SPIS TREŚCI
NUMERU 10 (377)

Interferencja fullerenów
Paweł Tomasz Pęczkowski str. 1

Zadania str. 3

Maksymalizacja zysków zarządzanego kapitału w różnych typach gier ekonomiczno–hazardowych
Piotr Wołowik str. 4

Zobaczyć niewidzialne (czyli bezdotykowy pomiar temperatury)
Wiera Oliferuk
Michał Korch str. 6

Mała Delta:
Jednoznaczność rozkładu na składniki
Wiktor Bartol str. 8

Aktualności str. 9

Średnie w trapezie
Joanna Jaszuńska str.10

Ciągi jednomonotoniczne, funkcje supermodularne i nierówności
Lech Stawikowski str.12

Klub 44 str.14

Patrz w niebo str.16

Październik str.16

Kącik biologiczny str.17

W następnym numerze:

Ile jest zajączków?

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichocki, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, doc. dr Tadeusz Jarzębowski, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nacz. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delty”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: (22) 55-44-545.

Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. (22) 663-87-52, (22) 663-11-46) Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące**. Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

   Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.
Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
http://www.mimuw.edu.pl/delta

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Interferencja fullerenów

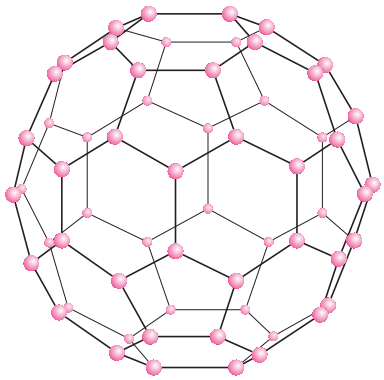
Paweł Tomasz PĘCZKOWSKI *

Wstęp

Wkrótce po ogłoszeniu teorii falowej natury materii przez de Broglie'a w 1924 roku zostało przeprowadzonych wiele eksperymentów ją potwierdzających: dla elektronu (Davisson, Germer, 1927), atomu i cząsteczki wodoru (Estermann, Stern, 1930) i neutronu (v. Haban Jnr, Preiswerk). Znacznie później wykonano interferencyjny eksperyment Younga z dwiema szczelinami: dla elektronów (Jönsson, 1974), dla neutronów (Zeilinger ze współpracownikami, 1988), dla atomów (Carnal, Mlynek, 1991), dla małych cząsteczek np. I_2 (Schöllkopf, Toennies, 1994) i gazów szlachetnych (Schöllkopf, Toennies, 1996).

Opierając się na tych historycznych eksperymentach, zadajemy sobie pytanie, dla jak dużych cząsteczek można zaobserwować interferencję. W ostatnich latach przeprowadzono eksperymenty z prawie makroskopowymi obiektami: z fullerenami C_{60} i C_{70}. Były one bardzo trudne do przeprowadzenia, gdyż cząsteczkom o dużej masie odpowiadają krótkie fale de Broglie'a.

Fullereny



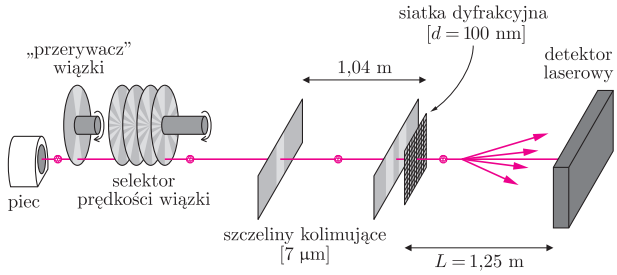
Rys. 1. Struktura przestrzenna fullerenu C_{60}.

Fullereny są, obok grafitu i diamentu, alotropową odmianą węgla. Są to cząsteczki węgla zawierające od kilkudziesięciu do kilkuset atomów tego pierwiastka. Tworzą one zbliżoną do kuli strukturę złożoną z pięciokątów i sześciokątów foremnych (rys. 1). Najlepiej zbadaną strukturą jest cząsteczka C_{60} złożona z 60 atomów węgla. Cząsteczki te mają średnicę nieco większą od 1 nm. Cząsteczki C_{60} mają symetryczną strukturę i dzięki temu są niezwykle trwałe (istnienie bardzo trwałych cząsteczek, powstających ze zwiniętych płaszczyzn grafitu przewidział już w 1966 r. David E. H. Jones). Również trwałe są cząsteczki C_{70} przypominające swym kształtem piłkę do rugby (tzn. piłkę w kształcie wrzeciona). Największym znanym fullerenem jest cząsteczka C_{960}.

Fullereny po raz pierwszy zostały zaobserwowane w 1985 roku przez H.W. Kroto z Uniwersytetu w Sussex w Wielkiej Brytanii oraz R.E. Smalleya i R.F. Curla z Uniwersytetu Rice w Stanach Zjednoczonych. Odkrycie to zostało uhonorowane Nagrodą Nobla w 1996 r. Nazwa *fullereny* pochodzi od nazwiska amerykańskiego konstruktora, budowniczego i matematyka, R. Buckminstera Fullera, który konstruował kopuły przypominające fragment cząsteczki C_{60}.

Eksperyment interferencyjny z fullerenami

Można zastanawiać się, czy złożoność wewnętrzna fullerenów nie zniszczy ich zachowania kwantowego. Opisywany tutaj eksperyment przeprowadzili: O. Nairz, M. Arndt i A. Zielinger z Uniwersytetu Wiedeńskiego (2002). Schemat układu eksperymentalnego jest pokazany na rysunku 2.



Rys. 2. Układ doświadczalny eksperymentu z interferencją fullerenów.

Układ przypomina standardowe doświadczenie Younga z dwiema szczelinami. Podobnie jak w tym historycznym doświadczeniu układ zawiera cztery elementy: źródło wiązki, kolimator, siatkę dyfrakcyjną i detektor.

Aby doprowadzić proszek fullerenowy do stanu gazowego, ogrzewa się go w piecu ceramicznym w temperaturze około $T = 900$ K w celu wywołania sublimacji.

* Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Ciśnienie pary jest wtedy dostatecznie duże, żeby kolejno wyrzucić cząsteczki przez małą szczelinę w piecu. Rozkład prędkości cząsteczek ma średnią $v = 200$ m/s i dyspersję $\frac{\Delta v}{v} \approx 60\%$. Aby obliczyć oczekiwane położenie dyfrakcyjnego wzmocnienia sygnału, musimy znać długość fali de Broglie'a cząsteczki (λ). Jest ona dana wzorem $\lambda = \frac{h}{mv}$, gdzie mv oznacza pęd cząsteczki, a h jest stałą Plancka. Masa cząsteczki C_{60} wynosi $m = 1{,}2 \cdot 10^{-24}$ kg, co pozwala oszacować średnią długość fali $\lambda = 2{,}8 \cdot 10^{-12}$ m. Interesujące jest też porównanie długości fali de Broglie'a cząsteczki fullerenu z jej rozmiarem. Średnica cząsteczki wynosi około 10^{-9} m, czyli około 350 razy więcej niż długość fali de Broglie'a λ. Ponieważ długość fali de Broglie'a fullerenu jest mała w stosunku do wielkości obiektu, należy zastosować odpowiedni układ doświadczalny, aby zjawisko interferencji mogło być wykryte.

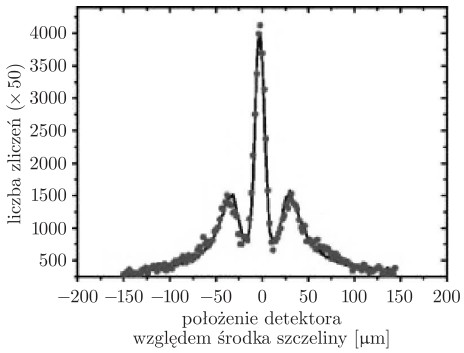
Jako układu uginającego wiązkę użyto siatki zbudowanej z azotku krzemu o stałej sieci $d = 10^{-7}$ m mającej otwory szerokości $s = (55 \pm 5) \cdot 10^{-9}$ m.

W odległości $L = 1{,}25$ m za siatką dyfrakcyjną został umieszczony detektor. Można wyznaczyć, jaki jest odstęp między dwoma maksimami, obliczając kąt ugięcia fali Θ jako iloraz długości fali λ i stałej siatki dyfrakcyjnej d:

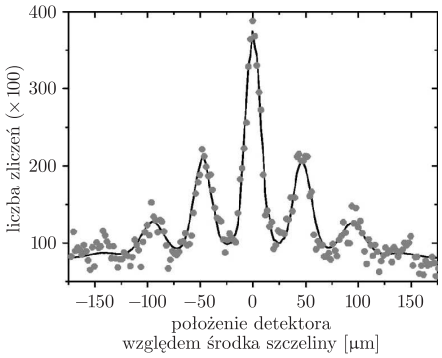
$$\Theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{2{,}8 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}}{10^{-7}\ \mathrm{m}} = 28\ \mu\mathrm{rad}.$$

Odległość między dwoma maksimami w detektorze wynosi $L \cdot \Theta = 1{,}25\ \mathrm{m} \cdot 28\ \mu\mathrm{rad} = 35 \cdot 10^{-6}$ m. Tak mała odległość między prążkami interferencyjnymi wymaga detektora o bardzo wysokiej rozdzielczości. W eksperymencie zastosowano detektor laserowy. Wszystkie cząsteczki fullerenów, które przechodzą przez wiązkę laserową, zostają ogrzane do temperatury ponad 3000 K i ulegają zjonizowaniu. Dodatnie jony fullerenów są następnie przyspieszane w kierunku elektrody, z której wybijają elektrony. Te elektrony są zliczane.

Doświadczenie wymaga zapewnienia spójności wiązki fullerenów. Spójność przestrzenna została wymuszona przez pokazany na rysunku 2 układ kolimatorów. Pod uwagę musi być wzięta również spójność widmowa źródła, ponieważ cząsteczki z różnymi prędkościami (a zatem z różnymi długościami fali) powodują rozmycie obrazu dyfrakcyjnego. Żeby zobaczyć prążki interferencyjne wyższych rzędów, trzeba zwiększyć spójność widmową, a zatem zmniejszyć szerokość rozkładu prędkości cząsteczek. W tym celu tuż za piecem umieszczono mechaniczny selektor prędkości. Składał się on z czterech obracających się na wspólnej osi dysków ze szczelinami. Przez selektor przechodziły tylko cząsteczki o takich prędkościach, które odpowiadały przejściu przez tarcze w momencie, gdy na drodze znajdowała się szczelina. Zmieniając prędkość rotacji dysków selektora, można uzyskać transmisję cząsteczek o pożądanej prędkości. Żeby ograniczyć dyspersję czasu lotu cząsteczek, wiązka fullerenów była „siekana" (przez „przerywacz wiązki") tuż za źródłem. Dzięki zastosowaniu selektora prędkości w doświadczeniu uzyskano średnią prędkość cząsteczek 117 m/s (co odpowiada długości fali de Broglie'a $4{,}6 \cdot 10^{-12}$ m) i dyspersję $\frac{\Delta v}{v} \approx 17\%$. Jest oczywiste, że zwiększenie długości fali prowadzi do lepszej separacji pików dyfrakcyjnych, co można zobaczyć, porównując rysunki 3 i 4.



Rys. 3. Obraz dyfrakcyjny dla prędkości 200 m/s.



Rys. 4. Obraz dyfrakcyjny dla prędkości 117 m/s.

Wyniki interferencji mogą być wyjaśnione przez standardową teorię dyfrakcji Kirchhoffa dla siatki o stałej 10^{-7} m. Bierzemy pod uwagę szerokość kolimatora i doświadczalnie wyznaczamy rozkład prędkości. Parametry potrzebne do szacowania to: szerokość kolimatora, szerokość otworów siatki dyfrakcyjnej, szerokość promienia lasera, czynnik skalujący. Na obu rysunkach kółeczka oznaczają dane eksperymentalne, a linia ciągła oznacza wynik symulacji komputerowej modelu opartego na teorii dyfrakcji Kirchhoffa–Fresnela.

Wnioski

Obserwacja interferencji kwantowej fullerenów jest interesująca z wielu powodów. Występowanie tego zjawiska oznacza, że możliwe jest uzyskanie obrazu interferencyjnego dla pojedynczej cząsteczki, oddzielonej od innych cząsteczek. Granica wielkości obiektu, dla którego można potwierdzić eksperymentalnie zasady kwantowe, jest wciąż sprawą otwartą. Byłoby interesujące zbadać interferencję obiektów o rozmiarach takich samych lub nawet większych niż struktura dyfrakcyjna. Analogiczne metody do opisanych mogą być użyte do badania interferencji kwantowej większych molekuł, aż do małych wirusów.

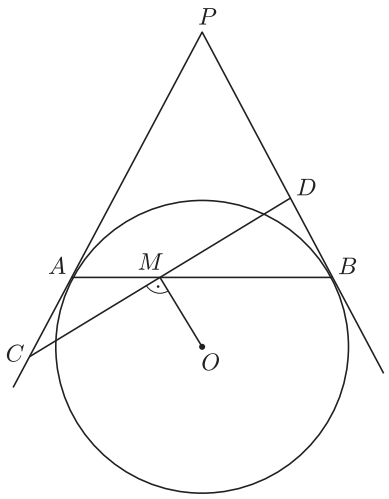
Literatura

[1] A. Huczko, *Fulereny. Nobel za węglowe piłeczki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.
[2] P. Yam, *Ojciec fullerenów [Sylwetka: Richard E. Smalley]*, Świat Nauki, listopad 1993.
[3] *Nagrody Nobla* 1996, Świat Nauki, marzec 1997.
[4] O. Nairz, M. Arndt, A.Zeilinger, *Quantum interference experiments with large molecules*, Am. J. Phys. **71** (4), April 2003.

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1111. Z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu o środku O poprowadzono dwie styczne PA i PB (rys. 1). Przez punkt M leżący na odcinku AB poprowadzono prostą prostopadłą do prostej OM i przecinającą proste AP i BP odpowiednio w punktach C i D. Wykazać, że $CM = DM$.
Rozwiązanie na str. 10



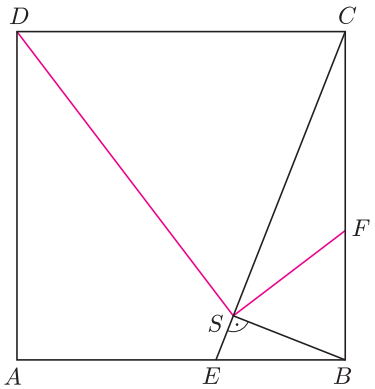
Rys. 1

M 1112. Udowodnić, że jeśli liczby a, b, c, d, e są dodatnie, to

$$\frac{a}{e+a+b}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{c+d+e}+\frac{e}{d+e+a}<2\,.$$

Rozwiązanie na str. 12

M 1113. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$, przy czym $BE = BF$ (rys. 2). Punkt S jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą CE. Wykazać, że $\sphericalangle DSF = 90^\circ$.
Rozwiązanie na str. 13



Rys. 2

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 653. Idealna chłodnica działająca za pomocą odwróconego cyklu Carnota ma stałą w czasie moc (tzn. ilość pobieranej ze źródeł zewnętrznych energii w jednostce czasu) równą P. Ochładza ona ciało o pojemności cieplnej C, stałej w rozpatrywanym przedziale temperatur, oddając ciepło do otoczenia. Chłodnica zaczyna działanie, gdy chłodzone ciało ma temperaturę otoczenia T_1. Jaka będzie szybkość spadania temperatury ciała w momencie, gdy spadnie ona do $T < T_1$?
Rozwiązanie na str. 6

F 654. Rozpatrzmy idealną chłodnicę z poprzedniego zadania. Przypuśćmy, że izolacja cieplna między ciałem i otoczeniem nie jest doskonała i skutkiem tego z otoczenia do ciała przepływa cały czas ciepło. Ilość tego ciepła w jednostce czasu jest proporcjonalna do różnicy temperatur między nimi i wynosi $\kappa(T_1 - T)$. Do jakiej najniższej temperatury jest w stanie ochłodzić ciało ta chłodnica?
Rozwiązanie na str. 7

Maksymalizacja zysków zarządzanego kapitału w różnych typach gier ekonomiczno–hazardowych

Piotr WOŁOWIK *

Rozważmy następującą grę teoretyczną z wypłatą 5:1, która wprowadzi nas w zasugerowaną w tytule problematykę.

Gra polega na obstawianiu wyników rzutu kostką. Możliwe jest obstawienie dowolnej ścianki dowolną liczbę razy. Na każdy postawiony zakład, w przypadku trafienia, wypłata jest pięciokrotnie zwielokrotniona. Przy stawce 1 zł wynosi ona 5 zł netto. Oczywiście w przypadku błędnego typowania postawiona stawka jest w całości tracona.

Gra w takim przypadku jest grą sprawiedliwą z wartością oczekiwaną równą zeru:

$$E(X) = \frac{1}{6}(5) + 5\left(\frac{1}{6}(-1)\right) = 0. \tag{1}$$

Rozważmy jednak przypadek gry, gdy kostka jest lekko niesymetryczna – jedna ścianka (załóżmy, że „jedynka") wypada statystycznie nieznacznie częściej niż pozostałe. Załóżmy, że stanowi to 19% wszystkich wyników. Pozostałe ścianki wypadają statystycznie równo – po 16,2% (w przypadku kostki „sprawiedliwej" każda ze stron wypada statystycznie 16,(6)% ze wszystkich wyników).

Gracz wie o tej niesymetryczności i decyduje się podjąć grę. Dysponuje kwotą początkową 100 zł i nieustannie obstawia korzystną dla siebie „ściankę – jedynkę". Decyduje się na bezpieczną strategię gry. Stawia 1 zł na każdy zakład i w zależności od wyniku zyskuje 5 lub traci 1 zł.

Jeżeli rozegra 1 000 gier, to statystycznie rzecz biorąc, wygra średnio 190, a przegra 810 razy. Jego średni zarobek wyniesie 140 zł netto.

* Instytut Elektroniki i Telekomunikacji, Politechnika Poznańska

Gracz nasz mógłby wybrać inny wariant obstawiania – polegający np. na przeznaczaniu na następny zakład pewnego stałego procentu posiadanej kwoty. Jeżeli procent ten byłby wysoki, np. 50% – to jego zysk końcowy zdeterminowany byłby wynikami początkowych gier. Przy rozpoczynającym ciągu przeważających porażek straciłby znaczącą część kapitału, której nie zdążyłby w dalszej części gry odrobić. Zakończyłby wtedy grę poniżej kwoty początkowej 100 zł, mimo iż gra była dla niego korzystna.

Z kolei, przeznaczony na kolejne gry mały procent aktualnie posiadanego przez gracza kapitału, np. 2%, byłby strategią bezpieczną, jakkolwiek niekorzystną, jeśli chodzi o optimum zysku, jakie mógłby w niej uzyskać.

Powstaje pytanie: jak gracz powinien obstawiać (jaki procent posiadanego kapitału powinien przeznaczać na kolejne gry), aby zmaksymalizować swój zysk i jednocześnie zminimalizować ewentualna stratę?

Stwórzmy dla powyższej gry odpowiedni model matematyczny, starając się, aby dawał on rozwiązanie najbardziej korzystne finansowo.

Wprowadźmy parametr G, określający (przy liczbie rozgrywanych gier N dążącej do nieskończoności) średni wzrost kapitału gracza

$$G = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} u(x), \tag{2}$$

gdzie x to stosunek kapitału końcowego do początkowego. Formuła ta wynika z uwzględnienia dla naszego modelu stosownej funkcji użyteczności $u(x)$. Określa ona „subiektywne" zadowolenie gracza ze wzrostu jego kapitału względem wartości początkowej.

Funkcja taka, w rozważanej w naszym przypadku grze, powinna spełniać następujące założenia:

1 – być funkcją nieliniową (radość ze wzrostu naszego kapitału ze 100 do 1 000 jest większa niż ze wzbogacenia się z 1 000 100 do 1 001 000),

2 – być funkcją rosnącą (im więcej zysku, tym lepiej),

3 – dla argumentów bliskich zeru powinna być bardzo mała (wtedy gra staje się coraz bardziej nieopłacalna lub nawet niemożliwa),

4 – podwojenie kapitału gracza powinno dawać taką samą radość, bez względu na to, jaką kwotę podwoił.

Jedyną funkcją ciągłą, spełniającą te warunki, jest funkcja postaci $a \ln x + b$ ($a > 0$ i dowolne b).

Dla uproszczenia obliczeń możemy przyjąć $a = 1$ i $b = 0$. Nie wpływa to na wynik, a jedynie stanowi ustalenie rozważanej funkcji użyteczności $u(x)$ (nie mamy sprecyzowanej „subiektywnej" jednostki szczęścia, więc możemy takie uproszczenie zastosować).

Po zastosowaniu naszej funkcji użyteczności otrzymujemy

$$G = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left(\ln \frac{V_N}{V_0}\right), \tag{3}$$

gdzie V_0 – kapitał początkowy gracza, V_N – jego kapitał po N zakładach.

Jeżeli gracz zdecyduje się stawiać na każdy zakład odpowiednią, stałą część posiadanej kwoty pieniężnej f – to jego kapitał po N zakładach wynosić będzie

$$V_N = (1 + kf)^W (1 - f)^L V_0, \tag{4}$$

gdzie W, L to liczba odpowiednio zwycięstw i porażek podczas serii N ($= W + L$) gier, k określa (przy danym prawdopodobieństwie) wypłatę za sukces – w naszej grze $k = 5$.

Podstawiając wyrażenie (4) do (3), otrzymujemy

$$G = \lim_{N\to\infty} \frac{W}{N}\ln(1 + kf) + \frac{L}{N}\ln(1 - f) = \\ = p\ln(1 + kf) + (1 - p)\ln(1 - f). \tag{5}$$

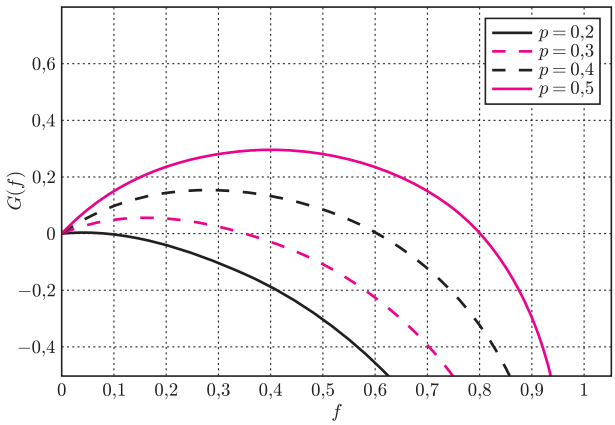
Znajdźmy teraz ekstremum tej funkcji ze względu na wartość parametru f, czyli rozwiążmy równanie:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}f} = 0. \tag{6}$$

Otrzymujemy maksimum funkcji (5) dla

$$f^* = \frac{(k + 1)p - 1}{k}. \tag{7}$$

W naszym przypadku $k = 5$, $p = 0{,}19$ – czyli $f^* = 0{,}028$.



Oś odciętych wyraża współczynnik procentowego udziału aktualnie posiadanej kwoty pieniężnej w bieżącym zakładzie. Oś rzędnych reprezentuje wartości funkcji $G(f)$. Na wykresie zaobserwować możemy, że każda z tych funkcji, dla określonych prawdopodobieństw, ma swoje maksimum, które jest przedmiotem naszego zainteresowania.

Wracając do przypadku naszej gry, gracz powinien, na każdy z kolejnych zakładów stawiać 2,8% aktualnie posiadanego kapitału.

Tak więc, w pierwszej grze powinien postawić 2,8 zł. Jeżeli wygra – dysponować będzie kwotą 114 zł. W drugiej powinien postawić 2,8% · 114 zł = 3,19 zł. Jeżeli przegra, to jego kapitał wynosić będzie 110,81 zł. W trzeciej grze powinien postawić 2,8% · 110,81 zł = 3,10 zł itd.

Powiększy to jego kapitał po N grach średnio w razy, gdzie

$$w = \exp(NG(f^*)). \tag{8}$$

Obliczmy, ile statystycznie wynosić będzie jego kapitał po rozegraniu tysięcznej gry. Mamy

$$G(f^*) = 0{,}19\ln(1 + 0{,}14) + 0{,}81\ln(1 - 0{,}028) = \\ = 0{,}00189 \tag{9}$$

oraz

$$w = \exp(1\,000(0{,}00189)) = 6{,}63. \tag{10}$$

Jego średni kapitał (po rozegraniu tysięcznej partii) wyniósłby 100 zł · 6,63 = 663 zł. Na czysto zyskałby aż 563 zł!!!

Reasumując, przedstawiony tutaj na przykładzie prostej gry system optymalnego stawkowania znajduje swoją użyteczność tylko w przypadkach posiadania w grze statystycznie niewielkiej przewagi (gry z dodatnią wartością oczekiwaną, $f > 0$). W innych przypadkach jest on bezwartościowy (nawet w przypadku sprawiedliwej gry równych szans i wypłat $f = 0$).

Strategia taka może być za to stosowana w przypadku gry giełdowej (oczywiście po odpowiedniej modyfikacji). Przewaga, jaką tu mamy, to stosowna wiedza ekonomiczna.

Drugą dziedziną może być możliwość jej wykorzystania w sportowych grach bukmacherskich. O ile tutaj proponowane stawki na określone zdarzenia sportowe wyliczone są w specyficzny, korzystny dla bukmachera sposób, to po naszej stronie, jako hipotetyczną przewagę, mamy znajomość realiów sportowych rządzących daną dyscypliną.

Zdarzenia sportowe tak rozpatrywane można porównać do typowego rynku finansowego, w którym przedmiotem „analizy technicznej" są wyniki drużyn osiągane w aktualnie rozgrywanym sezonie.

[1] Epstein R. A., *The Theory of Gambling and Statistical Logic*, Academic Press, Inc. 1977.

[2] Thorp E. O., *The Kelly Criterion in Black Jack, Sports Betting and The Stock Market*, The 10th International Conference on Gambling and Risk Taking, Montreal, June 1997.

Zobaczyć niewidzialne (czyli bezdotykowy pomiar temperatury)

Wiera OLIFERUK *

Michał KORCH **

Istnieje wiele ciał emitujących światło. Zwykle światłem nazywamy fale elektromagnetyczne w zakresie widzialnym. Jest to niewielki przedział długości fal rozciągający się od około 0,4 do 0,7 μm.

Barwa świecącego ciała zależy od jego temperatury. Łatwo można się o tym przekonać, obserwując barwę spinacza ogrzewanego w płomieniu kuchenki gazowej. W miarę wzrostu temperatury zaczyna on świecić ciemnoczerwono, potem nawet żółto. W miarę wzrostu temperatury spinacz nie tylko zmienia swoją barwę, ale także świeci coraz intensywniej. Ciała najsłabiej nagrzane świecą ciemnoczerwono. Zatem można przypuszczać, że ciała jeszcze chłodniejsze emitują promieniowanie podczerwone. Promieniowanie, które odczuwa ręka zbliżona do gorącego pieca lub kaloryfera, jest niewidoczne. Gdyby nasz zmysł wzroku reagował na podczerwień, jak oczy niektórych zwierząt, wówczas moglibyśmy powiedzieć, że ciała mniej nagrzane świecą „barwą podczerwoną". Zwierzęciem, którego przedział widzenia jest przesunięty w stronę ultrafioletu, jest pszczoła (zobacz rysunek 1 na tylnej okładce).

Energia, którą emituje dane ciało, nie może się wziąć znikąd. Na przykład, w żarówce światło powstaje kosztem energii prądu elektrycznego, przepływającego przez włókno żarówki. Jednym z możliwych źródeł energii emitowanej przez promieniujące ciało jest padające na nie promieniowanie. Jeśli temperatura ciała promieniującego jest taka, jak temperatura otoczenia, to ciało jest w równowadze termodynamicznej z otoczeniem. Okazuje się, że w stanie równowagi między tym, co ciało emituje i tym, co absorbuje, zachodzi ścisła relacja.

Dla scharakteryzowania widmowego rozkładu promieniowania równowagowego wprowadzono pojęcie zdolności emisyjnej ciała $E(\lambda, T)$, którą definiujemy jako energię fal elektromagnetycznych o długości fali λ emitowanych w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni ciała ogrzanego do temperatury T, $E(\lambda, T) = \frac{\Delta W_e}{\Delta \lambda}$, gdzie ΔW_e to energia promieniowania elektromagnetycznego wysyłanego w ciągu jednostki czasu z jednostki powierzchni ciała w przedziale długości fali od λ do $\lambda + \Delta\lambda$.

Zdolność absorpcyjna ciała określa, jaka część energii fali elektromagnetycznej o długości fali zawartej w przedziale fali od λ do $\lambda + \Delta\lambda$, padającej w jednostce czasu na jednostkę powierzchni ciała, zostaje pochłonięta, $A(\lambda, T) = \frac{\Delta W_e}{\Delta W}$.

Zagadnienie promieniowania ciał w stanie równowagi było przedmiotem wielu badań. Pierwszym, który uzyskał tu prawo ilościowe, był niemiecki fizyk, Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887). Głosi ono, że dla każdego ciała stosunek zdolności emisyjnej tego ciała do zdolności absorpcyjnej nie zależy od jego natury; jest funkcją jedynie długości fali i temperatury, $\frac{E(\lambda,T)}{A(\lambda,T)} = \varepsilon(\lambda, T)$. Prawo to nazwano prawem Kirchhoffa.

Przedmiot, który pochłaniałby fale elektromagnetyczne o dowolnej długości i niczego by nie odbijał, nazywamy *ciałem doskonale czarnym*. Dobry model ciała doskonale czarnego nosimy ze sobą. Jest nim źrenica oka. Zdolność absorpcyjna ciała doskonale czarnego, zgodnie z jego definicją, jest równa jedności dla każdej wartości temperatury i każdej długości fali. Wynika stąd ważny wniosek, że owa uniwersalna funkcja $\varepsilon(\lambda, T)$ jest równa zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego i, co więcej, funkcja ta nie zależy od tego, w jaki sposób sporządzimy ciało czarne! Oczywiście, ciał doskonałych w przyrodzie nie ma, ale zawsze możemy znaleźć w przyrodzie takie, które w dobrym przybliżeniu spełnia warunki ciała doskonale czarnego.

Zależność zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego o danej temperaturze od długości emitowanej fali ma maksimum. Doświadczalne badania promieniowania ciała doskonale czarnego dla różnych wartości temperatury

Rozwiązanie zadania F 653.
Niech W oznacza pracę wykonaną nad układem, czyli energię pobraną ze źródeł zewnętrznych, a Q ciepło odebrane z chłodzonego ciała, oba podczas jednego cyklu. Z zasady zachowania energii ciepło przekazane do otoczenia to $Q + W$. Chłodnica jest idealna, więc zmiana entropii podczas cyklu wynosi 0.

$$\Delta S = \frac{Q+W}{T_1} - \frac{Q}{T} = 0,$$

czyli

$$Q = W\,\frac{T}{T_1 - T}.$$

W niewielkim czasie Δt chłodnica pobiera energię $P\,\Delta t$. Jeśli oznaczymy przez ΔT zmianę temperatury chłodzonego ciała w czasie Δt, to mamy z powyższego równania

$$-C\Delta T = P\,\Delta t\,\frac{T}{T_1 - T},$$

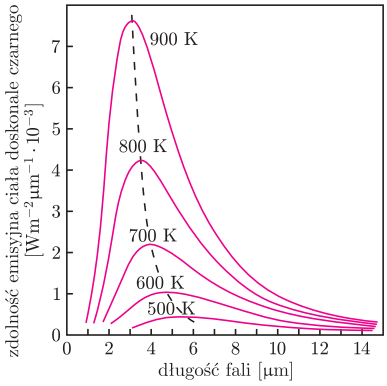
a więc

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{PT}{C(T_1 - T)}.$$

Wartość bezwzględna tej funkcji maleje od nieskończoności dla $T = T_1$ do 0 dla $T = 0$, tzn. chłodzenie zachodzi coraz wolniej, mimo stałej mocy i pojemności cieplnej ciała.

* Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

** student Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego



wykazały, że wraz z jej wzrostem owo maksimum przesuwa się w stronę krótszych fal (rysunek obok). Fakt ten wyraża tzw. prawo przesunięć Wiena, głoszące, że $\lambda_m = \frac{b}{T}$, gdzie $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}$ m · K. Nazwa prawa pochodzi od nazwiska wybitnego fizyka niemieckiego, laureata Nagrody Nobla, Wilhelma Wiena (1864–1928). Łatwo stwierdzić, że maksimum zdolności emisyjnej dla wartości temperatury, z którymi spotykamy się w codziennym życiu, odpowiada zakresowi promieniowania podczerwonego.

Pole powierzchni pod krzywą $\varepsilon(\lambda, T)$, odpowiadające danej temperaturze, jest równe zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego w całym zakresie długości fal. Wykorzystując dostępne pod koniec XIX wieku wyniki eksperymentalne, austriacki fizyk Josef Stefan wykazał, że całkowita zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego wynosi: $\varepsilon(T) = \int_0^\infty \varepsilon(\lambda, T)\mathrm{d}\lambda = \sigma T^4$, gdzie stała $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$ jest zwana stałą Stefana.

Inny wielki fizyk austriacki, Ludwig Boltzmann, wyprowadził powyższą zależność z praw termodynamiki i elektrodynamiki. Stąd nosi ona obecnie nazwę prawa Stefana–Boltzmanna.

Zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego jest więc jednoznaczną funkcją temperatury! To stanowi podstawę bezdotykowego pomiaru temperatury, zasadę pracy termografu – sztucznego oka, które „widzi” w podczerwieni. Mierząc powierzchniowy rozkład mocy promieniowania podczerwonego ciała doskonale czarnego, można wyznaczyć rozkład temperatury na jego powierzchni. Sercem sztucznego oka jest detektor (czujnik) promieniowania podczerwonego. Jest to przetwornik, który pochłania energię tego promieniowania i zamienia ją na sygnał elektryczny. Sygnał elektryczny na wyjściu detektora można wzmocnić i za pomocą przetwornika analogowo-cyfrowego przekształcić tak, że na ekranie komputera otrzymamy rozkład mocy promieniowania podczerwonego emitowanego przez badaną powierzchnię.

Zwykle jednak badanym obiektem jest ciało rzeczywiste, ciało, które nie tylko emituje i pochłania promieniowanie elektromagnetyczne, ale także je odbija i przepuszcza. Dla badanej powierzchni o danej temperaturze zależność między wielkościami charakteryzującymi zjawiska odbicia, pochłaniania i transmisji padającego na nią promieniowania elektromagnetycznego, w warunkach równowagi termodynamicznej, jest następująca: $\theta_\lambda + \varsigma_\lambda + \tau_\lambda = 1$, gdzie θ_λ, ς_λ, τ_λ – odpowiednio stosunki mocy promieniowania o długości fali λ: odbitego od powierzchni ciała, pochłoniętego i przechodzącego przez ciało, do mocy promieniowania o takiej samej długości fali padającego na powierzchnię. Dla ciał nieprzezroczystych $\tau_\lambda = 0$, więc $\theta_\lambda = 1 - \varsigma_\lambda$.

Zgodnie z prawem Kirchhoffa $\varsigma_\lambda = \kappa_\lambda$, gdzie: κ_λ – emisyjność, definiowana jako stosunek mocy promieniowania o długości fali λ przez jednostkę powierzchni ciała o określonej temperaturze do mocy promieniowania emitowanego przez jednostkę powierzchni ciała doskonale czarnego o tej samej temperaturze. Zatem $\theta_\lambda = 1 - \kappa_\lambda$

W pomiarach temperatury przyjmuje się zwykle wartość średnią emisyjności κ dla zakresu fal, na które reaguje dany termograf. Sygnał na jego wyjściu podczas skanowania powierzchni ciała rzeczywistego, nieprzezroczystego dla fal podczerwonych, wynosi: $s = \kappa_\lambda f(T_0) + (1 - \kappa) f(T_0)$, gdzie $f(T_0)$ to sygnał wywołany promieniowaniem ciała doskonale czarnego o temperaturze T_0, $f(T_a) = I_a$ – sygnał wywołany promieniowaniem ciała doskonale czarnego o temperaturze otoczenia.

Mając krzywą kalibracji $f(T)$ (to znaczy zależność sygnału na wyjściu termografu od temperatury ciała doskonale czarnego), znając temperaturę otoczenia T_a oraz emisyjność κ badanej powierzchni, można wyznaczyć na niej rozkład temperatury. Zaletą metody pomiaru temperatury opartej na detekcji promieniowania podczerwonego jest krótki czas odpowiedzi detektora oraz to, że układ pomiarowy nie zakłóca badanego pola temperatury.

Rozwiązanie zadania F 654.
Najniższa temperatura, do której może ochłodzić ciało chłodnica, to taka, przy której ciepło odbierane przez chłodnicę w jednostce czasu będzie dokładnie równe ciepłu przenikającemu przez izolację. Korzystając ze wzoru z rozwiązania zadania F 653 możemy zapisać ten warunek jako

$$\kappa(T_1 - T)\,\Delta t = P\,\Delta t\,\frac{T}{T_1 - T},$$

czyli

$$T^2 - T\left(2T_1 + \frac{P}{\kappa}\right) + T_1^2 = 0,$$

a stąd

$$T = T_1 - \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\tfrac{P}{\kappa}\left(4T_1 + \tfrac{P}{\kappa}\right)} - \tfrac{P}{\kappa}\right) = T_1\left(\frac{\sqrt{1+\frac{4\kappa T_1}{P}}-1}{\sqrt{1+\frac{4\kappa T_1}{P}}+1}\right)$$

(drugi pierwiastek równania kwadratowego jest większy od T_1, więc go odrzucamy).

To wyrażenie, jak łatwo sprawdzić, jest zawsze większe od zera i dąży do zera dla κ dążącego do 0. Tak więc w rzeczywistej sytuacji chłodnica nie jest w stanie obniżyć temperatury ciała do zera absolutnego, choć im izolacja lepsza, tym bardziej się można do niego zbliżyć.

Jednoznaczność rozkładu na składniki

Twierdzenie o jednoznaczności rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze powiada, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można przedstawić jednoznacznie w postaci iloczynu liczb pierwszych (z dokładnością do kolejności). Czy można znaleźć odpowiednik tego twierdzenia, dotyczący ... sumy, a nie iloczynu? Inaczej mówiąc, czy można udowodnić, że każdą liczbę naturalną można przedstawić jednoznacznie w postaci sumy pewnych liczb naturalnych? Oczywiście, te ostatnie nie mogą być dowolne, bo każdą liczbę naturalną większą od 2 można przedstawić jako sumę takich liczb na wiele sposobów. No, ale rozkładając liczbę naturalną na czynniki też nie bierzemy dowolnych czynników, lecz wyłącznie czynniki pierwsze.

Jakie liczby miałyby pełnić rolę liczb pierwszych przy rozkładzie liczby naturalnej na sumę? Są takie liczby: to liczby Fibonacciego. Przypomnijmy: ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg (F_n) zdefiniowany rekurencyjnie w sposób następujący: $F_0 = 1, F_1 = 1$ oraz $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$. Wyrazy tego ciągu nazywamy liczbami Fibonacciego. Liczby Fibonacciego są oczywiście liczbami naturalnymi i łatwo zauważyć, że ciąg Fibonacciego nie jest ograniczony z góry.

Oto piętnaście początkowych liczb Fibonacciego: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

Wykażemy następujące twierdzenie:

Każdą liczbę naturalną można przedstawić jednoznacznie w postaci sumy różnych, niesąsiednich liczb Fibonacciego.

Zobaczmy na przykładzie liczby 120, jak wygląda rozkład liczby naturalnej na sumę liczb Fibonacciego. Znajdujemy największą liczbę Fibonacciego, która nie przekracza 120. To 89, i ta liczba jest pierwszym składnikiem rozkładu liczby 120. Musimy jeszcze tę sumę uzupełnić o $120 - 89$, czyli o 31. Teraz znajdujemy największą liczbę Fibonacciego, która nie przekracza 31. Tą liczbą jest 21, dodajemy ją do 89. Zostaje 10, największą liczbą Fibonacciego, mieszczącą się w 10, jest 8; zostaje 2, ale to już jest liczba Fibonacciego, więc dodajemy ją do dotychczasowej sumy i mamy:

$$120 = 89 + 21 + 8 + 2.$$

Zauważmy teraz dwie rzeczy. Po pierwsze, jeśli rozkładając w ten sposób liczbę n, wybieramy F_k, czyli F_k jest największą liczbą Fibonacciego nieprzekraczającą n, to w następnym kroku nie możemy wybrać F_{k-1}, bo to by znaczyło, że

$$F_k + F_{k-1} = F_{k+1} \leqslant n$$

– a przecież F_k jest największą liczbą Fibonacciego nie większą od n. W naszym rozkładzie nie pojawią się więc dwie sąsiednie liczby Fibonacciego. Po drugie, wybór największej liczby Fibonacciego nie większej od danej liczby naturalnej jest określony jednoznacznie – a więc i taki rozkład jest jednoznaczny (z dokładnością do kolejności, bo przecież dodawanie jest przemienne).

Twierdzenie i sam rozkład opatrzone są nazwiskiem Edouarda Zeckendorfa, matematyka-amatora (lekarza z wykształcenia). Zeckendorf zainteresował się matematyką, gdy jako oficer armii belgijskiej i jeniec wojenny przebywał w latach 1940–1945 w obozie dla internowanych. Matematyka bywa bowiem pocieszeniem w wielu trudnych sytuacjach...

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

Uwolnić kwarki!

Dwie dekady temu Grzegorz Białkowski zastanawiał się na naszych łamach, czy kwarki istnieją bardziej niż smoki. Przez ten czas kwarki zadomowiły się w opisie materii na najbardziej podstawowym poziomie. Nikomu już nie przeszkadza, że kwarki skazane są na uwięzienie (*confinement*) we wnętrzu hadronów – układów złożonych z trzech kwarków (bariony), trzech antykwarków (antybariony) lub pary kwark-antykwark (mezony). Gorzej, przyzwyczailiśmy się, że trwałe są tylko układy homomaterialne, podczas gdy układy heteromaterialne są jedynie przelotne. Ot, zwykła ludzka znieczulica.

Jest jednak na świecie miejsce, w którym wolność jest największą wartością. U stóp Statui Wolności od kilku lat trwa walka o uwolnienie (*deconfinement*) uwięzionych w hadronach kwarków.

Szlak ku swobodzie wskazały prace przeprowadzone w europejskim bastionie niezależności – Szwajcarii. Wyniki eksperymentów CERNowskich wskazywały na prawdopodobne tworzenie się na krótką chwilę (rzędu 10^{-24} s, czyli czas potrzebny na propagację sygnału z prędkością światła przez nukleon) stanu zbudowanego z wolnych kwarków i gluonów, tzw. plazmy kwarkowo-gluonowej.

Obecnie działający oswobodziciel kwarków nazywa się RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider* – Relatywistyczny Zderzacz Ciężkich Jonów) i pracuje w Brookhaven National Laboratory na Long Island. Pomysł jest prosty. Teoria opisująca zachowanie kwarków – chromodynamika kwantowa – przewiduje, że kwarki powinny zmienić zachowanie po solidnym podgrzaniu albo stłoczeniu. W tym celu należy oskubać z elektronów atomy np. złota i odpowiednio mocno huknąć jednym o drugi. Tym zajmuje się RHIC. Rozpędza on przeciwbieżne wiązki całkowicie zjonizowanego złota do energii 100 razy większej niż jego masa spoczynkowa (100 GeV), odpowiadającej prędkości zaledwie o 5 promili mniejszej od prędkości światła i zderza je. Jeżeli przy przecięciu wiązek dwa lecące naprzeciwko jądra złota dość dokładnie się trafią, to na moment powstaje układ o temperaturze rzędu biliona stopni. Obliczenia na siatkach (problemy chromodynamiki kwantowej tylko w szczególnych przypadkach dają się rozwiązać analitycznie – radzimy sobie, przybliżając ciągłą czasoprzestrzeń przez punkty kratowe – siatki – i zaprzęgając do pracy najszybsze z dostępnych komputery) wskazują, że w tak ekstremalnych warunkach kwarki powinny znajdować się w poszukiwanym stanie skupienia prawie nieoddziałujących swobodnych partonów. Tu pojawia się kolejny problem. Nie ma sposobu, żeby bezpośrednio zaobserwować ten tworzący się na zaledwie 10 ys stan (yocto to przedrostek odpowiadający 10^{-24}). Zamiast tego obserwuje się tysiące hadronów, tak jak na pokazanej wizualizacji pojedynczego przypadku zarejestrowanej przez detektor STAR. Oprócz STAR działają trzy inne detektory: PHOBOS, PHENIX i BRAHMS. Rycina uprzytamnia trudności techniczne, którym muszą sprostać detektory. Jednak nawet najdokładniejsza rekonstrukcja pojedynczego przypadku niewiele daje. Dopiero żmudna analiza statystyczna wielu przypadków pozwala na poznanie charakterystyk tworzącego się, być może, nowego stanu materii.

W kwietniu ogłoszono, że nowy stan materii został odkryty [1]. Przyroda po raz kolejny nas zaskoczyła i zamiast oczekiwanego gazu wolnych partonów pozwoliła odkryć coś, co zachowaniem przypomina idealną ciecz. Fachowo nazywa się to plazmą silnie oddziałującą.

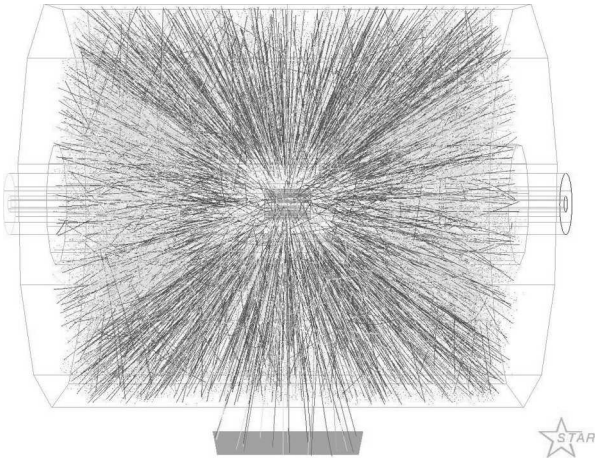
W informacjach dla prasy podkreśla się odkrycie nowego i to w dodatku nieoczekiwanego stanu materii. Towarzyszący odkryciu dokument zmusza jednak do zastanowienia, co najmniej z jednego powodu. Dlaczego praca ta liczy ponad trzysta stron (i to bynajmniej nie ze względu na szczegóły techniczne)? Do tej pory najdłuższą opublikowaną pracą było chyba pierwsze doniesienie na temat odkrycia topu – najcięższego kwarku. Liczyła ona prawie 200 stron i właśnie dlatego nie przekonała ostatecznie nikogo. Jeżeli o odkryciu nie daje się napisać na kilku stronach, to znaczy, że nie ma bezapelacyjnego dowodu.

Podobnie, a w pewnym sensie dużo gorzej, jest tym razem. Praca nie tylko jest długa, ale również źle zilustrowana. Nikt nie zadał sobie trudu, żeby rysunki przedstawić w sposób ułatwiający ich zrozumienie.

Problem polega na tym, że nie udało się ani zaobserwować przejścia fazowego, czyli skokowej zmiany jakiejś obserwowanej wielkości wraz ze wzrostem temperatury (parametrem wiążącym się z temperaturą jest *centralność* zderzenia mierzona np. liczbą cząstek emitowanych pod dużymi kątami w stosunku do osi wiązek), ani zaobserwować czegoś, czego nie dałoby się wytłumaczyć bez odwołania się do uwolnionych kwarków.

Tak więc nowy „ciekły” stan materii jądrowej udało się zarejestrować, ale nie wiadomo jeszcze, czy to już plazma kwarkowo-gluonowa.

Jeżeli kwarków jeszcze nie udało się uwolnić, to przynajmniej udało się je ugotować.



Wizualizacja cząstek naładowanych rejestrowanych w pojedynczym centralnym zderzeniu jąder złota w detektorze STAR.

Piotr ZALEWSKI

[1] http://www.bnl.gov/bnlweb/pubaf/pr/PR_display.asp?prID=05-38

Średnie w trapezie

Joanna JASZUŃSKA[*]

Dla liczb dodatnich $a \geqslant b$ zachodzi następująca nierówność:

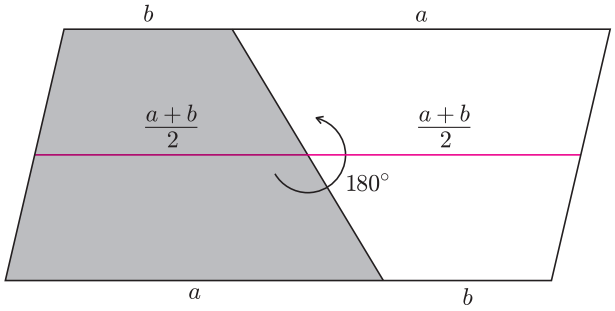
$$a \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geqslant b,$$

przy czym każda z równości ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$. Cztery występujące tu średnie pomiędzy liczbami a i b to odpowiednio średnia *kwadratowa, arytmetyczna, geometryczna* i *harmoniczna*.

Czy da się te cztery średnie „znaleźć” w trapezie o podstawach a i b? Okazuje się, że tak! Są one długościami odpowiednio dobranych odcinków *poziomych*, czyli przekrojów trapezu, równoległych do jego podstaw. Co więcej, nietrudno udowodnić powyższą nierówność, korzystając z własności tych odcinków. Na początek wskażmy w trapezie wszystkie cztery średnie, dowód nierówności pozostawiając na później.

Średnia arytmetyczna (A). Chyba najłatwiejsza do znalezienia i najbardziej znana — wystarczy wziąć *środkową* trapezu, czyli odcinek łączący środki jego ramion.

Z twierdzenia Talesa odcinek ten jest równoległy do podstaw. Aby przekonać się, że rzeczywiście jest on długości $\frac{a+b}{2}$, obróćmy trapez o 180° względem środka ramienia (rysunek 1).

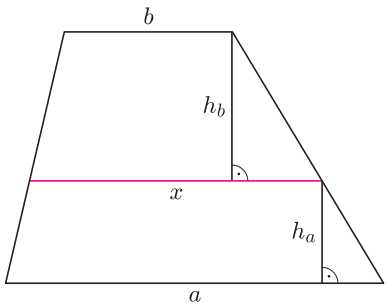


Rys. 1

Figura otrzymana jako suma trapezów (wyjściowego i nowego) jest równoległobokiem o długości podstawy $a+b$, więc takiej też długości jest odcinek zbudowany z dwóch środkowych. Stąd każda z nich jest długości $\frac{a+b}{2}$.

Średnia kwadratowa (K). Podzielmy trapez odcinkiem równoległym do podstaw na dwa trapezy o równych polach. Przesuwając poziomy odcinek od jednej podstawy do drugiej, nietrudno się przekonać, że jest dokładnie jedno jego „dobre” położenie.

Jaka jest wtedy długość tego odcinka? Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2, ponadto niech S będzie polem trapezu.



Rys. 2

Wtedy

$$\frac{S}{2} = \frac{a+x}{2}\cdot h_a \quad \text{i} \quad \frac{S}{2} = \frac{b+x}{2}\cdot h_b,$$

stąd

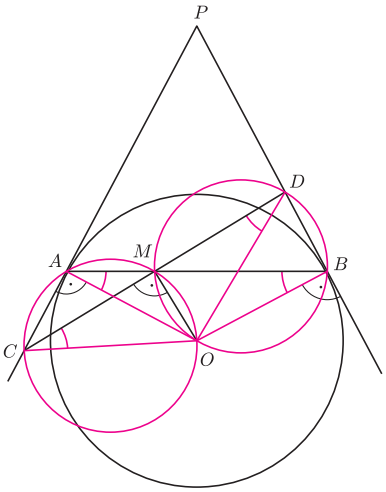
$$S = \frac{a+b}{2}\cdot(h_a+h_b) = \frac{a+b}{2}\cdot\left(\frac{S}{a+x}+\frac{S}{b+x}\right) =$$

$$= \frac{S(a+b)}{2}\cdot\frac{b+x+a+x}{(a+x)(b+x)} = S\cdot\frac{(a+b)^2+2x(a+b)}{2ab+2x^2+2x(a+b)}.$$

Wobec tego $2ab+2x^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, więc

$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Rozwiązanie zadania M 1111.
Z równości $\sphericalangle CAO = 90^\circ = \sphericalangle CMO$ wynika, że punkty C, A, M, O leżą na jednym okręgu.

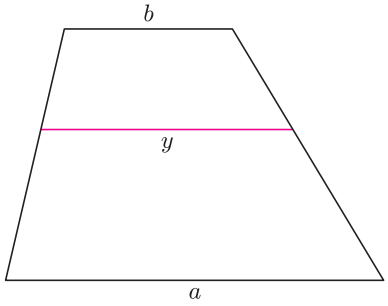


Analogicznie, punkty B, D, M, O leżą na jednym okręgu. Zatem

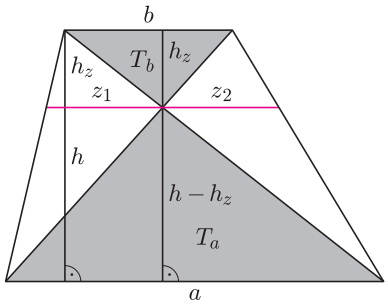
$$\sphericalangle OCM = \sphericalangle OAM = \sphericalangle OBM = \sphericalangle ODM,$$

skąd wynika, że $OC = OD$. Odcinek OM jest więc wysokością w trójkącie równoramiennym COD, a więc $CM = DM$.

[*] Instytut Matematyczny PAN



Rys. 3



Rys. 4

Średnia geometryczna (G). Podzielmy ponownie nasz trapez odcinkiem poziomym, ale tym razem inaczej — tak, by otrzymane trapezy były podobne (rysunek 3).

Znów nasuwa się pytanie, czy w ogóle można to zrobić i jeśli tak, to czy tylko na jeden sposób. Dla $a = b$ trapez jest równoległobokiem, a szukany odcinek to jego środkowa. Dla $a > b$ podzielmy trapez poziomym odcinkiem o długości y. Zauważmy, że otrzymane trapezy mają odpowiednie kąty równe, więc aby były podobne, potrzeba i wystarcza, by miały równe stosunki długości odpowiednich podstaw: $\frac{a}{y} = \frac{y}{b}$, czyli by $y = \sqrt{ab}$. Jest to liczba z przedziału (b, a), więc taki przekrój trapezu istnieje i to dokładnie jeden.

Średnia harmoniczna (H). Jaka jest długość z odcinka równoległego do podstaw trapezu i przechodzącego przed punkt przecięcia jego przekątnych? Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4.

Z podobieństwa trójkątów o odpowiednich podstawach i wysokościach otrzymujemy

$$\frac{a}{z_1} = \frac{h}{h_z}$$

i analogicznie dla z_2, co dowodzi, że $z_1 = z_2$. Korzystając z powyższej proporcji i z podobieństwa trójkątów T_a i T_b, uzyskujemy

$$\frac{a}{z_1} = \frac{h}{h_z} = \frac{h - h_z}{h_z} + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b},$$

więc

$$z = z_1 + z_2 = 2z_1 = 2 \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

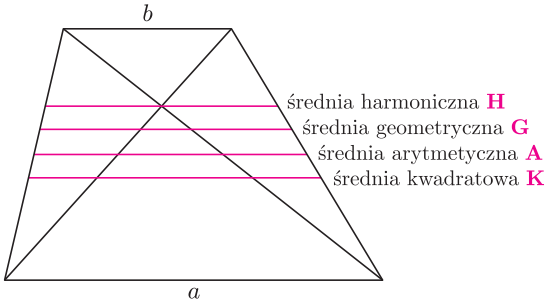
Znaleźliśmy zatem w trapezie wszystkie cztery średnie i wiemy, że odpowiadające im odcinki leżą pomiędzy podstawami. Ale czy leżą one we właściwej kolejności, czyli czy rzeczywiście zawsze zachodzi podana na początku nierówność? Dla $a = b$ trapez jest równoległobokiem, wszystkie cztery odcinki pokrywają się i wszystkie cztery średnie są równe. A co się dzieje dla $a > b$?

K > A: Zauważmy, że dolny z trapezów o równych polach ma odpowiednie podstawy dłuższe niż górny, zatem musi mieć mniejszą wysokość. Stąd wyznaczający te trapezy odcinek leży poniżej środkowej.

A > G: Tu z kolei dolny z dwóch trapezów podobnych też ma odpowiednie podstawy dłuższe, ale tym razem oznacza to, że i wysokość musi mieć dłuższą. Stąd wyznaczający te trapezy odcinek leży powyżej środkowej.

G > H: Dla trapezów podobnych stosunek wysokości górnego do dolnego jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw, czyli jest większy niż $\frac{b}{a}$. Wobec tego odcinek wyznaczający te trapezy leży poniżej przekroju dzielącego wysokość całego trapezu w stosunku $b : a$ (licząc od góry), czyli poniżej poziomego odcinka przechodzącego przez punkt przecięcia przekątnych.

To kończy dowód naszej nierówności. Może ktoś z Czytelników zna inne poziome przekroje trapezu o ciekawych własnościach? A może nierówność średnich dla trzech liczb też da się jakoś ładnie zilustrować, na przykład w przestrzeni trójwymiarowej?



Rys. 5

Ciągi jednomonotoniczne, funkcje supermodularne i nierówności

Lech STAWIKOWSKI *

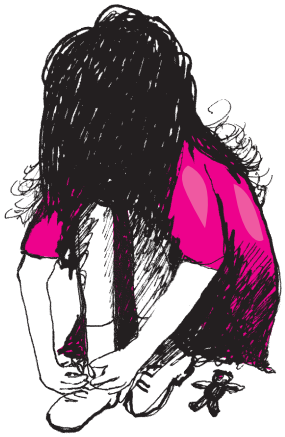
O pochodnych cząstkowych i ich zastosowaniu pisaliśmy także w numerze 10/2004.

W „Kółku matematycznym dla olimpijczyków” Henryk Pawłowski zajmował się nierównościami typu

$$(1)\qquad x^1_{(1)}x^2_{(1)}\ldots x^m_{(1)} + x^1_{(2)}x^2_{(2)}\ldots x^m_{(2)} + \ldots + x^1_{(n)}x^2_{(n)}\ldots x^m_{(n)} \geqslant$$
$$\geqslant x^1_1x^2_1\ldots x^m_1 + x^1_2x^2_2\ldots x^m_2 + \ldots + x^1_nx^2_n\ldots x^m_n\,,$$

gdzie ciągi $\left(x^j_{(i)}\right)_{i=1}^n$, dla $j=1,2,\ldots,m$, są ciągami jednomonotonicznymi (tzn. albo wszystkie są uporządkowane rosnąco, albo wszystkie malejąco), a ciągi $\left(x^j_i\right)_{i=1}^n$, dla $j=1,2,\ldots,m$ są ich permutacjami. Nierówność (1) można zapisywać symbolicznie w dogodniejszej, bo bardziej przejrzystej, postaci jako

$$(2)\qquad \begin{bmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \ldots & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \ldots & x^2_{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^m_{(1)} & x^m_{(2)} & \ldots & x^m_{(n)} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} x^1_1 & x^1_2 & \ldots & x^1_n \\ x^2_1 & x^2_2 & \ldots & x^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^m_1 & x^m_2 & \ldots & x^m_n \end{bmatrix}.$$



Widać, że przejście od nierówności (2) do (1) polegało na zastosowaniu operacji mnożenia wyrazów występujacych w kolumnach, a następnie zsumowaniu otrzymanych w ten sposób wyrażeń. To nasuwa myśl, żeby rozważyć ogólniejszą postać nierówności, tzn.

$$(3)\qquad \begin{bmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \ldots & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \ldots & x^2_{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^m_{(1)} & x^m_{(2)} & \ldots & x^m_{(n)} \end{bmatrix}_\varphi \geqslant \begin{bmatrix} x^1_1 & x^1_2 & \ldots & x^1_n \\ x^2_1 & x^2_2 & \ldots & x^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^m_1 & x^m_2 & \ldots & x^m_n \end{bmatrix}_\varphi,$$

czyli

$$(4)\quad \varphi(x^1_{(1)},x^2_{(1)},\ldots,x^m_{(1)}) + \varphi(x^1_{(2)},x^2_{(2)},\ldots,x^m_{(2)}) + \ldots + \varphi(x^1_{(n)},x^2_{(n)},\ldots,x^m_{(n)}) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(x^1_1,x^2_1,\ldots,x^m_1) + \varphi(x^1_2,x^2_2,\ldots,x^m_2) + \ldots + \varphi(x^1_n,x^2_n,\ldots,x^m_n).$$

Wiadomo już, że dla funkcji „iloczyn” nierówności te zachodzą. Powstaje pytanie, dla jakich innych funkcji φ będą one również spełnione.

Jeżeli chcemy znaleźć klasę funkcji spełniających nierówności (3) dla wszystkich n, przyjmijmy najpierw $n=2$. Dostaniemy warunek konieczny, jaki musi spełniać φ, który można zapisać w postaci

$$(i)\qquad \varphi(\min\{x_1,y_1\},\ldots,\min\{x_m,y_m\}) + \varphi(\max\{x_1,y_1\},\ldots,\max\{x_m,y_m\}) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(x_1,\ldots,x_m) + \varphi(y_1,\ldots,y_m),$$

dla dowolnych ciągów x_i oraz y_j z dziedziny φ. Funkcje spełniające tę nierówność nazywa się supermodularnymi. Bez dowodu podam fakt, że dla funkcji klasy C^2 (tzn. dwukrotnie różniczkowalnych) powyższy warunek jest równoważny temu, że

$$(ii)\qquad \forall_{i,j\ (i\neq j)}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} \geqslant 0\,.$$

Warunek ten ma w zastosowaniu przewagę, można z niego korzystać w sposób znacznie bardziej efektywny niż z warunku (i).

Okazuje się, że warunek (i) jest nie tylko konieczny, ale i wystarczający, aby zachodziły nierówności (3) dla wszystkich n. Załóżmy przeciwnie, że największą sumą, jaką można uzyskać przez permutacje ciągów $\left(x^j_{(i)}\right)_{i=1}^n$, dla $j=1,2,\ldots,m$, jest

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^n \varphi(x^1_i,\ldots,x^m_i) = \begin{bmatrix} x^1_1 & x^1_2 & \ldots & x^1_n \\ x^2_1 & x^2_2 & \ldots & x^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^m_1 & x^m_2 & \ldots & x^m_n \end{bmatrix}_\varphi,$$

gdzie ciągi $\left(x^j_i\right)_{i=1}^n$, dla $j=1,2,\ldots,m$, nie są parami jednomonotoniczne.

Rozwiązanie zadania M 1112.
Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a+b+c$ jest najmniejszym spośród pięciu mianowników $e+a+b$, $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+e$, $d+e+a$. Wówczas

$$(1)\quad \frac{a}{e+a+b}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c} = 1\,.$$

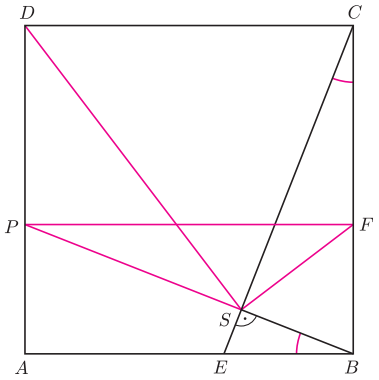
Ponadto

$$(2)\quad \frac{d}{c+d+e}+\frac{e}{d+e+a} <$$
$$< \frac{d}{d+e}+\frac{e}{d+e} = 1\,.$$

Dodając nierówności (1) i (2) stronami, uzyskujemy tezę.

* student, Międzywydziałowe Interdyscyplinarne Studia Matematyczno-Przyrodnicze, Uniwersytet Warszawski

Rozwiązanie zadania M 1113.
Przyjmijmy, że proste BS i AD przecinają się w punkcie P.



Wówczas z równości $AB = BC$ oraz $\sphericalangle ABP = 90^\circ - \sphericalangle SBC = \sphericalangle BCE$ wynika, że trójkąty ABP i BCE są przystające. Zatem $AP = BE = BF$, skąd wniosek, że czworokąt $CDPF$ jest prostokątem. Ponadto $\sphericalangle PSC = 90^\circ$, więc punkty C, D, P, S, F leżą na jednym okręgu o średnicy DF. Stąd uzyskujemy ostatecznie, że $\sphericalangle DSF = 90^\circ$.

Istnieją wówczas takie k, l $(1 \leqslant k < l \leqslant n)$, że ciągi (x_k^j, x_l^j), dla $j = 1, 2, \ldots, m$, nie są parami jednomonotoniczne. Wtedy jednak możemy je uporządkować tak, by były jednomonotoniczne. Na mocy warunku (i) po takiej permutacji suma $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i^1, \ldots, x_i^m)$ wzrośnie, bo wzrośnie $\sum_{i=k,l} \varphi(x_i^1, \ldots, x_i^m)$. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, co dowodzi tego, że największa jest suma $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_{(i)}^1, \ldots, x_{(i)}^m)$.

Poniższe przykłady zilustrują, jak korzystać z nierówności (3). Ponieważ funkcje występujące w nich będą klasy C^2, to ich supermodularność najłatwiej będzie sprawdzić, korzystając z definicji (ii).

Przykład 1. *Wykazać, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$*

$$e^{{a_1}^2} + e^{{a_1}^2} + \ldots + e^{{a_n}^2} \geqslant e^{a_1 a_2} + e^{a_2 a_3} + \ldots + e^{a_n a_1}. \tag{6}$$

Łatwo sprawdzić (obliczając drugą pochodną cząstkową), że funkcja $\varphi(x, y) = e^{xy}$ jest supermodularna dla $x, y \geqslant 0$. W nierówności (3) przyjmujemy $m = 2$ oraz bierzemy za $\left(x_{(i)}^j\right)_{i=1}^n$, dla $j = 1, 2$, dwa identyczne ciągi liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Następnie permutujemy wyrazy drugiego z tych ciągów, przesuwając je cyklicznie o jeden.

Przykład 2. *Udowodnić, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność*

$$\frac{a}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{b}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} + \frac{c}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \tag{7}$$

Rozważmy funkcję $\varphi(x, y, z) = \dfrac{x}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$. Jest to funkcja supermodularna (w dziedzinie liczb rzeczywistych dodatnich). Wystarczy sprawdzić, że

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{z}\right)^2} \geqslant 0 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 2 \cdot \frac{x}{\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{z^2} \geqslant 0.$$

Nierówność (3) daje nam wobec tego dla tej funkcji

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}_\varphi \leqslant \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}_\varphi, \tag{8}$$

a to jest równoważne nierówności (7).

Przykład 3. *Udowodnić, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta ABC, to*

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{2}. \tag{9}$$

Łatwo sprawdzić, że $\varphi(x, y, z) = -\sin(x + y + z)$ jest funkcją supermodularną, gdy $0 \leqslant (x + y + z) \leqslant \pi$. Zachodzi więc nierówność

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} \\ \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} & \frac{\alpha}{6} \\ \frac{\gamma}{6} & \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} \end{bmatrix}_\varphi \leqslant \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} \\ \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} \\ \frac{\alpha}{6} & \frac{\beta}{6} & \frac{\gamma}{6} \end{bmatrix}_\varphi, \tag{10}$$

skąd można otrzymać żądaną nierówność (9).

Przykład 4. *Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n > -1$ zachodzi*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i+1}}{2 + a_i + a_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + a_i}, \tag{11}$$

gdzie $a_{n+1} = a_1$.

Nierówność tę otrzymamy, jeśli rozważymy funkcję $\varphi(x, y) = -\dfrac{x + y}{1 + x + y}$, supermodularną dla $x, y > -1$. Wystarczy teraz skorzystać z nierówności (3) dla odpowiedniej permutacji ciągów $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2005

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
495 ($WT = 2{,}50$) i **496** ($WT = 1{,}98$)
z numeru 2/2005

Tomasz Warszawski	– Kraków	44,86
Piotr Kumor	– Olsztyn	43,55
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	42,96
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	42,66
Jerzy Cisło	– Wrocław	40,29
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	39,35
Zbigniew Galias	– Kraków	38,09
Marcin Kasperski	– Warszawa	36,86

Oto i chwila okrągła, na którą czekaliśmy: liczba członków matematycznego Klubu 44 wreszcie wymaga trzech znaków w zapisie dziesiętnym. Z numerem setnym: Tomasz Warszawski.

Zadania z matematyki nr 507, 508

Redaguje Marcin E. KUCZMA

507. (a) Czy zbiór wszystkich liczb wymiernych większych od 1 można przedstawić jako sumę dwóch zbiorów rozłącznych A, B, co najmniej dwuelementowych tak, aby

• suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru A była elementem zbioru A oraz

• suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru B była elementem zbioru B?

(b) To samo pytanie, po zastąpieniu wyrażenia *suma dowolnych dwóch różnych liczb* przez *iloczyn dowolnych dwóch różnych liczb*.

508. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Boki AB, BC, CD, DA są do tego okręgu styczne odpowiednio w punktach K, L, M, N. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S. Wykazać, że

$$\frac{|KS|}{|MS|} = \frac{|AK|\cdot|BK|}{|AB|}\cdot\frac{|CD|}{|CM|\cdot|DM|}.$$

Zadanie 508 zaproponował pan Piotr Achinger z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2005

Przypominamy treść zadań:

503. Wyznaczyć najmniejszą liczbę dodatnią a, dla której zachodzi implikacja: Jeżeli funkcja $f\colon \langle 0;1\rangle \to \langle 0;\infty)$ spełnia warunki $f(1)=1$ oraz

$$f(x+y) \geqslant f(x)+f(y) \quad \text{dla } x\in\langle 0;1\rangle,\ \ y\in\langle 0;1-x\rangle,$$

to $f(x)\leqslant ax$ dla $x\in\langle 0;1\rangle$.

504. Gra: odgadywanie liczby. Przeciwnik wybiera liczbę ze zbioru $\{0,1,\ldots,15\}$. Mamy prawo zadać 7 pytań, oczekując odpowiedzi *Tak* lub *Nie*. Przeciwnik na wszystkie pytania odpowiada; wolno mu przy tym skłamać, ale co najwyżej jeden raz. Podać taktykę gwarantującą prawidłowe rozpoznanie wybranej liczby.

503. Załóżmy, że funkcja f spełnia podane warunki. Jej wartości leżą w przedziale $\langle 0;1\rangle$, bowiem $1=f(1)\geqslant f(x)+f(1-x)\geqslant f(x)$. Jasne, że $f(0)=0$.

Skoro $f(x)\geqslant f(\frac{1}{2}x)+f(\frac{1}{2}x)=2f(\frac{1}{2}x)$, to przez indukcję wnosimy, że dla każdej liczby naturalnej n i dla $x\in\langle 0;1\rangle$ zachodzi nierówność $f(x)\geqslant 2^n f(2^{-n}x)$.

Ustalmy dowolną liczbę $x\in(0;1)$. Niech n będzie największą liczbą całkowitą, dla której $x\leqslant 2^{-n}$; tak więc $2^{-(n+1)}<x$. Ponieważ zaś $2^n x$ jest liczbą z przedziału $(0;1\rangle$, więc w myśl poprzedniej konkluzji $1\geqslant f(2^n x)\geqslant 2^n f(x)$.

Wobec tego $f(x)\leqslant 2^{-n}=2\cdot 2^{-(n+1)}<2x$. To znaczy, wobec dowolności wyboru x, że liczba $a=2$ spełnia postulowany warunek. Jest to najmniejsza taka liczba, o czym przekonuje przykład funkcji $f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1 & \text{dla } x>\frac{1}{2}.\end{cases}$

504. Mamy ustalić cztery cyfry zapisu binarnego szukanej liczby. W pierwszych trzech pytaniach kolejno pytamy o pierwszą, drugą i trzecią cyfrę. Następnie zadajemy czwarte, kluczowe pytanie: *Czy już skłamałeś?*

Jeśli odpowiedź brzmi *Nie*, jest ona automatycznie prawdziwa. Zatem znamy już trzy cyfry. Pytamy trzykrotnie o czwartą cyfrę; zezwolenie na jednokrotne kłamstwo, którym przeciwnik dysponuje, nie pozwoli mu ukryć prawdy.

Jeżeli przeciwnik na czwarte nasze pytanie odpowiedział *Tak*, to znaczy, że skłamał albo wcześniej, albo w tym właśnie momencie. W każdym razie dalej już musi mówić prawdę; a my wiemy, że z rozpoznawanych wcześniej trzech cyfr, co najmniej dwie są rozpoznane dobrze. W dwóch dalszych pytaniach ustalamy prawidłowo całą tę trójkę, a w ostatnim pytaniu – czwartą cyfrę.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2005

Zadania z fizyki nr 404, 405

Redaguje Jerzy B. BROJAN

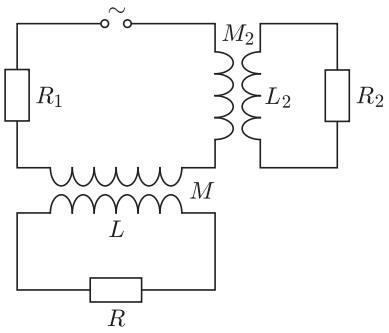
404. Istnieją dwa różne mechanizmy fizyczne i fizjologiczne dające efekt słyszenia przestrzennego (określania kierunku fali dźwiękowej), przy czym jeden z nich działa głównie dla częstotliwości powyżej około 5 kHz, a drugi głównie dla częstotliwości poniżej około 2 kHz. Na czym polegają te dwa mechanizmy i dlaczego mają ograniczone zakresy działania?

405. Opór przewodu na jednostkę długości jest równy ρ. Przewodem tym przesłano prąd na odległość l do odbiornika o oporze R, przy czym drugi przewód jest bezoporowy (można przyjąć, że jest nim ziemia). Obliczyć sprawność przesyłu energii, jeśli przewodnictwo między przewodami (odwrotność oporu) na jednostkę długości jest równe σ.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2005

Przypominamy treść zadań:

400. Dlaczego dźwięk słychać dalej w kierunku wiatru? (Oczywiście, prędkość wiatru jest mniejsza od prędkości dźwięku.)



401. Jak wiadomo, w Europie częstotliwość sieciowa wynosi 50 Hz, w USA zaś 60 Hz. Aby zrozumieć powód, dla którego niekorzystny byłby wybór częstotliwości znacznie większej lub znacznie mniejszej, rozważmy następujący model (rys.). Odbiornik energii (opornik R) jest dołączony do źródła napięcia przemiennego przez transformator o indukcyjności uzwojenia wtórnego L i współczynniku indukcji wzajemnej między uzwojeniami M. Ponadto w obwodzie występuje opornik R_1 odpowiadający oporności przewodów i uzwojenia transformatora oraz drugi transformator opisany parametrami L_2 i M_2, do którego dołączony jest opornik R_2. Ten drugi obwód symbolizuje prądy wirowe wzbudzane w przewodnikach, które przypadkiem znajdą się w pobliżu kabli doprowadzających energię do właściwego odbiornika.
a) Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby stosunek strat energii (łącznej mocy traconej na opornikach R_1 i R_2) do mocy dostarczanej do opornika R osiągał minimum dla pewnej częstotliwości?
b) Jeśli powyższy warunek jest spełniony, to jakim wzorem dana jest optymalna częstotliwość?

400. W układzie związanym z powietrzem dźwięk rozchodzi się izotropowo, czyli energia fali dźwiękowej rozkłada się równomiernie na powierzchni kuli. W kierunku wiatru dźwięk dotrze do wybranego miejsca na powierzchni ziemi szybciej, niż do miejsca równie odległego od źródła dźwięku, a leżącego po przeciwnej stronie. Promień odpowiedniej kuli będzie zatem mniejszy, a energia – mniej rozproszona.

401. Oznaczmy wartość skuteczną natężenia prądu płynącego przez R jako I, przez R_1 jako I_1, a przez R_2 jako I_2. Wartość skuteczna napięcia indukowanego we wtórnym uzwojeniu transformatora wynosi $I_1 M\omega$, co należy przyrównać do sumy napięć na indukcyjności L i oporze R, z uwzględnieniem przesunięcia fazy między tymi napięciami:

$$I_1 M\omega = I\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}, \quad \text{podobnie} \quad I_1 M_2\omega = I_2\sqrt{(L_2\omega)^2 + R_2^2}.$$

Moc przekształcana w ciepło na opornikach jest dana wzorami: $P = I^2 R$, $P_1 = I_1^2 R_1$ oraz $P_2 = I_2^2 R_2$. Szukany stosunek strat do mocy docierającej do odbiornika jest równy

$$\frac{P_1 + P_2}{P} = \frac{L^2\omega^2 + R^2}{M^2 R}\left(\frac{R_1}{\omega^2} + \frac{M_2^2 R_2}{L_2^2\omega^2 + R_2^2}\right).$$

Wyrażenie to traktowane jako funkcja zmiennej $x = \omega^2$ ma postać

$$y = A + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{Ex + F},$$

przy czym wszystkie parametry od A do F są dodatnie. Warunkiem istnienia minimum jest $CF > DE$, a wartość x_0 odpowiadająca minimum jest dana wzorem

$$x_0 = \frac{F\sqrt{B}}{\sqrt{CF - DE} - E\sqrt{B}}.$$

Jeśli to minimum ma występować dla dodatniej wartości x_0, to poprzedni warunek musi być zaostrzony do

$$CF - DE > E^2 B.$$

Powracając do pierwotnych zmiennych, należy podstawić

$$B = \frac{RR_1}{M^2}, \quad C = M_2^2 L^2 R_2, \quad D = M_2^2 R^2 R_2, \quad E = M^2 L_2^2 R, \quad F = M^2 R R_2^2.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
394 ($WT = 3{,}10$) i **395** ($WT = 1{,}51$)
z numeru 3/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	34,98
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	30,22
Konrad Kapcia	– Częstochowa	22,34
Mateusz Łącki	– Kraków	18,61
Tomasz Tkocz	– Rybnik	15,19
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	11,36

Patrz w niebo

Wszystko wskazuje na to, że ćwierć miliarda lat temu (czyli pod koniec permu, ostatniego okresu ery paleozoicznej) Ziemię dotknęła wielka katastrofa. Skamieliny wykazują, że nagle zniknęło 70% lądowych gatunków organizmów żywych i 90% morskich. Była więc to największa katastrofa w dziejach Ziemi, znacznie przewyższająca tę, w której pod koniec kredy (ery mezozoicznej, 65 mln lat temu) wyginęły m.in. dinozaury. Przypuszczano, że przyczyną mogła być gwałtowna zmiana globalnych warunków atmosferycznych wywołana ogromnymi wylewami lawy na Syberii. Teraz wydaje się, że odkryto kosmiczną przyczynę tego kataklizmu. Grupa badaczy z University of Washington, zbadawszy liczące ćwierć miliarda lat skały pobrane w Japonii, Chinach i na Węgrzech, doszła do wniosku, że katastrofę spowodował gość z Kosmosu.

Mianowicie w skałach pochodzących z przełomu permu i triasu znaleziono wielkie kuliste cząsteczki fullerenu C_{60}, zdolne więzić w swoim wnętrzu atomy lub cząsteczki innych substancji. Wydobyty z cząsteczek fullerenu hel i argon wykazywały skład izotopowy nieistniejący na Ziemi, co więcej – zdaniem badaczy – samo wtłoczenie obcych atomów do wnętrza C_{60} wymaga warunków nieosiągalnych w ziemskiej przyrodzie. Nieznane jest miejsce spadku ciała niebieskiego odpowiedzialnego za ten kataklizm. Spadło ono zapewne do oceanu, czego wtórne skutki były i tak fatalne (zmiana poziomu morza, zawartości tlenu w wodzie, ostatecznie – zmiana klimatu). Prawdopodobnie to uderzenie w Ziemię wywołało też wspomniane wylewy lawy na Syberii. Trzeba przyznać, że nie wszyscy zgadzają się z takim tłumaczeniem kataklizmu. Argumentują oni, że w podwyższonej temperaturze fulleren powinien dawno uwolnić schwytane gazy, podejrzewa się też, że sama technika wydobywania gazów z fullerenu przyczynia się do jego produkcji w laboratorium. Jednak w skałach pochodzących z przełomu kredy i trzeciorzędu również znaleziono fulleren zawierający gazy szlachetne. Mimo różnych wątpliwości wydaje się więc, że ta osobliwa postać węgla ma jednak niebagatelne znaczenie przy śledzeniu dziejów Ziemi.

Tomasz KWAST

Październik

Jesienią wieczorami widać w południowej części nieba Wodnika. Ten zodiakalny gwiazdozbiór jest rozległy, ale trudno go rozpoznać, gdyż nie zawiera szczególnie jasnych gwiazd (najjaśniejsza, alfa, ma jasność 3,2 mag). Przez lunetę można zobaczyć w nim jedną z największych na niebie mgławic planetarnych NGC 7293, zwaną Ślimakiem (jasność 6,5 mag). Co prawda, jej bardzo bogatą strukturę można podziwiać dopiero na zdjęciach, uzyskanych w dodatku najlepiej za pomocą teleskopu Hubble'a. Wodnik jest jednym z nielicznych gwiazdozbiorów zawierających radianty dwóch rojów meteorów: eta-Akwarydy oczekiwane są w maju, a delta-Akwarydy w lipcu. Natomiast teraz, jesienią, około 9 X można spodziewać się roju Drakonidów (czyli meteorów wylatujących ze Smoka) oraz około 20 X roju Orionidów (nazwa sama się tłumaczy). Oba roje są jednak skromne.

Wenus jest w Wężowniku i doskonale widać ją po zachodzie Słońca. Mars jest na granicy Barana i Byka, wieczorem wschodzi i widać go praktycznie przez całą noc. Jowisz jest w Pannie za Słońcem, a więc go nie widać, a Saturn w Raku i wschodzi koło północy. Nów Księżyca wypada 3 X i nastąpi wtedy pierścieniowe zaćmienie Słońca, widoczne od Grenlandii, przez Europę, Afrykę do Azji. W Polsce będzie widoczne jako częściowe w godzinach przedpołudniowych. Pełnia Księżyca wypadnie 17 X i wtedy nastąpi częściowe zaćmienie Księżyca, widoczne jednak tylko od Antarktydy, przez Australię i wschodnią Azję, do Ameryki Północnej. Ponadto Księżyc zakryje Antaresa 8 X (ale zjawisko to widać będzie na Pacyfiku) i Spikę 31 X (a to tylko w Ameryce Północnej).

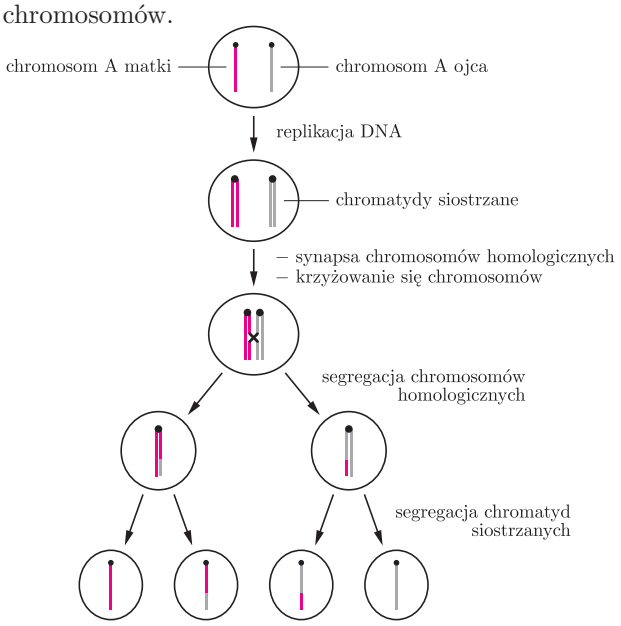
T. K.

Chromosomowe układanki

Mamy o jedną parę chromosomów mniej niż nasi najbliżsi krewni, szympansy. Tymczasem nasze geny różnią się jedynie w około 1,5% sekwencji, a 24 pary chromosomów szympansa zawierają tę samą ilość informacji, co 23 ludzkie.

Chromosomy to sposób, w jaki komórka przechowuje DNA – takie pojemniki na geny. Liczba takich pudełek może być bardzo różna – są organizmy z jedną i z kilkuset parami chromosomów (np. znana z kwiaciarni Kalanchoe ma ich aż 250 par!).

Organizmy diploidalne mają po dwie kopie wszystkich chromosomów (czyli $2n$) po jednej od każdego rodzica. Podczas mejozy (w której wyniku powstają gamety) chromosomy wymieniają się fragmentami, po czym każda para chromosomów rozdziela się losowo do dwóch powstających komórek haploidalnych, mających po n chromosomów.



Schemat mejozy.

Jeśli w wyjściowej komórce byłby chromosom bez pary, w jednej z komórek potomnych zabrakłoby istotnej informacji genetycznej; często takie usterki blokują już sam proces mejozy. Dlatego muł, z 32 chromosomami od klaczy i 31 od osła, jest bezpłodny, a różna liczba chromosomów skutecznie izoluje gatunki.

Ważna jest nie tylko parzysta liczba chromosomów, ale również proporcje między genami, które niosą. Muł funkcjonuje dobrze – 32 chromosomy klaczy zawierają mniej więcej tę samą informację, co 31 chromosomów osła. Natomiast obecność u ludzi dodatkowego chromosomu numer 21 powoduje zespół Downa, a inne dodatkowe chromosomy (poza płciowymi) – śmierć. Jedyne nieszkodliwe odstępstwa od liczby chromosomów to u mężczyzn dodatkowy chromosom Y, a u kobiet dodatkowy X.

Najprostszy sposób na zwiększenie liczby chromosomów to zwiększenie ich liczby o cały, kompletny zestaw, albo nawet o kilka. Mistrzami w tym zabiegu są rośliny. Jeśli, wskutek jakiegoś zaburzenia, roślina wytwarza gamety z niezredukowaną liczbą chromosomów, to po jej samozapyleniu powstanie osobnik o podwojonej liczbie chromosomów. Nie będzie się w stanie krzyżować z gatunkiem wyjściowym, o dwukrotnie mniejszej liczbie chromosomów i zapoczątkuje nowy gatunek! Wiele roślin uprawnych przeszło ten proces – np. pszenica ma sześć lub cztery (pszenica durum) zestawy chromosomów w każdej komórce.

Kłopoty z mejozą przy nieparzystej liczbie chromosomów wykorzystują ogrodnicy: bezpestkowe arbuzy to owoce triploidalnej rośliny ($3n$), krzyżówki wyjściowego gatunku z arbuzem o podwojonej liczbie chromosomów.

Zwierzęta też bywają poliploidalne. Nie ssaki, ale kilka lat temu wyhodowano triploidalnego koguta (nie był, niestety, zdrowy). W przyrodzie występują triploidalne jaszczurki (rozmnażają się partenogenetycznie), a wśród żab zdarzają się tetra-, a nawet oktoploidy.

Liczba chromosomów może się też zwiększyć mniej radykalnie – wskutek podzielenia się jednego chromosomu w centromerze (przewężeniu chromosomu) powstaną dwa, z centromerami na samych końcach. Centromery mogą się również łączyć – w ten sposób liczba chromosomów ulegnie redukcji. Czterdzieści chromosomów sprzyjających takiemu łączeniu, z centromerami na końcach, mają myszy. Znane jest wiele tzw. ras chromosomowych myszy, o liczbie chromosomów od 22 do 40, izolowanych rozrodczo.

Może się zdarzyć, że chromosomy połączą się „tandemowo”, tzn. koniec z końcem lub koniec z centromerem. Takie rearanżacje spowodowały ekstremalne różnice w liczbie chromosomów u azjatyckich jeleni, mundżaków. Mundżak indyjski ma 6 par chromosomów, a chiński ... 46 par, przy czym całkowita długość chromosomów jest u nich identyczna.

Człowiek ma jedną parę chromosomów mniej niż szympans, ponieważ nasz chromosom numer 2 powstał właśnie z połączenia dwóch szympansich chromosomów.

Najczęstszym rodzajem zmian chromosomowych są duplikacje i zmiana liczby kopii sporych (do kilkuset tysięcy par zasad) fragmentów chromosomu. Niedawno okazało się, że ludzie są bardzo zróżnicowani pod względem liczby kopii takich fragmentów i średnio dwie niespokrewnione osoby różnią się obecnością lub brakiem co najmniej 11 długich (około 500 tys. zasad), zawierających geny, fragmentów genomu. Takie duplikacje wewnątrz chromosomów mogą niezwykle powiększyć genom – dzięki temu mechanizmowi genom cebuli jest pięciokrotnie dłuższy niż ludzki.

Zmiany chromosomowe mogą spowodować izolację rozrodczą i przyczynić się do powstania nowych gatunków. Zmiany chromosomowe zwiększające liczbę genów przynoszą materiał do powstawania nowych ich funkcji, napędzając ewolucję. Takie właśnie zmiany mogą decydować o rozdzielaniu się linii wielu gatunków, w tym szympansa i człowieka.

Anna LORENC
Współpraca: Jarek BRYK

Korespondencję do Kącika Biologicznego prosimy przysyłać do Jarka Bryka pod adresem: bryko@poczta.onet.pl