

## SPIS TREŚCI NUMERU 9 (376)

O kulach i walcach niestaczących się z równi <i>Lech Nowicki</i> <i>Jacek Jagielski</i>	str. 1
Potencjalni matematycy od 9 do 99 lat <i>Jean Brette</i>	str. 4
Wzór Eulera i balony <i>Witold Sadowski</i>	str. 6
Zadania	str. 8
Aktualności	str. 9
<b>Mała Delta:</b> Czy Michael Jordan umie latać? <i>Piotr Zalewski</i>	str.10
O dwóch takich, co kolorowali mapę <i>Tomasz Bartnicki</i> <i>Jarosław Grytczuk</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Wrzesień	str.16
Kącik biologiczny	str.17

**W następnym numerze:**  
**Interferencja fullerenów**

Festiwale nauki stają się coraz bardziej popularne nie tylko w Polsce, lecz także w innych krajach Europy. W październiku ubiegłego roku – dzięki zaproszeniu ze strony francuskiej Fête de la Science – kilka polskich imprez festiwalowych zostało zaprezentowanych w Paryżu. O tym, co można było wówczas zobaczyć w Ogrodach Luksemburskich, piszemy w tym numerze *Delty*.

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula – członek rzeczywisty PAN, prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, doc. dr Tadeusz Jarzębowski, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, prof. dr hab. Marta Kicińska-Habior, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka. Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: (22) 55-44-545.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. (22) 663-87-52, (22) 663-11-46) Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2006 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2006 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2006 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru. Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie. Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

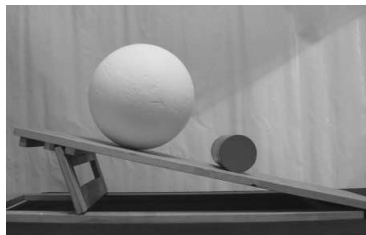
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

# O kulach i walcach niestaczających się z równi

Podczas trzynastej edycji *Fête de la Science* demonstrowaliśmy kule i walce o zaskakującej własności: położone na równi pochyłej nie staczały się z niej, lecz po wykonaniu kilku drgań nieruchomiały. Na fot. 1 pokazano walec i kulę spoczywające na nachylonej powierzchni.



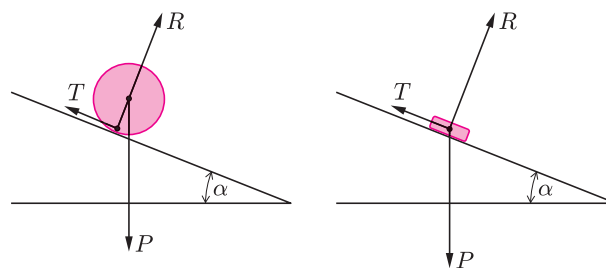
Fot. 1. Styropianowa kula i drewniany (pomalowany) walec spoczywające na równi pochyłej.

Za pomocą równi pochyłej i piłki do gry w koszykówkę lub w ping-ponga łatwo jest sprawdzić, że zazwyczaj już przy bardzo niewielkim kącie nachylenia  $\alpha$  piłka, którą położono na równi, stacza się. Niecodzienny widok kuli, która pozostaje na równi w spoczynku, budził zdziwienie widzów. Przygotowane przez nas kule i walce nie staczały się z równi nawet wówczas, gdy kąt  $\alpha$  przekraczał  $20^\circ$ . Widzom odwiedzającym nasze paryskie „ogrodowe” laboratorium zadawaliśmy pytanie: *Jak to możliwe, by kula leżała nieruchomo na pochyłości? Zachęcaliśmy do stawiania hipotez i do eksperymentowania, w szczególności do obserwacji zachowania się dziwnych kul i walców przy próbach wprawienia ich w ruch lub utrzymania w spoczynku, nie tylko na równi pochyłej. Nie ukrywając faktu, że dziwnie zachowujące się bryły zostały przez nas specjalnie przygotowane, nie pozwalaliśmy jednak na zajrzenie, co kryją w swych wnętrzach.*

## Piłka na równi

Przeanalizujemy siły działające na piłkę, dzięki którym stacza się ona po równi pochyłej (rys. 1). Ziemia przyciąga piłkę siłą grawitacji  $P$ . Oddziaływanie równi na piłkę opisujemy za pomocą siły tarcia  $T$ , skierowanej wzdłuż równi w górę, oraz siły reakcji sprężystej  $R$  skierowanej prostopadłe do równi, również ku górze. Siły  $T$  i  $R$  przyłożone są do piłki w miejscu jej zetknięcia z równią. Czy możliwe jest, by trójka działających na piłkę sił:  $P$ ,  $T$  i  $R$  zapewniała jej równowagę? Wynik prostego doświadczenia, w którym piłkę kładziemy na pochyłości, sugeruje, że nie ma takiej możliwości. Wiemy jednak, że jeśli zamiast piłki umieścimy na równi prostopadłościenny klocek, to działające nań siły  $P$ ,  $T$  i  $R$  będą się równoważyć. Na przykład zwykła gumka do wycierania, położona na pochyłej deseczce, pozostaje nieruchoma nawet przy kącie nachylenia bliskim  $45^\circ$ . Gdy gumka jest w równowadze, siła ciężkości  $P$  jest zrównoważona wypadkową sił  $T$  i  $R$ . Gdy zwiększyć kąt nachylenia równi, gumka zacznie się zsuwać, gdyż siła tarcia statycznego nie może przekroczyć pewnej wartości.

Lech NOWICKI,\* Jacek JAGIELSKI\*



Rys. 1. Siły działające na piłkę (a) i na klocek (b), które położono na równi pochyłej. Piłka nie jest w stanie równowagi.

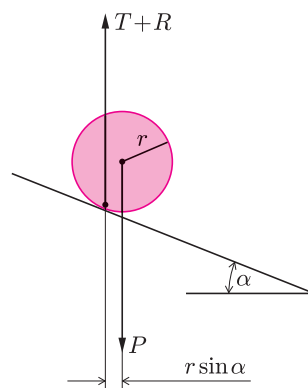
A dlaczego w przypadku piłki jest inaczej? Czemu piłka na równi nie jest w równowadze? Aby wyjaśnić ten fakt, musimy odwołać się do pojęcia momentu siły. Aby ciało rozciągle, tj. takie, którego rozmiarów nie zanedbujemy, było w równowadze, spełnione być muszą dwa warunki: *Suma sił działających na ciało jest równa zero.*

*Suma momentów sił działających na ciało jest równa zero.*

Skoro zwykła piłka nie ma na równi położenia równowagi, to najwidoczniej nie jest możliwe jednoczesne spełnienie obu warunków. Istotnie, jeśli przyjąć założenie, że spełniony jest pierwszy z nich, dotyczący sił, to można wykazać, że nie jest spełniony drugi. Niech  $P + T + R = 0$ , czyli  $P = -(T + R)$ . Oznacza to, że siły  $P$  i  $(T + R)$  stanowią parę sił, tzn. układ sił o równoległych kierunkach, równych wartościach

i przeciwnych zwrotach.

Jak pokazano na rysunku 2, siły te działają wzdłuż równoległych prostych, których odległość wynosi  $r \sin \alpha$ , gdzie  $r$  to promień kuli. Suma momentów tych sił wynosi  $Pr \sin \alpha$  i jest różna od zera (przyjmujemy, że  $r > 0$  i  $\alpha > 0$ ). Tak więc na piłkę, którą położono na równi, działają siły, które nie zapewniają stanu równowagi. W konsekwencji piłka stacza się pod wpływem działającego na nią momentu sił.



Rys. 2. Jeśli  $P = -(T + R)$ , to siły  $P$  i  $(T + R)$  stanowią parę sił, której moment jest równy  $Pr \sin \alpha$ .

## Hipotezy

Widzowie uczestniczący w imprezie stawiali rozmaite hipotezy, usiłując wyjaśnić utrzymywanie się kul i walców na pochyłości. Najczęściej sugerowano, że zastosowane zostały magnesy. Wysuwano również inne przypuszczenia: że kula jest naelektryzowana, lub że zawiera specjalny gaz. Sugerowano nawet, że we wnętrzu kuli zamknięto jakieś zwierzę! Wiele z tych hipotez udało się doświadczalnie odrzucić.

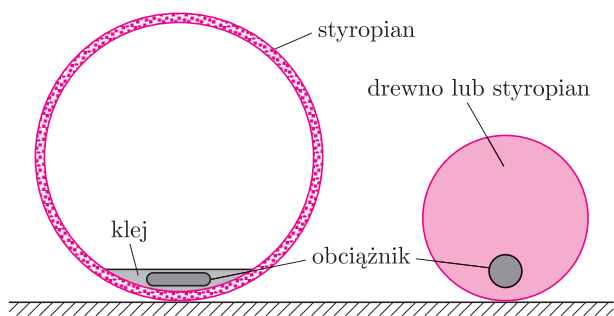
Widzowie namawiani przez nas do wykonywania następnych doświadczeń z walcami i kulami spostrzegali,

\*Instytut Problemów Jądrowych

że walec położony nieruchomo na płaskim podłożu wykonuje drgania, tocząc się raz w jedną, raz w drugą stronę. Najbardziej widowiskowe doświadczenie polegało na próbie utrzymania styropianowej kuli na poziomo wyciągniętej dłoni. Eksperymentatorzy odczuwali na własnej skórze, że ta sama kula, która pozostaje nieruchoma na równi, stacza się z poziomo położonej podpory, jaką stanowi dłoń. Najczęściej to właśnie doświadczenie naprowadzało eksperymentatorów na właściwy ślad. Domyślano się wówczas lub stwierdzano: jedna połowa kuli jest cięższa od drugiej.

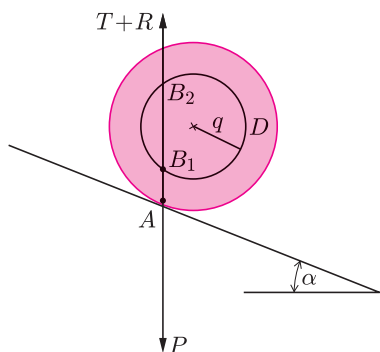
## Niejednorodne bryły

Najwyższy czas wyjawic, na czym polegał użyty trick sprawiający dziwne zachowanie się kul i walców: bryły te nie były jednorodne. Pojedynczą kulę wytwarzano, sklejjąc dwie półkule. Jednakże przed sklejeniem do wewnętrznej ścianki jednej z nich przymocowywano ołowiany obciążnik. W sklezionej już kuli obciążnik znajdował się w znacznym oddaleniu od środka kuli (rys. 3), a środek ciężkości tak wytworzonej bryły leżał w pewnej odległości  $q$  od jej środka geometrycznego (odległość tę nazywamy mimośrodem). W podobny sposób przesunięto środek ciężkości walca: kawałek ołowiu umieszczono wewnątrz walca, w pewnej odległości od jego osi. Obciążniki zawarte w bryłach pozostawały niewidoczne dla widza.



Rys. 3. Budowa kuli i walca z przesuniętymi środkami ciężkości.

Walec położono na równi pochylej tak, że jego oś pozostawała pozioma. Na rys. 4 pokazano przekrój walca dokonany płaszczyzną równoległą do podstaw. Widoczny okrąg  $D$  o promieniu  $q$  stanowi zbiór wszystkich punktów, w których może znaleźć się środek ciężkości walca leżącego w ten sposób na równi.



Rys. 4. Siły działające na walec z przesuniętym środkiem ciężkości, położony na równi. Walec jest w stanie równowagi trwałej.

Wyjaśnijmy, dlaczego przesunięcie środka ciężkości walca może zapewnić stabilność walca na równi.

Zauważmy, że gdy mimośród jest odpowiednio duży, to środek ciężkości może znaleźć się dokładnie nad punktem podparcia  $A$ . Ścisłej: istnieją wówczas dwa punkty okręgu  $D$ , znajdujące się nad punktem  $A$ ; oznaczono je  $B_1$  i  $B_2$ . Położenia walca, w których jego środek ciężkości leży w jednym z tych punktów, są stanami równowagi. Zauważmy, że w obu stanach równowagi siły  $P$  i  $(T + R)$  działają wzdłuż tej samej prostej i w rezultacie suma momentów tych sił jest równa zeru, jeśli tylko siły te mają jednakową wartość.

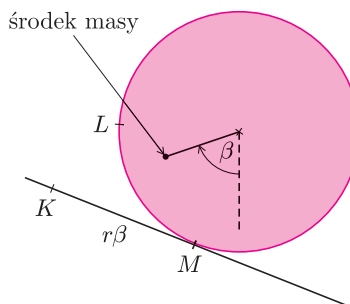
## Szukając ekstremów energii

Gdy zwykła kulka toczy się po nierównej powierzchni, zajmuje w końcu jakiś dołek, dążąc do zajęcia położenia o najmniejszej energii potencjalnej. Egzemplifikacja tego prawa na przykładzie walca (lub kuli) z przesuniętym środkiem ciężkości jest szczególnie pouczająca.

Energetyczne rozważania zaczniemy jednak od zwykłego jednorodnego walca (lub jednorodnej kuli). Przyjrzyjmy się, jak zmienia się grawitacyjna energia potencjalna  $E$  tej bryły toczącej się po równi bez poślizgu. Kąt  $\beta$ , który tworzy z pionem pewna ustalona średnica walca (rys. 5), przyjmijmy za parametr opisujący jego położenie. Niech w chwili początkowej  $\beta = 0$  i  $E = 0$ . Przy założeniu, że pole grawitacyjne jest jednorodne, energię potencjalną  $E$  oddziaływania ciała z Ziemią wyrazimy wzorem

$$(1) \quad E(\beta) = mgh = -(mgr \sin \alpha) \cdot \beta,$$

gdzie  $g$  jest wartością natężenia ziemskiego pola grawitacyjnego, a wysokość  $h$  wyznaczamy w odniesieniu do poziomu, na którym znajdował się środek walca w chwili początkowej. (Uwaga: Kąt  $\beta$  wyrażamy w radianach, a droga, jaką przebywa środek walca przy obrocie o kąt  $\beta$ , wynosi  $r\beta$ ). Zauważmy, że funkcja  $E(\beta)$  jest liniowa, co związane jest z faktem, że w rozważanym przypadku środek masy walca pozostaje w niezmienniej odległości  $r$  od powierzchni równi.



Rys. 5. Określenie kąta  $\beta$ . Gdy  $\beta = 0$ , punkty  $K$  i  $L$  pokrywają się, a środek masy jest w najniższym punkcie okręgu  $D$  (rys. 4).

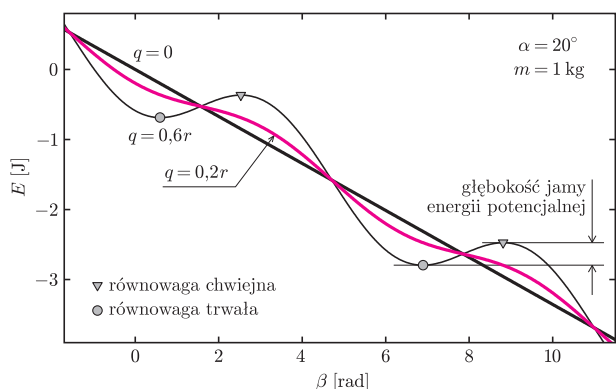
Zależność  $E(\beta)$  komplikuje się, gdy środek ciężkości walca jest przesunięty, czyli gdy  $q > 0$ . Jeśli założyć, że w chwili początkowej środek ten znajdował się w najniższym położonym punkcie okręgu  $D$ , to czysto geometryczne związki prowadzą do wzoru:  $h = -(r\beta \sin \alpha + q \cos \beta)$ , i w konsekwencji

$$(2) \quad E(\beta) = -mg(r\beta \sin \alpha + q \cos \beta) = -mgr(\beta \sin \alpha + \frac{q}{r} \cos \beta).$$

Zauważmy, że oprócz wyrazu występującego we wzorze

(1) wzór (2) zawiera dodatkowy człon proporcjonalny do cosinusa kąta  $\beta$ , więc okresowo zmienny.

Przedstawmy wykres funkcji  $E(\beta)$  dla konkretnych przykładów różniących się wartościami ilorazu  $q/r$ . Przyjmijmy:  $m = 1$  kg,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>,  $r = 10$  cm,  $\alpha = 20^\circ$  oraz trzy wartości mimośrodu:  $q = 0$  cm (tj. walec z nieprzesuniętym środkiem ciężkości), 2 cm oraz 6 cm. Na rys. 6 przedstawiono wykresy odpowiadające tym przypadkom. Dla pierwszego z nich liniowa funkcja  $E(\beta)$  nie ma żadnego ekstremum ani punktu przegięcia, nie ma więc także położenia równowagi. Gdy  $q = 2$  cm,  $q/r = 0,2$ , a funkcja  $E(\beta)$ , choć nieliniowa, pozostaje monotoniczna i nadal brak jest położenia równowagi. Jednakże w trzecim rozważanym przypadku  $q/r = 0,6$ , a funkcja  $E(\beta)$  ma minima (oznaczone na rys. 6 kółkami) i maksima (oznaczone trójkątami). Wartościom kąta  $\beta$ , przy których występują te ekstrema, odpowiadają stany równowagi.



Rys. 6. Zależność grawitacyjnej energii potencjalnej  $E$  od kąta  $\beta$  dla walca lub kuli nieślizgających się po równi.

Stan równowagi, w którym  $E(\beta)$  przybiera lokalne minimum, jest stanem równowagi trwałej. W położeniu tym środek ciężkości walca znajduje się w punkcie  $B_1$  (rys. 4), a fakt ten można sprawdzić doświadczalnie, zaznaczając położenie środka ciężkości na jednej z podstaw walca. Trwałość równowagi oznacza, że walec, odchylony nieznacznie od tego położenia, zmierza do stanu, z którego został wytrącony. Jeśli jednak wychylenie będzie zbyt duże, to walec podąży ku innemu położeniu równowagi trwałej. Obszar otaczający minimum energii potencjalnej nazywamy czasem jamą energii potencjalnej. Im jest ona głębsza, tym więcej energii trzeba, by wyprowadzić ciało ze stanu równowagi. W przypadku walca z przesuniętym środkiem ciężkości głębokość (i szerokość) jamy można w pewnych granicach regulować przez zmianę kąta  $\alpha$ . Na przykład, gdy  $\alpha = 0$  (równia pozioma), głębokość jamy wynosi  $2mgq$ . Przy nachylaniu równi, czyli zwiększaniu  $\alpha$ , jama staje się coraz to płytsza i zanika, gdy punkty  $B_1$  i  $B_2$  pokrywają się.

Wartościom kąta  $\beta$ , przy których energia potencjalna przybiera lokalne maksimum, odpowiada stan równowagi chwiejnej (trójkącik na rys. 6): walec wytrącony z tego stanu podąży ku innemu stanowi równowagi. W stanie równowagi chwiejnej środek ciężkości walca znajduje się w punkcie  $B_2$ . Podczas doświadczeń wykonywano próby utrzymania walców

i kul w stanie równowagi chwiejnej, zadanie to okazywało się jednak równie trudne, jak utrzymanie na palcu ołówka postawionego na ostrzu grafitowego pręcika.

## Stabilność i równowaga

W rozwiązaniach architektonicznych i technicznych niemal nie stosuje się stanów równowagi chwiejnej. Zwykle wymagana jest wysoka stabilność – osiąga się ją, projektując budowle i urządzenia w taki sposób, by przyjmowały stany równowagi trwałej z możliwie głębokimi jamami energii potencjalnej. Jednakże istnieją inne niekonwencjonalne sposoby zapewnienia stabilności. Zanim przedstawimy jeden z nich, przypomnijmy, że stan równowagi to pojęcie ogólniejsze niż stan spoczynku. Ciało jest w równowadze nie tylko, gdy spoczywa, lecz także wtedy, gdy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Rozpatrzmy lot samolotu wyposażonego w stateczniki, wychylaniem których steruje pilot za pomocą drążka sterowego. Układ sterowania jest tak zaprojektowany, by samolot był samostateczny, tj. by utrzymywał swój prostoliniowy lot także wtedy, gdy pilot puści drążek. Oznacza to, że podczas lotu wykorzystywany jest stan równowagi trwałej.

Okazuje się jednak, że obniżając samosterowność samolotu, lub nawet zupełnie z niej rezygnując, można uczynić go bardziej zwrotnym i zmniejszyć opory jego ruchu, a więc także zużycie paliwa. Możliwe jest to jednak jedynie wówczas, gdy bardzo niewielkie odchylenia samolotu od stanu równowagi są dostatecznie szybko korygowane ruchem stateczników i lotek. Szybkość i precyzja reakcji, jakie zapewnić może pilot, okazują się jednak niewystarczające, więc do przeprowadzania (nieustannych) korekcji lotu stosuje się komputer. Umieszczone w samolocie czujniki, m.in. przyspieszeniomierze i żyroskopy, dostarczają komputerowi danych o odchyleniach od stanu równowagi, a program komputerowy zmienia położenie sterów tak, by lot był stabilny. Tak właśnie działa system „fly-by-wire”, dzięki któremu wojskowe samoloty (np. F22) są zdolne do niesamowitych manewrów, a takie jak F117 w ogóle mogą latać. Istotą tego systemu można porównać do czulego układu, który wykrywając odchylenie ołówka od pionu, analizowałby kierunek i kąt wychylenia i sterowałby ruchem ręki tak, by utrzymywać ołówek w stanie bardzo bliskim stanowi równowagi.

Inną skomplikowaną konstrukcją jest Segway, rodzaj elektrycznej hulajnogi na dwóch kołach osadzonych na wspólnej osi. Również i to urządzenie zachowuje równowagę dzięki czujnikom wyznaczającym zmiany położenia środka ciężkości, żyroskopom i komputerowemu sterowaniu.

Przykłady te pokazują, jak ciekawe może być pozornie proste zagadnienie stabilności i jak można niekonwencjonalnie je rozwiązywać. A zadanie określenia położenia równowagi niejednorodnej bryły okazuje się nietrywialnym problemem, choć do jego rozwiązania wystarczają klasyczne prawa statyki.



# Potencjalni matematycy od 9 do 99 lat

Jean BRETTE\*

Tłumaczył Wiktor BARTOL

## Rozwiązanie zadania M 1108.

Pierwsze równanie mnożymy stronami przez  $x_2$ , drugie przez  $x_3$ , itd. Po dodatniu stronami tak uzyskanych zależności otrzymujemy

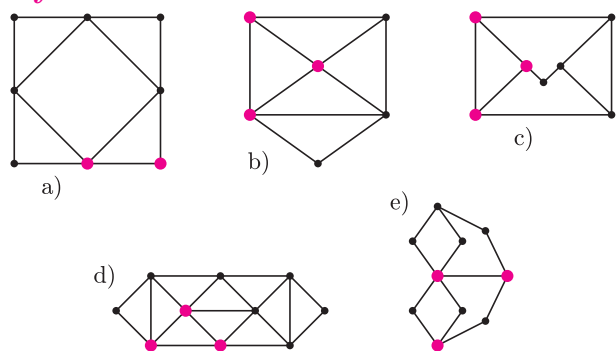
$$x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 + x_1^2 = 0.$$

Zatem  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , co jest jedynym rozwiązaniem danego układu równań.

Między 11 i 17 października 2004 roku odbył się we Francji kolejny Festiwal Nauki, stworzony w 1992 roku przez ówczesnego Ministra ds. Badań Naukowych, Huberta Curiena. W trakcie Festiwalu naukowcy spotykali się z publicznością w laboratoriach (w ramach akcji „otwartych drzwi”), na wykładach, pokazach i publicznych debatach. Od 4 lat Ministerstwo zaprasza do udziału w Festiwalu jedno z państw europejskich (w 2004 zaproszenie otrzymała Polska) oraz około 30 organizacji pozarządowych. Goście eksponują swoją działalność naukową w *Miasteczku Nauki*.

W tym kontekście dział matematyki Pałacu Odkryć zaproponował widzom w wieku od 9 do 99 lat całą gamę gier i łamigłówek matematycznych, pokazywanych na stoisku „Expomaths”. Poniżej przedstawiamy kilka przykładów i zapraszamy Czytelnika do udziału w zabawie.

## Rysunki



Klasyczny problem: czy można wykonać rysunek *bez odrywania ołówka* i tak, by przez każdą kreskę przejść tylko raz?

Aby umożliwić uczestnikom powtarzanie prób, wycofywanie się z błędnych wyborów, nadaliśmy temu problemowi formę *materialną*. Każdy z rysunków został naniesiony na kartonową planszę. W kolorowych punktach wywiercono otwory, a w jednym z rogów planszy przywiązano sznureczek. W każdym wierzchołku rysunku umocowano śrubkę, dzięki czemu po przeciągnięciu sznurka przez wybraną dziurkę można dalej pokrywać nim linie narysowanej figury. Zadanie: spróbuj pokryć rysunek sznurkiem, tak aby każda kreska została pokryta dokładnie raz.

Opisane wyżej zadanie cieszyło się wielkim powodzeniem wśród dzieci ... i ich rodziców. Wszyscy poradzili sobie z przykładem (a) niezależnie od wyboru punktu początkowego, a także z przykładami (b) i (d), gdy odpowiednio wybierano punkt początkowy. Często natomiast uczestnicy przyznawali: „nie znaleźliśmy rozwiązania dla (c) i (e)”, co prowadziło do następującego dialogu:

- Ależ, droga Pani, nie prosiłiśmy o znalezienie, a jedynie o spróbowanie!
- Aha, czyli to nie jest możliwe?
- A jak Pani sądzi?
- Myślę, że to niemożliwe.
- Jeśli tak, to jak się o tym przekonać?

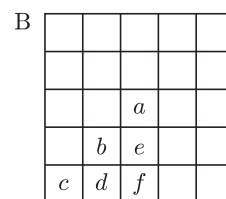
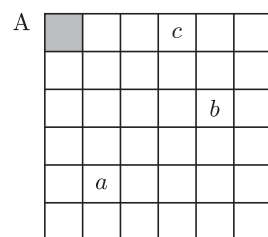
– Trzeba pewnie wypróbować wszystkie warianty? Ale to strasznie żmudne.

– Można i tak, ale Euler wymyślił bardzo proste i szybkie kryterium, które pozwala stwierdzić z całkowitą pewnością, jak to jest...

Wyjaśniliśmy tym, którzy chcieli posłuchać, rozumowanie Eulera i jego twierdzenie. Drogi Czytelniku, czy nie zechciałbyś sam poszukać odpowiedzi?

## Pokrycia

Pokazujemy dwa kwadraty podzielone na kratki.



1 ■ 17 ■

1 ■ 6 ■

**Zadanie A:** Umieść kolorowy kwadracik w kratce  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... lub w jakiegokolwiek kratce białej. Czy potrafisz pokryć pozostałe białe kratki 17 kostkami domina?

*Uczestnicy znajdowali odpowiednie pokrycie, gdy kolorowy kwadracik przykrywał  $a$  lub  $c$ , mimo licznych prób nie udawało im się to natomiast, gdy przykrywali  $b$ .*

**Zadanie B:** Umieść kolorowy kwadracik w kratce  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  lub  $f$ . Czy potrafisz pokryć pozostałe białe kratki 6 kostkami w kształcie litery L?

*Uczestnicy znajdowali odpowiednie pokrycie, gdy kolorowy kwadracik przykrywał  $a$  lub  $c$ , mimo licznych prób nie udawało im się to natomiast w pozostałych przypadkach.*

Dialog, jaki towarzyszył tym próbom, wyglądał podobnie: pytaliśmy tylko „czy potrafisz?”, nie twierdziliśmy, że to możliwe! Nie wiem, jak to jest z uczniami w Polsce, ale we Francji wszyscy – lub

\*Palais de la Découverte w Paryżu

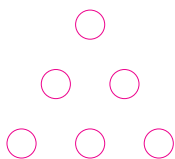
prawie wszyscy – uczniowie są przekonani, że gdy dajemy im zadanie, to na pewno ma ono rozwiązanie. Ciekawe, prawda?

Jeśli jednak nie znajdujemy rozwiązania, to nie znaczy jeszcze, że go nie ma. Gra nie jest zakończona: trzeba jeszcze zrozumieć, dlaczego. . . jeśli jest się tym zainteresowanym, rzecz jasna! Powodzenia, drogi Czytelniku.

Proste rozumowanie pozwala rozstrzygnąć zadanie A. Takie samo rozumowanie daje odpowiedź w zadaniu B, gdy kolorowym kwadratem przykrywamy  $d$  lub  $e$ . Nieco zmodyfikowane, ale oparte na tym samym pomysłe, rozwiązuje przypadek, gdy przykrywamy kratkę  $b$ . Niestety, gdy kolorowy kwadracik przykrywa  $f$ , nie umiem wymyślić niczego lepszego niż systematyczne badanie możliwości. Tak też się zdarza!

## Magiczne trójkąty

Uczestnik ma rozłożyć żetony ponumerowane od 1 do 6 na kółkach tworzących trójkąt, tak aby suma  $S$  żetonów ułożonych wzdłuż każdego z boków była stała.



Zadanie nie jest skomplikowane, więc po kilku próbach nasz gość wstaje, oznajmiając: „gotowe, znalazłem rozwiązanie!” (Na przykład, łatwo znajdziemy odpowiedni układ ze stałą sumą  $S = 9$ , gdy umieścimy 1, 2, 3 w wierzchołkach trójkąta). Wtedy rozpoczynamy dialog:

– Świetnie. Jest Pan pewien, że nie ma innych rozwiązań?

– To są jeszcze inne?

– Nie wiem, pytam. Należałoby pewnie ustalić, co to znaczy „inne”. Pytanie można by rozumieć tak: czy istnieją inne układy z tą samą sumą, ale inaczej rozmieszczonymi żetonami? A może należy je rozumieć tak: czy istnieją inne układy, z inną sumą?

– No tak. . . Można obrócić trójkąt. Żetony znajdują się w innych miejscach, ale suma pozostanie ta sama. Są zatem trzy rozwiązania.

– Jest Pan pewien?

– Eee. . . Nie: można jeszcze dodać układy symetryczne.

– A jak, Pana zdaniem, będzie z innymi sumami?

– Próbowałem z sumą 7, ale mi nie wyszło.

– Dlaczego właśnie 7?

– Dodałem wszystkie liczby od 1 do 6 i podzieliłem przez 3.

– A dlaczego wtedy nie ma rozwiązań?

– . . . Bo gdzieś trzeba umieścić 6, a najmniejszymi liczbami, jakie można do niej dodać, są 1 i 2.

– Pomysł, by zacząć od poszukiwania możliwej sumy, był dobry. Co nie zadziałało?

– Zapomniałem, że wierzchołki trójkąta liczone są podwójnie, kiedy sumujemy liczby na każdym boku, itd.

Problem jest bardzo prosty, umożliwia jednak w ramach zajęć Pałacowych bardzo interesującą pracę z uczniami, poczynając od ośmiolatków. Uczestnicy szukają samodzielnie odpowiedzi i proponują swoje rozwiązania, które następnie są porównywane. Razem szukamy symetrii trójkąta równobocznego, zliczamy je; niektórzy starają się wyznaczyć sumę, inni działają metodą prób i błędów. Zdarzają się też taktyki zadziwiające: cytowany wyżej uczestnik pomyślał o obróceniu całego trójkąta, ale pewnego dnia jeden z uczniów zaproponował przemieszczenie każdej liczby o jedno miejsce wzdłuż obwodu trójkąta! Doprowadziło to do nowego rozwiązania, ku zdumieniu wszystkich (także mojemu – przez 30 sekund!). Pokazujemy też trójkąt o bokach złożonych z czterech kółek, w których należy rozmieścić liczby od 1 do 10. Dotychczasowe metody przestają działać, ale poszukiwanie sumy można uogólnić bez trudu, choć nie bez niespodzianek.

Proponujemy naszym gościom wiele różnych gier i łamigłówek, tak w samym Pałacu Odkryć, jak i w trakcie podobnych imprez, ale – prócz zabawy – chcemy tą drogą przekazać uczestnikom pewne myśli:

- Zadanie może mieć jedno rozwiązanie, może mieć wiele rozwiązań, może też nie mieć żadnego rozwiązania.
- Treść zadania może ukrywać zasadnicze pytanie; ujawnia się ono często w trakcie poszukiwań.
- Narzędzia, metody wypracowane w pewnym kontekście mogą okazać się przydatne w innych sytuacjach.
- Uprawianie matematyki to nieustanne zaspokajanie ciekawości: każda odpowiedź rodzi nowe pytania – i tak matematyka rozwija się od ponad 4000 lat!
- i tak dalej. . .

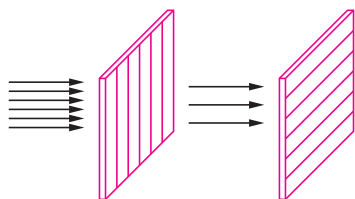


### Rozwiązanie zadania F 652.

Każdy kolejny polaryzator osłabia natężenie światła  $\cos^2 \frac{\pi}{2(N+1)}$  razy, z wyjątkiem pierwszego, który przepuszcza połowę padającego (niespolaryzowanego) światła:  $I = \frac{1}{2} I_0 (\cos^2 \frac{\pi}{2(N+1)})^{N+1}$ . Dla  $N \rightarrow \infty$  mamy

$$I_\infty = \frac{1}{2} I_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \sin^2 \frac{\pi}{2(N+1)} \right)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2(N+1)}} \cdot (N+1) \cdot \sin \frac{\pi}{2(N+1)} \cdot \sin \frac{\pi}{2(N+1)}} = \frac{1}{2} I_0 \cdot \left( \frac{1}{e} \right)^0 = \frac{1}{2} I_0$$

tak, jak dla pojedynczego polaryzatora.



Polski namiot na francuskim Festiwalu Nauki był tak pełen gości, że miejsce dla jego matematycznej części życzliwie zostało ofiarowane przez Jeana Brette'a i jego kolegów w namiocie Pałacu Odkryć. W ten sposób młodzi Francuzi odwiedzający namiot matematyczny nie tylko rozwiązywali łamigłówki, ale też nadmuchiwali balony z polskimi emblematami, rysowali na nich kropki oraz kreski i poznawali genialne odkrycie Kartezjusza i Eulera.

**Małe baloniki.** Narysujmy na baloniku kropki i kreski, trzymając się następujących reguł:

- końce każdej z kresk oznaczone są kropkami;
- każde dwie kropki połączone są linią złożoną z kresk;
- kreski się nie przecinają.

W trakcie rysowania powstają zazwyczaj na baloniku ograniczone kreskami pola. W dalszym ciągu interesować nas będzie, ile wynosi wartość następującego wyrażenia:

$$E = (\text{liczba kropek}) - (\text{liczba kresek}) + (\text{liczba pól}).$$

Narysujmy najpierw jedną kropkę na baloniku (rys. 1) i obliczmy  $E$ . Mamy oczywiście jedną kropkę, jedno duże pole (powierzchnia balonu) i zero kresk, więc

$$E = 1 - 0 + 1 = 2.$$

Rysujemy dalej. Możemy teraz tylko dorysować kreskę i zakończyć ją kropką (rys. 2). Wartość liczby  $E$  nie zmienia się:

$$E = (1 + 1) - 1 + 1 = 2.$$

Następnie

- albo znów dorysujemy kreskę z nową kropką na końcu (rys. 3) i wartość  $E$  nie zmienia się, bo wtedy

$$E = \underbrace{(1 + 1 + 1)}_{\text{kropki}} - \underbrace{(1 + 1)}_{\text{kreski}} + \underbrace{(1)}_{\text{pola}} = 2,$$

- albo dorysujemy kreskę ze starą kropką na końcu (rys. 4) i wtedy też wartość  $E$  nie ulegnie zmianie, gdyż powstanie nowe pole i otrzymamy

$$E = \underbrace{(1 + 1)}_{\text{kropki}} - \underbrace{(1 + 1)}_{\text{kreski}} + \underbrace{(1 + 1)}_{\text{pola}} = 2.$$

Łatwo uwierzyć, że jakkolwiek byśmy kombinowali, to trzymając się reguł gry, nie zmienimy wartości liczby  $E$ . Z naszych rozważań wynika zatem następujące

**Twierdzenie.** Jeżeli spójny (czyli „jednokawałkowy”) rysunek złożony z  $K$  kresk i  $W$  kropek na końcach kresk namalowany na baloniku wycina na nim  $S$  pól, to liczba

$$E = W - K + S$$

jest równa 2.

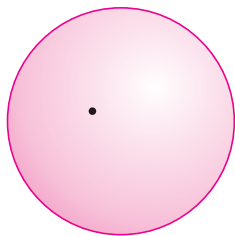
**Średnie baloniki.** Weźmy teraz do ręki model sześcianu, czworościanu czy dwudziestościanu foremego i zliczmy jego ściany, wierzchołki i krawędzie. Następnie obliczmy tzw. liczbę Eulera

$$(*) \quad E = (\text{liczba wierzchołków}) - (\text{liczba krawędzi}) + (\text{liczba ścian}).$$

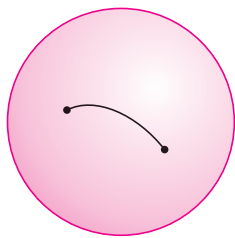
W każdym przypadku  $E = 2$ . Teraz zaczyna być jasne, że liczba  $E$  ze średnich i małych baloników to ta sama „osoba”, a nie kolizja oznaczeń... Dlaczego? Zauważmy, że gdyby nasze modele wielościanów (dokładniej: modele powierzchni wielościanu) zrobione były z odpowiedniej gumy, to po nadmuchaniu takiego wielościanu (rys. 5) uzyskalibyśmy balon z rysunkiem złożonym z kropek (wierzchołków), kresk (krawędzi) i pól (ścian). Z poprzedniego twierdzenia uzyskujemy zatem natychmiast nowe twierdzenie o wielościanach.

Czy jednak rzeczywiście wzór  $E = 2$  (zwany wzorem Eulera) jest słuszny dla każdego wielościanu?

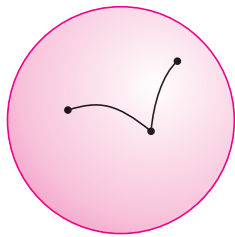
Rys. 1



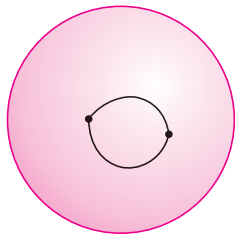
Rys. 2



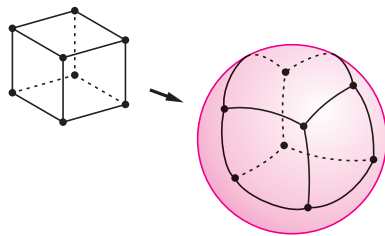
Rys. 3



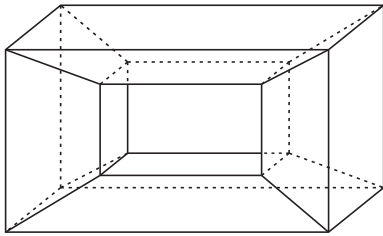
Rys. 4



Rys. 5



\*Instytut Matematyki Stosowanej, Uniwersytet Warszawski

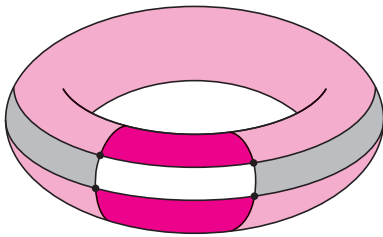


Rys. 6

Rozważmy wielościan w kształcie ramy obrazu (rys. 6). Mamy tutaj 16 ścian (8 prostokątów i 8 trapezów), 16 wierzchołków i 32 krawędzie. A zatem

$$E = 16 - 32 + 16 = 0 \dots$$

No i kłeska... Nasze twierdzenie jest fałszywe?! Niezupełnie. Zauważmy bowiem, że nadmuchując gumową ramę obrazu nie uzyskamy zwykłego „sferycznego” balonika, ale gumową dętkę. Na gumowej dętce nie da się już jednak przeprowadzić takiego samego dowodu jak ten z „małych baloników” (patrz rys. 7).



Rys. 7

Z drugiej strony ograniczając się tylko do wypukłych wielościanów, których powierzchnia po nadmuchaniu na pewno jest „sferycznym” balonikiem, uzyskamy

**Twierdzenie Eulera.** Dla każdego wypukłego wielościanu liczba Eulera zdefiniowana w równaniu (\*) jest równa 2.

**Duże baloniki.** Przykład z dętką rowerową nie powinien nikogo zniechęcać. Wręcz przeciwnie: odkryliśmy, że jest coś, co łączy wszystkie wielościany, których powierzchnia po nadmuchaniu staje się „sferycznym balonikiem”. Jest to jakaś magiczna cecha, która odróżnia te wielościany od innych, których powierzchnia po nadmuchaniu staje się np. gumową dętką. Co więcej, to nie w naturze wielościanu, ale w naturze balonika leży klucz do sekretu. A przecież „sferyczny balonik” może przybierać bardzo różne kształty (rys. 8), zależnie od tego, jak go ściśniemy. Dla każdego z tych kształtów będzie jednak spełniony wzór Eulera! Ta obserwacja prowadzi nas do klasyfikacji baloników ze względu na odpowiadającą im liczbę Eulera. Łatwo znajdziemy te, dla których liczba Eulera jest równa 2, 0, -2, -4 itd...

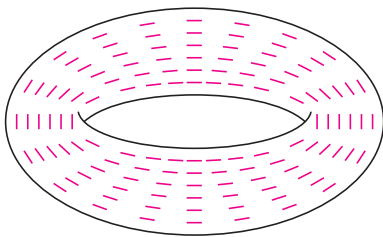


Rys. 8

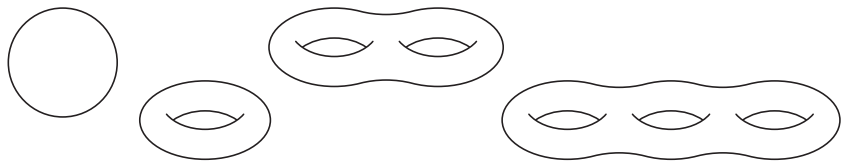
I oto jesteśmy o krok od fundamentalnego wyniku.

**Twierdzenie o klasyfikacji zwartych powierzchni dwuwymiarowych.**

Każda ograniczona dwuwymiarowa powierzchnia bez brzegu, która jest w „jednym kawałku”, i o której można powiedzieć, gdzie ma wewnętrzną, a gdzie zewnętrzną stronę, jest powierzchnią pączka ewentualnie z dziurami w środku.



Rys. 10



Rys. 9

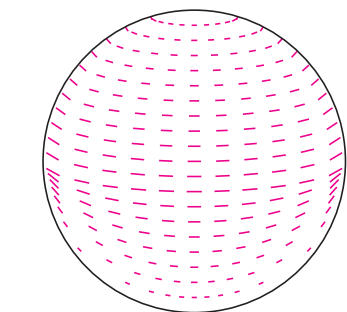
No, dobrze, a czy oprócz policzenia liczby dziur w powierzchni możemy w inny sposób przekonać się o tym, ile jest równa liczba Eulera (tzw. charakterystyka Eulera–Poincarégo) tej powierzchni? Owszem. Można, na przykład, spowodować, by powierzchnia balonika porosła włosami, a następnie gładko balonik uczesać. Dętkę zaczesać można bez żadnej łysinki (rys. 10), ale ze sferą taka sztuka się nie uda. Na przykład przy zaczesaniu z rysunku 11 mamy dwie łysinki na biegunach. Biorąc wokół każdej łysinki krzywą z określonym odpowiednio kierunkiem ruchu (czasem zgodnie, czasem przeciwnie do ruchu wskazówek zegara – nie będziemy tu wchodzić w szczegóły), możemy obliczyć tzw. indeks łysinki, czyli to, ile obrotów wykonały włoski wzdłuż krzywej (jeśli zgodnie z kierunkiem obrotu zadany na tej krzywej, to ze znakiem plus, jeśli przeciwnie – to z minusem; rys. 12). Zachodzi

**Twierdzenie Poincarégo.** Liczba Eulera  $E$  jest równa sumie indeksów wszystkich łysinek na powierzchni

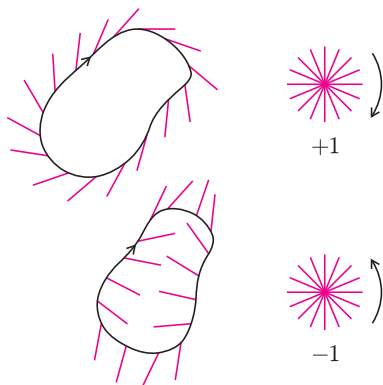
$$E = \sum_{A \in \text{zbior łysinek}} \text{indeks łysinki } A.$$

Jest to zadziwiające twierdzenie, gdyż łączy ono własność całej powierzchni (liczbę Eulera) z jej własnościami lokalnymi (indeksy łysinek).

Gdyby ktoś nie chciał jednak czesać balonów, może liczbę Eulera (charakterystykę Eulera–Poincarégo) obliczać jeszcze inaczej, wykorzystując

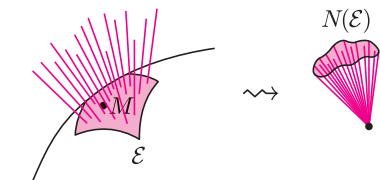


Rys. 11

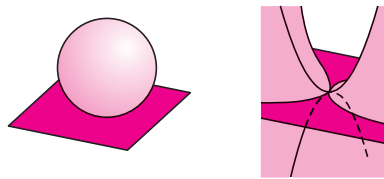


Rys. 12





Rys. 13



Rys. 14

twz. krzywiznę Gaussa. Żeby zrozumieć, o co chodzi, wyobraźmy sobie, że nasze baloniki pokryte są sierścią, czyli włoskami długości jeden, sterzącymi prostopadle do powierzchni. Weźmy teraz punkt  $M$  i mały fragment powierzchni wokół tego punktu o polu  $\varepsilon$ . Następnie zbierzmy ostrożnie włoski z tego fragmentu powierzchni i ułóżmy je tak, by wyrastały z jednego punktu, wciąż zachowując swój dawny kierunek (rys. 13). Wolne końce włosków wyznaczą nową niewielką powierzchnię o polu  $N(\varepsilon)$ . Możemy teraz określić krzywiznę Gaussa w punkcie  $M$ . Jej wartość bezwzględna jest równa granicy

$$K(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

przy czym z grubsza biorąc znak plus mamy wtedy, gdy płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie  $M$  leży po jej jednej stronie jak deska na piłce, a z minusem, gdy płaszczyzna ta rozcina powierzchnię, jak w przypadku siodła (rys. 14).

Okazuje się, że krzywizna Gaussa jest ściśle związana z charakterystyką Eulera–Poincarégo. Mówi o tym

**Twierdzenie Gaussa–Bonnetta.** Sumując (ściślej: całkując) krzywiznę Gaussa po powierzchni i dzieląc przez  $2\pi$ , otrzymujemy liczbę Eulera tej powierzchni

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_X K(M) dS.$$

Ci Czytelnicy, którzy nie wiedzą, jak się całkuje po powierzchni, mogą myśleć w ten sposób: wykonując powierzchnię balonu z papieru milimetrowego i w każdym milimetrowym kwadraciku wpisując średnią krzywiznę Gaussa w tym kwadraciku (jednostką jest milimetr), a następnie sumując wszystkie liczby, otrzymamy z bardzo dobrym przybliżeniem liczbę Eulera powierzchni balonika pomnożoną przez  $2\pi$ .

W ten sposób od zabawy z balonem i mazakami można dojść do takiej matematyki, która raczej budzi szacunek.



## Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

**F 651.** Na szerokości geograficznej północnej  $\Theta$  w kierunku północnym płynie rzeka o szerokości koryta  $L$  z prędkością  $v$ . Obliczyć różnicę poziomu rzeki na wschodnim i zachodnim brzegu spowodowaną siłą Coriolisa („hydrodynamiczny efekt Halla”). Rozwiązanie na str. 12

**F 652.** Jak wiadomo, dwa idealne, skrzyżowane polaroidy nie przepuszczają w ogóle światła. Pomiędzy nie wstawiamy  $N$  polaryzatorów skręconych o  $\frac{\pi}{2(N+1)}$  jeden względem drugiego. Ile światła przepuszcza taki układ optyczny? Rozważyć granicę przy  $N \rightarrow \infty$ .

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1108.** Rozwiązać w zbiorze liczb rzeczywistych układ równań ( $n > 3$ )

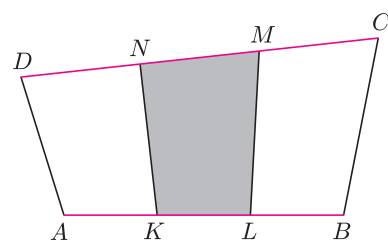
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 \\ x_2 + x_3 = x_4 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} = x_n \\ x_{n-1} + x_n = x_1 \\ x_n + x_1 = x_2 \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 4

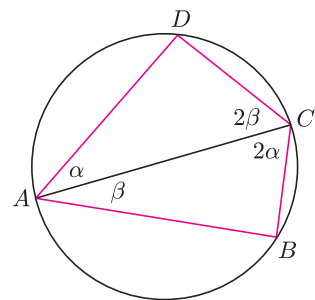
**M 1109.** Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ . Punkty  $K$  i  $L$  dzielą odcinek  $AB$  na trzy równe części, a punkty  $M$  i  $N$  dzielą odcinek  $CD$  na trzy równe części (rys. 1). Wykazać, że pole czworokąta o wierzchołkach  $K, L, M, N$  jest równe  $1/3$  pola czworokąta  $ABCD$ .

Rozwiązanie na str. 16

**M 1110.** W czworokącie wypukłym  $ABCD$  wpisanym w okrąg (rys. 2) zachodzą równości  $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CAD$  oraz  $\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle BAC$ . Dowieść, że  $BC + CD = AC$ . Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1



Rys. 2

## Kamień filozoficzny

Po wiekach wysiłków kamień filozoficzny, który miał umożliwić transmutację pierwiastków, został znaleziony. Transmutację umiemy przeprowadzać od prawie stu lat, ale, standardowo, potrzebne są w tym celu akceleratory, w których trudno dopatrzeć się jakiegos kamienia.

W dodatku każdy szanujący się alchemik chciałby cieszyć się obserwacją procesu w zaciszu własnej pracowni, a akceleratory zdolne przyspieszać jony nadal pozostają duże i drogie. Użycie akceleratora przekracza możliwości finansowe i lokalowe przeciętnego alchemika.

W *Nature* ukazał się artykuł [1], z którego wynika, że jako kamienia filozoficznego można użyć tantalenu litu  $\text{LiTaO}_3$ . Możliwe, że dałoby się wykorzystać również inne piroelektryczne kryształy.

Co prawda, kamień ten został zastosowany nie do przemiany metali nieszlachetnych w złoto, tylko do zimnej fuzji jądrowej, ale przecież ten proces jest celem współczesnych alchemików. Jego praktyczne zastosowanie przyniosłoby zresztą autorom (lub ich sponsorom) korzyści większe niż produkcja złota.

Wspomnienie alchemii nie jest przypadkowe. Doniesienia o opanowaniu zimnej fuzji, które od kilkunastu lat regularnie obiegają światową prasę, mają właśnie taki posmak. Przyjmowane są sceptycznie, a po krótkim czasie okazuje się, że sceptycyzm był jak najbardziej uzasadniony.

Tym razem wydaje się, że jest inaczej, ale opowiedzmy o tym po kolei.

Fuzja jądrowa to nadzieja ludzkości na praktycznie niewyczerpane źródło energii. Przypomnijmy, że chodzi o egzotermiczny proces łączenia lekkich jąder w jądra cięższe. Problem polega na tym, że „temperatura zapłonu” takiej reakcji jest bardzo wysoka, ze względu na bardzo silne odpychanie dodatnio naładowanych jąder. Żeby zaszła reakcja, jądra muszą zderzyć się z bardzo dużą energią. Ludzkość (niestety) nauczyła się przeprowadzać fuzję w sposób gwałtowny, ale od lat nie udaje się tego procesu opanować. Prowadzone są bardzo kosztowne eksperymenty z tokamakami, gdzie uzyskuje się olbrzymią temperaturę w kontrolowany sposób.

Przypomina to jednak gotowanie wody w wielkim saganie w tym sensie, że gotując wodę w taki sposób, można nigdy jej nie zagotować. Woda wyparuje, ale się nie zagotuje. Alternatywnym urządzeniem do gotowania wody jest ekspres do kawy, w którym woda gotuje się, przechodząc przez podgrzewaną rurkę.

Zimna fuzja to odpowiednik ekspresu do kawy. Urządzenie, które można by było umieścić na stole, które pracowałoby w temperaturze pokojowej i w którym zachodziłby proces syntezy jąder lekkich pierwiastków.

Pomysły na zimną fuzję można podzielić na dwie grupy. Autorzy pierwszej grupy prac utrzymywali, że obserwują nadwyżkę energii. Druga grupa zadowolala się twierdzeniem, że reakcja w ogóle zachodzi. Wszystkie prace pierwszej grupy, których ogłoszaniu towarzyszył

zrozumiwały szum medialny należny nowemu, taniemu, niewyczerpanemu źródłu energii – okazywały się błędne. Jeżeli chodzi o prace drugiej grupy, to szum medialny był zdecydowanie mniejszy – nie ma „produkcji” energii netto, więc nie ma „górz złota”. Nie wszystkim pracom drugiej grupy wykazano błędność, ale też żadna z nich nie wykazała niezbitcie zachodzenia reakcji syntezy jądrowej.

Autorzy pracy [1] bardzo dużo uwagi poświęcili wykazaniu, że rzeczywiście obserwują proces fuzji jądrowej. Ich pomysł jest bardzo prosty. Kryształy piroelektryczne wytwarzają różnicę potencjału elektrycznego przy zmianie temperatury. Przy odpowiednim doborze geometrii układu udało się uzyskać, za pomocą ogrzewającego się kryształu tantalenu litu, różnicę potencjałów rzędu 100 kV w atmosferze rozrzedzonego deuteru. Dodatkowo, użycie wolframowej igły jako jednej z elektrod powodowało lokalny wzrost natężenia pola elektrycznego do 25 V/nm, co było wystarczające do jonizacji deuteru. Zjonizowany deuter był przyspieszany przez różnicę potencjałów do energii większej od 80 keV, która umożliwia zajście reakcji syntezy  $\text{D} + \text{D} \rightarrow {}^3\text{He} + n$  w zderzeniu z tarczą zrobioną ze wzbogaconego w deuter scyntylatora plastikowego.

Głównym dowodem zachodzenia reakcji syntezy jest czasowa koincydencja rejestracji jądra  ${}^3\text{He}$  w scyntylatorze plastikowym z detekcją neutronu wybijającego proton w jednym z ciekłych scyntylatorów umieszczonych dookoła tarczy.

Z internetu można ściągnąć film [2], który pokazuje proces zbierania danych podczas jednego cyklu. Pokazane są na nim trzy interaktywne histogramy oraz sygnał z oscyloskopu elektronicznego podłączonego do scyntylatorów rejestrujących neutrony. Na filmie można zobaczyć (i usłyszeć – rejestracja neutronów jest przetworzona na sygnał audio „udający” licznik Geigera-Müllera), jak wzrost prądu jonowego (lewy histogram) skorelowany jest ze wzrostem liczby rejestrowanych neutronów (środkowy histogram). Liczba rejestrowanych neutronów przekracza 400 razy poziom tła. Publikacja [1] i towarzyszące jej materiały dodatkowe dokumentują autentyczność sygnału.

W jednym cyklu urządzenie produkuje energię rzędu  $10^{-8}$  dżula. Wystarczy więc około bilion cykli, żeby dzbanek kawy podgrzać o jeden stopień. Widać wyraźnie, że raczej nie da się zastosować opisanego procesu do „produkcji” energii. Nie oznacza to jednak, że nie znajdzie on praktycznego zastosowania. Może być wykorzystany jako tanie źródło neutronów lub jako podstawa działania silnika raketowego napędzającego mikroskopijne sondy kosmiczne.

Piotr ZALEWSKI

[1] B. Naranjo, J.K. Gimzewski, S. Putterman, *Observation of nuclear fusion driven by pyroelectric crystal*, *Nature* **434**(2005)1115

[2] [www.nature.com/nature/journal/v434/n7037/extref/nature03575-s2.mpg](http://www.nature.com/nature/journal/v434/n7037/extref/nature03575-s2.mpg)



# mała delta

## Czy Michael Jordan umie latać?

Ten legendarny koszykarz NBA miał przydomek *flying*, czyli „latający”. Bardzo często, atakując, wyskakiwał w górę, po nim – na tę samą wysokość – wyskakiwali często wyżsi obrońcy, on jednak potrafił poczekać aż opadną i dopiero wtedy, bez problemu, trafiał do kosza.

Powiecie, że to przecież niezgodne z prawami fizyki? Może niezgodne, ale takie akcje są zarejestrowane i dostępne w archiwach. Fizyka jest nauką doświadczalną. Zamiast kontestować to, co można zobaczyć, spróbujmy zastanowić się, co on tak naprawdę robił.

Zacznijmy od podstawowej własności wszelkich skoków, które można wykonać na parkiecie. Trajektoria środka masy jest całkowicie zdeterminowana w momencie oderwania się od podłoża. To, na jaką wysokość wzniesie się środek masy, zależy wyłącznie od pionowej składowej jego prędkości w tym momencie. Trajektoria ta zawsze jest fragmentem paraboli i nie można tego w żaden sposób zmienić, gdyż ciało bez kontaktu z podłożem jest układem izolowanym (oddziaływanie z powietrzem można pominąć).



Pozornie stoi to w sprzeczności z grą Jordana. Należy jednak pamiętać, że położenia środka masy nie widać. To, na co najczęściej zwracamy uwagę, porównując wysokość wyskoku zawodników, to ich głowy. A już trajektorię lotu głowy można w szerokich granicach modyfikować, zmieniając jej położenie względem środka masy. Nie trzeba w tym celu wcale ruszać głową. Wystarczy podkurczyć nogi lub wyciągnąć w górę ręce, żeby środek masy powędrował w górę naszego ciała. Do perfekcji mają to opanowane baletnice. Wykonanie w czasie skoku szpagatu powoduje, że środek masy w pierwszej fazie wędruje w górę, czyli głowa w stosunku do niego się obniża, a w drugiej fazie odwrotnie – wraz z obniżającymi się nogami obniża się położenie środka masy, a więc głowa jest coraz wyżej ponad nim. W efekcie w środkowej fazie lotu głowa, zamiast po paraboli, porusza się po równoległej do podłoża prostej! Wpatrzony w baletnicę widz ma wrażenie, jakby artystka przez moment szybowała na stałej wysokości. Jest to możliwe, jeżeli nogi najpierw wznoszą się, a później opadają szybciej od środka masy.

Podobną sztuczkę, prawdopodobnie instynktownie, stosował Jordan. Po odbiciu rozszerzał nogi i wnosił ku górze rękę z piłką. Wyskakujący w górę obrońcy przez chwilę mogli go blokować, ale on

przesuwał się w powietrzu bez zauważalnego obniżenia głowy, gdyż po przekroczeniu najwyższego punktu trajektorii środka masy obniżał nogi i rękę z piłką. W ten sposób przelatywał obok obrońców, by wykończyć rzut poza zasięgiem ich ramion. Sylwetka koszykarza z rozszerzonymi nogami i wyciągniętą ręką stała się jednym z symboli NBA. W tej pozycji Michael Jordan został uwieczniony na pomniku stojącym przed halą Chicago Bulls.

Sztuczka ta była możliwa dzięki fenomenalnemu wyskokowi osiągniętemu, który pozwalał Jordanowi na dłuższe przebywanie w powietrzu od przeciwników. Przeprowadzono kiedyś ankietę, w której pytano kibiców: „jak długo Jordan potrafi przebywać w powietrzu?”. Po odrzuceniu odpowiedzi emocjonalnych (np. kwadrans), okazało się, że średnia wypadła około dwóch sekund. Niestety, nawet najwybitniejsi atleci, o wyskoku osiągniętym sięgającym półtora metra, mogą przebywać w powietrzu jedynie minimalnie ponad sekundę. Jest to jednak do około jednej trzeciej sekundy dłużej niż zawodnicy obdarzeni tylko dobrym wyskokiem (około 75 cm).

Co jednak trzeba zrobić, żeby wyskoczyć jak najwyżej? Spróbujmy znaleźć odpowiedź w drugiej części tego artykułu.

## Czy można skoczyć wyżej od rekordu świata?

Oczywiście chodzi o rekord w skoku wzwyż. Czy można, bez pomocy jakichkolwiek przyrządów, pokonać poprzeczkę zawieszoną na wysokości 2,5 m?

Spróbujmy zastanowić się, jaką technikę należy zastosować, żeby pokonać jak najwyżej zawieszoną poprzeczkę.

Po pierwsze, żeby skoczyć jak najwyżej, należy maksymalnie wysoko wznieść swój środek masy. W tym celu należy nadać ciału jak największą prędkość w kierunku pionowym. Skacząc z miejsca, najpierw przysiadamy, a następnie energicznie prostując obie nogi, wyskakujemy w górę. Jeżeli jednak skaczymy z rozbiegu, to najczęściej odbijamy się tylko jedną nogą. Dlaczego w tym drugim przypadku udaje nam się skoczyć równie wysoko? Przecież pracę wykonuje wtedy tylko jedna noga, a nie dwie. Istotne znaczenie ma przeniesienie części pędu uzyskanego w czasie rozbiegu, poprzez sprężystość nogi, na pęd skierowany w górę. Możemy jednak porównać wyskok z jednego kroku i odbiciem z jednej nogi stosowany przez piłkarzy ręcznych, z wyskokiem z naskoku na obie nogi używanym przez siatkarzy. Okaże się, że przeciętny zawodnik uzyska w obu przypadkach porównywalnej wysokości skoki. Jak to się dzieje, że użycie jednej sprężyny nadaje porównywalną prędkość co użycie dwóch? Musi istnieć jakiś dodatkowy mechanizm, który zwiększa wysokość skoku jednonóż.

Zauważmy najpierw, że w wyskoku z miejsca biorą udział nie tylko nogi, ale również ręce. Rękoma wykonujemy zamach, nadając im pewną energię, która musi być dodana do energii ciała uzyskiwanej dzięki pracy nóg. W przypadku odbicia z jednej nogi do zamachu rękoma dochodzi zamach drugą nogą. Masa nogi przeciętnego zawodnika to około  $1/6$  masy całego ciała. Jeżeli w wyniku odbicia obunóż zawodnik o masie  $m = 80$  kg wznosi środek masy na wysokość  $h = 80$  cm, to w momencie odbicia uzyskuje energię kinetyczną  $E = mgh = 640$  J. Jeżeli zamach nogą miałby zrównoważyć brak odbicia z tej nogi, to jej energia kinetyczna powinna odpowiadać połowie energii  $E$ . W takim razie prędkość nogi powinna być rzędu

$$v_n = \sqrt{\frac{E/2}{2m_n}} = \sqrt{\frac{320 \text{ J}}{2 \cdot 80 \text{ kg}/6}} = 3,5 \text{ m/s.}$$

Obliczona prędkość odpowiada prędkości kolana, przy założeniu, że masa nogi jest równomiernie wzdłuż niej rozłożona. Ponieważ tak nie jest, to

należy tę prędkość pomnożyć przez mniej więcej dwa i jeszcze raz przez dwa, żeby uzyskać prędkość stopy, która jest dwa razy dalej od osi obrotu niż kolano. Otrzymamy prędkość około 15 m/s, która okazuje się odpowiadać maksymalnej prędkości stopy w czasie szybkiego biegu (która jest prawie dwa razy większa od prędkości samego biegu).

Z tego szacunkowego wyliczenia wynika, że zamach nogą może skutecznie kompensować brak odbicia tą nogą, ale również, że istnieje pewna graniczna wartość wysokości osiągniętej, po przekroczeniu której zamach nie będzie już wystarczał. Możliwe, że jest to jeden z powodów, dla którego bardzo skocznymi siatkarze praktycznie nigdy nie odbijają się jednonóż.

Możemy nasze rozważania podsumować. Do wyniesienia swojego środka ciężkości jak najwyżej potrzebne jest mocne odbicie, najlepiej z obu nóg, i mocny zamach. Czy można te dwie rzeczy połączyć w jednym skoku? Tak – i to jest właśnie sposób na pokonanie poprzeczki zawieszanej wyżej od rekordu świata. W odpowiedni sposób postępują zawodnicy na ścieżce akrobatycznej. Po serii fiffaków, które wprowadzają całe ciało w ruch obrotowy, następuje ostateczne odbicie z dwóch nóg i ewolucja w powietrzu, np. podwójne salto. W takim wypadku w zamachu uczestniczy całe ciało. Do uzyskania maksymalnej wysokości należy zrobić tylko jedno salto i to w pozycji łamanej, gdyż nad poprzeczką należy się prześlizgnąć w sposób podobny do tyczkarzy. Przy takim sposobie pokonywania poprzeczki środek masy przechodzi najniższej pod poprzeczką, czyli taki sposób skakania jest, w tym elemencie, skuteczniejszy od skakania flopem.

Dlaczego w takim razie nie skacze się tak na zawodach lekkoatletycznych? Po prostu istnieje zakaz odbicia obunóż w skoku wzwyż.

Przedstawione rozważania poparte są osiągnięciami akrobatycznych grup cyrkowych. Widziałem pokaz, w czasie którego cyrkowiec bez problemu pokonał wysokość 2,5 m. Trudno powiedzieć, jak wysoko można skoczyć w ten sposób, ale możliwe, że gdyby zrezygnowano z przepisu zabraniającego odbicia obunóż, to rekord świata mógłby zbliżyć się do granicy trzech metrów. Byłaby to jednak zupełnie inna konkurencja, w której prawdopodobnie występowałiby zawodnicy bardziej podobni do akrobatów niż dzisiejsi, wysocy i szczupli mistrzowie.

*Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI*



# O dwóch takich, co kolorowali mapę

Tomasz BARTNICKI,\* Jarosław GRYTCZUK\*

## Twierdzenie o czterech kolorach

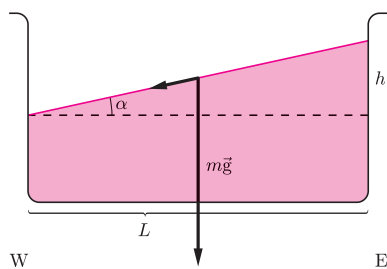
Jest w matematyce wiele twierdzeń, których znaczenie jest o wiele większe, aniżeli tylko wynik w nich zawarty. Są one swoistymi legendami i najwyrazistszymi przedstawicielami różnych dziedzin matematyki. Aby jednak twierdzenie (czy też hipoteza) miały szanse stać się taką legendą i na trwałe zapisać się w historii matematyki, muszą być spełnione dwa podstawowe warunki. Po pierwsze, teza takiego twierdzenia powinna dać się sformułować w prostym, czasem wręcz potocznym języku zrozumiałym nie tylko dla specjalistów, ale także dla przeciętnego odbiorcy zainteresowanego matematyką. Po drugie, chyba ważniejsze, dowód takiego prosto sformułowanego twierdzenia nie powinien być łatwo i szybko znaleziony. Im dłużej twierdzenie pozostaje hipotezą, im więcej słynnych matematyków bezskutecznie poszukuje dowodu, tym większa szansa, że przejdzie ono do historii jako twierdzenie–legenda.

Można by zaryzykować stwierdzenie, że każda dziedzina matematyki ma w swoim dorobku co najmniej jedno takie twierdzenie. W teorii grafów jest nim twierdzenie o czterech barwach, którego historia sięga roku 1852, kiedy to student Francis Guthrie, wiedziony czysto praktycznymi pobudkami, postawił swemu wykładowcy, Augustowi De Morganowi, następujące pytanie: jaka jest najmniejsza liczba kolorów, która wystarcza do pokolorowania dowolnej płaskiej mapy w taki sposób, aby każde dwa państwa, które graniczą ze sobą, otrzymały różne kolory?

**Rozwiązanie zadania F 651.**  
Zakładamy, że przepływ wody w rzece jest stacjonarny (nie zmienia się w czasie) i siły działające na każdy element płynu równoważą się. Równość składowych równoległych do powierzchni cieczy implikuje  $mg \sin \alpha = F_{Cor}$  gdzie  $F_{Cor}$  to składowa siły Coriolisa. Na szerokości geograficznej  $\Theta$  składowa wynosi  $F_{Cor} = 2\omega v \sin \Theta \cos \alpha \cdot m$ , stąd  $g \tan \alpha = 2\omega v \sin \Theta$ , czyli  $\alpha = \arctg(2\omega v \sin \Theta / g)$ . Stąd obliczamy, że  $h = L \cdot \tan \alpha$ , czyli

$$h = \frac{2\omega v L \sin \Theta}{g}$$

Np. dla Wisły jest to około 1 mm.



Korzystając z twierdzenia Eulera o wielościanach, nietrudno stwierdzić, że 6 kolorów wystarcza. Nieco bardziej zaawansowaną techniką można zmniejszyć tę liczbę do 5. Z drugiej strony istnieją mapy, dla których 3 kolory to za mało. I tak sformułowano hipotezę, którą zdała się potwierdzać praktyka. Każdą mapę na płaszczyźnie można poprawnie pokolorować przy użyciu czterech kolorów. Hipoteza szybko stała się sławna, gdyż mimo prostego sformułowania nijak nie dawała się prosto udowodnić ani też obalić.

Pierwszy „dowód” podał w 1879 roku Alfred Bray Kempe i od tej chwili świat nauki uznał problem za rozwiązany, a autora dowodu uhonorowano nawet wieloma zaszczytami. Jednak w 1890 roku Percy John Heawood znalazł w dowodzie Kempego błąd na tyle poważny, że nie dało się go usunąć i tak twierdzenie o czterech barwach z powrotem stało się hipotezą. Po tym wydarzeniu zainteresowanie problemem wzrosło wielokrotnie, przez kolejne dziesiątki lat wielu matematyków zmagало się z nim bezskutecznie. Osiągano pewne częściowe wyniki (na przykład podnoszono sukcesywnie liczbę państw na mapie, które na pewno dadzą się pokolorować 4 barwami), analizowano coraz większą liczbę nowych przypadków, jednak formalny ścisły dowód nadal pozostawał poza zasięgiem ludzkich umysłów. Dopiero po upływie 124 lat, w 1976 roku Kenneth Appel i Wolfgang Haken przedstawili wielostronicowy dowód polegający na redukcji problemu do wielogodzinnej komputerowej analizy około dwóch tysięcy pojedynczych przypadków. Więcej szczegółów historycznych Czytelnik znajdzie w *Delcie* 6/2004. Zamiast spodziewanego uczucia ulgi i radości, że ponad stuletni problem został w końcu rozwiązany, rozpetęła się prawdziwa burza na pograniczu matematyki

i filozofii. Zaczęto stawiać fundamentalne pytania, co właściwie może być uznane za dowód twierdzenia, czy dowód niemożliwy do weryfikacji przez człowieka może być uznany za wiarygodny i dla kogo właściwie dowodzimy twierdzenia: dla ludzi czy dla komputerów. Na domiar złego okazało się, że dowód ów zawiera kilka istotnych luk. Jednak po kolejnych poprawkach i redukcji liczby przypadków do zaledwie kilkuset oraz kolejnej publikacji matematycy uznali twierdzenie o czterech kolorach za udowodnione, choć pewien niedosyt pozostał i jeszcze z pewnością wielu matematyków nie spocznie w wysiłkach w poszukiwaniu „dowodu z Księgi” lub choćby takiego, którego weryfikacja nie będzie wymagać użycia komputera.

## Kolorowanie map jako gra

W przeszłości często zdarzało się tak, że skomplikowanie prostego problemu lub sformułowanie go w ogólniejszej postaci prowadziło do jego rozwiązania (było tak np. z Wielkim Twierdzeniem Fermata). W roku 1981 profesor nauk politycznych z Uniwersytetu Nowojorskiego, Steven Brams, wiedziony nadzieją, że da się w ten sposób znaleźć inny, łatwiejszy dowód twierdzenia o czterech kolorach, postanowił problem kolorowania map nieco skomplikować. Wpadł on na pomysł, żeby kolorowanie danej mapy odbywało się jako dwuosobowa gra o bardzo prostych regułach.

Niech dwaj gracze, Jacek i Placek (oryginalnie Minimizer i Maximizer), na przemian kolorują regiony (państwa) zadanej mapy, mając do dyspozycji ustalony (ten sam dla obu) zbiór kolorów. Grę rozpoczyna Jacek i jego celem jest takie wybieranie regionów i kolorów, aby cała mapa została w końcu poprawnie pokolorowana. Natomiast jego przeciwnik, Placek, chce

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

za wszelką cenę temu zapobiec. Jednak obu graczy obowiązuje ta sama reguła, że w każdym momencie gry regiony, które graniczą ze sobą, muszą mieć nadane różne kolory. Jacek zwycięża, gdy cała mapa została poprawnie pokolorowana, Placek zaś w przeciwnym przypadku.

Idee Bramsa opublikował w 1981 roku Martin Gardner w swojej rubryce w „Scientific American”, stawiając jednocześnie pytanie, jaka jest najmniejsza liczba kolorów, która zapewni Jackowi zwycięstwo na dowolnej mapie. Pokazanie, że 4 kolory mu nie wystarczą, jest proste. Wystarczy jako mapę wziąć model sześciianu, strategia Placka zaś polegać będzie na tym, że w swoim ruchu koloruje on zawsze ścianę przeciwną do tej, którą uprzednio pokolorował Jacek, używając do tego celu nieużytego wcześniej koloru.

W jednym z kolejnych numerów Lloyd Shapley pokazał, że również 5 kolorów nie zagwarantuje Jackowi zwycięstwa. Tym razem gra toczy się na modelu dwunastościanu foremego. Strategia Placka ponownie polega na tym, aby kolorować przeciwną ścianę, lecz tym razem robi on to zawsze tym samym kolorem, którego użył Jacek w poprzednim ruchu. Patrząc na dwunastościan foremny, łatwo zauważyć, że Jacek jest zmuszony w kolejnych swoich ruchach używać nowego koloru, a co za tym idzie – nie jest w stanie wygrać gry na 5 kolorach.

W następnym numerze Robert High podał przykład 20-ściennej mapy (ponownie był to model bryły), dla której nawet 6 kolorów nie zagwarantuje Jackowi zwycięstwa. Jednocześnie postawił hipotezę, że 7 kolorów wystarczy Jackowi do zwycięstwa na każdej mapie, choć z drugiej strony nie było nawet wiadomo, czy jakkolwiek skończona liczba kolorów może mu to zagwarantować. Więcej publikacji na ten temat nie było, więc hipoteza Higha pozostała otwarta.

W 1991 roku Hans Bodlaender opublikował pracę „O złożoności pewnych gier w kolorowanie”, w której opisał dwuosobową grę w kolorowanie wierzchołków dowolnego skończonego grafu. Gracze noszą tym razem imiona Alice i Bob, lecz reguły gry są grafowym odpowiednikiem reguł Bramsa. Autor wprowadził ponadto parametr  $\chi_g(G)$  zwany rozgrywaną liczbą chromatyczną (ang. *game chromatic number*), a zdefiniowany jako najmniejsza liczba kolorów, dla której Alice (Jacek) ma zwycięską strategię na grafie  $G$ . Postawił też hipotezę, że  $\chi_g$  jest skończona na klasie wszystkich grafów planarnych, które są odpowiednikiem map na płaszczyźnie. Nie pokusił się jednak o podanie żadnej stałej, która miałaby być ograniczeniem, mimo że High próbował ją podać już 10 lat wcześniej.

Po tej publikacji specjaliści z teorii grafów żywo zainteresowali się problemem gry w kolorowanie. W 1994 roku Hal Kierstead i William Trotter pozytywnie zweryfikowali hipotezę Bodlaendera, podając pierwsze górne oszacowanie:  $\chi_g(G) \leq 33$  dla każdego grafu planarnego  $G$ . Obalili przy okazji hipotezę Higha, znajdując graf planarny, dla którego 7 kolorów nie gwarantuje Alice zwycięstwa.

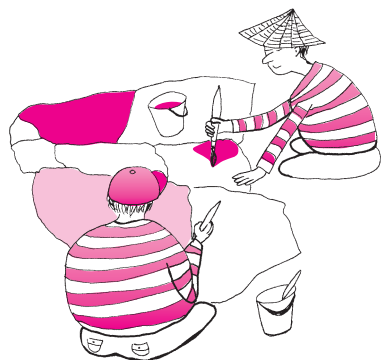
W 5 lat później ukazuje się praca Thomasa Dinsky’ego i Xudinga Zhu, w której podają oni zaskakująco prosty i elegancki dowód nieco lepszego oszacowania  $\chi_g(G) \leq 30$ . Wkrótce Zhu obniża to oszacowanie do 19, używając skomplikowanej metody aktywacji. Następnie Kierstead poprawia ten wynik o 1. Aktualny rekord wynosi 17 kolorów i należy ponownie do Zhu. Biorąc pod uwagę dystans pomiędzy 8 a 17, oraz rosnącą komplikację stosowanych technik dowodowych, należy sądzić, że wyścig ten nieprędko się skończy i pewnie jeszcze długo przyjdzie nam czekać na ostateczne rozwiązanie tego intrygującego problemu.

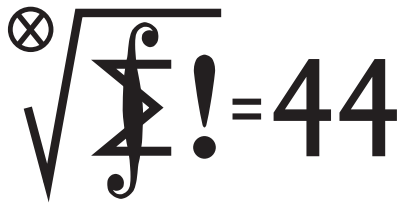
## Wątek sensacyjny

Przy tej okazji warto wspomnieć o pewnym niecodziennym fakcie. Otóż we wszystkich publikacjach traktujących o grze w kolorowanie grafów jako twórca gry podawany jest Bodlaender, mimo że 10 lat wcześniej, grę tę wymyślił Brams. Rzecz jasna, matematycy zawsze oddają należną cześć twórcom oryginalnych problemów, a że tym razem tak się nie stało, wynika po prostu z faktu, iż żaden z autorów publikacji nie miał pojęcia o Stevenie Bramsie i jego pomysłach opublikowanych w czasopiśmie popularnonaukowym.

Niedopatrzenie to zostanie już wkrótce naprawione. Pierwszym krokiem w tym kierunku jest niniejszy artykuł, „Delta” zaś jest prawdopodobnie pierwszym czasopismem na świecie, w którym cała historia związana z grą w kolorowanie zostaje przedstawiona. Autorom udało się także nawiązać bezpośredni kontakt zarówno z Bramsem, jak i Kiersteadem oraz Zhu, którzy zapowiedzieli, że już w kolejnych swoich publikacjach wspomną o pierwszym autorze pomysłu na grę w kolorowanie.

Najzabawniejszy w całej sprawie wydaje się jednak fakt, że, jak nam doniósł z niekłamanym żalem S. Brams, przez wiele lat usiłował on zainteresować wielu matematyków tym problemem, jednak bez rezultatu. Nasuwa się więc refleksja, że być może warto częściej sięgać po czasopisma popularne typu „Delta” czy „Świat Nauki”, gdyż mogą się one okazać prawdziwą skarbnicą pomysłów i źródłem inspiracji do poważnych rozpraw naukowych.





Termin nadsyłania rozwiązań:

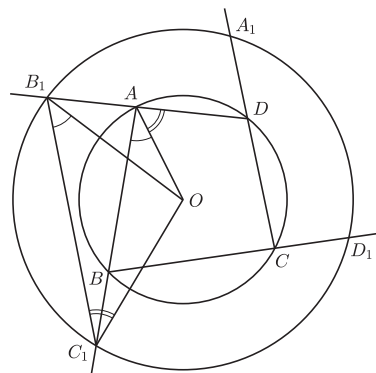
30 XI 2005

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
**493** ( $WT = 2,71$ ) i **494** ( $WT = 1,43$ )  
 z numeru 1/2005

Bartłomiej Dyda	– Wrocław	42,96
Zbigniew	–	
Sewartowski	– Wieliczka	42,66
Tomasz Warszawski	– Kraków	40,38
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	39,35
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,07
Zbigniew Galias	– Kraków	38,09
Jerzy Cisło	– Wrocław	35,81



**501.** Oznaczmy przez  $O$  wspólny środek danych okręgów. Długości boków i przekątnych czworokąta  $OAB_1C_1$  spełniają nierówność Ptolemeusza

$$R \cdot |AC_1| \leq r \cdot |B_1C_1| + R \cdot |AB_1|.$$

Cykliczne przesunięcie oznaczeń  $(A, B, C, D)$  daje trzy analogiczne nierówności. Dodajemy je wszystkie stronami, przenosząc wyrażenia z czynnikiem  $R$  na jedną stronę:

$$R \cdot (|AC_1| + |BD_1| + |CA_1| + |DB_1| -$$

$$-|AB_1| - |BC_1| - |CD_1| - |DA_1|) \leq$$

$$\leq r \cdot (|B_1C_1| + |C_1D_1| + |D_1A_1| + |A_1B_1|).$$

Ponieważ  $|AC_1| - |BC_1| = |AB|$  (itd.), uzyskana nierówność mówi, że

$$R \cdot \text{obwód}(ABCD) \leq r \cdot \text{obwód}(A_1B_1C_1D_1).$$

W myśl założenia, zachodzi tu równość. To znaczy, że czterokrotnie zastosowana nierówność Ptolemeusza była za każdym razem równością, czyli że czworokąty  $OAB_1C_1$ ,  $OBC_1D_1$ ,  $OCD_1A_1$ ,  $ODA_1B_1$  mają okręgi opisane. Dla czworokąta  $OAB_1C_1$  otrzymujemy stąd równości kątów:

$$|\sphericalangle OAC_1| = |\sphericalangle OB_1C_1|, \quad |\sphericalangle OAD| = |\sphericalangle OC_1B_1|.$$

Skoro zaś trójkąt  $OB_1C_1$  jest równoramienny, te cztery kąty są równe, a więc półprosta  $AO$  połówi kąt  $DAB$ . Analogicznie, półproste  $BO$ ,  $CO$ ,  $DO$  są

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z matematyki nr 505, 506

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**505.** Trójkąt równoboczny został podzielony prostymi równoległymi do jego boków na 36 trójkątów przystających. Linie podziału (wraz z bokami dużego trójkąta) tworzą siatkę, po której pełzają żuki; w chwili początkowej w każdym węźle siatki znajduje się jeden żuk. W jednostce czasu każdy żuk przemieszcza się z węzła siatki na węzeł sąsiedni, po czym zakreca w lewo lub w prawo o  $60^\circ$  lub  $120^\circ$ . Czy z tych warunków wynika, że w pewnym momencie dwa żuki spotkają się w jednym punkcie?

**506.** Wykazać, że dla liczb dodatnich  $a, b, c, d$  zachodzi nierówność

$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + c^2d + d^3} + \frac{d^4}{d^3 + d^2a + a^3} \geq \frac{a + b + c + d}{3}.$$

Zadanie 506 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2005

Przypominamy treść zadań:

**501.** Dane są dwa współśrodkowe okręgi o promieniach  $R, r$  ( $R > r$ ). Wypukły czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w mniejszy okrąg, a półproste  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  przecinają większy okrąg odpowiednio w punktach  $C_1, D_1, A_1, B_1$ ; przy tym stosunek obwodów czworokątów  $A_1B_1C_1D_1$  i  $ABCD$  wynosi  $R/r$ . Obliczyć te obwody.

**502.** Wykazać, że dla prawie wszystkich liczb naturalnych  $n$  istnieje przedstawienie liczby 1 w postaci sumy odwrotności sześcianów  $n$  liczb naturalnych.

dwusiecznymi pozostałych kątów czworokąta  $ABCD$ , który wobec tego jest kwadratem wpisanym w okrąg o promieniu  $r$ . Jego obwód wynosi  $4r\sqrt{2}$ , a obwód większego czworokąta (który też jest kwadratem) jest równy  $4R\sqrt{2}$ .

**502.** Indukcja ze skokiem o 7: jeżeli da się przedstawić jedynekę jako sumę  $n$  ułamków

$$1 = \frac{1}{x_1^3} + \dots + \frac{1}{x_n^3},$$

to da się ją też przedstawić jako sumę  $n+7$  takich ułamków:

$$1 = \frac{1}{x_1^3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}^3} + 8 \cdot \frac{1}{(2x_n)^3}.$$

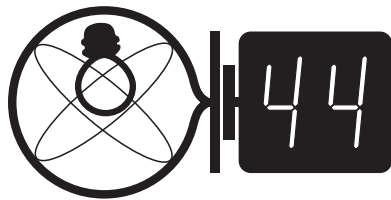
Aby uzyskać tezę zadania, wystarczy wskazać siedem kolejnych liczb naturalnych, dla których istnieje żądane przedstawienie. Jeśli dla pewnych liczb całkowitych  $x, y, z \geq 0$  zachodzi równość

$$1 = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + y \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + z \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3,$$

to liczba  $n = x + y + z$  jest „dobra”. Biorąc jako  $(x, y, z)$  kolejno trójki  $(7, 2, 11)$ ,  $(4, 13, 4)$ ,  $(5, 9, 9)$ ,  $(2, 20, 2)$ ,  $(6, 5, 14)$ ,  $(3, 16, 7)$ , otrzymujemy odpowiednio  $n = 20, 21, 23, 24, 25, 26$ ; a dla  $n = 22$  mamy przedstawienie

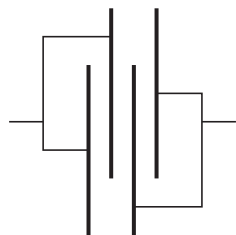
$$1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Start indukcji gotowy.

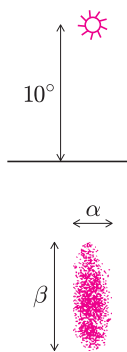


Termin nadsyłania rozwiązań:

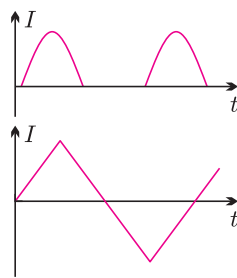
30 XI 2005



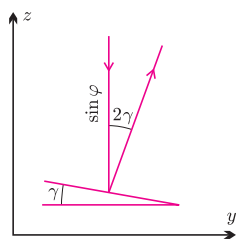
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

**398.** Przyjmijmy kierunek osi  $z$  jako pionowy, a rzut obrazu Słońca na płaszczyznę poziomą niech leży na osi  $x$ . Przechył powierzchni wody w płaszczyźnie  $xz$  o kąt  $\gamma$  spowoduje zmianę kierunku promienia odbitego o  $2\gamma$ , a ponieważ takie odchylenie może nastąpić zarówno w górę, jak i w dół, więc natychmiast otrzymujemy  $\beta = 4\gamma = 8^\circ$ . Nieco trudniejsza jest analiza odchylenia poziomego. W tym celu zrzućmy na płaszczyznę  $yz$  jednostkowy wektor o kierunku promienia padającego i załóżmy, że powierzchnia wody jest nachylona w tej właśnie płaszczyźnie (zob. rys. 4). Długość rzutu jest równa  $\sin \varphi$ , a po odbiciu jego składowa wzdłuż osi  $y$  będzie – dla małych kątów  $\gamma$  – równa  $2\gamma \sin \varphi$ . Z drugiej strony, wizualne poszerzenie odbicia zgodne z rysunkiem 1 jest równoważne obróceniu promienia odbitego o kąt  $(1/2)\alpha$  wokół osi  $z$  (jest to prawdą dla niezbyt dużych kątów  $\varphi$ ). Ponieważ składowa wspomnianego wektora jednostkowego wzdłuż osi  $x$  wynosi  $\cos \varphi$ , więc po tym obrocie jego składowa wzdłuż osi  $y$  wyniesie  $(1/2)\alpha \cos \varphi$  (dla małych kątów  $\alpha$ ). Z przyrównania  $2\gamma \sin \varphi = (1/2)\alpha \cos \varphi$  znajdujemy  $\alpha = 4\gamma \operatorname{tg} \varphi = 1,4^\circ$ .

**399.** Pierwszy amperomierz wskazuje zawsze wartość skuteczną natężenia prądu, tzn.  $I_1 = \sqrt{\overline{I^2}}$  (kreska nad

**402.** Samochód wyposażono w opony, których współczynnik tarcia statycznego wzdłuż kierunku jazdy wynosi (na pewnym ustalonym podłożu)  $f_1 = 0,5$ , w kierunku prostopadłym do kierunku jazdy  $f_2 = 0,8$ , a gdy siła tarcia jest skierowana pod kątem  $\alpha$  względem kierunku jazdy, współczynnik tarcia statycznego jest dany wzorem  $f = f_1 \cos^2 \alpha + f_2 \sin^2 \alpha$ .

- Jeśli samochód jedzie w stronę długiej prostopadłej ściany, to jak najlepiej uniknąć zderzenia: hamując wzdłuż linii prostej, czy skręcając bez hamowania?
- Czy skręcając i jednocześnie hamując można uniknąć zderzenia lepiej (tzn. przy większej prędkości początkowej lub przy mniejszej odległości od przeszkody), niż w obu powyższych przypadkach?
- Czy dobierając nacisk na hamulec i kąt skręcenia kierownicy tak, aby kąt  $\alpha$  zmieniał się w czasie jazdy, można lepiej uniknąć zderzenia, niż dla stałej wartości  $\alpha$ ?

Porównanie dotyczy optymalnego wyboru w zakresie każdej z tych metod, tzn. najlepszego stałego kąta  $\alpha$  i najlepszego przebiegu zmian tego kąta. Rozmiary samochodu należy uznać za małe w porównaniu z przebytymi odległościami. W przypadku poślizgu siła tarcia silnie maleje, dlatego zakładamy, że hamowanie poślizgiem kontrolowanym nie będzie skuteczne.

**403.** Dwa jednakowe kondensatory płaskie o pojemności  $C$  połączono równolegle. Obliczyć pojemność tego układu kondensatorów, jeśli jedną z okładek jednego z nich wsunęto między okładki drugiego w połowie odległości między nimi, a powierzchnia części wsuniętej wynosi  $2/3$  całkowitej powierzchni okładki (rys. 1). Grubość okładek i efekty brzegowe (wynikające z ich skończonych rozmiarów) należy pominąć.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2005

Przypominamy treść zadań:

**398.** Po jeziorze biegają liczne drobne fale, których kierunki zmieniają się dowolnie, a maksymalne nachylenie powierzchni wody wynosi  $\gamma = 2^\circ$ . Obserwujemy odbicie w wodzie Słońca, które jest na wysokości  $\varphi = 10^\circ$  nad horyzontem. Ocenic rozmycie kątowe odbitego obrazu Słońca, wzdłuż osi „w poprzek” (kąt  $\alpha$  na rysunku 2) i „wzdłuż” (kąt  $\beta$ ).

**399.** Amperomierz przeznaczony do pomiaru natężenia prądu zmiennego może działać na następujących zasadach: 1) mierzyć średnią wartość kwadratu natężenia prądu (poprzez np. pomiar siły wzajemnego oddziaływania dwóch cewek), 2) mieć wbudowany prostownik dwupołkowy prądu i mierzyć amplitudę natężenia prądu wyprostowanego, 3) mieć wbudowany prostownik dwupołkowy i mierzyć średnią wartość natężenia prądu wyprostowanego. Mamy trzy amperometry  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$  działające według powyższych zasad, przy czym skala wszystkich amperometry jest tak dobrana, że w przypadku prądu o przebiegu sinusoidalnym wskazują one wartość skuteczną natężenia. Jakie będą wskazania amperometry  $A_2$  i  $A_3$ , jeśli amperomierz  $A_1$  wskazuje 1 A, a prąd jest a) stały, b) o przebiegu jednopółkowym (tzn. połowa sinusoidy, rys. 3), c) o przebiegu piłokształtnym (rys. 3)?

symbolem oznacza średnią wartość). Drugi amperomierz wskazuje  $I_2 = a|I|_{\max}$ , gdzie stała  $a$  jest dobrana zgodnie z warunkiem dopasowania do sinusoidy, czyli  $a = 1/\sqrt{2}$ . Trzeci amperomierz wskazuje  $I_3 = b|I|$ , a ponieważ średnia wartość dodatniej połówki sinusoidy o amplitudzie 1 wynosi  $2/\pi$ , więc  $b = \pi/2\sqrt{2}$ .

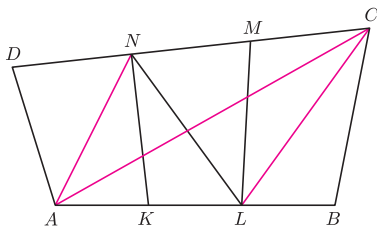
- Dla prądu stałego otrzymujemy natychmiast  $I_2 = 1/\sqrt{2} \text{ A} = 0,707 \text{ A}$ ,  $I_3 = \pi/2\sqrt{2} \text{ A} = 1,11 \text{ A}$ .
- Dla przebiegu jednopółkowego o amplitudzie  $I_0$  średnia wartość kwadratu natężenia prądu obliczona dla „czynnej” połówki wynosi  $\frac{1}{2}I_0^2$ , czyli dla całego przebiegu  $\overline{I^2} = I_0^2/4$ . Stąd  $I_1 = I_0/2$ , czyli  $I_0 = 2 \text{ A}$ ,  $I_2 = \sqrt{2} \text{ A} = 1,41 \text{ A}$ . Aby obliczyć  $I_3$  zauważmy, że dla „czynnej” połówki średnia wartość natężenia prądu wynosi  $\frac{2I_0}{\pi}$ , czyli dla całego przebiegu  $\overline{|I|} = I_0/\pi$ . Podstawiając  $b$  i  $I_0$  znajdujemy  $I_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A} = 0,707 \text{ A}$ .
- Dla przebiegu piłokształtnego o amplitudzie  $I_0$  średnia wartość kwadratu natężenia prądu wynosi  $I_0^2/3$ , więc  $I_1 = I_0/\sqrt{3}$ . Drugi amperomierz wskaże zatem  $I_2 = \sqrt{3/2} \text{ A} = 1,22 \text{ A}$ . Ponieważ  $\overline{|I|} = \frac{1}{2}I_0$ , więc  $I_3 = \frac{\pi}{4}\sqrt{3/2} \text{ A} = 0,962 \text{ A}$ .





**Rozwiązanie zadania M 1109.**  
Oznaczmy przez  $[F]$  pole figury  $F$ .  
Wówczas  $[ALC] = 2[LBC]$  oraz  
 $[ANC] = 2[NDA]$ , skąd po dodaniu  
stronami

$$[ALCN] = 2([LBC] + [NDA]).$$



Zatem dodając do obu stron  $2[ALCN]$ ,  
uzyskujemy

$$(1) \quad 3[ALCN] = 2[ABCD].$$

Z drugiej strony,  $[KLN] = [AKN]$  oraz  
 $[LMN] = [LCM]$ , skąd po dodaniu  
stronami mamy

$$[KLMN] = [AKN] + [LCM],$$

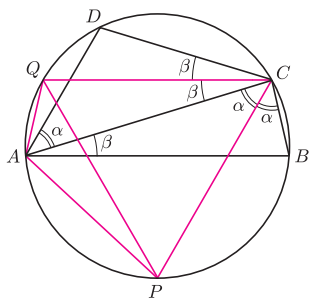
czyli

$$(2) \quad 2[KLMN] = [ALCN].$$

Łącząc równości (1) i (2), uzyskujemy  
tezę.



**Rozwiązanie zadania M 1110.**  
Niech  $\alpha = \sphericalangle CAD$  oraz  $\beta = \sphericalangle BAC$ .  
Z równości  $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$   
dostajemy  $\alpha + \beta = 60^\circ$ . Przyjmijmy,  
że dwusieczne kątów  $ACB$  oraz  $ACD$   
przecinają dany okrąg odpowiednio  
w punktach  $P$  i  $Q$ .



Wówczas  $\sphericalangle PCA = \sphericalangle CAD$ , skąd wynika,  
że  $AP = CD$ . Tak samo dowodzimy, że  
 $AQ = BC$ . Ponadto

$$\begin{aligned} \sphericalangle CPQ &= \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPQ = \\ &= \sphericalangle CAD + \sphericalangle DCQ = \alpha + \beta = 60^\circ. \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że  
 $\sphericalangle CQP = 60^\circ$ , skąd wynika, że trójkąt  
 $CPQ$  jest równoboczny. Oznaczmy przez  
 $a$  długość jego boku. Wówczas na mocy  
twierdzenia Ptolemeusza zastosowanego  
do czworokąta  $APCQ$  uzyskujemy  
 $AC \cdot a = AP \cdot a + AQ \cdot a$ . Stąd

$$AC = AP + AQ = CD + BC.$$

## Patrz w niebo

W roku 1962 pionierskie obserwacje w zakresie rentgenowskim ujawniły promieniowanie X dobiegające niemal równomiernie ze wszystkich stron. Przez kilkadziesiąt lat nie wiadomo było, czy jest to świecenie gładkiego tła czy ogromnej liczby niedostrzegalnych na razie oddzielnych źródeł. Rozstrzygnięcie nastąpiło po wysłaniu na okołoziemską orbitę rentgenowskiego teleskopu Chandra (1999). Okazało się mianowicie, że 80% rentgenowskiego tła pochodzi od źródeł punktowych, a są nimi supermasywne czarne dziury znajdujące się w centrach odległych galaktyk.

Teleskop Chandra wykonał m.in. dwa rekordowe sondowania Wszechświata: uzyskał obrazy dwóch obszarów po 16 minut kwadratowych, jednego położonego w Piecu (na południowej półkuli) i drugiego w Wielkiej Niedźwiedzicy, przy czym oba obrazy powstały w wyniku ekspozycji trwających milion sekund (ponad 11 dni). Badane pole w Wielkiej Niedźwiedzicy pokrywa się z obszarem znanym jako *Hubble Deep Field*, czyli z najodleglejszym fragmentem Wszechświata sfotografowanym za pomocą teleskopu Hubble'a. Obraz w zakresie rentgenowskim ukazał ogromną liczbę czarnych dziur w postaci kwazarów i innych typów aktywnych galaktyk wypełniających wczesny Wszechświat. Ponieważ Chandra nie mógł fotografować widm tych obiektów, informacje o ich odległościach uzyskano za pomocą ośmiometrowych teleskopów znajdujących się w *European Southern Observatory* w Chile. Współpraca okazała się bardzo owocna, odkryto mianowicie w końcu kwazary II typu, których istnienie było od dawna podejrzewane. Oczekuje się bowiem, że centralna czarna dziura w młodej, bogatej w pył galaktyce, powinna być otoczona przez bardzo gruby torus tego pyłu. Przy losowym usytuowaniu osi tych torusów tylko u około 10% obiektów, których osie byłyby skierowane w przybliżeniu w stronę Ziemi, powinny być widoczne ich obszary centralne w zakresie optycznym. U pozostałych 90% torus zakrywałby czarną dziurę, przez co taka galaktyka nie byłaby widoczna jako zwykły kwazar, byłaby natomiast widoczna jako kwazar II typu w zakresie rentgenowskim.

Tomasz KWAST

## Wrzesień

Gromady kuliste otaczają naszą Galaktykę mniej więcej równomiernie – mówimy, że same tworzą tzw. podsystem kulisty. Z kolei materia międzygwiazdowa należy do podsystemu płaskiego, czyli skupia się głównie w płaszczyźnie Drogi Mlecznej, dość skutecznie uniemożliwiając tu obserwowanie odległych obszarów, w szczególności centrum Galaktyki (odległego od nas o 8,5 kpc) i jego okolic. Zdawało by się więc, że w tej płaszczyźnie powinniśmy widzieć tylko najbliższe gwiazdy, a gromady kuliste, jako obiekty „zewnątrzne” względem Galaktyki, jedynie daleko od Drogi Mlecznej. Tymczasem w małym i niepozornym gwiazdozbiórze Strzały, położonym właśnie w Drodze Mlecznej, nie dość że znajduje się gromada kulista (M71), to jeszcze widać ją przez niewielki teleskop, gdyż jej jasność wynosi 8,1 mag. Leży ona bliżej niż centrum Galaktyki w odległości 3,1 kpc.

Wenus jest w Pannie i widać ją wieczorami na zachodnim niebie. Mars jest na granicy Barana i Byka, wschodzi więc wieczorem i widać go przez całą noc. Jowisz jest w Pannie i widać go, jak Wenus, tylko wieczorem. Saturn jest w Raku, wschodzi więc dopiero około północy. Nów Księżyca wypada 3 IX, a pełnia 18 IX. Jednego dnia – 7 IX – Księżyc zakryje Spikę i Wenus, ale pierwsze zakrycie będzie widoczne na Syberii, a drugie w południowej części Afryki. Księżyc zakryje też Antaresa 10 IX, ale zobaczą to mieszkańcy Środkowej Ameryki i Afryki. 22 IX Słońce wstąpi w znak Wagi, czyli nastąpi równonoc jesienna i zacznie się astronomiczna jesień.

T. K.

## Kłopoty z gatunkiem

Każdy z nas ma intuicyjne poczucie, co to jest gatunek. Wydaje się, że takie pojęcie gatunku jest niezależne kulturowo i dość trafne – Ernst Mayr opisywał pewne plemię z Nowej Gwinei, którego członkowie odróżniali 136 różnych gatunków ptaków w okolicznych lasach. Specjaliści-taksonomowie stwierdzili, że w rzeczywistości gatunków jest 137; lowcom-zbieraczom umknęła zaledwie jedna różnica. Nic dziwnego – odróżnianie stosunkowo podobnych gatunków mogło w przeszłości często decydować o sukcesie życiowym (do dziś może być istotne podczas grzybobrania).

Sto kilkadziesiąt lat temu Darwin zatytułował dzieło swojego życia *O powstawaniu gatunków*. Jednak dla samych biologów kwestia definicji gatunku nie jest prosta; co więcej, wydaje się, że nie da się łatwo tego pojęcia zdefiniować.

Biologiczna definicja gatunku, najczęściej używana, określa gatunki jako grupy naturalnych, krzyżujących się faktycznie lub potencjalnie populacji, rozrodczo izolowane od innych takich grup. Populacja zaś to grupa osobników tak rozmieszczonych, że każdy z nich ma jednakowe szanse kojarzenia się i produkowania potomstwa z każdym innym (pod warunkiem, że organizmy są dojrzałe płciowo, należą do przeciwnych płci i są równowartościowe pod względem wydolności płciowej). W ten sposób wróble *Passer montanus* z Poznania i z Chicago należą do jednego gatunku, ale do innych populacji.

Niestety, podstawowym problemem takiej definicji jest to, że wyklucza organizmy rozmnażające się w sposób bezpłciowy – np. bakterie czy wrotki bdelooidalne.

Co ma oznaczać potencjalne krzyżowanie? Czy mamy uznać za jeden gatunek niedźwiedzie: brunatnego i polarnego, które mogą się krzyżować (gdy się spotkają) i mają płodne potomstwo? Tu można by wprowadzić kryterium wzajemnego zastępowania: gdyby przenieść niedźwiedzia brunatnego do Arktyki, a polarnego w Karpaty, zginęłyby marnie.

Co w takim razie z jamnikiem i dogiem? Kwestia możliwości krzyżowania jest tu dyskusyjna, trudno też uznać, że mogłyby się nawzajem zastąpić. A przecież oba uznajemy za psy; poprzez kilka krzyżowań pośrednich gabarytami ras i kilka kundelków udałoby się też połączyć geny doga i jamnika. Można uznać, że psy to przykład sztucznego doboru kierowanego przez człowieka. W naturze spotyka się za to tzw. *ring species*. Znany przykład to pewne salamandry z Ameryki Północnej. Poszczególne populacje salamander zamieszkują kalifornijskie wybrzeże i Sierra Nevada. Różnią się ubarwieniem na tyle, że uznano je za podgatunki. Podgatunek A krzyżuje się – gdy nadarzy się okazja – z podgatunkiem B, B z C. W południowej Kalifornii spotykają się podgatunki A i E. W ich przypadku relacja „bycia tego samego gatunku” przestaje być przechodnia – choć mogą się bez trudu krzyżować z pozostałymi podgatunkami, mieszańce tych podgatunków są niemal nienotowane.

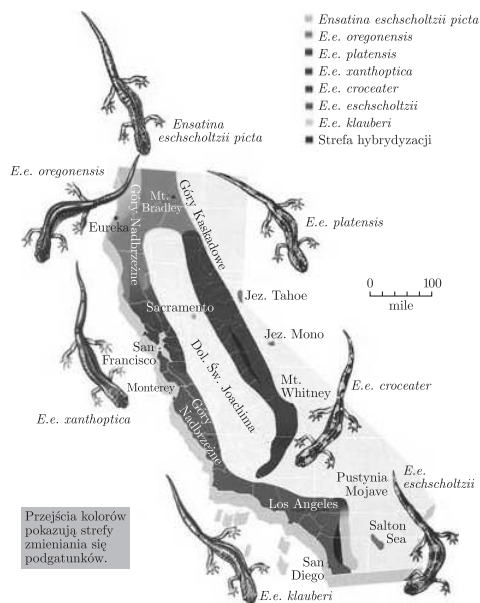
Z drugiej strony – wiele zwierząt, a zwłaszcza roślin, tworzy w naturze hybrydy z osobnikami innych gatunków. Jeśli gatunki czy podgatunki różnią się zasięgiem geograficznym, gdzieś pośrodku może powstać swoista strefa hybrydowa, w której przeważają mieszańce obu form.

Wreszcie, biologiczna definicja gatunku jest zupełnie bezradna wobec czasu. Dziś bez wątpliwości zaliczymy człowieka i szympansa do dwóch różnych gatunków. Sześć milionów lat temu byliśmy jednym gatunkiem. Kiedy nastąpił moment „0”, kiedy pojawiły się dwa osobne gatunki?

Dwa nowe gatunki powstają z jednego gatunku wejściowego; w pewnym momencie (np. teraz, w przypadku człowieka i szympansa) można jasno podzielić organizmy na przynależne do dwóch osobnych linii ewolucyjnych. W zależności od mechanizmu powstawania nowego gatunku rozdział następuje szybciej lub wolniej. W dodatku dopóki nie powstanie szczelna bariera zapobiegająca krzyżowaniu powstających gatunków, cały proces może zostać odwrócony, gdy znikną przyczyny izolacji (np. oddalenie geograficzne).

Te ułomności definicji gatunku biolodzy różnych dziedzin próbują likwidować, tworząc alternatywne, specjalistyczne definicje gatunku, np. ekologiczna, filogenetyczna itp. Wydaje się, że gatunek używany jest głównie w dwóch znaczeniach: jako pojęcie ewolucyjne (w znaczeniu pokrywającym się z biologiczną definicją gatunku) i jako jednostka klasyfikacji (np. podobne do siebie bakterie, charakteryzujące się zestawem cech *Escherichia coli*). W obu przypadkach trudno zrezygnować z wygody takiego pojęcia, natomiast trzeba pamiętać o trudnościach wynikających z próby umieszczenia w dyskretnych kategoriach zmiennej ciągłej.

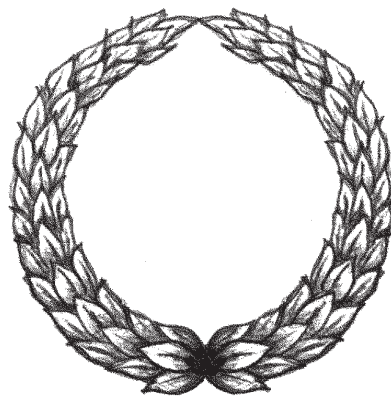
Kłopoty z definicją mogą okazać się niebawem jeszcze większe: do tej pory odróżnianie gatunków opierało się głównie na porównaniach anatomii, morfologii, cyklu rozwojowego itp. poszczególnych organizmów. W wielu przypadkach różnice są niezwykle trudne do uchwycenia dla ludzkiego obserwatora, wymagają też lat treningu. W związku z tym powstał projekt „kodów kreskowych”. Jego autorzy chcą sekwencjonować niewielki fragment genu u wszystkich organizmów tkankowych i na podstawie różnic jego sekwencji wyznaczać podziały gatunkowe. Taką znacznikową sekwencję można porównać do kodu kreskowego – w następnej fazie projektu kod kreskowy pozwoli wyznaczyć przynależność gatunkową. Jeśli kody kreskowe dwóch, na pierwszy rzut oka podobnych, organizmów znacznie się różnią – to znaczy, że pochodzą one z różnych gatunków. Są już pierwsze spektakularne rezultaty – kilkanaście nowych gatunków w grupach owadów uważanych wcześniej za jeden gatunek. Być może roboczą definicją gatunku będzie wkrótce „grupa organizmów o tym samym kodzie kreskowym”.



Żyjące na zachodnim wybrzeżu USA salamandry (*Ensatina*) wywodzą się z jednej pierwotnej populacji. Kiedy gatunek rozprzestrzenił się na południe, lokalne populacje adaptowały się do miejscowych warunków po obu stronach doliny. Każda z grup salamander jest w stanie krzyżować się z salamandrami z sąsiednich populacji; jednak tam, gdzie zamyka się pierścień na południu doliny – obszar zaznaczony na czarno – sąsiadujące populacje są na tyle różne, że się nie krzyżują.

Anna LORENC

Współpraca: Paweł POREBA, Jarek BRYK



# Olimpiada

## Zadania I stopnia Olimpiady Fizycznej, Astronomicznej, i Matematycznej 2005/2006

### LV OLIMPIADA FIZYCZNA ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

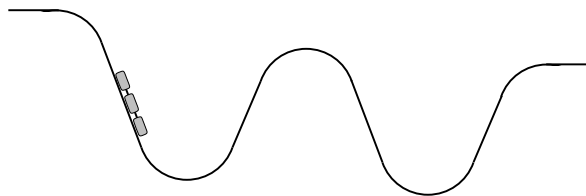
Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** (adresy na str. viii) w terminach: część I – do **25 października br.**, część II – do **21 listopada br.** O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich oraz na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

#### CZEŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań – 25 października 2005 r.)

**Uwaga:** Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

**Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź.  
Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.**

1. W którym wagoniku kolejki górskiej trzeba siedzieć (rozważmy tylko pierwszy i środkowy), aby odczuwana przez pasażera siła dociskająca go do siedzenia była największa? W którym wagoniku trzeba siedzieć, aby odczuwana przez pasażera siła dociskająca go do oparcia była największa? Tor kolejki znajduje się w płaszczyźnie pionowej i składa się z elementów w kształcie łuku o takim samym promieniu oraz odcinków prostych (patrz rysunek 1). Długość każdego z fragmentów jest większa od długości kolejki. Pomijamy tarcie i opór powietrza.



Rys. 1

2. Dla jakich kątów nachylenia równi położony na nią jednorodny, sześcienny klocek przewróci się? Współczynnik tarcia klocka o równię wynosi  $\mu$ .

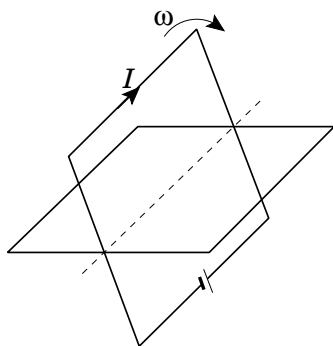
3. Termometr Galileusza to kilka kulek zanurzonych w wodzie. W zależności od temperatury wody część z nich wynurza się, a część opada na dno. Przyjmijmy, że kulka ma, niezależnie od temperatury, promień  $R = 1,5 \text{ cm}$ . Z jaką dokładnością powinna być ustalona masa takiej kulki, aby pomiar temperatury odbywał się z dokładnością  $1^\circ\text{C}$ ? Potrzebne dane znajdź w tablicach.

4. Do sufitu przyczepiono nitkę, na której zawieszono ciało o masie  $m$ . Pod tym ciałem zawieszono na drugiej nitce ciało o takiej samej masie. Podaj przyspieszenie obu ciał tuż po przecięciu górnej nitki oraz opisz jakościowo dalszy ruch tych ciał.

Rozważ dwie możliwości:

- nitki są idealnie nierozciągliwe;
- nitki są w istocie gumkami o dużej stałej sprężystości.

5. Rozważmy dwie ramki z drutu (patrz rysunek 2). Pierwsza obraca się ze stałą prędkością kątową. Pływie w niej prąd  $I$ .



Rys. 2

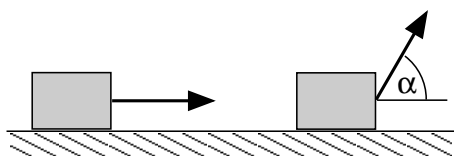
Rozpatrzmy następujące chwile:

- gdy płaszczyzny ramek są do siebie równoległe;
- gdy są do siebie prostopadłe.

W którym z tych przypadków moment siły działający na drugą ramkę jest największy? W którą stronę jest skierowany?

6. Rozważmy proces, w którym objętość jednoatomowego gazu doskonałego ulega zwiększeniu od  $V$  do  $V + \Delta V$ , a jego ciśnienie zmienia się od  $p$  do  $p + \alpha\Delta V$ , gdzie  $\Delta V$  jest bardzo małe. Dla jakich  $\alpha$  w tym procesie ciepło jest dostarczane do gazu?

7. Jaś przeprowadził następujące doświadczenie fizyczne: ciągnął pudło po podłodze za sznurek przyczepiony do dynamometru, sprawdzając, jakiej wymaga to siły. Zgodnie z jego zapiskami ciągnął to pudło ruchem jednostajnym, najpierw poziomo, a potem – z tą samą (różną od zera) siłą – pod kątem  $\alpha = 60^\circ$  (patrz rys. 3).



Rys. 3

Zgodnie z prawami fizyki:

- jest to możliwe na każdym podłożu, trzeba tylko odpowiednio dobrać siłę do współczynnika tarcia (jak?);
- Jaś pomylił się; taka sytuacja jest niemożliwa (dlaczego?);
- taka sytuacja jest możliwa tylko dla ściśle określonej wartości współczynnika tarcia (jakiej?).

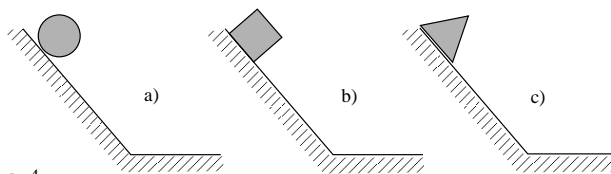
8. Rozważmy jednorodny pręt zawieszony na pionowych nitkach przymocowanych do jego końców. Obok prawego końca pręta na trzeciej nitce wisi kulka. Pręt jest poziomy. W pewnej chwili równocześnie przecinamy nitkę, na której wisi kulka oraz nitkę przywiązaną do prawego końca pręta. Tuż po przecięciu nitki przyspieszenie którego punktu będzie większe: środka kulki czy prawego końca pręta?

9. Powietrzny kondensator płaski ma pojemność  $C_p = 10^{-10} \text{ F}$ , a odległość między okładkami jest równa  $d = 2 \text{ mm}$ . Między okładki tego kondensatora wiano ciecz o stałej dielektrycznej  $\epsilon_w = 3$  i oporze właściwym  $\rho = 10^4 \Omega \text{ m}$ , całkowicie wypełniając jego wnętrze. Jakie jest natężenie prądu płynącego między okładkami kondensatora, jeśli został on podłączony do źródła o takim napięciu, że ładunek na każdej z okładek jest równy co do wartości  $Q = 10^{-9} \text{ C}$ ?

Rozważmy kondensator walcowy (o promieniach: wewnętrznym  $r = 2 \text{ mm}$  i zewnętrznym  $R = 4 \text{ mm}$ ) o pojemności (początkowej) również równej  $C_p$ , między okładki którego wiano tę samą ciecz. Jakie będzie natężenie prądu płynącego między jego okładkami, jeśli zostanie on podłączony do źródła o takim napięciu, że ładunek na każdej z okładek będzie równy co do wartości  $Q = 10^{-9} \text{ C}$ ?

10. Z równi pochyłej o kącie nachylenia  $45^\circ$ , z wysokości  $h$  spuszczone na podłogę: a) jednorodną kulkę; b) jednorodny sześcian; c) jednorodny graniastosłup o podstawie trójkąta równobocznego położony ścianą boczną na równi (patrz rys. 4). W którym przypadku pozioma prędkość ciała na podłożu będzie największa?

Tarcie i opór powietrza zanedbujemy. Ciała są małe w porównaniu z wysokością  $h$ .



Rys. 4

11. Transformator składa się z uzwojenia pierwotnego oraz uzwojenia wtórnego nawiniętych na rdzeń. Gdy do uzwojenia pierwotnego podłączony jest prąd zmienny o napięciu skutecznym  $230 \text{ V}$ , a obwód wtórny jest rozwarty, to napięcie skuteczne na zaciskach obwodu wtórnego jest równe  $23 \text{ V}$ , a prąd płynący przez obwód pierwotny ma natężenie skuteczne  $10 \text{ mA}$ . Jakie będzie natężenie skuteczne prądu płynącego w obwodzie wtórnym, jeśli podłączymy do niego źródło prądu

zmiennego o napięciu skutecznym 23 V, a styki obwodu pierwotnego będą rozwarne? Opór omowy obu obwodów oraz impedancję źródeł prądu możemy pominąć. Prąd w obu przypadkach ma częstotliwość 50 Hz.

**12.** Pasażerowie balonu w pewnym momencie stwierdzili, że ich balon zaczyna opadać. Postanowili podskakiwać, tak aby jak najkrócej dotykać nogami podłogi kosza balonu. Czy taki sposób postępowania zmniejszy średnią prędkość opadania balonu? Przyjmij, że balon, wraz z koszem i linami, jest sztywny i że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości.

**13.** Podobno Alberta Einsteina do stworzenia Szczególnej Teorii Względności doprowadziło rozważanie, co dzieje się z naszym odbiciem w lustrze, jeśli poruszamy się z prędkością zbliżoną do prędkości światła. Rozważmy analogiczny, nierelatywistyczny problem: ultraszybki nietoperz lecący z prędkością  $v = 172 \frac{m}{s}$  względem powietrza „ogłada” za pomocą ultradźwięków swoje „odbicie” w lusterku trzymany równoległe do kierunku lotu. Pod jakim kątem

w stosunku do tego kierunku będzie on widział to odbicie? Nietoperz jest mały w porównaniu z odległością od „lusterka”. Prędkość dźwięku w powietrzu  $u = 344 \frac{m}{s}$ . Rozważ zagadnienie: a) w układzie powietrza; b) w układzie nietoperza.

**14.** Rozważmy cienki, jednorodny krążek, zrobiony z materiału promieniotwórczego emitującego promienie  $\gamma$ . Jak zależy od kierunku obserwacji: a) natężenie promieniowania termicznego; b) natężenie promieniowania  $\gamma$  wysyłanego przez ten krążek? Zakładamy, że punkt obserwacji jest daleko od krążka, promieniowanie nie jest po drodze pochłaniane, a krążek promieniuje termicznie jak ciało doskonale czarne.

**15.** Marek zawiesił na sprężynce ciężarek o masie  $m = 100$  g. W stanie równowagi długość rozciągniętej sprężynki była równa  $l = 1$  m. Następnie wprawił ciężarek w pionowe drgania. Ze zdziwieniem stwierdził, że po pewnym czasie ciężarek drgał nie w pionie, ale w poziomie – jak wahadło. Jak to wyjaśnisz? Ile była równa stała sprężystości sprężynki?

---

## CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań – 21 listopada 2005 r.)

**Uwaga:** Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę i adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

### ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

**T1.** Jedna z okładek kondensatora płaskiego jest oświetlana (poprzez mały otwór w drugiej okładce) światłem lasera o długości fali  $\lambda = 405$  nm. Odległość między okładkami kondensatora jest równa  $d = 1$  cm, a rozmiary liniowe okładek są znacznie większe niż  $d$ . Między okładkami jest próżnia.

- a) Zakładając, że liczba wybijanych elektronów na jednostkę kąta bryłowego jest niezależna od kierunku, wyznacz zależność natężenia prądu płynącego między okładkami od napięcia między nimi. Praca wyjścia elektronu z materiału okładki jest równa  $W = 1,87$  eV. Przyjmij, że wszystkie wybite elektrony mają największą możliwą w rozpatrywanym procesie energię.
- b) Podaj jakościowo, jak zmieni się otrzymana zależność, jeśli uwzględnimy, że:
- wylatujące elektrony mają różne energie;
  - poprzeczne rozmiary kondensatora są skończone.

Wskazówka: pole ograniczonego płaszczyzną wycinka sfery o promieniu  $r$  jest równe  $2\pi rz$ , gdzie  $z$  jest odległością między tą płaszczyzną a najbardziej odległym od niej punktem na rozpatrywanym wycinku.

**T2.** Prostopadłościan o wymiarach  $a \times b \times d$  porusza się równoległe do krawędzi długości  $a$  z dużą (relatywistyczną) prędkością  $v$ . Prostopadłościanowi zrobiono zdjęcie za pomocą nieruchomego aparatu fotograficznego. Oś optyczna aparatu była prostopadła do kierunku ruchu prostopadłościanu i prostopadła do krawędzi o długości  $b$ .

Wykaż, że widoczny na zdjęciu obraz poruszającego się prostopadłościanu jest taki sam, jaki byłby obraz tego samego, ale spoczywającego prostopadłościanu, obróconego wokół osi równoległej do krawędzi  $b$  o pewien kąt  $\phi$ . Wyznacz zależność tego kąta od prędkości  $v$ .

Uwagi:

- Migawka aparatu znajdowała się tuż przed obiektywem (soczewką), a jej czas otwarcia był na tyle krótki, że można przyjąć, iż całe światło, które utworzyło obraz, przeleciało przez nią w tej samej chwili.
- Prostopadłościan znajdował się na tyle daleko od obiektywu, że promienie światła, które utworzyły

obraz, były w bardzo dobrym przybliżeniu równoległe do siebie i do osi optycznej aparatu.

3. Pomijamy ewentualne zmiany kolorów i jasności.

Wskazówka: rozważ tylko promienie wylatujące z wierzchołków prostopadłościanu.

**T3.** Klocek o masie  $M$  porusza się poziomo, bez tarcia, wzdłuż linii prostej. W chwilach  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

z klockiem zderzają się idealnie sprężyste ciała o masie  $m$ . Prędkości tych ciał przed zderzeniem wynoszą  $u_i$  i są równoległe do kierunku ruchu klocka. Niech  $V_i$  będzie prędkością klocka tuż przed zderzeniem w chwili  $t_i$ .

a) Znajdź związek między  $V_{i+1}$  a  $V_i$ .

b) Przyjmując, że  $u_i = (-1)^i u$  i przy założeniu, że znasz  $V_1$ , wyznacz  $V_n$  dla bardzo dużych  $n$ .

## ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

**D1.** Przyrządź galaretkę, mieszając łyżeczkę żelatyny z 1/2 szklanki wrzątku. Masz do dyspozycji:

- stężoną galaretkę,
- cienką plastikową rurkę zamkniętą z jednej strony,
- duże naczynie z wodą,
- linijkę,
- nóż,
- papier milimetry.

Wyznacz stosunek gęstości galaretki do gęstości wody.

Uwaga: Zamiast plastikowej rurki możesz wykorzystać wypisany wkład do długopisu. Wkład powinien być tak dobrany, aby mógł pływać pionowo w wodzie.

**D2.** Masz do dyspozycji:

- jednakowe gumki-recepturki,
- stoper,
- ciężarek o masie 50 g, statyw lub zaczep umożliwiający zawieszenie ciężarka.

Zakładając, że między siłą  $F$  napinającą gumkę i jej długością  $l$  zachodzi związek

$$F = k(l - l_0),$$

gdzie  $l_0$  — długość swobodna gumki,  $k$  — współczynnik sprężystości gumki, wyznacz wartość iloczynu  $kl_0$  dla jednej gumki. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie  $g$  wynosi  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

**D3.** Masz do dyspozycji:

- pręt mosiężny lub stalowy o znanej długości z zakresu 0,5–1 m i średnicy 0,5–1,5 cm,
- dwa płaskie przetworniki piezoelektryczne używane w urządzeniach elektronicznych do sygnalizacji akustycznej (np. takie, jak używane w „grających” kartach urodzinowych),
- klej epoksydowy umożliwiający sztywne zamocowanie przetworników do pręta,
- generator przebiegu sinusoidalnego o częstotliwości z zakresu 1–20 kHz, pozwalający ustalić częstotliwość sygnału z dokładnością nie gorszą niż 1 Hz,
- oscyloskop,
- miękki materiał (np. ręcznik, gąbka, styropian), na którym można położyć pręt,
- przewody elektryczne, wtyczki, zaciski itp. elementy umożliwiające zestawienie układu pomiarowego.

Wyznacz prędkość dźwięku w pręcie.

Uwagi:

1. Pręt powinien mieć równe, płaskie końce.
2. Zamiast zwykłego generatora i oscyloskopu możesz użyć komputera wyposażonego w kartę dźwiękową i odpowiednie programy komputerowe. Takie programy można znaleźć w Internecie (np. fg\_lite.exe oraz winscope.exe) lub wykorzystać programy „Generator” oraz „Oscyloskop” dostępne na płycie CD dołączonej do podręcznika J. Blinowski, W. Zieliński, *Fizyka z astronomią. Kształcenie w zakresie rozszerzonym*, tom. I, WSiP, Warszawa 2002 (i 2003, II wydanie). Możesz także skorzystać z programów dostępnych na stronie [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl).
3. Przetworniki piezoelektryczne można kupić w sklepach z elementami elektronicznymi lub wymontować je z kart urodzinowych. Na stronie Olimpiady Fizycznej pod adresem <http://www.kgof.edu.pl/> znajdziesz zdjęcia, które pomogą ci zidentyfikować te elementy.

## XLIX OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2005/2006

### ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

#### PIERWSZA SERIA

1. Ponieważ przyjęto, że podróż kosmiczną odbył człowiek, który znalazł się wyżej niż 100 kilometrów nad powierzchnią Ziemi, proponuje się komercyjne wycieczki na taką wysokość. Wykaż, że w porównaniu do lotu orbitalnego wzlot na taką wysokość wymaga znacznie mniej energii.
2. Gdy dla obserwatora ziemskiego planeta górna znajduje się dokładnie po przeciwnej stronie niż Słońce, mówimy, że jest ona w opozycji. Jej odległość kątowna od Słońca wynosi wtedy  $180^\circ$ . Dla planet olbrzymów oblicz, po jakim czasie od momentu opozycji odległość kątowna planety od Słońca zmniejszy się do  $90^\circ$ . W obliczeniach przyjmij, że orbity są współpłaszczyznowymi okręgami.
3. Następujące gwiazdy uszereguj według ich wzrastających rozmiarów:
  1. Gwiazda olbrzym.
  2. Słońce.
  3. Gwiazda o jasności obserwowanej 10,8 wielkości gwiazdowej znajdująca się w odległości 3,5 ps od nas.
  4. Gwiazda, której jasność absolutna wynosi 3,7 wielkości gwiazdowej, a temperatura efektywna – 5800 K.

Podaj uzasadnienie przyjętej przez Ciebie kolejności.

4. W dniu 3 października 2005 roku w Polsce będzie widoczne częściowe zaćmienie Słońca. Przygotuj szczegółowy program obserwacji tego zjawiska, uwzględniając posiadany przez Ciebie sprzęt obserwacyjny.

#### ZADANIA OBSERWACYJNE

*Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej należy dołączyć negatyw lub odpowiedni wydruk komputerowy – materiały przesłane na nośnikach elektronicznych nie będą oceniane.*

*Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 14 listopada 2005 r.*

1. Na wykonanej przez siebie fotografii Księżyca dokonaj identyfikacji widocznych na niej szczegółów powierzchni Księżyca.
2. Przeprowadź obserwacje zaćmienia Słońca 3 października br.
3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku.

## INFORMACJE REGULAMINOWE

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **11 października 2005 r.**, rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Uczniowie, którzy przyślą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań.

5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **14 listopada br.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ

Planetarium Śląskie

41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo:

- rok i miejsce urodzenia,
- pełną nazwę szkoły, jej adres,
- klasę i jej profil
- oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).

Dodatkowo do rozwiązań należy dołączyć na osobnym druku następujące informacje:

- imię i nazwisko,
- rok urodzenia,
- nazwa szkoły wraz z jej imieniem,
- adres szkoły (z kodem pocztowym i nazwą województwa),
- klasa,
- profil klasy,
- adres prywatny (z kodem pocztowym),
- nazwisko nauczyciela fizyki z astronomią i ewentualnie opiekuna przygotowującego do olimpiady.

10. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty wyższych uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

## ZALECANA LITERATURA

- obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych;
- H. Chrupała, M.T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*;
- *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI-XXXV* (w dwóch częściach);
- H. Chrupała, J. Kreiner, M. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*;
- J.M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*;
- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika*;
- J. Mielicki, *Astronomia w geografii*;
- E. Rybka, *Astronomia ogólna*;
- *Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa;
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* – praca zbiorowa;
- atlas nieba;
- obrotowa mapa nieba;
- czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*.





# LVI OLIMPIADA MATEMATYCZNA

## ZADANIA KONKURSOWE ZAWODÓW I STOPNIA

### I SERIA

1. Wyznaczyć wszystkie nieujemne liczby całkowite  $n$ , dla których liczba  $2^n + 105$  jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych nieujemnych  $x$  równanie  $\sqrt[5]{x} = \lfloor \sqrt[5]{3x} \rfloor$ .  
Uwaga:  $\lfloor t \rfloor$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $t$ .

3. Trójkąt ostrokątny  $ABC$  jest wpisany w okrąg o środku  $O$ . Punkt  $D$  jest rzutem prostokątnym punktu  $C$  na prostą  $AB$ , a punkty  $E$  i  $F$  są rzutami

prostokątnymi punktu  $D$  odpowiednio na proste  $AC$  i  $BC$ . Wykazać, że pole czworokąta  $EOFC$  jest równe połowie pola trójkąta  $ABC$ .

4. Uczestnicy zawodów matematycznych rozwiązywali sześć zadań, każde oceniane jedną z ocen 6, 5, 2, 0. Okazało się, że dla każdej pary uczestników  $A, B$  można wskazać takie dwa zadania, że w każdym z nich  $A$  uzyskał inną ocenę niż  $B$ .

Wyznaczyć największą liczbę uczestników, dla której taka sytuacja jest możliwa.

### II SERIA

5. Niech  $a, b$  będą liczbami rzeczywistymi. Rozważamy funkcje

$$f(x) = ax + b|x| \quad \text{oraz} \quad g(x) = ax - b|x|.$$

Wykazać, że jeśli

$$f(f(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x,$$

to również

$$g(g(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

6. W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  wysokości przecinają się w punkcie  $H$ . Prosta przechodząca przez  $H$  przecina odcinki  $AB$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ .

Prosta przechodząca przez  $H$  i prostopadła do prostej  $DE$  przecina prostą  $AB$  w punkcie  $F$ . Dowieść, że  $\frac{DH}{HE} = \frac{AF}{FB}$ .

7. Dana jest liczba pierwsza  $p > 3$  oraz takie liczby całkowite dodatnie  $a, b, c$ , że  $a + b + c = p + 1$  oraz liczba  $a^3 + b^3 + c^3 - 1$  jest podzielna przez  $p$ . Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb  $a, b, c$  jest równa 1.

8. Czworoscian  $ABCD$  jest opisany na kuli o środku  $S$  i promieniu 1, przy czym  $SA \geq SB \geq SC$ . Wykazać, że  $SA > \sqrt{5}$ .

### III SERIA

9. Dane są nieujemne liczby całkowite  $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ . Niech  $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$ . Wyznaczyć liczbę nieparzystych współczynników wielomianu  $P(x) = (x + 1)^n$ .

10. Liczby rzeczywiste dodatnie  $a, b, c$  spełniają warunek  $ab + bc + ca = 3$ . Dowieść, że  $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9$ .

11. W czworokącie  $ABCD$  miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku  $A$  jest większa od  $180^\circ$  oraz

zachodzi równość  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ . Punkt  $P$  jest symetryczny do punktu  $A$  względem prostej  $BD$ . Udowodnić, że  $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$ .

12. Niech  $a_0$  będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 3a_i - 1, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

dla  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

Wykazać, że jeśli  $n$  jest liczbą całkowitą dodatnią spełniającą warunek  $a_n = a_0$ , to  $2^n > a_0$ .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady (adresy na następnej stronie) właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2005 r. – I seria

7 listopada 2005 r. – II seria

5 grudnia 2005 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

[www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl)

## **ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ**

Dla województwa pomorskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

Dla województwa śląskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

KOOM – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

KOOM – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

KOOM, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej, ul. Janiszewskiego 14a, 50-370 Wrocław.

## **ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY FIZYCZNEJ**

KOOF w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-224 Białystok (woj. podlaskie, powiaty: kętrzyński, mławowski, piski, giżycki, olecko-gołdapski, ełcki).

KOOF w Częstochowie, Al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa (woj. opolskie, woj. świętokrzyskie, powiaty: częstochowski, kłobucki, lubliniecki, myszkowski).

KOOF w Gdańsku, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz (woj. pomorskie, woj. warmińsko-mazurskie z wyłączeniem powiatów: kętrzyńskiego, mławowskiego, piskiego, giżyckiego, olecko-gołdapskiego, ełckiego).

KOOF w Gliwicach, ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice (woj. katowickie z wyłączeniem powiatów: częstochowskiego, kłobuckiego, lublinieckiego, myszkowskiego).

KOOF w Krakowie, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków (woj. małopolskie).

KOOF w Lublinie, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin (woj. lubelskie).

KOOF w Łodzi, ul. Pomorska 149, 90-236 Łódź (woj. łódzkie).

KOOF w Poznaniu, ul. Umultowska 85, 60-780 Poznań (woj. wielkopolskie).

KOOF w Rzeszowie, ul. Reytana 16A, 35-310 Rzeszów (woj. podkarpackie).

KOOF w Szczecinie, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin (woj. zachodnio-pomorskie, woj. lubuskie).

KOOF w Toruniu, ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń (woj. kujawsko-pomorskie).

KOOF w Warszawie, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa (woj. mazowieckie).

KOOF we Wrocławiu, pl. M. Borna 9, 50-205 Wrocław (woj. wrocławskie).