = 9$, $a = 7$.

Zad. 5. Nieskończenie wiele. [0 lub 1 pkt.]

Dobre jest każde cięcie wzdłuż prostej przechodzącej przez środek prostokąta. Powstałe figury są wzajemnymi obrazami w symetrii środkowej względem środka prostokąta.

Zad. 6. Zero. [0 lub 1 pkt.]

Koń nie zostawił śladów, bo idzie przed plugiem i ślady zostały zaorane.

Runda VI

Zad. 1. 3323122113. [0 lub 1 pkt.]

Zad. 2. 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55. [0 lub 1 pkt.]

Najmniejsza suma siedmiu liczb nieparzystych to 49, zatem najmniejszy możliwy sześcian to 5^3 . Tu jednak szukany rozkład nie istnieje. Ale rozkład 7^3 da się już łatwo znaleźć.

Zad. 3. 45° lub 90° . [0, 1 lub 2 pkt.]

Rozważamy kolejno przypadki, gdy każda z trójścianych zawiera wysokość. Wtedy $1/3$ lub $2/3$ szukanego kąta to 30° .

Zad. 4. 12. [0 lub 1 pkt.]

Wybór 9 wierzchołków wyznacza jednoznacznie 3 odrzucone wierzchołki. Te punkty „rozbijają” dziewięcioelementowy zbiór wybranych wierzchołków na trzy podzbiory (niektóre mogą być puste, gdy niewybrane punkty są sąsiednimi wierzchołkami dwunastokąta). Zatem różnych dziewięciokątów jest tyle, ile różnych rozkładów liczby 9 na sumę trzech liczb naturalnych (nie uwzględniamy rozkładów różniących się kolejnością składników, bo dają wielokąty przystające). Mamy 12 rozkładów: $9 = 9 + 0 + 0 = 8 + 1 + 0 = 7 + 2 + 0 = 7 + 1 + 1 = 6 + 3 + 0 = 6 + 2 + 1 = 5 + 4 + 0 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$, więc istnieje 12 nieprzystających dziewięciokątów.

Zad. 5. 81. [0 lub 1 pkt.]

Cztery ustalone cyfry możemy wybrać dowolnie, a piąta jest wówczas jednoznacznie wyznaczona (dokładnie jedna z danych do dyspozycji cyfr da sumę cyfr podzielną przez trzy). Szukanych liczb jest więc tyle, ile 4-elementowych ciągów o wyrazach równych 1, 2 lub 3, czyli 3^4 .

Zad. 6. 405, 2025, 6075, 10125, 30375, 50625, 70875.

[Po 1 pkt. za każdą odpowiedź. Za każdą niepoprawną – 1 pkt, do zera.]

$1/81$ szukaney liczby to taka liczba naturalna x , że w zapisie liczby $9x$ występują wszystkie cyfry liczby x . Przez skreślenie ostatniej cyfry liczby naturalnej otrzymuje się najwyżej jej $1/10$, więc ostatnia cyfra liczby x jest zarazem ostatnią cyfrą $9x$. Ostatnią cyfrą x musi być więc 5. Jeśli $x = 5$, to $9x = 45$ i $81x = 405$, i rzeczywiście 405 jest jednym z rozwiązań. Porównujemy teraz zapisy liczb x i $9x$ oraz w razie potrzeby również $81x$ dla $x = 15, 25, 35, \dots, 95$ i widać, że rozwiązaniami są również 2025, 6075, oraz że ewentualnych dalszych rozwiązań należy szukać wśród liczb kończących się na 05, 25, 75.

Rocznicowy Nobel

W stulecie zapostulowania korpuskularnej natury światła Komitet Noblowski nagrodził Roya J. Glaubera za *kwantowo-mechaniczną teorię koherencji optycznej* oraz Johna L. Halla i Theodora W. Hänscha za *precyzyjną spektroskopię laserową i technikę grzebieńa częstości*.

Wzrok jest najintensywniej używanym zmysłem człowieka. Oświecenie, oświecony, oświata – to tylko kilka słów świadczących o naszych pozytywnych skojarzeniach związanych ze światłem. Ci, których pasjonuje rozumowe poznawanie świata, mają jedno pozytywne skojarzenie więcej: to przecież rozważania nad naturą światła doprowadziły do najgłębszej rewolucji w nauce – powstania teorii kwantowej.

Często, zwłaszcza we współczesnej „nowoczesnej” szkole, podkreśla się tzw. dualizm korpuskularno-falowy. Rzeczywiście, możliwość opisywania światła na dwa (pozornie sprzeczne) sposoby, raz jako klasycznej (niekwantowej) fali elektromagnetycznej, a raz jako strumienia fotonów, to jakby trochę za dużo.

Winne jest intelektualne lenistwo fizyków, którzy teorię Maxwella przez lata uważali nie tylko za bardzo udaną, ale również wystarczającą do opisu światła. Mechanika kwantowa bardzo szybko zostawiła ten problem Maxwellowi, kontentując się uwzględnieniem oddziaływania pojedynczych fotonów z materią.

Elektrodynamika kwantowa, pomnikowe osiągnięcie teorii kwantowej, tylko pozornie zastąpiła elektrodynamikę Maxwella. Jest to teoria opisująca oddziaływanie cząstek obdarzonych ładunkiem elektrycznym z polem elektromagnetycznym. W teorii tej liczba cząstek nie jest ustalona, gdyż para cząstka-antycząstka może anihilować w foton(y) i odwrotnie. Kreacja pary cząstka-antycząstka możliwa jest jednak dopiero wtedy, gdy energia opisywanego układu odpowiada masie takiej pary. Dlatego metody elektrodynamiki kwantowej znalazły zastosowanie do opisu oddziaływań elektromagnetycznych wysokich energii. Wszystkim wydawało się, że efekty opisywane przez elektrodynamikę kwantową nie mają znaczenia w optyce.

Okazuje się, że był to pogląd błędny. Roy J. Glauber był tym, który jako pierwszy to wykazał. Można powiedzieć, że jego prace z 1963 roku na temat kwantowej koherencji zostały sprowokowane błędnymi przewidywaniami dotyczącymi światła generowanego przez dopiero co wynalezione lasery.

Osiągnięciem, które przypisywano kwantowej naturze światła, był interferometryczny pomiar rozmiarów gwiazd opisany i przeprowadzony przez Hanbury Browna i Twissa w latach 1954–55. Eksperyment polegał na pomiarze korelacji między dwoma detektorami w zależności od różnicy dróg optycznych. Obserwowano wzmocnienie o czynnik dwa dla zerowej różnicy, co było interpretowane jako dowód na to, że fotony w dwóch koherentnych strumieniach światła są skorelowane. Pojęcie koherencji światła nie było jednak precyzyjnie zdefiniowane. Światło uznawano za koherentne, jeżeli obserwowano efekty interferencyjne.

Żeby je zaobserwować dla chaotycznych źródeł termicznych (innych nie było), stosowano monochromatory i kolimatory, których najprostszą wersją jest wąska szczelina wstawiona w wiązkę rozszczepioną przez pryzmat.

Światło generowane przez laser, jako wywołane przez wymuszoną emisję, jest w naturalny sposób koherentne, ponieważ jest monochromatyczne i zgodne w fazie. Spodziewano się więc gigantycznych efektów przy obserwacji skorelowanej detekcji takiego światła, których ... nie zaobserwowano.

Roy J. Glauber pokazał, że oczekiwania te były spowodowane głębokim niezrozumieniem natury światła. Mianowicie światło jest efektem kwantowym i tylko w szczególnych przypadkach opis klasyczny daje poprawne wyniki. Proces detekcji w eksperymentach badających korelację fotonów musi być opisywany w języku elektrodynamiki kwantowej, czyli za pomocą operatorów kreacji i anihilacji fotonów. Tylko w ten sposób można prawidłowo uwzględnić fakt, że stan układu po rejestracji jednego fotonu jest istotnie różny od stanu przed tą rejestracją: ma o jeden foton mniej. Teoriopolowy formalizm posługuje się kwantowym polem, którego wzbudzeniami są fotony. Usuwa jakąkolwiek korpuskularno-falową sprzeczność.

Prace Glaubera z 1963 roku ujmują prostotą matematycznej precyzji opisu i zadziwiają możliwością (obecnie doskonale potwierdzoną doświadczalnie), że opis ten może odpowiadać rzeczywistości. Ich czytanie można potraktować jako kontemplację zawsze zaskakującej matematyczności przyrody. Niestety, ta ujmująca prostota wyrażona jest w abstrakcyjnym języku kwantowej teorii pola, który nie jest zrozumiały dla osób niemających akademickiego wykształcenia matematycznego. Jeżeli jednak uznamy, że warto uczyć się języków klasycznych, by mieć przyjemność z czytania starożytnych autorów w oryginale, to warto studiować, aby móc przeczytać i zrozumieć prace Glaubera.

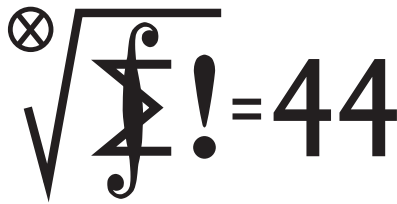
W pracach tych pojawiają się dwie koncepcje: stanów koherentnych i definicji samej koherencji. Koherencja danego stanu n fotonów jest z definicji rzędu $j \leq n$, jeżeli wyrażenie opisujące korelację j fotonów da się zapisać jako iloczyn odpowiednich wyrażeń dla każdego fotonu z osobna. Koherentny stan n fotonów z definicji wykazuje koherencję do rzędu n włącznie.

Idealny laser jest źródłem koherentnych stanów pola. Okazuje się, że dla takich stanów nie występuje wzmocnienie obserwowane przez Hanbury Browna i Twissa. Dla odległej gwiazdy wzmocnienie to jest wynikiem gaussowskiego rozkładu jej światła. Światło to wykazuje koherencję pierwszego rzędu, ale na tym koniec. Nie można w żaden sposób uczynić go koherentnym drugiego rzędu. Funkcja korelacji drugiego rzędu okazuje się sumą dwóch składników i stąd bierze się wzmocnienie o czynnik dwa przy pomiarze takiej korelacji.

Prace Glaubera zapoczątkowały optykę kwantową. O tym, co jej i spektroskopii laserowej zawdzięczamy, napiszemy za miesiąc.

Piotr ZALEWSKI

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

28 II 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
499 ($WT = 1,02$) i **500** ($WT = 3,12$)
z numeru 4/2005

Jerzy Cisło	– Wrocław	48,04
Zbigniew		
Sewartowski	– Wieliczka	43,95
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	40,93
Marian Kasperski	– Warszawa	36,86

Jerzy Cisło swoją czwartą czterdziestoczwartą kończy w świetnym stylu – efektownym rozwiązaniem zadania 500: znalazł *jak najmniejszą* liczbę itd.; wyznaczył **minimalną**.

Zapraszamy do lektury omówienia sezonu Ligi w numerze 2/2006.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 511, 512

Redaguje *Marcin E. KUCZMA*

511. Okręgi k_1, k_2, k_3 (na płaszczyźnie) przecinają się parami:

$$k_2 \cap k_3 = \{K, X\}, \quad k_3 \cap k_1 = \{L, Y\}, \quad k_1 \cap k_2 = \{M, Z\}.$$

Środek każdego okręgu leży na zewnątrz dwóch pozostałych okręgów. Ponadto istnieje okrąg przechodzący przez punkty K, L, M oraz środki okręgów k_i . Udowodnić, że jeśli K, L, M są trzema różnymi punktami, to punkty X, Y, Z pokrywają się.

512. Dana jest liczba całkowita dodatnia n . Wykazać, że równanie

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{n}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych x, y wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez sześcian liczby całkowitej większej od 1.

Zadanie 512 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

28 II 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

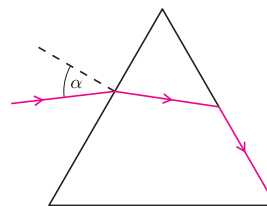
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
400 ($WT = 2,90$) i **401** ($WT = 3,00$)
z numeru 6/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	41,14
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	30,22
Mateusz Łącki	– Kraków	28,77
Konrad Kapcia	– Częstochowa	25,19
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	17,43
Tomasz Tkocz	– Rybnik	17,37

Zadania z fizyki nr 408, 409

Redaguje *Jerzy B. BROJAN*

408. Przez pryzmat, którego przekrój ma kształt trójkąta równobocznego, biegnie promień światła, wybiegając z niego stycznie do ścianki (rys.). Ile wynosi współczynnik załamania szkła, jeśli kąt α wynosi 35° ?



409. Ciężar o masie $m = 10$ kg wisi na dwóch cienkich i jednakowo obciążonych drutach o długości $l = 20$ m, które początkowo były pionowe i odległe od siebie o $d = 20$ cm. Przez druty przepuszczono prąd o jednakowym natężeniu i zwrocie. Przy jakim natężeniu prądu druty się zetkną? Dopuszczalne są przybliżenia odpowiednie dla podanych wartości liczbowych oraz obliczenia numeryczne.



Rozwiązanie zadania M 1117.

Liczbę $111 \dots 1222 \dots 2$ (n jedynek i n dwójek) można zapisać jako:

$$\frac{1}{9}(10^n - 1) \cdot 10^n + \frac{2}{9}(10^n - 1) = \left(\frac{10^n - 1}{3}\right) \cdot \left(\frac{10^n + 2}{3}\right).$$

Pozostaje zauważyć, że oba czynniki po prawej stronie to liczby naturalne różniące się o 1.



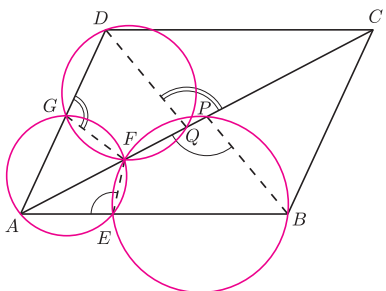
Rozwiązanie zadania M 1119.

Na przekątnej AC wybierzmy takie punkty P i Q , aby

$$(*) \quad \sphericalangle APB = \sphericalangle AEF = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CQD = \sphericalangle DGF = \beta.$$

Ponieważ na czworokącie $AEFG$ można opisać okrąg, więc $\alpha = \beta$, skąd wynika, że proste BP i DQ są równoległe. Stąd $AQ = CP$. Ponadto z równości $(*)$ wnioskujemy, że punkty B, E, F, P , jak również punkty D, G, F, Q , leżą na jednym okręgu. Zatem

$$AB \cdot AE + AD \cdot AG = AP \cdot AF + AQ \cdot AF = (AP + CP) \cdot AF = AC \cdot AF.$$



Patrz w niebo



Wszystko wskazuje na to, że globów, na których występuje woda, jest w Układzie Słonecznym jeszcze więcej, niż do niedawna się zdawało. Do grupy ciał, w skład której wchodziły Ziemia, Mars i Europa, dołączył największy satelita Jowisza – Ganimedes. W ogóle przypomina on bardziej planetę, gdyż jest większy od Merkurego, ma własne pole magnetyczne i geologicznie aktywną powierzchnię. Okazuje się, że pod tą powierzchnią (zbudowaną głównie z lodu) najprawdopodobniej schowany jest ocean. Stereoskopowe obrazy utworzone ze zdjęć wykonanych przez sondy Galileo i Voyagery ukazały głębokie doliny z pochodzącymi z odległej przeszłości śladami obecności tam wody.

Doliny te, o głębokości do 1 km poniżej otaczającego je „gruntu”, widać jako względnie gładkie pasma między białymi obszarami silnie pokruszonego lodu. Nasuwa się tu wniosek, że pasma te były w pierw korytami rzek, w których woda następnie zamarzała. Widać, że woda opływała rozmaite wyżej położone miejsca lub musiała zatrzymywać się, tworząc zatoki i półwyspy. A to, że woda ta musi pochodzić z głębi globu, z oceanu istniejącego do dziś, wynika z obserwacji wykonanych przez sondę Galileo. Jej czujniki, gdy w maju 2000 roku przelatywała nad równikowym obszarem Ganimesesa, zarejestrowały pewne szczegóły pola magnetycznego satelity, których nie da się wytłumaczyć ani własnościami jego globalnego pola, ani nawet oddziaływaniem potężnego pola magnetycznego pobliskiego Jowisza. Grupa astronomów z University of California w Los Angeles twierdzi, że czujniki wykryły fluktuacje pola wywołane przez prądy płynące w słonej przewodzącej wodzie znajdującej się około 170 km pod powierzchnią satelity. Według tych badaczy nie może być przypadkiem, że na tej właśnie głębokości przewidywane ciśnienie wystarcza do stopienia lodu.

Tomasz KWAST

Grudzień

W grudniowy wieczór nad południowym horyzontem widać część jednego z najdłuższych gwiazdozbiorów, Erydanu (dawniej Rzeki Erydan). Jest to właściwie gwiazdozbiór nieba południowego; jego najjaśniejsza gwiazda, Achernar, jedna z najjaśniejszych gwiazd nieba (0,47 mag), jest w Polsce niewidoczna. Widoczny fragment gwiazdozbioru nie zawiera szczególnie jasnych gwiazd, ale jedną z nich, epsilon, podejrzewa się o posiadanie układu planetarnego. Gwiazda ta bowiem obraca się bardzo powoli, co może sugerować, że przekazała swój moment pędu planetom. W dodatku jej odległość wynosi zaledwie 3,3 pc, co, oczywiście, stanowi pretekst do fantazjowania na temat możliwości wyprawy kosmicznej.

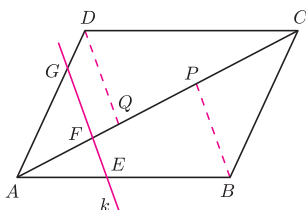
W przeciwieństwie do sytuacji z listopada Merkury 12 XII osiągnie największą odległość od Słońca, ale na zachód od niego, czyli można go szukać na niebie przed wschodem Słońca. Wenus jest na granicy Strzelca i Koziorożca i 9 XII osiągnie największą jasność. Mars jest w Baranie, wieczorem widać go wysoko na niebie, a zachodzi przed wschodem Słońca. Jowisz jest w Wadze i wschodzi na krótko przed wschodem Słońca. Saturn jest w Raku i widać go przez całą noc. Nów Księżyca wypada 1 XII, pełnia 15 XII i nów po raz drugi 31 XII. Księżyc zakryje Marsa 12 XII (co zobaczą mieszkańcy Syberii), Spikę 25 XII (to z kolei zobaczą mieszkańcy Północnej i Środkowej Ameryki) oraz – jak było co miesiąc w odchodzącym roku – Antaresa 29 XII, ale to zjawisko będzie widać w Indiach, Indonezji, Australii i na Samoa. W grudniu spodziewane są dwa roje meteorów: umiarkowanie obfity rój Geminidów około 12 XII i skromny Ursydów około 22 XII. I wreszcie 21 XII nastąpi przesilenie zimowe, czyli odtąd dni zaczną się wydłużać. Szczęśliwego Nowego Roku!

T. K.



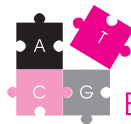
Rozwiązanie zadania M 1118.

Oznaczmy odpowiednio przez P i Q rzuty równoległe punktów B i D na prostą AC w kierunku prostej k .



Wówczas $AQ = CP$ oraz

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AG} = \frac{AP}{AF} + \frac{AQ}{AF} = \frac{AP + CP}{AF} = \frac{AC}{AF}$$



Wszyscy jesteśmy mutantami

Jednym z niezwykle ważnych odkryć związanych z sekwencjonowaniem ludzkiego genomu jest to, że nasze genomy różnią się. Średnio dwie dowolne niespokrewnione osoby różnią się jednym na 1200 nukleotydów.

Niedawno okazało się również, że różnimy się między sobą również obecnością lub brakiem dużych fragmentów chromosomów. Niektórzy mają mniej, inni więcej fragmentów o długości 300–460 tysięcy par zasad, zawierających wiele genów. Podobnie jak w przypadku mutacji punktowych, zmiany pojawiają się i rozpowszechniają w populacji.

Jak często zdarzają się takie duże zmiany? Można oszacować ich częstość, posługując się danymi dotyczącymi jednego, konkretnego obszaru.

Na chromosomie X znajduje się gen białka dystrofiny. To największy ludzki gen, zajmuje aż 2,5 miliona par zasad (ze względu na obecność intronów rzeczywista sekwencja kodująca to jedynie 14 tysięcy par zasad). „Wypadnięcie” lub podwojenie (delecja lub duplikacja) fragmentu genu dystrofiny i brak prawidłowego białka powodują ciężką chorobę, dystrofię mięśniową Duchenne’a. Ponieważ kobiety mają 2 kopie chromosomu X, w tym jedną od ojca, chorują tylko mężczyźni, a one są nosicielkami. Do niedawna choroba ta zupełnie wykluczała możliwość bycia ojcem.

Wydaje się, że dystrofia mięśniowa występuje ze stałą częstością. Ponieważ chorzy mężczyźni nie przekazują wadliwego genu dalej, można przyjąć, że częstość pojawiania się nowych przypadków zmutowanego genu jest taka sama, jak częstość usuwania zmutowanego genu z populacji (czyli występowania choroby). Gdy pojawi się mutacja w genie dystrofiny, w 2/3 przypadków chromosom X, zawierający wadliwy gen, należy do kobiety (ponieważ każda kobieta ma 2 chromosomy X, mężczyzna tylko 1), a w 1/3 przypadków – do mężczyzny i w tym przypadku spowoduje chorobę. W takim razie częstość pojawiania się nowych, zmutowanych alleli to 1/3 częstości występowania choroby. Dystrofia mięśniowa występuje u ok. 1 na 3,5 tys. noworodków płci męskiej, zatem częstość pojawiających się od „nowa” mutacji to około 1:10 500 (dla biologa – 1:10 000) osób. Wśród mutacji powodujących dystrofię około 65% to delecje, a 9% – duplikacje fragmentu genu; zatem delecja w genie dystrofiny przydarza się z częstością około 1:15 000, a duplikacja – 1:100 000.

Cały, diploidalny, genom ludzki jest 2000 razy większy od genu dystrofiny. Przy założeniu jednakowej częstości

duplikacji i delecji w całym genomie daje to jakąś nową delecję u 1 na 8 noworodków, a duplikację u jednego na 50.

Podobne oszacowania można przeprowadzić dla mutacji punktowych – polegających na zamianie, wypadnięciu lub wstawieniu pojedynczego nukleotydu.

Częstość takich mutacji w przeliczeniu na 1 parę zasad to około $2 \cdot 10^{-8}$, co dla całego diploidalnego genomu (6 mld par zasad) daje około 120 mutacji punktowych. Oznacza to, że genom każdego z nas to składanka genomów naszych rodziców, zmieniona średnio o te 120 nukleotydów i ewentualne pojedyncze większe mutacje.

Jak dużo z tych mutacji wpływa faktycznie na nasz organizm? Na szczęście niewiele. Biorąc pod uwagę, że jedynie około 2% sekwencji koduje białka i obszary regulujące ich wyrażanie, średnio jedynie 2,4 zmiany punktowe powinny trafić w te ważne miejsca; nawet wtedy niekoniecznie muszą zaburzać funkcjonowanie kodowanych białek. Duże zmiany obejmują większe obszary, często zawierające więcej niż jeden gen i ich wpływ na funkcjonowanie organizmu może być większy – ale, jak widać, ich częstość jest niższa o rząd wielkości.

Co istotne, dla większości genów jedna prawidłowa kopia wystarcza do wytworzenia odpowiedniej ilości prawidłowego białka – w związku z tym większość chorób dziedziczy się w sposób recesywny, wymagający dwóch nieprawidłowych wersji genu. Aby uświadomić sobie jak to ważne, pomyślmy, że przecież każdy z nas, oprócz tego, że ma własne nowinki genetyczne, dziedziczy mutacje po swoich rodzicach, dziadkach itd. Każdy z nas jest nosicielem, występujących na szczęście w pojedynkę, dziesiątek mutacji, które w parze z drugą, podobną mutacją powodują ciężkie choroby. Ponieważ ludzki genom jest ogromny – szansa na spotkanie drugiej osoby z taką mutacją jest niewielka, natomiast dramatycznie rośnie w rodzinie – genomy rodziców i dzieci są w 1/2 identyczne, rodzeństwa średnio też w 1/2, dzieci i dziadków w 1/4, rodzeństwa ciotecznego w 1/8. Stąd często występujące choroby genetyczne u dzieci ze związków kazirodzycznych, a być może i zakaz takich związków w większości kultur.

Wszyscy jesteśmy mutantami. Na szczęście istnieje rekombinacja genów – podczas wytwarzania plemników i komórek jajowych chromosomy naszych rodziców wymieniają się fragmentami, a spośród wielu możliwych wariantów tej układanki zaledwie jedna kombinacja da początek nowemu człowiekowi. Każda rekombinacja to okazja do pozbycia się mutacji.

Anna LORENC

Współpraca: Jarek BRYK

Ten odcinek kończy serię kącików biologicznych w *Delcie*. Redakcja dziękuje ich Autorom za inwencję i pracę włożoną w ich powstanie.