



## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (378)

Komputery we współczesnej  
astronomii

*Tomasz Mizerski*

str. 1

Ile jest zajączków?

*Grzegorz Derfel*

str. 4

Zadania

str. 7

### Mała Delta:

Dynamo we wnętrzu Ziemi

*Mikołaj Korzyński*

str. 8

Dookoła nierówności Hilberta

*Krzysztof Oleszkiewicz*

str.10

O metodach fizycznych

w geometrii

*Piotr Achinger*

str.12

Aktualności

str.14

Klub 44

str.15

Patrz w niebo

str.16

Listopad

str.16

Kącik biologiczny

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw  
naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa  
Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek  
rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichocki, dr Krzysztof Ciesielski –  
wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj –  
przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr  
Goldstein, doc. dr Tadeusz Jarzębowski, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński,  
prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab.  
Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski,  
dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda,  
prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk,  
prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krystyna Kordos – sekr. red.,  
Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka,  
Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red.  
nacz. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl), tel.: (22) 55-44-545.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej Oddział PAP S.A. w Warszawie,  
ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. (22) 663-87-52, (22) 663-11-46)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres  
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena  
jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie  
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej  
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS  
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe  
„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty +  
rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane  
od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.  
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto:  
Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela  
„RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana  
Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax:  
5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną  
do 5 XII – na I kwartał roku następnego,  
do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,  
do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,  
do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

MiniMaraton Matematyczny



## OLIMPIADA

## errata

W tekście zadania 6 zawodów pierwszego stopnia LVII Olimpiady Matematycznej (patrz np. *Delta* 9/2005, str. vii) jest błąd.

W trzecim wierszu tekstu zamiast

odcinki  $AB$  i  $BC$

powinno być

odcinki  $AC$  i  $BC$ .

Za omyłkę przepraszamy.

*Komitet Główny OM*

\* Obserwatorium Astronomiczne  
Uniwersytetu Warszawskiego

Komputery zajmują we współczesnej astronomii bardzo ważne miejsce. Można nawet śmiało powiedzieć, że nowoczesna astronomia nie mogłaby istnieć bez komputerów. Sterują one pracą teleskopów, automatycznie zbierając i analizując dane, obliczają położenia obiektów w Układzie Słonecznym, umożliwiają przeprowadzanie złożonych symulacji numerycznych oraz skomplikowanych obliczeń teoretycznych. Tylko dzięki nim możliwe są loty kosmiczne, a więc również bezpośrednia eksploracja Kosmosu. Już od jakiegoś czasu komputery stały się codziennym narzędziem pracy praktycznie wszystkich astronomów. Warto zaznaczyć, że przydatność komputerów w astrofizyce wynika nie tylko z możliwości wykorzystywania ich procesorów i pamięci RAM do prowadzenia różnego rodzaju obliczeń, ale także z faktu, że bardzo pojemne dyski twarde współczesnych komputerów stwarzają ogromne możliwości archiwizacji danych pomiarowych i uzyskanych wyników. Nigdy wcześniej astronomowie nie dysponowali takimi możliwościami. Niektóre zagadnienia zostały rozwiązane dopiero po masowym wprowadzeniu komputerów do placówek astronomicznych. Przykładem może tu być nowoczesna kosmologia, która w większości opiera się na wynikach pracy komputerów.

Rola komputerów w astrofizyce jest szczególnie dobrze widoczna w przypadku masowych programów obserwacyjnych. Przykładami takich programów są nasze rodzime projekty OGLE i ASAS, jak również międzynarodowy projekt MACHO. OGLE (skrót od *Optical Gravitational Lensing Experiment*) polega na przeglądaniu pewnych obszarów nieba, na przykład centralnego zgrubienia Galaktyki i Obłoków Magellana, w celu wykrycia jak największej liczby zjawisk mikrosoczewkowania grawitacyjnego. Nazwa mikrosoczewkowanie grawitacyjne została wprowadzona do fizyki w celu wyróżnienia pewnej klasy zjawisk soczewkowania grawitacyjnego.

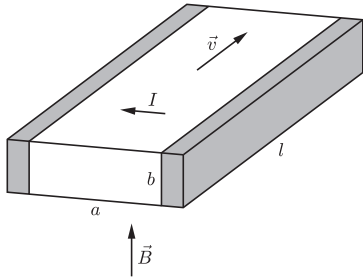
W klasycznym soczewkowaniu grawitacyjnym obserwowany obiekt, na ogół odległa galaktyka, widoczny jest w postaci kilku obrazów, których rozmieszczenie na niebie zależy od geometrii problemu. Przykładem takiego zjawiska może być soczewka Huchry, która także jest obserwowana przez zespół OGLE. Podczas mikrosoczewkowania grawitacyjnego obiektem soczewkowanym jest na ogół pojedyncza gwiazda, nie mamy także do czynienia z serią oddzielnych obrazów, a raczej ze wzmocnieniem strumienia promieniowania docierającego od obserwowanego obiektu do obserwatora. Kolejną wyraźną różnicą jest czas trwania zjawiska. W przypadku mikrosoczewkowania jest on rzędu dni, tygodni lub miesięcy, tak więc jak na zjawisko astronomiczne trwa ono bardzo krótko. Jest tak dlatego, że zaistnienie takiego zjawiska wymaga odpowiedniej konfiguracji geometrycznej trzech obiektów, a więc Ziemi, soczewkowanej gwiazdy oraz niewidocznej masy odgrywającej rolę soczewki.

Zarówno soczewkowana gwiazda, jak i niewidoczny obiekt soczewkujący mają na ogół dość duże prędkości względem Ziemi przy stosunkowo małych odległościach. Skutkuje to szybką zmianą wzajemnego położenia obiektów i sprawia, że okoliczności sprzyjające zaobserwowaniu zjawiska mikrosoczewkowania trwają krótko. Z uwagi na fakt, że jednym z ważnych parametrów jest tu masa niewidocznego obiektu soczewkującego, obserwowanie zjawisk mikrosoczewkowania i ich analiza statystyczna mogą dostarczać informacji na temat rozkładu części ciemnej materii w Galaktyce – obiektów małych, masywnych, ale niewidocznych, które dają o sobie znać jedynie poprzez wzmocnianie światła odległych gwiazd. Z powodu względnej rzadkości występowania tego zjawiska w celu wykrycia znaczącej ilości przypadków należy w sposób ciągły prowadzić obserwacje rozległych obszarów nieba. Podczas całego procesu analizowane są miliony gwiazd. Oczywiście trudno sobie wyobrazić funkcjonowanie projektu takiego jak OGLE bez nowoczesnych komputerów. To samo dotyczy również innych wspomnianych wyżej projektów, zwłaszcza projektu ASAS (*All Sky Automated Survey*). ASAS, w przeciwieństwie



### Rozwiązanie zadania F 655.

Niech  $\sigma$  oznacza przewodność właściwą płynu,  $a$ ,  $b$  i  $l$  rozmiary pompy.



Opór elektryczny między przewodzącymi ściankami wynosi

$$R = \frac{a}{\sigma bl}$$

Na skutek ruchu przewodnika wytwarza się w nim siła elektromotoryczna równa  $Bva$ , więc z prawa Ohma natężenie prądu między ściankami wynosi

$$I = \frac{U - vBa}{R} = \frac{\sigma lbU}{a} - \sigma l bv B$$

Siła działająca na całą objętość płynu jest więc równa

$$F = BIa = \sigma lbUB - \sigma labvB^2$$

a skuteczna moc

$$P_1 = Fv = \sigma labB^2 \left( \frac{U}{aB} - v \right) v$$

$P_1$  jest funkcją kwadratową prędkości i dla

$$v = \frac{U}{2aB}$$

przyjmuje wartość maksymalną

$$P_{\max} = UI = \frac{\sigma lbU^2}{4a}$$

Natężenie prądu  $I$  wynosi w tej sytuacji

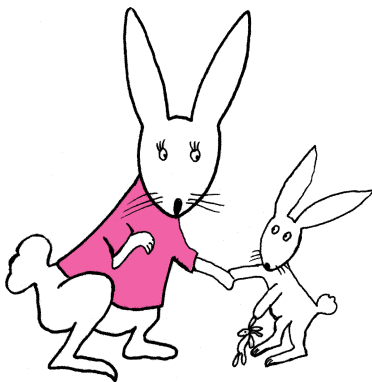
$$\frac{\sigma lbU}{2a}$$

a moc pobierana ze źródła prądu

$$P_2 = UI = \frac{\sigma lbU^2}{2a}$$

Sprawność urządzenia to

$$\eta = \frac{P_{\max}}{P_2} = \frac{1}{2}$$



do OGLE, wykorzystuje znacznie mniejsze, a w związku z tym także „szybsze” teleskopy. To pozwala temu projektowi przeglądać bardzo duże obszary nieba, a także analizować gwiazdy jasne, takie, które są zdecydowanie zbyt jasne dla dużego i czułego teleskopu OGLE. W przypadku OGLE praktycznie cały proces pozyskiwania danych jest zautomatyzowany i sterowany przez komputer, który naprowadza i odpowiednio ustawia teleskop, pobiera obraz w postaci cyfrowej, a następnie poddaje go obróbce, tworząc bazy danych. Komputer na bieżąco analizuje dane na temat dziesiątek tysięcy gwiazd i potrafi natychmiast wykryć i zareagować na charakterystyczne pojaśnienie obiektu, które w wyniku późniejszej analizy może okazać się przejawem mikrosoczewkowania. Komputer, pobierając i przetwarzając nowe obrazy, bezustannie powiększa bazy danych na temat wszystkich obiektów znajdujących się w danym obszarze nieba. Wielkości tych baz danych są rzędu terabajtów. Bez archiwizacyjnych możliwości, jakie dają komputery, tworzenie takich baz byłoby niemożliwe. Poza tym takie bazy danych zawierają ogromną ilość ciekawych informacji zupełnie niezwiązanych ze zjawiskiem mikrosoczewkowania grawitacyjnego, na przykład dane na temat setek tysięcy różnego rodzaju gwiazd zmiennych, innych układów planetarnych, a nawet kwazarów i supernowych. Analiza takich danych jest również przeprowadzana za pomocą komputera. Bez tej pomocy żaden zespół ludzi nie byłby, w stanie wykonać tego typu pracy.

Bardzo istotnym czynnikiem było także wprowadzenie do astrofizyki obserwacyjnej detektorów CCD, które wyparły klisze fotograficzne. Znacznie większa czułość tych elektronicznych urządzeń pozwala na osiągnięcie znacznie wyższej dokładności pomiarów. Detektory CCD są także znacznie wydajniejsze i umożliwiają znacznie szybszą pracę. Naukowcy nie muszą już czekać na wywołanie kliszy, dane w postaci cyfrowej są od razu przesyłane do komputera, gdzie podlegają natychmiastowej analizie i archiwizacji.

Dzięki elektronicie, czyli duetowi komputer plus CCD, możliwe stało się powstanie tak zwanych Systemów Wczesnego Ostrzegania. Ich istota jest bardzo prosta. Skoro zautomatyzowany teleskop sterowany przez komputer jest w stanie na bieżąco redukować i analizować zbierane dane, to można go zaprogramować w taki sposób, aby sam identyfikował i koncentrował się na interesujących zjawiskach. O tego typu procesie wspomnieliśmy już wcześniej – podczas przeglądu nieba komputer potrafi w czasie rzeczywistym wykrywać zjawiska mikrosoczewkowania grawitacyjnego, nawet w bardzo wczesnym stadium. Jeżeli taki przypadek ma miejsce, komputer przede wszystkim informuje o tym obserwatora (stąd nazwa System Wczesnego Ostrzegania) i utrzymuje teleskop na danym obiekcie. Zapewnia to ciągłe zbieranie danych w najbardziej interesującej fazie zjawiska. Oczywiście, taki system nie jest doskonały i niejednokrotnie zdarzają się fałszywe alarmy. Poza tym kontynuowanie obserwacji może być niemożliwe z zupełnie innych, obiektywnych powodów. Dany obiekt może, na przykład, po prostu przestać być dobrze widoczny z miejsca, gdzie dokonywane są obserwacje.

Dochodzimy do momentu, w którym bardzo istotna staje się współpraca zespołów astronomów z różnych ośrodków rozsianych po całej Ziemi. Jeżeli ograniczymy się do pomiarów dokonywanych z powierzchni Ziemi, to tylko taka kooperacja umożliwi ciągłe, całodobowe zbieranie danych. Przykładem takiej współpracy jest zespół WET (*Whole Earth Telescope*), który koncentruje się głównie na pulsujących białych karłach i gwiazdach pulsujących typu  $\delta$  Scuti. W gwiazdach tego rodzaju wzbudzonych jest wiele modów oscylacji, a ich częstotliwości są rozmaite. Całodobowe obserwacje są w tym przypadku niezbędne do przeprowadzenia analizy fourierowskiej krzywych zmian blasku i identyfikacji poszczególnych modów. Problemy z Systemami Wczesnego Ostrzegania nie zmieniają jednak faktu, że wprowadzenie takiego systemu w projekcie OGLE wydatnie zwiększyło liczbę odkrywanych co roku przypadków mikrosoczewkowania. Wpłynęło to także na samą jakość danych.

Lepsze obsadzenie punktami pomiarowymi krzywej zmian blasku mikrosoczewki czyni ją znacznie bardziej przydatną do analizy i modelowania teoretycznego. Systemy Wczesnego Ostrzegania są używane także przy poszukiwaniu zupełnie innych obiektów i zjawisk, na przykład tranzytów planetarnych, gwiazd nowych, supernowych czy też tak zwanych rozbłysków gamma (*Gamma Ray Bursts*). W każdym z tych przypadków ich rola jest trudna do przecenienia, gdyż umożliwiają natychmiastową reakcję obserwatorów i koncentrację na poszukiwanym zjawisku, które trwa na ogół krótko. Zauważmy, że to właśnie zespół OGLE przedstawił nową metodę poszukiwania planet wokół innych gwiazd, tak zwaną metodę tranzytów planetarnych. Metoda ta, mierząca pociemnienie gwiazdy spowodowane przejściem jej planety na tle jej tarczy, pozwala wykrywać bardzo różnorodne planety, nie tylko duże i masywne.

Inną dziedziną astrofizyki, w której komputery stały się codziennym narzędziem pracy setek naukowców, jest mechanika nieba. Badając dokładnie ruch obiektów w Układzie Słonecznym, natykamy się często na problem niemożności analitycznego rozwiązania równań ruchu badanego obiektu. Jeżeli w równaniach tych uwzględnimy oddziaływania grawitacyjne wielu ciał, nasz Układ da się opisać jedynie w przybliżeniu, metodą obliczeń numerycznych. Wszelkie prognozy dotyczące przyszłych położenia różnych obiektów w Układzie Słonecznym bazują na wynikach obliczeń komputerowych. W mniej skomplikowanych przypadkach, dokonując odpowiednich przybliżeń, można oczywiście otrzymać wyniki z dość dobrą dokładnością bez użycia komputera, ale powoduje to drastyczny wzrost czasu obliczeń. To, co astronomowie w latach trzydziestych i czterdziestych XX wieku obliczali za pomocą suwaków logarymicznych przez cały miesiąc, współczesny komputer może obliczyć znacznie dokładniej w przeciągu kilku sekund. Trzeba tu jednak pamiętać, że wiele rozwiązań jest bardzo czułych na warunki początkowe, czyli na obserwacyjne dane dotyczące badanych obiektów. Dane te zawsze są obciążone pewną niedokładnością. Również komputer nieuchronnie wprowadza do obliczeń pewne niedokładności, na ogół jednak niewielkie. Natomiast sama czułość rozwiązań równań ruchu ciał w Układzie Słonecznym na warunki początkowe nie jest spowodowana zastosowaniem do obliczeń komputera. Jest cechą samych tych równań.

Komputery mają także ogromne znaczenie w astrofizyce teoretycznej. Używa się ich głównie do przeprowadzania różnego rodzaju symulacji, modelowania procesów astrofizycznych i numerycznego rozwiązywania równań. Zastosowanie komputera umożliwia, na przykład, stworzenie symulacji powstawania galaktyk czy też powstawania i ewolucji ramion spiralnych w samych galaktykach. Są to fundamentalne problemy kosmologiczne, których zrozumienie posunęłoby daleko do przodu współczesną naukę. Analizując wyniki takich symulacji, a następnie porównując je z dostępnymi danymi obserwacyjnymi, jesteśmy w stanie dowiedzieć się więcej o galaktykach, o ich powstawaniu i ewolucji. Symulacje hydrodynamiczne i magneto hydrodynamiczne pomagają nam zrozumieć nie tylko Wszechświat i galaktyki, ale również strukturę różnych rodzajów gwiazd. Kolejnym polem, na którym komputery doskonale się sprawdzają, jest modelowanie obiektów i procesów fizycznych zachodzących we Wszechświecie. Astronomowie modelują bardzo wiele obiektów – gwiazdy, układy podwójne lub wielokrotne gwiazd, galaktyki i gromady galaktyk. Modelowane są także konkretne zjawiska, jak na przykład akrecja materii z otoczki czerwonego olbrzyma na białego karła, z którym olbrzym ten tworzy układ podwójny. Modele

można weryfikować, porównując ich przewidywania z danymi obserwacyjnymi. Wiele z nich przeszło pomyślnie takie testy. Dość szeroko znanym modelem jest model Słońca, opisujący strukturę i różne parametry naszej gwiazdy. Istnieją także modele zupełnie innych rodzajów gwiazd, na przykład cefeid czy supernowych.

Z drugiej strony do dzisiaj nie udało się stworzyć dobrych modeli komputerowych, na przykład dwumodalnych gwiazd pulsujących typu RR Lyrae, a więc gwiazd pulsujących jednocześnie w dwóch pierwszych modach oscylacji radialnych. Bez względu jednak na wszystkie trudności modelowanie komputerowe jest w astrofizyce bardzo pożyteczne, gdyż odtwarzając znane własności modelowanych obiektów, pozwala również na przewidywanie ich nieznanymi cechami. To z kolei może być krokiem do lepszego zrozumienia badanych obiektów lub procesów.

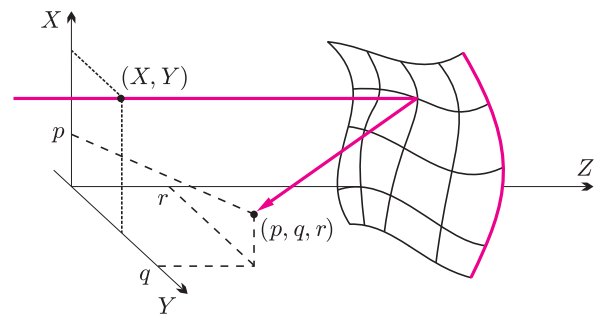
Ostatnie odkrycia kosmologiczne, wykrycie różnorodnych planet poza Układem Słonecznym, praca i wyniki teleskopu kosmicznego Hubble'a i wiele innych – już teraz lista osiągnięć dokonanych za pomocą komputerów wygląda niezwykle okazale.

# Ile jest zajączków?

Zapewne każdy kiedyś puszczał zajączki. To znaczy odbijał zwykłym lusterkiem światło słoneczne na przykład ku nieoświetlonej ścianie. Trzeba przyznać, że plama światła jest wtedy mało ciekawa: oświetlenie jest jednakowe na całej jej powierzchni. Co innego jeśli lustro nie jest płaskie. Promienie odbite nie są wtedy równoległe. Te z nich, które odbijają się od wklęsłych części zwierciadła, mogą tworzyć skupienia, w których natężenie światła jest szczególnie duże, co daje widoczne na ekranie jaśniejsze linie i punkty. Noszą one nazwę kaustyk (gr. *kaustikos* – żrący, palący). Powierzchnie odbijające o dowolnym kształcie – z różnymi wgłębieniami i wypukłościami – można spotkać w różnych codziennych sytuacjach. Zajączki wytwarzane przez takie „pokrzywione” lusterka mają nieregularne kształty, zależne od orientacji lusterka i jego odległości od ekranu. Wydawać by się mogło, że różnorodność kształtów powierzchni odbijających rodzi nieskończoną różnorodność postaci tych świetlnych wzorków i że nie ma szans na jakkolwiek ich systematyzację. Można jednak wykazać, że są one utworzone z kilku elementarnych form.

Zagadnienie powstawania i klasyfikacji kaustyk rozważymy z punktu widzenia optyki geometrycznej, z wyrozumiałością traktując nieskończoność, jakie przewiduje ona dla natężenia światła. Oczywiście istnieje bardziej realistyczny opis kaustyk, który uwzględnia falową naturę światła, a w szczególności zjawisko interferencji, i w którym nie pojawia się problem nieskończonego natężenia.

Niech wiązka promieni równoległych (np. słonecznych) pada wzdłuż osi  $Z$  układu współrzędnych na odbijającą powierzchnię o dowolnym kształcie (rys. 1).

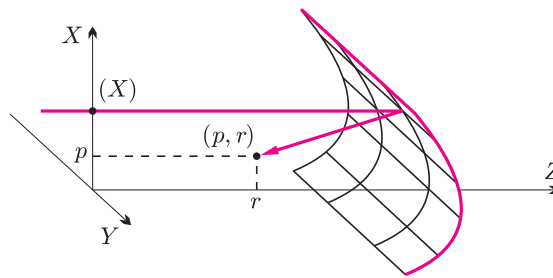


Rys. 1

Płaszczyznę  $XY$  umieścimy gdzieś przed zwierciadłem. Niech promień, którego położenie początkowe określone jest współrzędnymi  $(X, Y)$ , przechodzi po odbiciu przez punkt, którego współrzędne oznaczymy przez  $(p, q, r)$ . Drogę optyczną  $S$  przebytą przez promień od płaszczyzny  $XY$  do tego punktu wyrazimy jako funkcję dwóch zmiennych  $X$  i  $Y$  zależną od trzech parametrów  $p, q$  i  $r$ :  $S(X, Y; p, q, r)$ . W szczególnym przypadku, gdy zwierciadło jest dowolną powierzchnią walcową o tworzących równoległych do osi  $Y$  (rys. 2), droga optyczna jest funkcją jednej zmiennej  $X$  zależną od

Grzegorz DERFEL\*

jednego lub dwóch parametrów:  $S(X; p)$  lub  $S(X; p, r)$ . Drogi optyczne stanowią więc szczególne rodziny funkcji jednej lub dwóch zmiennych zależnych od jednego, dwóch lub trzech parametrów.



Rys. 2

Badanie i klasyfikacja funkcji  $n$  zmiennych zależnych od  $k$  parametrów jest przedmiotem teorii katastrof, której twórcą jest francuski matematyk René Thom. Zastosowanie podstawowego wyniku tej teorii do zdefiniowanych wyżej funkcji  $S$  wskazuje, że można je podzielić na pięć klas. Do każdej klasy należą funkcje mające tę samą ilość i rodzaj punktów krytycznych (są to punkty, w których znikają wszystkie pierwsze pochodne, a więc maksima, minima, siodła i pewne punkty przegięcia), co sprawia, że mają podobny kształt. Dzięki temu za pomocą gładkiej zamiany zmiennych (obejmującej zmiany skal, obroty osi i translacje) można każdą funkcję z danej klasy sprowadzić do tej samej standardowej postaci zwanej *katastrofą*. Katastrofy oznaczone są symbolami i mają zwyczajowe nazwy. Interesujące nas pięć klas zawiera funkcje równoważne pięciu katastrofom, które mają postać następujących wielomianów:

1.  $A_2$ ; fałda (*fold*):  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$
2.  $A_3$ ; kolec, szpic (*cusp*):  $f(x) = (\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx)$
3.  $A_4$ ; jaskółczy ogon (*swallowtail*):  
 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$
4.  $D_4^+$ ; pępek hiperboliczny (*hyperbolic umbilic*):  
 $f(x, y) = x^2y + y^3 + ax^2 + by + cx$
5.  $D_4^-$ ; piramida (*elliptic umbilic*):  
 $f(x, y) = x^2y - y^3 + ax^2 + by + cx.$

Zmienne  $x$  i  $y$  oraz parametry  $a, b$  i  $c$  powiązane są ze współrzędnymi  $X$  i  $Y$  oraz  $p, q$  i  $r$  gładkimi przekształceniami.

Rzeczywiste promienie świetlne przebiegają w przestrzeni po torach określonych zasadą Fermata. W najogólniejszym sformułowaniu stwierdza ona, że droga optyczna rzeczywistego promienia biegnącego między dwoma punktami jest najmniejsza spośród sąsiednich dróg z pewnego otoczenia tego promienia łączących te punkty, lub że ma wartość stacjonarną, tzn. nie jest ani maksymalną ani minimalną wśród takich dróg. Minimalną drogę przebywa np. promień załamujący się na granicy dwóch ośrodków.

\*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Z przypadkiem wartości stacjonarnych mamy do czynienia, gdy np. promienie z punktowego źródła skupiane są idealną soczewką w punktowy obraz, bowiem ich drogi optyczne są jednakowe. Problem znalezienia drogi optycznej promienia jest więc zagadnieniem z dziedziny rachunku wariacyjnego. Wartość drogi optycznej promienia między dwoma punktami jest bowiem funkcjonalem zależnym od jej kształtu. Zasadę Fermata można formalnie wyrazić w postaci stwierdzenia, że „wariacja drogi optycznej musi być równa zero”. W rozpatrywanym tu przypadku przy określaniu drogi optycznej wykorzystujemy fakt, że promienie są prostoliniowe, co pozwala wyrazić drogę optyczną nie jako funkcjonal, lecz w opisany wyżej sposób jako funkcję  $S(X, Y; p, q, r)$ . Aby zbadać możliwe kształty kaustyk należy rozpatrzyć możliwe drogi promieni. W tym celu więc trzeba zająć się punktami krytycznymi pięciu przytoczonych wielomianów.

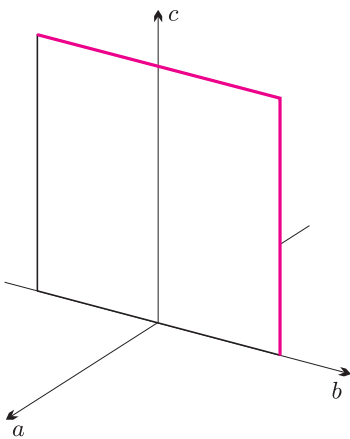
W przypadku funkcji jednej zmiennej punkty te zadane są równaniem

$$(1) \quad df/dx = 0,$$

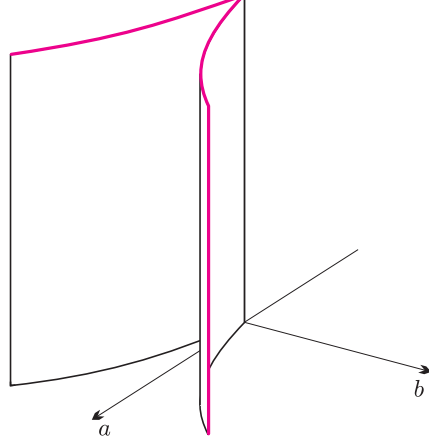
a w przypadku funkcji dwóch zmiennych – układem równań

$$(1') \quad \partial f/\partial x = 0, \quad \partial f/\partial y = 0.$$

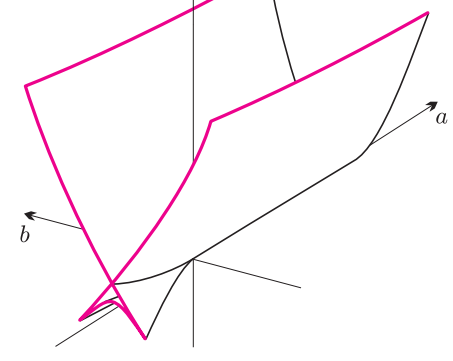
(A<sub>2</sub>)



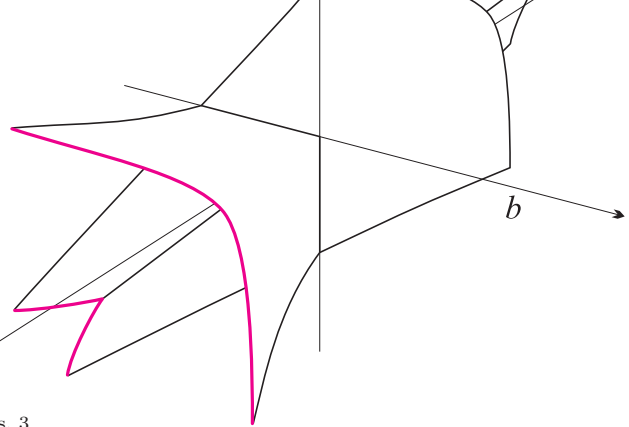
(A<sub>3</sub>)



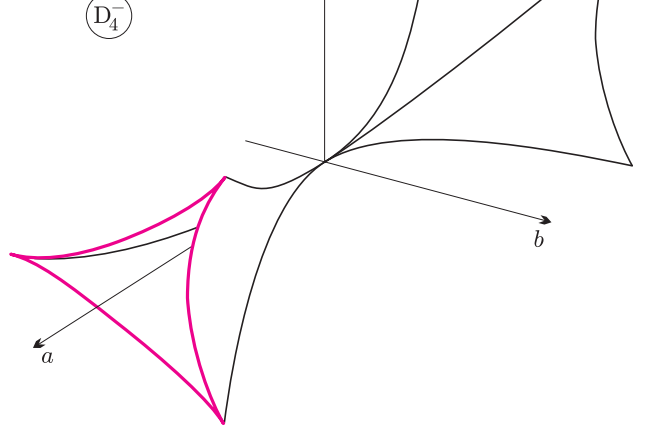
(A<sub>4</sub>)



(D<sub>4</sub><sup>+</sup>)



(D<sub>4</sub><sup>-</sup>)



Rys. 3

Warunek (1) określa w czterowymiarowej przestrzeni  $(x, a, b, c)$ , a warunek (1') w pięciowymiarowej przestrzeni  $(x, y, a, b, c)$ , obszar zwany zbiorem katastrofy,  $K$ . W zbiorze tym można wyróżnić obszary różniące się rodzajem ekstremów. Granice między tymi obszarami zadane są w przypadku jednej zmiennej warunkiem

$$(2) \quad d^2 f/dx^2 = 0,$$

a w przypadku dwóch zmiennych warunkiem

$$(2') \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

Z układów równań (1) i (2) oraz (1') i (2'), po wyrugowaniu z nich zmiennych  $x$  i  $y$ , otrzymuje się równania, które w przestrzeni  $(a, b, c)$  definiują powierzchnie, krzywe i punkty, wytyczające granice obszarów różniących się ilością ekstremów funkcji zmiennych  $x$  i  $y$  (różnica ta zawsze wynosi 2). Tworzą one razem zbiór bifurkacyjny katastrofy,  $B$ . Rys. 3 przedstawia zbiory bifurkacyjne pięciu wymienionych katastrof. Odpowiadają im analogiczne granice w fizycznej przestrzeni  $(p, q, r)$  rozdzielające obszary, przez które przechodzi różna ilość promieni.

Istotne dla nas właściwości zbiorów  $K$  i  $B$  można pokazać za pomocą jednego z prostszych przypadków,

jakim jest katastrofa  $A_3$ . Jest to funkcja jednej zmiennej zależna od dwóch parametrów, jest więc odpowiednia do opisu drogi optycznej promieni odbitych od wklęsłej powierzchni walcowej i jednocześnie możliwa do przedstawienia graficznego. Właśnie taka kaustyka powstaje np. na powierzchni kakao w kubku po odbiciu promieni od jego wewnętrznej ścianki. Rys. 4 pokazuje zbiór katastrofy, który jest powierzchnią utworzoną przez rozwiązania równania (1) czyli

$$(3) \quad x^3 + ax + b = 0.$$

Dla  $a < 0$  ma ona dwie fałdy, dzięki którym powstają trzy płaty powierzchni. Środkowy płat odpowiada minimum a zewnętrzne – maksimum. W dolnej części rysunku widać rzut fałd na płaszczyznę  $(a, b)$ , który jest granicą dzielącą tę płaszczyznę na obszary z jednym i z trzema ekstremami, czyli zbiór bifurkacyjny. Wynika ona z warunków (1) i (2), które tworzą układ złożony z równania (3) i równania

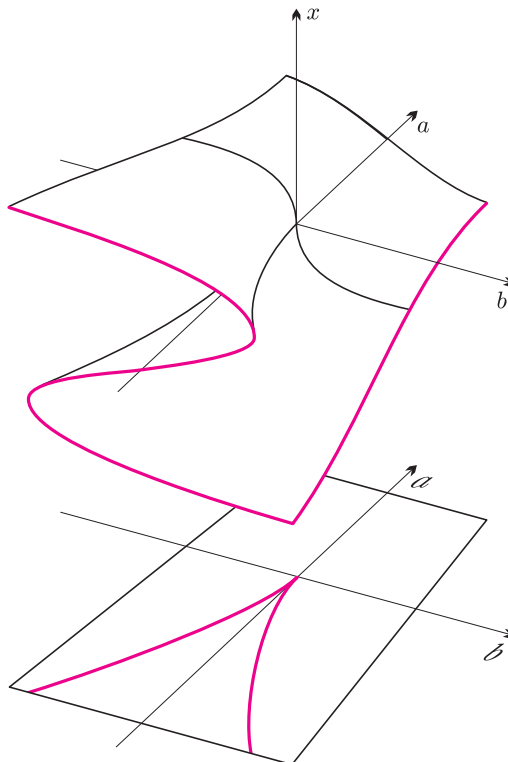
$$(4) \quad 3x^2 + a = 0.$$

Jest to tzw. parabola półsześcienna

$$(5) \quad 4a^3 + 27b^2 = 0.$$

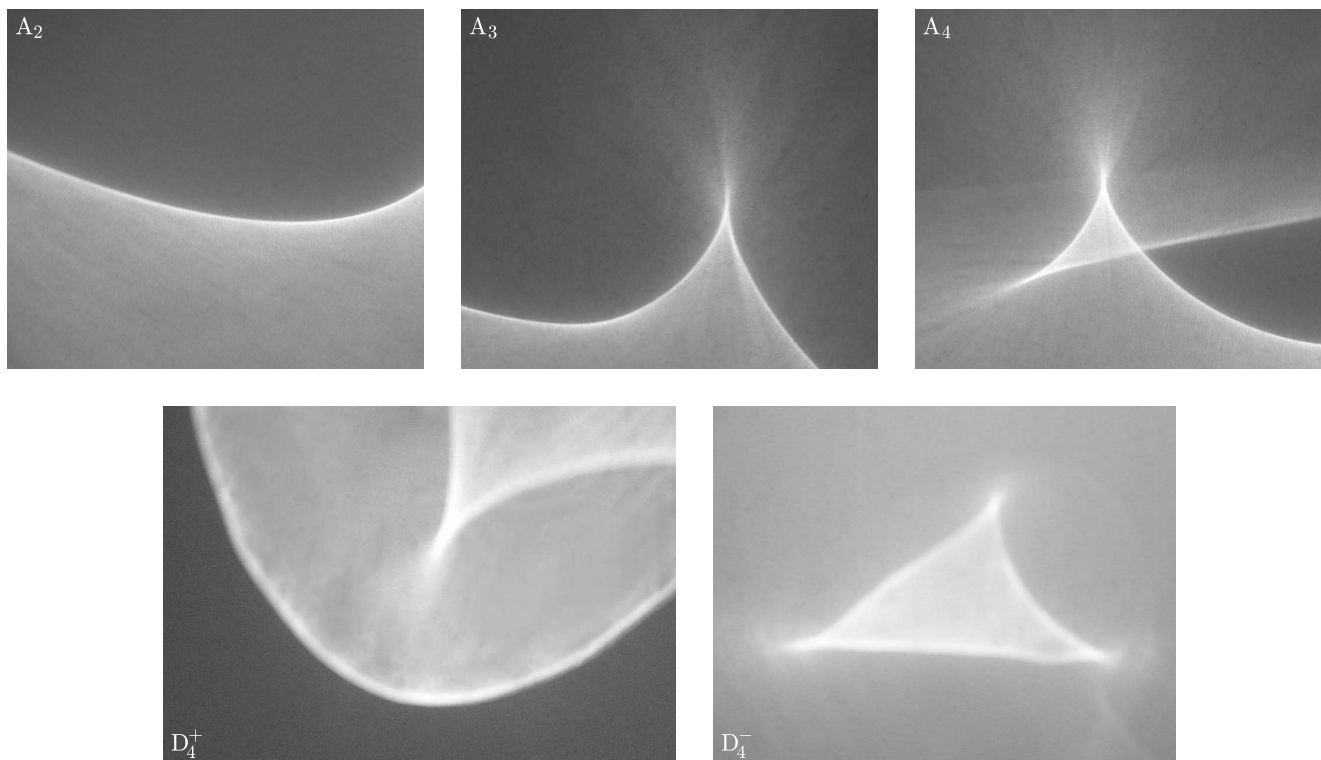
składająca się z dwóch gałęzi ułożonych w szpic.

Drogi przebywane przez rzeczywiste promienie są ekstremalne, jednak nie bezwzględnie, lecz względem sąsiednich równoległych i prostoliniowych promieni trafiających po odbiciu w dany punkt, któremu odpowiadają parametry  $(a, b)$ . Spośród trzech promieni przechodzących przez każdy punkt odpowiadający parametrom pomiędzy gałęzi parabol (5) tylko jeden ma drogę mniejszą od sąsiednich; drogi dwóch pozostałych są dłuższe niż sąsiednie, lecz i tak krótsze od dróg krzywoliniowych wykluczonych przez naszą definicję funkcji  $S$ .



Rys. 4

Górna część rysunku 4 przekonuje, że dla punktów  $(a, b)$  z pobliżu zbioru bifurkacyjnego  $B$  występuje szczególnie dużo ekstremów. Oznacza to, że przez punkty przestrzeni odpowiadające parametrom bliskim zbiorowi bifurkacyjnemu przechodzi szczególnie dużo promieni. Natężenie światła jest więc tam wyjątkowo duże, a w punktach zbioru  $B$  – nieskończone (co jest konsekwencją zaniedbania falowej natury światła). Jeżeli uwzględnimy trzecią współrzędną, do której walcowe



zwierciadło jest równoległe, to otrzymamy zbiór  $B$  w postaci dwupłatowej powierzchni z ostrzem, pokazanej na rys. 3. Analogiczne właściwości mają pozostałe zbiory katastrof i związane z nimi zbiory bifurkacyjne. Trzeba pamiętać, że zbiory bifurkacyjne pokazane na rys. 3 powstały po zamianie zmiennych i parametrów użytych do wyrażenia rzeczywistości drogi optycznej. Obserwowane kaustyki są przekrojami odpowiadających im zbiorów punktów  $(p, q, r)$  powierzchnią ekranu. Ich istotnie różne kształty przedstawione są na zdjęciach. Jest ich pięć i liczbę tę można uznać za zadowalającą odpowiedź na tytułowe pytanie. W wyjątkowych przypadkach mogą powstać nietypowe, inne kaustyki, są one jednak niestabilne tzn. w następstwie dowolnie małej zmiany kształtu zwierciadła rozpadają się na kaustyki elementarne, które są na takie zmiany odporne. Zazwyczaj refleksy wytworzone przez różne fragmenty zwierciadła o dowolnie pofalowanej powierzchni są bardzo liczne. Nakładają się, dając pogmatwany obraz, w którym trudno wyróżnić kaustyki elementarne.

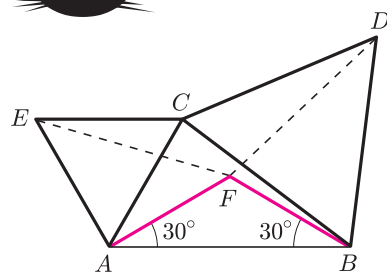
Kaustyki optyczne powstają nie tylko wskutek odbicia światła. Tęcza, która jest kaustyką typu faldy, powstaje

przy udziale odbicia i załamania na powierzchni kropelek wody. Kaustyki tworzą się przy przechodzeniu światła przez ośrodki optycznie niejednorodne lub warstwy przezroczyste o niejednakowej grubości. Promienie równoległe do osi soczewki skupiającej obarczone aberracją sferyczną dają w jej ognisku kaustykę typu kolec, wyraźnie rozpoznawalną, jeśli abstrahować od symetrii osiowej. Promienie przyosiowe skupiają się najdalej od soczewki i tworzą ognisko na „czubku kolca”. Promienie odległe od osi skupiają się bliżej soczewki. Obwódka promieni jest kaustyką. Przez każdy punkt w jej wnętrzu przechodzą trzy promienie, podczas gdy przez punkty leżące na zewnątrz – tylko jeden. Interesujące są kaustyki optyczne powstałe w wyniku zjawiska soczewkowania grawitacyjnego. Kaustyki pojawiają się także przy rozchodzeniu się innych rodzajów fal – dźwiękowych, gdzie przejawiają się jako rodzaj fal uderzeniowych, oceanicznych, gdzie wywołują gigantyczne fale o niszczącej sile, fal elektromagnetycznych w jonosferze, plazmie międzyplanetarnej i okołosłonecznej, fal materii uczestniczących w procesach rozpraszania, fal sejsmicznych i innych.



## Zadania

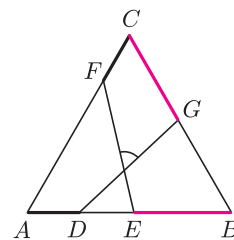
Redaguje Waldemar POMPE



Rys. 2

**M 1114.** Punkty  $D$  i  $E$  leżą na boku  $AB$  trójkąta równobocznego  $ABC$  (rys. 1). Punkty  $F$  i  $G$  leżą odpowiednio na bokach  $AC$  i  $BC$  przy czym  $AD = CF$  i  $BE = CG$ . Wykazać, że proste  $DG$  i  $EF$  przecinają się pod kątem  $60^\circ$ .

Rozwiązanie na str. 11



Rys. 1

**M 1115.** Na tablicy napisano liczby  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2005}$ . Wykonujemy następującą procedurę: Wybieramy dwie liczby  $a, b$  znajdujące się na tablicy i zastępujemy je liczbą  $ab + a + b$ . Postępowanie to kontynuujemy. Po 2004 krokach zostanie na tablicy tylko jedna liczba. Jakie wartości może ona przyjąć?

Rozwiązanie na str. 15

**M 1116.** Na bokach  $BC$  i  $AC$  trójkąta  $ABC$  budujemy, na zewnątrz niego, trójkąty równoboczne  $BCD$  i  $ACE$  (rys. 2). Na boku  $AB$  budujemy, do wnętrza trójkąta  $ABC$ , trójkąt  $ABF$ , w którym  $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FBA = 30^\circ$ . Udowodnić, że  $DF = EF$ .

Rozwiązanie na str. 16

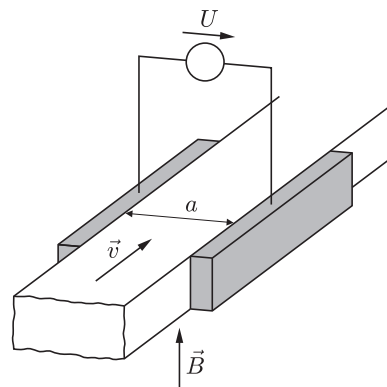
Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

**F 655.** Pompa elektromagnetyczna do tłoczenia płynnego przewodnika (np. metalu) składa się z rury o przekroju prostokątnym, w której dwie przeciwległe ściany odległe o  $a$  zrobione są z bardzo dobrego przewodnika, dwie pozostałe z izolatora (rys. 3). Do przewodzących ścianek przyłożono napięcie  $U$ , a całość umieszczono w pionowym, jednorodnym polu magnetycznym  $B$ . Dla jakiej prędkości przepływu płynu moc skuteczna pompy jest największa? Jaka jest wtedy jej sprawność? Pominąć opór elektryczny źródła prądu i ścianek.

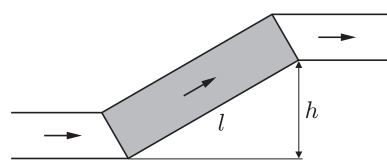
Rozwiązanie na str. 2

**F 656.** Pompa z poprzedniego zadania, mająca długość  $l$ , wykorzystywana jest do tłoczenia cieczy o gęstości  $\rho$  i przewodnictwie właściwym  $\sigma$  pod górę na wysokość  $h$  (rys. 4). Z jaką prędkością porusza się tłoczona ciecz?

Rozwiązanie na str. 10



Rys. 3



Rys. 4

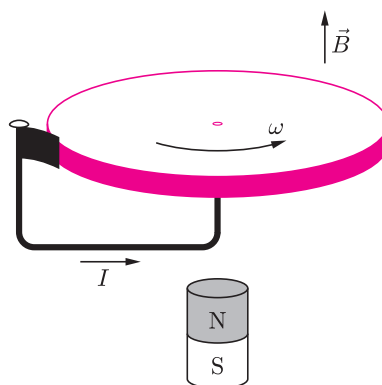
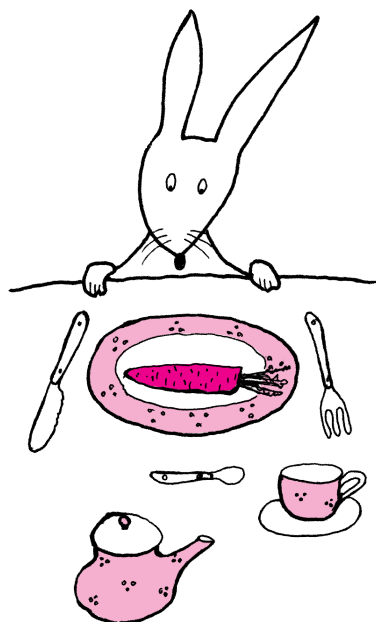


## Dynamo we wnętrzu Ziemi

Ziemskie pole magnetyczne jest wszechobecne i bardzo łatwe do wykrycia. O jego istnieniu wiedzieli uczeni i podróżnicy w starożytności, a dzisiaj wie o nim każdy, kto miał w ręku kompas. Oprócz funkcji nawigacyjnej spełnia ono rolę tarczy ochronnej naszej planety, zakrzywiając tor naładowanych cząstek padających na naszą planetę z Kosmosu, głównie ze Słońca.

Jednak niewiele zapytanych osób potrafiłoby wyjaśnić, skąd ono się bierze. Na usprawiedliwienie niewiedzących trzeba przyznać, że naukowcy badający fizykę Ziemi, geofizycy, sami do końca nie rozumieją mechanizmu jego powstawania. Nie znaczy to, że są wobec tego zjawiska bezradni – w 1919 roku Larmor zapostulował mechanizm, który dziś jest już powszechnie uznawany. Mechanizm ten oparty jest na zasadzie działania prądnicy.

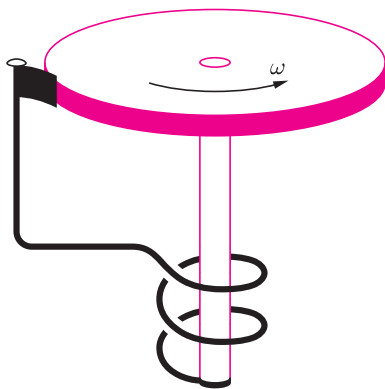
Prądnica, czyli inaczej dynamo, to jedna z najprostszych i najważniejszych maszyn elektrycznych. Zasadę jej działania odkrył na początku XIX wieku Michael Faraday: jeśli przewodnik porusza się w polu magnetycznym (bądź jeśli pole magnetyczne zmienia się w czasie), na końcach przewodnika wytwarza się różnica potencjałów. Jedno z pierwszych urządzeń tego typu zbudowanych przez Faradaya przedstawia rysunek 1: wirujący metalowy dysk umieszczony jest w polu magnetycznym stałego magnesu. Do brzegu dysku dotyka kontakt (np. metalowa szczotka), drugi przyłączony jest do środka dysku. Ruch wirowy dysku powoduje powstanie różnicy potencjałów między zewnętrznym brzegiem a środkiem, a ta z kolei powoduje przepływ niewielkiego, stałego prądu w obwodzie.



Rys. 1

Dobrze – ale skąd takie urządzenie w środku Ziemi? Skąd wirujący przewodnik i zewnętrzny magnes?

Na pierwsze pytanie odpowiedź jest bardzo łatwo: we wnętrzu Ziemi znajduje się dużo płynnego żelaza, które jest znakomitym przewodnikiem. Z kolei konwekcja, czyli unoszenie gorętszych i lżejszych warstw żelaza, połączone z obrotem Ziemi wokół własnej osi, dostarcza energii



mechanicznej. Brakuje tylko magnesu – wszak w pobliżu naszej planety nie unosi się żadna namagnesowana sztabka lub podkowa.

Czy jednak prądnica koniecznie potrzebuje zewnętrznego pola magnetycznego aby działać? Popatrzmy na rysunek 2. Magnes zewnętrzny zastąpiono tutaj cewką, przez którą przepływa indukowany prąd. Przypuśćmy, że w urządzeniu płynie już prąd. Przy konfiguracji takiej, jak na rysunku, pole magnetyczne wytworzone w cewce ma taki zwrot, że ruch dysku wytwarza siłę elektromotoryczną podtrzymującą prąd (Czytelników znających regułę prawej i lewej ręki proszę o sprawdzenie). Taka prądnica może sama działać bez stałego magnesu z zewnątrz, ale wymaga początkowego impulsu.

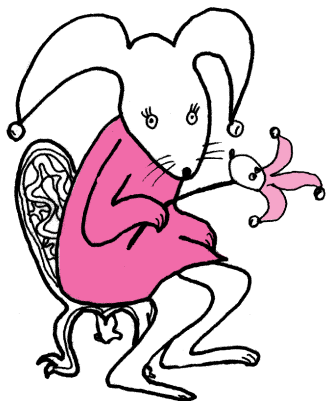
Ale to nie wszystko: okazuje się, że jeśli prędkość wirowania dysku jest odpowiednio duża, układ bez ingerencji z zewnątrz wytwarza pole magnetyczne! Jak to możliwe? Po prostu dla odpowiednio dużych prędkości obrotu najmniejszy prąd, jaki powstanie w obwodzie, czy to na skutek bezładnego ruchu elektronów, czy też wzbudzony przez jakieś niewielkie pole magnetyczne z zewnątrz, zostaje wzmocniony, aż wartości natężenia prądu i pola osiągną stabilną wartość równowagową, czyli taką, której nie są w stanie zniszczyć niewielkie zaburzenia. Fizycy mówią, że stan „bez prądu” stał się stanem równowagi niestabilnej.

Oczywiście maszyna taka nie jest *perpetuum mobile* – aby dysk wirował ze stałą prędkością, musimy kręcić nim, czyli stale wykonywać nad nim pracę mechaniczną, która zamieniana jest na energię prądu w obwodzie i energię pola magnetycznego.

Analogiczny mechanizm, tzw. *geodynamo*, wyjaśnia jakościowo istnienie pola magnetycznego wokół Ziemi. Wspomnieliśmy jednak na początku, że sprawa ziemskiego pola magnetycznego nie jest jeszcze do końca wyjaśniona. Fizycy chcieliby wymodelować, czyli odtworzyć to zjawisko przy użyciu komputera. Problem jest jednak bardzo trudny: trzeba jednocześnie śledzić zachowanie linii pola magnetycznego, przepływ prądu i ruch gorącego płynu, przy czym wszystkie te ruchy powiązane są skomplikowanymi równaniami różniczkowymi, tzw. *równaniami magnetohydrodynamiki*. W szczególności chcieliby dzięki symulacjom uzyskać odpowiedź na pytanie, skąd bierze się najbardziej chyba zadziwiająca własność ziemskiego pola magnetycznego, a mianowicie jego skłonność do zamiany biegunów magnetycznych co kilkanaście do kilkuset tysięcy lat. Dane geologiczne w postaci namagnesowania zastygłych w dawnych epokach skał pokazują, że takie zmiany orientacji pola magnetycznego zdarzały się w historii wiele razy, ale w bardzo nieregularnych odstępach.

Większość symulacji komputerowych, z powodu ograniczonej szybkości i pamięci komputera, wprowadza do problemu znaczne uproszczenia, np. zakładając, że ruchy odbywają się tylko w dwu wymiarach bądź zaniedbując część oddziaływań. Z tych samych powodów zakładane wartości parametrów przepływu cieczy we wnętrzu Ziemi są na ogół odległe od rzeczywistych. Takie modele nie oddają w pełni zachowania geodynamy. Mimo uproszczeń jedne z lepszych symulacji wykonali w 1995 roku Glatzmaier i Roberts. Udało im się nawet wymodelować inwersję biegunów. Filmy obrazujące wyniki ich symulacji dostępne są w internecie pod adresem <http://www.psc.edu/research/graphics/gallery/geodynamo.html>.

*Małą Deltę przygotował Mikołaj KORZYŃSKI*



O nierówności Hilberta napisano już wiele. Trudno byłoby w krótkim artykule rzetelnie opisać jej zastosowania i rozmaite warianty, zwłaszcza że zwykle wymaga to użycia dość skomplikowanych narzędzi matematyki wyższej; przyjrzymy się więc z bliska tylko niektórym, wybranym zagadnieniom. Zainteresowany Czytelnik zechce może przeczytać obszerniejsze, przeglądowe opracowanie [1].

**Nierówność Hilberta.** Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_l$  oraz dowolnych liczb rzeczywistych  $c_1, c_2, \dots, c_k, d_1, d_2, \dots, d_l \geq 1$ , takich że  $|c_i - c_j| \geq 1$  i  $|d_i - d_j| \geq 1$  dla  $i \neq j$ , spełniona jest nierówność

$$\left| \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \frac{a_m b_n}{c_m + d_n} \right| \leq \pi \cdot \left( \sum_{m=1}^k a_m^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^l b_n^2 \right)^{1/2}.$$

W dowodzie nierówności Hilberta wykorzystamy nierówność Buniakowskiego–Schwarza, w wersji znanej już Cauchy’emu (dalej będziemy ją nazywać, jak to jest dość powszechnie przyjęte, nierównością Schwarza). Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N$  mamy

$$\left| \sum_{j=1}^N x_j y_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^N x_j^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^N y_j^2 \right)^{1/2}.$$

Istotnie, jeśli na ciągach  $t = (t_1, t_2, \dots, t_N)$  i  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  określimy wzorem

$$t \circ u = \sum_{j=1}^N t_j u_j$$

działanie dwuargumentowe o wartościach rzeczywistych, to łatwo sprawdzić, że spełnia ono dla dowolnych ciągów  $t, u, v$  i dowolnej liczby rzeczywistej  $\alpha$  następujące warunki:

$$t \circ u = u \circ t, \quad (\alpha t) \circ u = \alpha(t \circ u), \quad t \circ (u + v) = (t \circ u) + (t \circ v), \quad t \circ t \geq 0,$$

przy czym  $t \circ t = 0$  tylko wtedy, gdy  $t$  jest ciągiem zerowym. Działanie mające powyższe własności nazywamy rzeczywistym iloczynem skalarnym. Proste przekształcenia pokazują, że

$$(x \circ x)\alpha^2 + 2(x \circ y)\alpha + (y \circ y) = (\alpha x + y) \circ (\alpha x + y) \geq 0$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej  $\alpha$ , a więc wyróżnik  $\Delta = 4(x \circ y)^2 - 4(x \circ x)(y \circ y)$  jest niedodatni, stąd zaś natychmiast wynika, że  $|x \circ y| \leq (x \circ x)^{1/2}(y \circ y)^{1/2}$ , co jest po prostu inną formą zapisu nierówności Schwarza.

Wróćmy do nierówności Hilberta. Bez straty ogólności możemy założyć, że  $c_1 < c_2 < \dots < c_k$  i  $d_1 < d_2 < \dots < d_l$  – wystarczy bowiem przenieść wyrazy ciągu  $(c_m)$  tak, by ustawić je w kolejności rosnącej i to samo przenieść do wyrazów ciągu  $(a_m)$ , aby otrzymać nierówność równoważną wyjściowej; podobnie rzecz się ma z ciągami  $(d_n)$  i  $(b_n)$ . Wygodnie będzie też przyjąć, że  $c_0 = d_0 = 0$ . Niech  $N = k \cdot l$  i potraktujmy sumę podwójną  $\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l$  jako sumę  $N$  składników. Wówczas, stosując nierówność Schwarza do

$$x_{m,n} = c_m^{1/4}(c_m + d_n)^{-1/2}d_n^{-1/4}a_m \quad \text{ i } \quad y_{m,n} = d_n^{1/4}(c_m + d_n)^{-1/2}c_m^{-1/4}b_n,$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \frac{a_m b_n}{c_m + d_n} \right| &= \left| \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l x_{m,n} y_{m,n} \right| \leq \left( \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l x_{m,n}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l y_{m,n}^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left( \sum_{m=1}^k a_m^2 \sum_{n=1}^l \frac{\sqrt{c_m}}{(c_m + d_n)\sqrt{d_n}} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^l b_n^2 \sum_{m=1}^k \frac{\sqrt{d_n}}{(c_m + d_n)\sqrt{c_m}} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

nierówność Hilberta wynika więc natychmiast z następującego lematu.



**Rozwiązanie zadania F 656.**

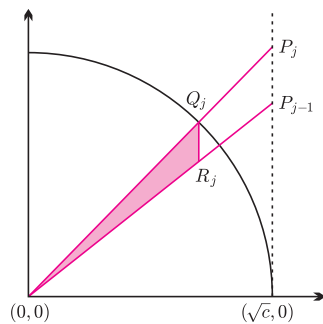
Przyjmijmy szerokość rury jako  $a$  i wysokość jako  $b$ , tak, jak w poprzednim zadaniu. Strumień cieczy tłoczony z prędkością  $v$  wynosi  $\Phi = \rho a b v$ , a więc moc potrzebna do jego tłoczenia to  $P = \rho a b v g h$ . Podstawiając do wzoru na moc skuteczną z poprzedniego zadania, dostajemy warunek

$$\rho a b v g h = \sigma l a b^2 \left( \frac{U}{a b} - v \right) v,$$

czyli

$$v = \frac{U}{a b} - \frac{\rho g h}{\sigma l b^2}.$$

\* Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski



**Lemat.** Dla każdego  $c > 0$  i dowolnych liczb rzeczywistych  $d_0 = 0, d_1, \dots, d_l$ , takich że  $d_j \geq d_{j-1} + 1$  dla  $j = 1, 2, \dots, l$ , spełniona jest nierówność

$$\sum_{n=1}^l \frac{\sqrt{c}}{(c + d_n)\sqrt{d_n}} < \pi.$$

Lemat udowodnimy geometrycznie. Rozważmy w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie dodatnią ćwiartkę okręgu o promieniu  $\sqrt{c}$  i środku  $O = (0, 0)$ . Na prostej  $x = \sqrt{c}$  wybieramy punkty  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_l$  tak, by punkt  $P_j$  miał współrzędne  $(\sqrt{c}, \sqrt{d_j})$  dla  $j = 0, 1, 2, \dots, l$ , a przez  $Q_j$  oznaczamy punkt przecięcia okręgu z odcinkiem  $OP_j$ . Niech  $R_j$  oznacza punkt wspólny odcinka  $OP_{j-1}$  i pionowej prostej przechodzącej przez  $Q_j$ . Łatwo zauważyć, że trójkąt  $OQ_jR_j$  jest obrazem trójkąta  $OP_jP_{j-1}$  w jednokładności o skali  $\lambda = |OQ_j|/|OP_j| = \sqrt{c}/\sqrt{c + d_j}$ . Zatem

$$\begin{aligned} S_{\Delta OQ_jR_j} &= \lambda^2 S_{\Delta OP_jP_{j-1}} = \lambda^2 \cdot |P_jP_{j-1}| \cdot |OP_0|/2 = \frac{c}{c + d_j} \cdot \frac{(\sqrt{d_j} - \sqrt{d_{j-1}})\sqrt{c}}{2} = \\ &= \frac{c\sqrt{c}(d_j - d_{j-1})}{2(c + d_j)(\sqrt{d_j} + \sqrt{d_{j-1}})} \geq \frac{c\sqrt{c}}{4(c + d_j)\sqrt{d_j}}, \end{aligned}$$

z drugiej zaś strony oczywiście

$$\sum_{j=1}^l S_{\Delta OQ_jR_j} < \pi(\sqrt{c})^2/4 = \pi c/4,$$

bo trójkąty te mają parami rozłączne wnętrza i wszystkie zawierają się w rozpatrywanej ćwiartce koła. Skracając o czynnik  $c/4$  obie strony oszacowania, kończymy dowód lematu i nierówności Hilberta.

Najczęściej rozważa się ciągi  $c_m = m, d_n = n$  i wówczas nierówność Hilberta przyjmuje postać

$$\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \frac{a_m b_n}{m + n} \leq \pi \left( \sum_{m=1}^k a_m^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^l b_n^2 \right)^{1/2}.$$

Nawet w tym szczególnym przypadku stałej  $\pi$  nie da się zastąpić żadną mniejszą liczbą, jeśli nierówność ma być prawdziwa dla dowolnych  $k, l$  oraz ciągów  $(a_m)$  i  $(b_n)$ . Wystarczy rozważyć ciągi dane wzorami  $a_m = 1/\sqrt{m}$  i  $b_n = 1/\sqrt{n}$ , przy  $k, l \rightarrow \infty$ . Dociekliwy Czytelnik z pewnością zdoła wymyślić dowód geometryczny podobny do przedstawionego powyżej (tym razem trzeba skonstruować trójkąty **pokrywające** jedną ósmą koła) – można też znaleźć go w artykule [2].

Inna ciekawa nierówność, pokrewna nierówności Hilberta, mówi, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_k$  i  $c_1, c_2, \dots, c_k > 0$  mamy

$$\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{a_m a_n}{c_m + c_n} \geq 0.$$

Istotnie, gdy rozważymy funkcję zmiennej nieujemnej  $s$  daną wzorem

$$Q(s) = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{a_m a_n}{c_m + c_n} s^{c_m + c_n},$$

łatwo sprawdzimy, iż dla  $s > 0$

$$Q'(s) = s^{-1} \left( \sum_{m=1}^k a_m s^{c_m} \right)^2 \geq 0,$$

że zaś  $Q(0) = 0$ , mamy stąd  $Q(1) \geq 0$ , co kończy dowód.

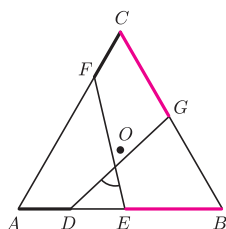
#### Literatura

[1] J. Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press and the Mathematical Association of America, Cambridge UK and Washington DC, 2004 (rozdział 10).

[2] K. Oleszkiewicz, *An Elementary Proof of Hilbert's Inequality*, Amer. Math. Monthly 100 (1993), 276–280.



**Rozwiązanie zadania M 1114.** Obróćmy trójkąt  $ABC$  wokół jego środka  $O$  o kąt  $120^\circ$  tak, aby punkt  $C$  przeszedł na punkt  $A$ .



Wówczas punkt  $F$  przejdzie na punkt  $D$ , a punkt  $E$  na punkt  $G$ . Zatem odcinek  $FE$  przejdzie na odcinek  $DG$ . Stąd wynika, że kąt między prostymi  $DG$  i  $EF$  wynosi  $60^\circ$ .

Poniżej postaram się pokazać, jak szerokie zastosowania w geometrii mogą mieć pojęcia znane zapewne większości Czytelników z lekcji dynamiki. Są to *środek masy* oraz *moment bezwładności*. Ograniczę się jednak do geometrii płaskiej, i to głównie geometrii trójkąta.

**Środek masy.** Dla uściślenia, *układem* będziemy nazywali zbiór par  $(m_i, P_i)$  („mas punktowych”), gdzie  $P_i$  jest punktem płaszczyzny,  $m_i$  zaś jego „masą” (dla  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Aby nie wzbudzić kontrowersji, początkowo przyjmijmy, że „masy” takie są liczbami rzeczywistymi dodatnimi (potem jednak pozbedziemy się tego zbędnego ograniczenia). Jak wiadomo, środkiem masy danego układu nazywamy taki punkt  $G$ , że

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \cdot \vec{OP}_1 + m_2 \cdot \vec{OP}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{OP}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

gdzie  $O$  jest początkiem układu współrzędnych. Warto przytoczyć (bez dowodów, choć wszystkie są jednolinijkowe) kilka ogólnie znanych faktów dotyczących środka masy:

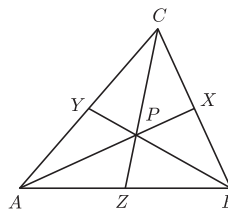
1. Nie zależy on od wyboru układu współrzędnych.
2. Jeżeli  $A, B, C$  są masami punktowymi, a masa punktowa  $Z$  leży w środku masy układu  $\{A, B\}$  i ma wartość równą sumie mas  $A$  i  $B$ , to środek masy układu  $\{A, B, C\}$  jest środkiem masy układu  $\{Z, C\}$ , leży więc na odcinku  $ZC$ .
3. Stosunek, w jakim środek masy  $S$  układu dwóch dodatnich mas punktowych  $m_A$  i  $m_B$ , umieszczonych w punktach  $A$  i  $B$ , dzieli odcinek  $AB$ , jest równy  $\frac{BS}{AS}$ .

Jak wiadomo, jeżeli w wierzchołkach trójkąta  $ABC$  umieścimy równe masy, to środek masy takiego układu będzie środkiem ciężkości tego trójkąta. Możemy zastanowić się, jakie masy  $m_A, m_B, m_C$  umieścić w wierzchołkach, aby środek masy otrzymanego układu był innym punktem szczególnym trójkąta, np. środkiem okręgu wpisanego (rysunek). Skoro środek okręgu wpisanego  $P$  leży na odcinku  $CZ$ , to (korzystamy z faktu 2.) punkt  $Z$  musi być środkiem ciężkości dla mas w  $A$  i  $B$ , zatem (fakt 3.)  $\frac{BZ}{AZ} = \frac{m_A}{m_B}$ , lecz (z twierdzenia o dwusiecznej)  $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BC}{AC}$ , wystarczy zatem wziąć

$$m_A = BC, \quad m_B = AC, \quad m_C = AB.$$

Chcąc otrzymać np. ortocentrum lub środek okręgu opisanego, musimy zastanowić się nad przypadkiem, gdy któryś z nich leży poza trójkątem – manipulując nieujemnymi masami, możemy otrzymać tylko punkty trójkąta  $ABC$ . Przyjmijmy zatem, że masy są dowolnymi liczbami rzeczywistymi (właściwszą analogią wydaje się teraz pojęcie ładunku elektrycznego). Powyższe stwierdzenia pozostają w mocy, jeśli zaznaczymy, że środek masy nie istnieje, gdy masa układu jest równa 0. Ortocentrum trójkąta możemy otrzymać, umieszczając w  $A, B, C$  masy  $\text{ctg } \beta \text{ ctg } \gamma, \text{ ctg } \alpha \text{ ctg } \gamma, \text{ ctg } \alpha \text{ ctg } \beta$ , dla środka okręgu opisanego zaś masy będą równe  $\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma$

(sprawdzenie tych prawidłowości nie powinno nastęrczyć Czytelnikowi zbyt wiele kłopotu).



Przejdźmy zatem do zadań.

**Zadanie 1 (twierdzenie Cevy).** Punkty  $X, Y, Z$  leżą na bokach  $BC, CA, AB$  trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że proste  $AX, BY, CZ$  mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

*Rozwiązanie.*

1° Załóżmy, że proste te przecinają się w punkcie  $P$ . Umieścimy w punktach  $A, B, C$  masy odpowiednio  $m_A = BZ \cdot CX, m_B = AZ \cdot CX, m_C = BX \cdot AZ$ , wówczas (korzystając z faktu 3.) punkty  $Z$  i  $X$  będą środkami mas dla par  $A, B$  i  $B, C$ , zatem środek masy całego układu będzie leżał zarówno na prostej  $CZ$ , jak i  $AX$ , będzie to zatem punkt  $P$ . Z faktu 3. wiemy także, że

$$\frac{CY}{AY} = \frac{m_A}{m_C} = \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{CX}{AZ},$$

skąd wynika teza.

2° Załóżmy, że

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

Określmy masy w wierzchołkach jak poprzednio. Wówczas punkt  $X$  będzie środkiem masy dla  $B$  i  $C$ , zatem środek masy całego układu będzie leżał na odcinku  $AX$ , analogicznie na  $BY$  i  $CZ$ , więc odcinki te mają punkt wspólny.

**Zadanie 2 (twierdzenie Van Aubela).** Przy założeniach z poprzedniego zadania wykazać, że jeśli proste  $AX, BY, CZ$  przecinają się w punkcie  $P$ , to

$$\frac{AP}{PX} = \frac{AY}{YC} + \frac{AZ}{ZB}.$$

*Rozwiązanie.* Niech masy  $m_A, m_B, m_C$  będą określone tak, aby punkt  $P$  był środkiem masy. Wówczas

$$\frac{AY}{YC} = \frac{m_C}{m_A}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{m_B}{m_A},$$

punkt  $X$  zaś jest środkiem mas w  $B$  i  $C$ , możemy zatem (fakt 2.) umieścić w nim masę  $m_X = m_B + m_C$  i uznać punkt  $P$  za środek mas w  $A$  i  $X$ , zatem (fakt 3.)  $\frac{AP}{PX} = \frac{m_X}{m_A} = \frac{m_B + m_C}{m_A}$ , skąd wynika teza.

**Zadanie 3.** Niech  $H$  będzie ortocentrum trójkąta  $ABC$  wpisanego w okrąg o środku w  $O$ . Wykazać, że pola pewnych dwóch z trzech trójkątów  $OHA, OHB, OHC$  sumują się do pola trzeciego.

\*uczeń XIV LO w Warszawie

**Rozwiązanie.** Wielu Czytelników zna zapewne fakt następujący: punkty  $O$ ,  $H$  oraz środek ciężkości  $M$  trójkąta leżą na jednej prostej (tzw. *prostej Eulera*). Obierzmy układ współrzędnych, w którym oś  $OX$  jest prostą Eulera, niech punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  mają w nim współrzędne  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_B, y_B)$ ,  $(x_C, y_C)$ . Trójkąty  $OHA$ ,  $OHB$ ,  $OHC$  mają wspólną podstawę  $OH$ , należy więc wykazać, że wysokości opuszczone na  $OH$  dwóch z nich sumują się do wysokości trzeciego. Wysokości te zaś są równe  $y_A$ ,  $y_B$ ,  $y_C$ . Oczywiście

$$0 = y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

(z definicji środka masy dla mas równych 1, czyli środka ciężkości), skąd wynika teza.

**Moment bezwładności.** Momentem bezwładności danego układu względem punktu  $X$  nazywamy liczbę

$$I_X = \sum m_i r_i^2,$$

gdzie  $r_i = XP_i$ . Fizycy używają tej wielkości do charakteryzacji ruchu obrotowego brył sztywnych (wówczas punkt  $X$  uważamy za punkt przebicia płaszczyzny prostopadłą do niej osią obrotu), ma on jednak także zastosowanie w geometrii, głównie dzięki bardzo mocnemu twierdzeniu, znanemu jako

**Twierdzenie Steinera.** Jeżeli dany układ ma niezerową masę (czyli ma środek masy), to dla dowolnego punktu  $X$  zachodzi równość  $I_X = I_G + Md^2$ , gdzie  $G$  – środek masy,  $M$  – masa układu,  $d = GX$ .

**Dowód.** Weźmy układ współrzędnych, w którym  $G = (0, 0)$  oraz  $X = (d, 0)$ . Wówczas

$$I_X = \sum m_i ((x_i - d)^2 + y_i^2) = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2d \sum m_i x_i + d^2 \sum m_i = I_G + 0 + Md^2.$$

gdyż  $0 = x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$  implikuje  $\sum m_i x_i = 0$ .

**Wniosek.** Jeśli masa układu jest dodatnia, moment bezwładności jest najmniejszy względem środka masy tego układu.

Cóż, zobaczymy, jak się ma to do rozwiązywania zadań.

**Zadanie 4.** W trójkącie  $ABC$  znaleźć taki punkt  $X$ , aby suma  $AX^2 + BX^2 + CX^2$  była najmniejsza.

**Rozwiązanie.** Umieścimy masy 1 w wierzchołkach trójkąta. Wówczas rozpatrywana suma jest momentem bezwładności układu względem  $X$ , zatem jest najmniejsza, gdy  $X$  jest środkiem masy, czyli środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ .

**Zadanie 5.** Punkt  $P$  leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym  $ABC$ . Wykazać, że suma  $AP^2 + BP^2 + CP^2$  nie zależy od wyboru punktu  $P$ .

**Rozwiązanie.** Umieścimy ponownie masy 1 w wierzchołkach oraz oznaczymy środek okręgu przez  $O$ , jego promień zaś przez  $R$ . Rozpatrywana suma jest momentem bezwładności układu względem  $P$ , zatem (z tw. Steinera) jest równa

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + 3PO^2 = 6R^2.$$

**Zadanie 6.** Punkt  $P$  leży na okręgu wpisanym w trójkąt  $ABC$ . Wykazać, że suma

$$AP^2 \cdot BC + BP^2 \cdot AC + CP^2 \cdot AB$$

nie zależy od wyboru punktu  $P$ .

**Rozwiązanie.** Umieścimy masy równe  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  w wierzchołkach  $A$ ,  $B$ ,  $C$  oraz oznaczymy środek okręgu wpisanego przez  $I$ . Suma

$$AP^2 \cdot BC + BP^2 \cdot AC + CP^2 \cdot AB$$

jest momentem bezwładności układu względem  $P$ , środek masy natomiast leży (co już udało nam się udowodnić) w punkcie  $I$ , którego odległość od  $P$  jest stała.

Metody te stosują się nie tylko do geometrii, co ilustruje poniższy przykład:

**Zadanie 7.** Na każdym polu szachownicy  $2000 \times 2000$  leży kamyk. Ruch polega na przesunięciu dwóch kamyków leżących na polach oddalonych o 2 (w jednej kolumnie lub rzędzie) na pole pomiędzy nimi (na jednym polu może leżeć dowolna liczba kamieni).

1° Czy można tak wybrać kolejność ruchów, aby wszystkie kamyki znalazły się na jednym polu?

2° Czy w tę grę można grać w nieskończoność?

**Rozwiązanie.**

1° Nie, gdyż ruch zachowuje środek masy wszystkich kamieni (zakładamy, że są one jednakowo ciężkie), który leży w środku szachownicy, zatem ostatecznie wszystkie kamienie musiałyby znaleźć się pośrodku, pomiędzy kratkami, gdyż bok szachownicy ma parzystą długość!

2° Nie, gdyż (co łatwo pokazać) każdy ruch zmniejsza moment bezwładności wszystkich kamieni względem środka szachownicy o liczbę całkowitą dodatnią (przyjmujemy, że bok pola szachownicy ma długość 1, masy kamieni zaś są równe 1), nie może on jednak spaść poniżej 0.

Oczywiście, wszystkie te zadania można zrobić dość łatwo innymi metodami, które w zasadzie sprowadzałyby się do tego, o czym piszę powyżej, tylko w innym ujęciu. Operowanie pojęciami tutaj opisanymi pozwala jednak swobodniej posługiwać się intuicją, skracając czasami wielokrotnie czas myślenia nad zadaniem.

**Zadania do samodzielnego rozwiązania:**

1. Założenia jak w zadaniu 2., wykazać, że

$$\frac{AP}{PX} \cdot \frac{BP}{PY} \cdot \frac{CP}{PZ} \geq 8.$$

2. Znaleźć środek masy *obwodu* trójkąta.

3.  $M$  jest środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2).$$

4. W wierzchołkach czworokąta umieszczono równe masy. Gdzie znajduje się środek masy takiego układu?

## Kręcący się interes

Kłopoty z pamięcią, wcześniej czy później, dotyczą każdego. Nie jest od nich wolny przemysł elektroniczny. Pomimo ciągłego zwiększania pojemności i szybkości oraz zmniejszania ceny pojedynczej kości pamięci RAM (Random Access Memory) jest ona stale za mała, za wolna, za droga i zbyt energochłonna. W dodatku jej zawartość znika po odłączeniu źródła zasilania. Tej ostatniej wady nie ma pamięć typu flash, używana powszechnie w fotografii cyfrowej, telefonach komórkowych, pendrive'ach itp., ale jest za wolna i zbyt droga. Szybsze od najczęściej używanych DRAM (Dynamic Random Access Memory) są pamięci SRAM (Static Random Access Memory), ale ponieważ używają sześciu tranzystorów zamiast jednego, mają mniejszą pojemność na jednostkę objętości. Są jednak mniej energochłonne. Pamięć typu SRAM używana jest jako pamięć podręczna (cache) procesorów.

Widać wyraźnie, że przydałaby się pamięć szybsza od SRAM, trwalsza i mniej energochłonna niż flash oraz tańsza niż DRAM.

Prototyp takiego cudu techniki istnieje. Na przeszkodzie sukcesowi komercyjnemu stoi jeszcze cena, ale to chyba tylko kwestia czasu.

Tym cudownym urządzeniem jest MRAM (Magnetic Random Access Memory) i ma być pierwszym komercyjnym zastosowaniem spintroniki, czyli elektroniki, która do przetwarzania informacji wykorzystuje nie tylko ładunek, ale również spin, czyli wewnętrzny moment pędu elektronu (spin jest efektem czysto kwantowym).

MRAM przechowuje informację za pomocą dwóch bardzo cienkich warstw ferromagnetyka przedzielonych izolatorem. Opór takiej kanapki zależy bardzo silnie od tego, czy spiny w warstwach ferromagnetycznych są ułożone równolegle, czy antyrównolegle. Zmiana magnetyzacji w jednej z warstw na przeciwną odpowiada zmianie pojedynczego bitu informacji.

Na razie MRAM ustępuje jeszcze szybkością bardziej konwencjonalnym pamięciom. Działa z częstością około 100 MHz. Jest to spowodowane stosunkowo długim czasem relaksacji komórki pamięci po jej przełączeniu.

Istnieje jednak możliwość szybszego przełączania za pomocą tzw. impulsów balistycznych. Zamiast długiego stosunkowo słabego impulsu, po którym jeszcze trzeba poczekać na uspokojenie się stanu komórki, można zastosować odpowiednio dobrany krótki impuls, który prawie idealnie zmienia polaryzację warstwy o  $180^\circ$ .

To, co jest stosunkowo łatwe do uzyskania dla pojedynczej komórki w laboratorium, stanowi problem przy próbie praktycznego zastosowania na skalę przemysłową. W obecnie stosowanym rozwiązaniu komórki są ustawione w macierz. Pojedyncza komórka jest adresowana tak, jak w zabawie w okręty, przez podanie dwóch współrzędnych. Sygnał jest jednak wtedy podawany na cały szereg i na cały rząd komórek. Nawet jeżeli dobierze się parametry tak, żeby adresowana komórka przełączyła się bardzo szybko, to i tak trzeba będzie poczekać, aż pozostałe komórki z adresowanego rzędu i szeregu się uspokoją.

Przełom nastąpił dzięki pracy Schumachera [1]. Pomysł polega na takim dobraniu impulsów, żeby adresowana komórka zmieniła polaryzację o  $180^\circ$ , a komórki z adresowanego rzędu i szeregu zmieniły polaryzację o  $360^\circ$ , czyli tak naprawdę jej nie zmieniły!

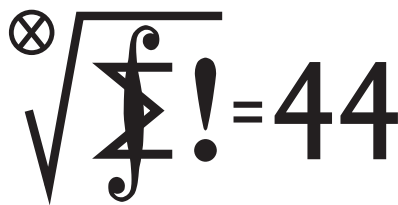
Pomysł jest bardzo prosty, a jego realizacja jeszcze prostsza. To zresztą cecha charakterystyczna każdego genialnego pomysłu. Obydwa pulsy muszą mieć tę samą wysokość i ten sam czas trwania. W takim razie sygnał w adresowanej komórce ma tylko dwa razy większą amplitudę. Pomysł może działać ze względu na kształt zależności czasu potrzebnego na balistyczną zmianę polaryzacji od amplitudy impulsu. Kształt ten przypomina literę  $\lambda$ . Jeżeli narysuje się na jednym wykresie czas potrzebny do zmiany o  $180^\circ$  przy amplitudzie  $2H$  (w zależności od  $H$ ) i czas potrzebny do zmiany o  $360^\circ$  przy amplitudzie  $H$ , to okaże się, że pierwszy wykres jest przesunięty w lewo i istnieje punkt, w którym wykresy te się przecinają, a więc istnieje taka para czas-amplituda, która pozwala na dokonanie obydwu zmian w sposób balistyczny, czyli bez konieczności czekania na uspokojenie się komórek. Praktyczne testy tego rozwiązania właśnie w tej chwili (jesień 2005) się odbywają. Zrobiona według tego pomysłu pamięć ma działać z częstością rzędu 2,5 GHz.

Rozwiązanie jest już opatentowane. Bardzo możliwe, że dzięki temu sposobowi kręcenia spinami kolejny naukowiec pozbędzie się problemów materialnych.

Piotr ZALEWSKI

[1] H.W. Schumacher, *Ballistic bit addressing in a magnetic memory cell array* Appl. Phys. Lett. **87**(2005)042504

# Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 I 2006

Czołówka ligi zadaniowej

## Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
497 (WT = 1,29) i 498 (WT = 2,58)  
z numeru 3/2005

Piotr Kumor	– Olsztyn	47,42
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	46,83
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	43,95
Jerzy Cisło	– Wrocław	43,90
Marian Łupieżowicz	– Zebrydowice	40,93
Marian Kasperski	– Warszawa	36,86

Bez precedensu: dziewięć pełnych okrążeń! Piotr Kumor – trzykrotna „norma weterańska”. Bartłomiej Dyda zaś zamyka swoją czwartą rundę!

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z matematyki nr 509, 510

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**509.** Dany jest nieskończony ciąg liczb dodatnich  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Niech  $c_n$  będzie największą liczbą całkowitą, której kwadrat nie przekracza

$$(a_1 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Wykazać, że ciąg  $c_1, c_2, c_3, \dots$  jest ściśle rosnący.

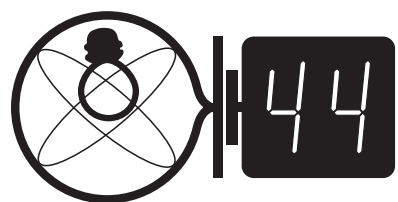
**510.** Dla ustalonej liczby naturalnej  $n$  rozważamy zbiór  $X$ , którego elementami są wszystkie ciągi  $(x_1, \dots, x_n)$  o wyrazach równych 0 lub 1. Określamy odległość

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

dla  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$ . Niech  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$  spełniają warunek  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \delta(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \ell$  (wierzchołki „trójkąta równobocznego” w przestrzeni metrycznej  $\langle X, \delta \rangle$ ). Wyznaczyć (w zależności od  $\ell$ ) najmniejszą liczbę  $r$ , dla której istnieje taki punkt  $\mathbf{s} \in X$ , że  $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = r$ .

Zadanie 510 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

# Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 I 2006

Czołówka ligi zadaniowej

## Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
396 (WT = 2,60), 397 (WT = 1,60),  
398 (WT = 2,08) i 399 (WT = 2,02)  
z numerów 4/2005 i 5/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	41,14
Marian Łupieżowicz	– Gliwice	30,22
Mateusz Łącki	– Kraków	25,87
Konrad Kapcia	– Częstochowa	25,19
Tomasz Tkocz	– Rybnik	16,47
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	15,04
Jacek Konieczny	– Poznań	13,38

Panu Witkowskiemu dopisane zostały punkty za rozwiązanie zadania 383, które zostało przysłane na nieaktualny adres redakcji i na dłuższy czas tam utknęło.

### Zadania z fizyki nr 406, 407

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**406.** Gęstość szkła wynosi  $2,5 \text{ g/cm}^3$ , a współczynnik załamania 1,5. Obliczyć natężenie strumienia światła skierowanego w górę (moc na jednostkę powierzchni prostopadłej) niezbędne do tego, aby w nim lewitowała kulka o promieniu  $0,1 \text{ mm}$  wykonana z tego szkła. Odbicie światła od powierzchni kulki, absorpcję, a także efekty falowe (dyfrakcję) należy pominąć.

**407.** Obwód elektryczny składa się ze źródeł siły elektromotorycznej i oporników podlegających prawu Ohma; ponadto w obwodzie znajduje się amperomierz oraz opornik o zmiennej oporności (niekoniecznie sąsiadujące). Stwierdzono, że przy dwóch różnych wartościach oporności tego opornika amperomierz wskazywał jednakową wartość natężenia prądu. Czy jest możliwe, żeby przy jeszcze innej oporności tego samego opornika amperomierz zmienił wskazanie?



### Rozwiązanie zadania M 1115.

Przypuśćmy, że w danym momencie na tablicy występują liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Z równości

$$(1 + a)(1 + b) = 1 + (ab + a + b)$$

wynika, że wartość wyrażenia

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n)$$

pozostaje niezmienną podczas wykonywania opisanej procedury. Zatem jeśli po 2004 krokach pozostała na tablicy liczba  $x$ , to mamy

$$1 + x = (1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2005}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2006}{2005} = 2006.$$

Stąd  $x = 2005$ .

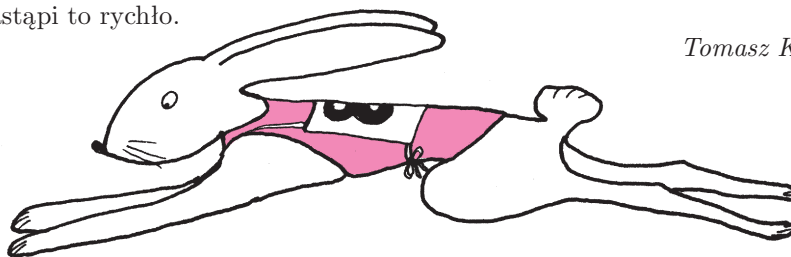


## Patrz w niebo

W roku 1996 w pochodzącym z Marsa meteorycie odkryto coś, co wyglądało na łańcuszek skamieniałych komórek. Niektórzy badacze twierdzili, że istotnie jest to fragment skamieliny żywego niegdyś organizmu, czyli dowód występowania życia na Marsie! Cała ta sprawa z czasem ucichła, co mogłoby sugerować, że zwolennicy życia na Marsie dali za wygraną. Nie jest tak do końca. Tym, co odkryli badacze, był łańcuszek drobnych ziaren magnetytu, których 20 sztuk mieści się na odcinku jednego mikrona, a które znajduje się w pewnych ziemskich bakteriach. Ziarenka te mają jakoby umożliwiać bakteriom orientowanie się względem ziemskiego pola magnetycznego, niestety – nie bardzo wiadomo, po co. Badacze słynnego meteorytu (oznaczonego jako ALH 84001), pracujący w stanowym uniwersytecie na Florydzie pod kierunkiem Imre Friedmanna, podkreślają, że żadne procesy nieorganiczne nie mogą wytworzyć takich łańcuszków, gdyż siły magnetyczne natychmiast poskręcałyby je w kłębki.

Oponenti uważają jednak, że znalezienie takiego łańcuszka w meteorycie dowodzi najprawdopodobniej tylko tego, że w ciągu kilku miliardów lat ziemskie bakterie po prostu zdołały wnikać do tego marsyjskiego okrucha. Sam Friedmann przyznaje, że ziarenka magnetytu pochodzące z meteorytu mają szereg cech zbliżonych do stwierdzonych u kryształków ziemskich (rozmiary, kształt, skład chemiczny). Wygląda więc na to, że argumenty badaczy z Florydy nie przekonują sceptyków, uważających całą sprawę za niepotrzebny zgiełk. Można nawet podziwiać wytrwałość, z jaką uczeni z Florydy bronią swoich poglądów (nawet w kilka lat po odkryciu). Jest bowiem o co walczyć i tak wyjątkowy okaz jak meteoryt ALH 84001 powinien być zbadany możliwie wszechstronnie. Rozstrzygnięcie zagadki z pewnością nastąpi po wylądowaniu ludzi na Marsie, lub po przywiezieniu z Marsa próbek gruntu, na pewno jednak nie nastąpi to rychło.

Tomasz KWAST



## Listopad

Wieczorami w listopadzie można wysoko na niebie zobaczyć dwa najodleglejsze, widoczne nieuzbrojonym okiem, obiekty – powiedzmy, przynajmniej jeden z nich. Są to oczywiście galaktyki. Pierwsza z nich to M 31 w Andromedzie, zwana Wielką Mgławicą w Andromedzie. Jest ona bardzo podobna do naszej Galaktyki. Leży w odległości 0,7 Mpc i widać ją jako plamkę o jasności 4,8 mag. Druga, M 33 w Trójkącie, jest w odległości 0,8 Mpc, czyli niewiele dalej, ale jej jasność wynosi tylko 5,8 mag. Dlatego do jej zauważenia potrzebne jest wyjątkowo dobre oko i wyjątkowo czyste powietrze. Obie te galaktyki wraz z naszą są największe w tzw. Lokalnej Grupie Galaktyk, w której skład wchodzi jeszcze kilkanaście dużo mniejszych obiektów. Z kolei cała Lokalna Grupa Galaktyk jest zapewne fragmentem ogromnej nieregularnej gromady galaktyk w Pannie, której centrum odległe jest od nas o 15 Mpc.

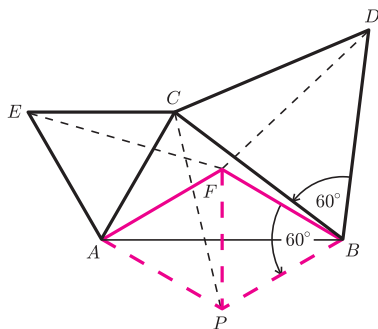
Jednego dnia, mianowicie 3 XI, najdalej kątowno od Słońca znajdują się Merkury i Wenus i obie te planety (przynajmniej Wenus) będzie widać po zachodzie Słońca. Mars jest w Baranie i wieczorem jest już wysoko na niebie, ale widać go do rana. Jowisz jest na granicy Panny i Wagi, czyli blisko Słońca, a więc nie widać go. Saturn jest w Raku, późnym wieczorem wschodzi i widać go przez całą noc. Nów Księżyc wypada 2 XI, a pełnia 16 XI. Księżyc zakryje Antaresa 4 XI, co zobaczą mieszkańcy Półwyspu Arabskiego, Indii, Indonezji i Filipin, a 28 XI zakryje Spikę, co będzie widać w Chinach i w centralnej Rosji. W listopadzie mogą być widoczne trzy roje meteorów: około 7 XI Taurydy, 15 XI Leonidy i 23 XI Andromedydy – wszystkie bardzo skromne.

T. K.

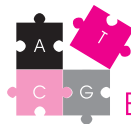


### Rozwiązanie zadania M 1116.

Oznaczmy przez  $P$  punkt symetryczny do punktu  $F$  względem prostej  $AB$ .



Wówczas trójkąty  $AFP$  i  $BFP$  są równoboczne. Zatem obracając punkty  $D$  i  $F$  wokół punktu  $B$  o kąt  $60^\circ$  uzyskamy kolejne punkty  $C$  i  $P$ . Stąd mamy  $DF = CP$ . Analogicznie dowodzimy, że  $EF = CP$ , skąd  $DF = EF$ .



## Najlepszy przyjaciel człowieka

Być może właściciele rottweilerów poczują się rozczarowani, ale to czarny pudel Shadow został pierwszym psem, którego genom zsekwencjonowano. I choć genomy kolejnych organizmów pojawiają się dziś tak często, że przestały już wzbudzać zainteresowanie, to pies, dzięki niezwykłemu związkowi z człowiekiem, zdecydowanie wyróżnia się w tym gąszczu DNA.

Pies jest najstarszym udomowionym zwierzęciem. Prawdopodobnie już 400 tys. lat temu we wschodniej Azji rozpoczął się proces udomawiania wilka – przodka wszystkich psów. Od tamtej pory psy – cały czas towarzysząc człowiekowi – rozprzestrzeniły się na cały świat.

Pierwsze oficjalne rasy pojawiły się pod koniec XIX wieku, ale ludzie prawdopodobnie już od 400 lat krzyżowali osobniki o pożądanym cechach, doprowadzając do ogromnego ich zróżnicowania, tak pod względem charakteru, jak i wyglądu. Dziś znanych jest blisko 400 ras psów, które współczesne badania genetyczne potrafią przypisać do 4 głównych grup: (a) najbliższe wilkowi wschodnie rasy jak chow-chow oraz syberyjski husky i malamut, (b) pokrewne mastiffowi – bokser, buldog, rottweiler i nowofundland, (c) owczarki – szetlandzki i collie, a także bernardyn i chart oraz (d) teriery i pozostałe psy, głównie pochodzenia europejskiego, których nie można dokładnie podzielić ze względu na małą rozdzielczość metody (rysunek na okładce).

Hodowla, sztucznie podtrzymująca barierę rozrodczą między rasami, przyczynia się do zwiększania częstości genów, które odpowiadają za pożądane u danej rasy cechy. Zdarza się jednak, że wraz z nimi selekcjonuje się geny neutralne (np. wpływające na kolor sierści) lub szkodliwe (np. odpowiedzialne za podatność na choroby tarczycy). Szansa na jednoczesne przekazanie dwóch genów potomstwu zależy między innymi od ich wzajemnego położenia w genomie. Geny położone blisko dużo trudniej rozdzielić i zwykle przekazywane są one razem. Jeśli więc taki hipotetyczny gen odpowiedzialny za zaganianie owiec leży blisko genu podatności na choroby tarczycy, hodowcy, wybierając najlepsze owczarki, przyczyniają się do zwiększenia częstości chorób tarczycy wśród psów tej rasy, jak ma to miejsce w przypadku owczarków szetlandzkich.

Kolejnym zjawiskiem, zachodzącym w stosunkowo niewielkich populacjach psów krzyżowanych w obrębie rasy, jest pojawienie się wielu chorób dziedziczonych recesywnie (tzn. takich, w których do wystąpienia objawów konieczne są dwie nieprawidłowe wersje genu). Jest to identyczne zjawisko jak to, które obserwujemy w przypadku związków blisko spokrewnionych ludzi –

wśród aszkenazyjskich Żydów, od pokoleń zawierających związki między sobą, choroby genetyczne występują częściej niż w innych populacjach.

Na skutek izolacji rozrodczej blisko połowa psich chorób genetycznych występuje u najwyżej kilku ras. Zdecydowana większość tych chorób (np. nowotwory) powodowana jest przez nieprawidłowe funkcjonowanie wielu genów – a badanie u ludzi wielogenowych cech jest niezwykle trudne, wymaga bowiem analizy wielopokoleniowych rodzin o udokumentowanej historii (w tym historii chorób). W populacji człowieka, gatunku bardzo mobilnego, bariery rozrodcze są niewielkie, stąd poszczególne warianty genów są stale „rozwadniane” w całej populacji.

Tych wad nie mają psy. Od wielu pokoleń są izolowane reprodukcyjnie, dużo łatwiej też o psie próbki DNA, dane genealogiczne i historie choroby. Psy zapadają na te same choroby co ludzie – na przykład genetyczne podłoże narkolepsji (napadów snu) oraz dziedzicznego nowotworu nerki u ludzi poznano dzięki badaniom nad chorującymi na nie dobermanami i owczarkami niemieckimi. Psy wykazują też szereg zaburzeń psychicznych, analogicznych do występujących u ludzi (napady paniki, zaburzenia poznawcze czy napady obsesyjnego zachowania, u bulterierów objawiające się gonieniem własnego ogona).

Jednak najbardziej fascynujący u psów jest ich związek z człowiekiem, trwająca tysiąclecia selekcja, dzięki której psy rozumieją nas lepiej, niż my rozumiemy jakikolwiek inny gatunek. Jak wiedzą wszyscy właściciele psów, a co potwierdzają badania, psy potrafią wyczuwać nasze intencje, rozumieć nas – dosłownie, wreszcie „wchodzić w naszą skórę” i wyczuwać się w nas.

Kiedy schowamy jedzenie do jednego z dwóch identycznie wyglądających szczelnych pudełek, a następnie głosem, gestem lub spojrzeniem wskażemy psu, gdzie znajdzie przysmak, trafi on bezbłędnie. Nie brzmi to nadzwyczajnie, wszyscy wiemy, że psy potrafią takie rzeczy. Ale potrafią to także już 6-tygodniowe szczeniaki, które nie miały wcześniej kontaktu z człowiekiem. Natomiast wychowywane przez ludzi wilki nie radzą sobie z tym zadaniem, nawet, gdy wskazuje się im właściwe pudełko ręką.

Psy rozumieją: artykuł opisujący *Rico*, który umie rozpoznawać 200 różnych przedmiotów, a także identyfikować nowe rzeczy przez wykluczenie już znanych, stał się jednym z najczęściej cytowanych w dziedzinie psychologii rozwojowej i poznawczej.

Dzięki poznaniu genomu psa zidentyfikowanie genów odpowiedzialnych za tak złożone zachowania będzie dużo łatwiejsze i na pewno przyczyni się do poznania genetycznego podłoża procesu udomowienia wilka. Kolejny psi genom, tym razem boksera Tasha, właśnie został zsekwencjonowany.

Jarek BRYK

Współpraca: Anna LORENC