

## SPIS TREŚCI NUMERU 7 (374)

Kolorowe czapeczki <i>Andrzej Dąbrowski</i>	str. 1
Zadania	str. 5
Muchy na kłoszu <i>Krzysztof Pawłowicz</i>	str. 6
Zliczanie kropek i galaktyk <i>Tomasz Kwast</i>	str. 6
Aktualności	str. 7
<b>Mała Delta:</b>	
Dlaczego machamy rękoma? <i>Piotr Zalewski</i>	str. 8
Losowanie liczby naturalnej <i>Michał Adamaszek</i>	str.10
Gęstość ciągów liczbowych <i>Jarosław Górnicki</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Lipiec	str.16
Kącik biologiczny	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Armen Edigarian, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Ryszard J. Pawlak, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okladki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:  
 Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,  
 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: (22) 55-44-545.

Skład systemem  $\TeX$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. (22) 663-87-52, (22) 663-11-46)  
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.  
 Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarz 4 zł

**W następnym numerze:**

Międzynarodowa Olimpiada Informatyczna



Królowna Śnieżka wezwała siedmiu krasnoludków i oświadczyła, że w związku z wielkim świętem w najbliższą niedzielę postanowiła nagrodzić ich pracowitość.

– Przygotowałam dla was białe i kolorowe czapeczki. Nie powiem wam ani ile białych, ani ile kolorowych czapeczek przygotowałam. Każdemu z was nałożę jedną z czapeczek na głowę, ale by było bardziej uroczyście, przedtem zgaszę światło. Po zapaleniu światła, zobaczycie czapeczki u swoich kolegów, ale swojej nie będziecie mogli zobaczyć. Każdy z was dostanie 2 kartki ze swoim imieniem i napisem: **Mam białą czapeczkę** albo **Mam kolorową czapeczkę**. Jeśli któryś z was zechce, powinien wybrać jedną z nich i wrzucić do koszyka na środku sali. Ale pamiętajcie! Nie wolno wam się porozumiewać! Wspaniała nagroda – tu Królowa uśmiechnęła się tajemniczo – będzie wam wręczona, jeśli okaże się, że nikt się nie pomylił, a przynajmniej jedna osoba zgadła, jaką ma czapeczkę na głowie.

Krasnoludki udały się na naradę. Gapcio zauważył, że jeśli nie będzie można się porozumiewać, to nikt nie zgadnie koloru swojej czapeczki, bo królowa była bardzo złośliwa.

– Tak – potwierdził Gburek – nawet gdyby wszyscy dookoła mnie mieli takie same czapeczki, to i tak nie będę wiedział, co mam na głowie.

Nieśmiałek zauważył skromnie, że przecież nawet gdy nie możemy mieć pewności, to może chociaż zwiększymy szansę na wygraną. Wesołek wtedy zaproponował:

– Nieśmiałek wrzuci kartkę **Mam białą czapeczkę** do koszyka, a reszta niech nic nie wrzuca.

– Dobry pomysł – pochwalił Mędrak – przynajmniej mamy szansę pół na pół na zdobycie nagrody. Ale mamy jeszcze trochę czasu, może uda nam się powiększyć szansę?

Następnego dnia do Mędrka przyszedli Śpioszek, Apsik i Gapcio. Powiedzieli, że mają bardzo dobry pomysł. Podstawowa zasada ich działania miała być taka, że tylko jeden z nich będzie mógł wrzucić kartkę, a reszta krasnoludków musi wstrzymać się od wrzucania. Apsik wytłumaczył Mędrkowi na przykładzie, co miał na myśli.

– Patrząc na czapeczki Śpioszka i Gapcia i jeśli są tego samego koloru, to wrzucam kartkę z innym kolorem. Tu, na przykład (rys. 1), wrzuciłbym kartkę **Mam kolorową czapeczkę**. Gdy moi dwaj koledzy będą mieli różne czapeczki (rys. 2), zrezygnuję z wrzucania kartki. Tak samo postąpią moi koledzy.

Tutaj Mędrak musiał mocno wyteńczyć się i narysował wszystkie możliwe sytuacje z trzema czapeczkami, gdy metoda, wymyślona przez kolegów jest skuteczna (rys. 3) i wszystkie sytuacje, kiedy skuteczna nie jest (rys. 4).

– No tak – ucieszył się Śpioszek – na osiem możliwych sytuacji aż w sześciu udaje nam się zgadnąć! Szansa wygranej jest teraz  $3/4$ . To o wiele lepiej, niż gdybyśmy posłuchali Wesołka.

Gdy koledzy wyszli, Mędrak zasepił się. Teraz on musi pokazać, że nie na próżno nazywają go Mędrkiem. Wyjął kartkę i narysował.



Rys. 5

– Co powinienem zrobić, gdybym stał na przedostatnim miejscu?

Nie tylko Mędrak miał trudności z ulepszeniem pomysłu trzech krasnali.

Zagadka o czapeczkach stała się popularna wśród matematyków w roku 1998.

Autorem jej jest Amerykanin, Todd Ebert, który postawił ten problem w swojej

Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4





pracy doktorskiej, jako **zagadkę siedmiu więźniów**. Była ona tematem dyskusji przede wszystkim w środowisku informatyków, aż dotarła w czasie konferencji w Nowym Orleanie do profesora Elwyna Berlekampa, profesora matematyki na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley. Berlekamp od razu zauważył rozwiązanie dla trzech czapeczek, rozwiązanie dla siedmiu objawiło mu się zaraz po przebudzeniu następnego dnia rano. Rozwiązanie, które podał, było tak sensacyjne, że trafiło nawet na czolówki gazet. Oto tytuł artykułu z *The New York Times* z 10 kwietnia 2001.

## The New York Times

Why Mathematicians Now Care About Their Hat Color

By SARA ROBINSON

Pomysł rozwiązania zagadki podany przez Berlekampa opierał się na tym, by każdemu układowi czapeczek przypisać pewien ciąg zer i jedynek, a następnie skorzystać z teorii kodowania, która takimi zero-jedynkowymi „słowami” zajmuje się od dawna. Jeśli mamy bowiem do czynienia z zadaniem zwiększenia prawdopodobieństwa, łatwiej zapewne operować na liczbach niż na kolorach. Żeby jednak zrozumieć, na czym w istocie polegało rozwiązanie Berlekampa, musimy głębiej wniknąć w teorię kodów.

### Kody

Z kodami spotykamy się na co dzień<sup>i</sup>. Pismo jest kodem, pozwalającym utrwalić dźwięki lub nawet, jak w przypadku pisma chińskiego, całe pojęcia. Na opakowaniach spotykamy kod kreskowy, wreszcie w komputerach – kod dwójkowy, gdzie informacje zapisywane są jako układy zer i jedynek. Układ czapeczek można zapisać w postaci dwójkowej, jeśli umówimy się, że białe czapeczki będą kodowane jako „1”, a kolorowe jako „0”. Na przykład, układ

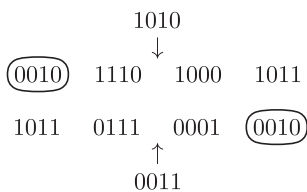


Rys. 6

można zakodować jako 0111000.

Współczesne kody służą nie tylko do zapisywania informacji. Mają wbudowaną funkcję samoobronną – sygnalizują, że w słowie kodowym pojawił się błąd, czasami wskazują, gdzie ten błąd się pojawił, a nawet, bez naszej wiedzy, ten błąd poprawiają. Dla kodów dwójkowych wskazanie miejsca jest równoważne możliwości korekty błędu. Bez możliwości wykrycia lub korekty błędów nasz komputer co chwilę odmawiałby posłuszeństwa, a płyty kompaktowe prawie nigdy nie mogłyby być odczytane.

Kodem  $K$  nazywać będziemy zbiór słów kodowych, czyli ciągów o ustalonej długości  $n$ . Poniżej ograniczymy się do kodów dwójkowych, czyli takich, w których występują tylko zera i jedynki. Pojawienie się błędu w słowie kodowym polega w tym przypadku na zamianie znaku „0” na „1” lub „1” na „0”. Na przykład, popełniając jeden błąd w słowie 1010, otrzymamy jedno z czterech słów: 0010, 1110, 1000, 1011. Zauważmy, że słowo 0010 możemy otrzymać również, popełniając jeden błąd w słowie 0011 (rys. 7). A zatem w kodzie, w którym występują słowa 1010 i 0011, nie można wykryć pojedynczego błędu, gdyż słowo 0010 może pochodzić zarówno od słowa 1010, jak i od słowa 0011.



Rys. 7

$$\begin{array}{r} 1110010 \\ \oplus \\ 1010110 \\ \hline 0100100 \end{array}$$

Rys. 8

Liczbę błędów w słowie  $k$ , gdy odczytamy je jako słowo  $l$ , można łatwo określić, odpowiednio „dodając” słowa  $k$  oraz  $l$ . Na przykład weźmy  $k = 1110010$  oraz  $l = 1010110$ , gdzie  $l$  jest błędnie zapisanym słowem  $k$ . Widzimy, że błędy wystąpiły na pozycji 2 i 5. W  $l$  popełniono więc 2 błędy. Błędy w słowie  $l$  są na pozycjach, w których występują cyfry 1 w następującej sumie  $k \oplus l$  słów  $k$  i  $l$  (rys. 8). Dodawanie cyfr jest zdefiniowane tu jako:  $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ ,  $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ . Liczbę błędów określa waga słowa  $w(k \oplus l)$  równa liczbie

<sup>i</sup> Można przeczytać mój artykuł *Kody na co dzień* (*Delta* 9/2004).

<sup>ii</sup> Richard Wesley Hamming (1915–1988), amerykański matematyk, członek zespołu Manhattan Project, który skonstruował bombę atomową. Od 1946 roku pracował w laboratoriach Bella. Jest twórcą teorii kodów wykrywających i korygujących błędy. Był wybitnym specjalistą w teorii metod numerycznych, teorii informacji i statystycznej obróbki sygnałów. Jego prace wykonywane w 1956 na komputerze IBM 650 doprowadziły do powstania języków programowania wysokiego rzędu.

jedynek w słowie  $k \oplus l$ . Liczba  $d(k, l) = w(k \oplus l)$  zwana jest **odległością Hamminga**<sup>ii</sup> słów  $k$  i  $l$ , gdyż spełnia wszystkie warunki, jakie odległość powinna spełniać:

$$\begin{aligned} d(k, l) &= 0 \quad \text{tylko wtedy, gdy } k = l, \\ d(k, l) &= d(l, k), \\ d(k, l) &\leq d(k, m) + d(m, l). \end{aligned}$$

Wszystkie słowa, które są w odległości  $d$  od danego słowa  $k$ , a więc leżące na sferze Hamminga o promieniu  $d$  i środku  $k$ , powstają z  $k$  przez popełnienie dokładnie  $d$  błędów. Na przykład rozważane wcześniej słowa 0010, 1110, 1000, 1011 leżą na sferze Hamminga o promieniu 1 i środku 1010. Z kolei słowa 1011, 0111, 0001 oraz 0010 leżą na sferze o promieniu 1 i środku w 0011. Obie te sfery stykają się w „punkcie” 1011.

Interesować się będziemy kodami liniowymi  $K$ , które charakteryzują się tym, że wraz ze słowami  $k$  i  $l$ , należącymi do  $K$ , ich suma  $k \oplus l$  też należy do  $K$ .

Kodem liniowym jest, na przykład, zbiór słów  $K_0 = \{01011, 10101, 11110, 00000\}$ . Do kodu  $K_0$  o 4 elementach należy słowo, składające się z samych cyfr „0”, nazywane słowem zerowym i oznaczone jako 0. Podobnie, dla dowolnego kodu liniowego

- $0 \in K$ ,
- $K$  ma  $2^j$  elementów.

Kody liniowe o słowach mających długość  $n$  i  $2^j$  elementów oznacza się symbolem  $(n, j)$ .

Kod liniowy można scharakteryzować przez rozdzielczość  $d$  kodu, określoną jako minimalna odległość słów kodu od 0:  $d = \min\{w(k) : k \in K, k \neq 0\}$ . Rozdzielczość  $d$  w kodzie  $(n, j)$  spełnia nierówność:  $d \leq n - j + 1$ .

Rozdzielczość kodu świadczy o jego zdolności do wykrywania błędów. Zachodzi bowiem

**Twierdzenie.** Kod  $K$  lokalizuje  $s$  błędów wtedy i tylko wtedy, gdy  $d > 2s$ .

Wynik ten jest intuicyjnie oczywisty: jeżeli w słowie kodu popełniono  $s$  błędów, to w jego otoczeniu o promieniu  $2s$  nie powinno być więcej niż jedno słowo kodu. A zatem odległość dowolnych dwóch słów kodu musi być większa niż  $2s$ .

Zbiór słów  $K_0 = \{01011, 10101, 11110, 00000\}$  jest kodem  $(5, 2)$  o rozdzielczości  $d = 3$ , więc można w nim wykryć jeden błąd, ale dwa i więcej już nie.

Porównując nierówności  $d > 2s$  oraz  $d \leq n - j + 1$ , widzimy, że w kodzie  $(n, j)$  nie można wykryć  $(n - j + 1)/2$  i więcej błędów. W dowolnym kodzie  $(5, 2)$  można wykryć co najwyżej 1 błąd. Kodując  $2^j$  symboli tak, aby móc wykryć  $s$  błędów, trzeba użyć słów liniowego kodu dwójkowego o długości większej niż  $j + 2s - 1$ . Tylko jak to zrobić?

## Kody wykrywające jeden błąd

Zajmiemy się teraz liniowymi kodami dwójkowymi  $(n, j)$ , które wykrywają jeden błąd. Dla takich kodów zachodzi nierówność, udowodniona przez Hamminga:  $2^j \leq \frac{2^n}{n+1}$ .

Zainteresowani jesteśmy konstrukcją kodów jak najbardziej oszczędnych, to znaczy takich, że przy danym  $j$ <sup>iii</sup> różnica między prawą i lewą stroną nierówności Hamminga jest jak najmniejsza.

**Kodami optymalnymi**  $(n, j)$  nazywamy takie, które spełniają równość  $2^j = \frac{2^n}{n+1}$ , a więc<sup>iv</sup>  $n = 2^p - 1$ ,  $j = n - p$  dla naturalnego  $p$ . W kodach optymalnych słowa kodowe stanowią  $1/(n+1)$ , czyli  $1/2^p$  wszystkich słów<sup>v</sup>.

Kody optymalne zawsze istnieją i odgrywają ważną rolę w teorii kodowania. W takich kodach wszystkie ciągi, składające się z  $n$  zer i jedynek, są w odległości 1 od słów kodowych lub same są słowami kodowymi.

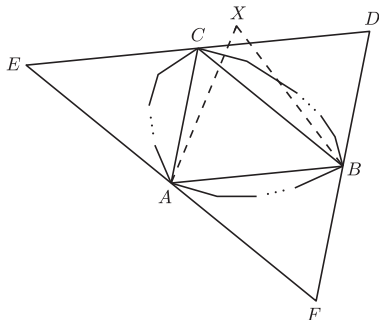
Optymalne są kody  $(3, 1)$ ,  $(7, 4)$ ,  $(15, 11)$ ,  $(31, 26)$ . Słowa kodowe stanowią odpowiednio  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ ,  $1/32$  wszystkich ciągów o długości 3, 7, 15, 31.

## 3



### Rozwiązanie zadania M 1104.

Niech  $ABC$  będzie trójkątem o największym polu spośród wszystkich trójkątów mających wierzchołki w wierzchołkach danego wielokąta. Przez punkty  $A, B, C$  prowadzimy proste równoległe odpowiednio do boków  $BC, CA, AB$ , uzyskując trójkąt  $DEF$ . Wówczas pole trójkąta  $DEF$  nie przekracza 4. Wykażemy, że trójkąt  $DEF$  zawiera dany wielokąt.



Przypuśćmy, że pewien wierzchołek  $X$  danego wielokąta leży poza trójkątem  $DEF$  oraz przyjmijmy bez straty ogólności, że punkt  $X$  leży po przeciwnej stronie prostej  $DE$  niż punkt  $F$ . Wówczas trójkąt  $XAB$  ma wierzchołki w wierzchołkach danego wielokąta i jego pole jest *większe* od pola trójkąta  $ABC$ . Uzyskaliśmy sprzeczność.

<sup>iii</sup>  $j$  zależy od liczby symboli, które chcemy zakodować. Jeśli chcemy zakodować  $s$  symboli, to  $j$  musi spełniać nierówność  $2^j \geq s$ .

<sup>iv</sup> Przekształcając równanie, otrzymamy  $n + 1 = 2^{n-j}$ .

<sup>v</sup> Słów kodowych jest  $2^j$ , wszystkich ciągów o długości  $n$  jest  $2^n$ . Proporcja słów kodowych wśród wszystkich ciągów jest więc równa  $2^j/2^n = 1/(n+1)$ .

<sup>vi</sup> Kod musi zawierać słowo zerowe i słowo odległe od niego o co najmniej 3 (warunek wykrycia jednego błędu), czyli słowo 111.



Rys. 9

Kod (3, 1) składa się ze słów {000, 111}<sup>vi</sup>. Zauważmy, że gdy „1” koduje białe, a „0” kolorowe czapeczki, to kod ten jest zapisem dwóch układów (rys. 9), w których Śpioszek, Apsik i Gapcio popełniają błąd. Pozostałych 6 układów, spoza kodu (3, 1), jest przez nich bezbłędnie rozszyfrowanych.

To ten pomysł, który przyszedł do głowy Berlekampowi. Aby rozszyfrowywać układy 7 czapeczek, trzeba nauczyć się odróżniać układy niestanowiące słów kodu (7, 4), czyli układy różniące się od nich na jednym miejscu. Wtedy prawdopodobieństwo pomyłki będzie równe 1/8, a prawdopodobieństwo sukcesu 7/8.

## Wykrywanie błędów w kodzie (7,4)

Wszystkie słowa zerojedynkowe o długości 7 dzielą się na dwie grupy:

- $2^4 = 16$  słów kodu (7, 4),
- $2^7 - 16 = 112$  słów spoza kodu (7, 4), które będą podstawą naszej strategii zgadywania.

Jak je rozróżnić?

Zdefiniujemy tablicę zerojedynkową, pełniącą rolę dekodera (rys. 10). Dekoder ma 3 kolumny i 7 wierszy, w kolejnych wierszach dekodera są liczby naturalne 1, 2, ..., 7, zapisane w systemie dwójkowym: w pierwszym wierszu liczba 001, w drugim 010, ..., w ostatnim 111.

Aby sprawdzić, czy słowo o długości 7 należy do kodu (czyli aby dekodować), wystarczy to słowo pomnożyć przez dekodera.

Wynik mnożenia słowa 0100101 to słowo o długości 3, otrzymane w sposób przedstawiony na rysunku 11.

Wynik tego mnożenia jest w kolejnym wierszu:

- słowem zerowym, gdy literą w dekodowanym słowie jest 0,
- słowem dekodera, gdy literą w dekodowanym słowie jest 1.

Otrzymane słowa dodaje się według wcześniej wprowadzonej reguły  $\oplus$ .

Pomnożmy przez dekodera słowo 0110101 powstałe z poprzedniego słowa przez zamianę znaku na trzecim miejscu od lewej (rys. 12). Pierwsze z tych słów należy do kodu (7,4), drugie – nie należy do kodu, a wynik dekodowania 011, będący liczbą 3, zapisaną w systemie dwójkowym, wskazuje na miejsce wystąpienia błędu. Prawdziwe jest ogólne

**Twierdzenie.** Słowa kodu (7, 4) pomnożone przez dekodera dają w wyniku słowo zerowe. Słowa nienależące do kodu (7, 4) pomnożone przez dekodera dają słowo, które odczytane jako liczba dwójkowa wskazuje na miejsce wystąpienia błędu.

## Rozwiązanie zagadki

Zgodnie z umową, krasnoludek ma prawo wrzucić kartkę, jeśli układ czapeczek nie należy do kodu (7, 4), a błąd wystąpił w miejscu, w którym stoi ten krasnoludek. Wtedy tylko jeden krasnoludek wrzuci kartkę. Tak postępowali krasnoludki, gdy decydowały trzy czapeczki. Krasnoludek stojący na piątym miejscu, widząc, co mają na głowach jego koledzy,



Rys. 13

wrzuci kartkę **Mam kolorową czapeczkę**, gdyż wynik dekodowania wynosi wtedy<sup>vii</sup> 101, co jest numerem jego miejsca (rys. 14).

Układ, nad którym zastanawiał się Mędrak,



Rys. 15

001  
010  
011  
100  
101  
110  
111

Rys. 10

001	0	000
010	1	010
011	0	000
100	* 0	= 000
101	1	101
110	0	000
111	1	<u>111</u> $\oplus$
		= 000

Rys. 11

001	0	000
010	1	010
011	1	011
100	* 0	= 000
101	1	101
110	0	000
111	1	<u>111</u> $\oplus$
		= 011

Rys. 12

001	0	000
010	1	010
011	1	011
100	* 1	= 100
101	0	000
110	0	000
111	0	<u>000</u> $\oplus$
		= 101

Rys. 14

<sup>vii</sup> Umowa: kolorowe czapeczki reprezentowane są przez 0, białe – przez 1.

nie upoważnia go do wrzucenia kartki. Gdyby bowiem miał na głowie kolorową czapkę, to wynikiem dekodowania byłoby słowo 101, co nie jest numerem miejsca, na którym on stoi. Gdyby miał na głowie czapkę białą, to wynikiem dekodowania byłoby słowo 011, co też nie jest jego miejscem. Kartkę wrzuci krasnoludek stojący na trzecim bądź na piątym miejscu, w zależności od tego, czy Mędrak będzie miał czapkę białą czy kolorową. Biedny Mędrak, znów nie będzie mógł się wykazać...

A co będzie, jeśli Śnieżka wymyśli więcej rodzajów czapek? Co ma zrobić teraz Mędrak, gdy królewna przygotowała białe, kolorowe i pasiaste czapki, a jego koledzy zostali ubrani w następujący sposób.



Rys. 16

Można udowodnić, i nie jest to trudne, że jeżeli jest  $q$  różnego rodzaju czapek na głowach  $n$  osób, to prawdopodobieństwo  $p$  popełnienia błędu przy dowolnej strategii postępowania spełnia nierówność<sup>viii</sup>

<sup>viii</sup> Metoda, którą przedstawiliśmy dla  $q = 2$ , jest optymalna, bo wtedy  $p = 1/(n + 1)$ , a więc zachodzi równość.

$$p \geq \frac{q - 1}{n + q - 1}.$$

W pracy N. Alon, *Problems and Results in Extremal Combinatorics – II*, dostępnej w Internecie, udowodniono, że istnieje metoda, która gwarantuje, że to prawdopodobieństwo nie przekracza liczby

$$\frac{1 + (q - 1) \log n}{n} + \left(1 - \frac{1}{q}\right)^n.$$

Niestety, dowód jest nieefektywny i nie wskazuje, jak to zrobić.



## Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

**F 647.** Kolejka gondolowa, gdy nie jedzie, często huśta się razem z liną (rys. 1), pod wpływem wiatru bądź z powodu gwałtownego zatrzymania. Kiedy jednak porusza się, chociażby z niewielką prędkością, huśtanie niemal nie występuje. Wyjaśnić to zjawisko.

Rozwiązanie na str. 12

**F 648.** W słoneczny dzień w odległości  $d$  od obserwatora leży płat śniegu o powierzchni  $A$ . Obserwator dostrzega na śniegu  $k$  odbłyśków światła słonecznego. Ocenic gęstość rozmieszczenia drobinek śniegu na powierzchni płata. Jako rozmiar kątowy Słońca przyjąć  $\alpha$ .

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1102.** W trójkącie  $ABC$  dwusieczna kąta  $ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$  (rys. 2). Okręgi opisane na trójkątach  $BCD$  i  $ACD$  przecinają boki  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $E$  i  $F$ . Wykazać, że  $AE = BF$ .

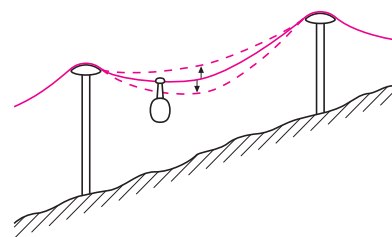
Rozwiązanie na str. 13

**M 1103.** Ciąg  $p_1, p_2, \dots$  jest określony następująco:  $p_1 = 2$ , a dla  $n \geq 1$  liczba  $p_{n+1}$  jest największym dzielnikiem pierwszym liczby  $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ . Udowodnić, że w ciągu tym nie występuje liczba 5.

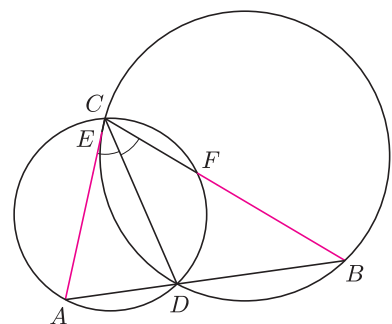
Rozwiązanie na str. 12

**M 1104.** Dany jest wielokąt wypukły o polu 1. Wykazać, że wielokąt ten można nakryć trójkątem o polu 4.

Rozwiązanie na str. 3



Rys. 1



Rys. 2

## Muchy na kloszu

Rozważmy następujące zadanie. Trzy muchy usiadły, oczywiście losowo, na szklanym kulistym kloszu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wszystkie znajdują się na tej samej półkuli klosza? Oczywiście wynosi ono 1, gdyż 3 punkty na sferze zawsze znajdują się na jednej półsfery, co jest łatwym zadaniem z geometrii. Zadanie staje się trudniejsze, gdy muchy są cztery. Rozważmy zatem następujący problem.

**Zadanie.** Na sferze losowo rozmieszczono  $n$  punktów ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ile jest równe prawdopodobieństwo tego, że wszystkie punkty leżą na jednej półsfery?

Oto rozwiązanie. Losowy wybór  $n$  punktów na sferze jest równoważny następującej operacji. Najpierw losowo wybieramy  $n$  kół wielkich na sferze, po czym dla każdego z tych kół wielkich losujemy jedną z dwóch półsfery przez nie wyznaczonych. Biegamy tych półsfery do  $n$  losowo wybranych punktów na sferze. Zamiast więc losować punkty losowaliśmy półsfery. To, że punkty leżą na jednej półsfery, jest równoważne temu, że wszystkie wylosowane punkty są wyznaczone przez półsfery o niepustym przecięciu. Przy ustalonych  $n$  kołach wielkich liczba możliwych wyborów półsfery przez nie wyznaczonych to  $2^n$ , każdemu kołu wielkiemu odpowiadają 2 półsfery. Pytanie jest następujące: ile spośród tych  $2^n$  wyborów sfer ma niepuste przecięcie? Równoważnie możemy zapytać o to, ile jest różnych zbiorów na sferze będących przecięciami  $n$  półsfery o ustalonych kołach wielkich. Otóż tyle, na ile kawałków owe koła wielkie dzielą sferę. Pozostaje zatem jedynie

zliczyć te kawałki. Zauważamy, że są to ściany wielościanu krzywoliniowego (w razie potrzeby łatwo zastępowalnego zwyczajnym wielościanem) na sferze. Wystarczy więc wyznaczyć liczbę krawędzi i wierzchołków tego wielościanu i zastosować wzór Eulera. Każde koło wielkie przecina pozostałe  $n - 1$  kół wielkich w  $2(n - 1)$  punktach, a każdy wierzchołek wielościanu jest przecięciem dokładnie dwóch kół wielkich, zatem wielościan ma  $\frac{2n(n-1)}{2} = n(n - 1)$  wierzchołków. Z kolei owe  $2(n - 1)$  punktów przecięcia koła wielkiego z pozostałymi dzieli to koło wielkie na  $2(n - 1)$  łuków. Wszystkich łuków w ten sposób otrzymanych dla wszystkich kół wielkich jest więc  $2n(n - 1)$ . Szukana liczba ścian  $S$  może być zatem wyznaczona z równania  $S - 2n(n - 1) + n(n - 1) = 2$ , czyli ze wzoru Eulera. Otrzymujemy stąd  $S = n^2 - n + 2$ . Szukane prawdopodobieństwo wynosi zatem  $\frac{n^2 - n + 2}{2^n}$ . Równie interesujący jest problem dla sfer wyżej wymiarowych, co pozostawiamy Czytelnikowi do kontemplacji.

Krzysztof PAWŁOWICZ

## Zliczanie kropek i galaktyk

Po poznaniu natury galaktyk wyłonił się problem, jak są one rozmieszczone w przestrzeni. Z samego oglądu zdjęć nieba wynikało, że bardzo nierównomiernie – obecność gromad galaktyk rzucała się w oczy. Warto jednak byłoby mieć jakąś obiektywną miarę tej nierównomierności rozkładu galaktyk. Nietrudno zgadnąć, jak taką miarę skonstruować.

Podzielmy symboliczne zdjęcie nieba na  $k$  jednakowych kraterów i rzućmy na taki obszar losowo  $N$  galaktyk, czyli kropek. Prawdopodobieństwo tego, że dana kropka znajdzie się w wybranej kratce, wynosi  $p = 1/k$ , a że wpadnie tam  $n$  wybranych kropek – oczywiście  $p^n$ . Z kolei prawdopodobieństwo tego, że pozostałe  $N - n$  kropek znajdzie się w pozostałych kratkach wynosi  $(1 - p)^{N-n}$ . Taki rozkład można zrealizować na tyle sposobów, na ile sposobów spośród  $N$  obiektów można wybrać  $n$ , ostatecznie więc prawdopodobieństwo  $P(n)$  tego, że w wybranej kratce znajdzie się dowolne  $n$  galaktyk, opisuje rozkład Bernoulliego

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}.$$

Statystyka podaje, że rozrzut liczby kropek w kratce, przy ich losowym rzucaniu na zdjęcie, wynosi  $\sigma = \sqrt{Np(1 - p)}$ . Stwierdzenie więc, czy galaktyki grupują się, czy – przeciwnie – ich rozkład jest bardziej wygładzony od rozkładu przypadkowego, sprowadza się do obliczenia rozrzutu ich liczby w kratce na podstawie obserwacji:  $\sigma_{obs} = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$  i porównaniu z  $\sigma$ .

Obserwowany rozkład galaktyk wykazuje rzeczywiście rozrzut większy niż przewidywany przy rozkładzie losowym, zatem galaktyki grupują się. Nie jest to jedyna metoda badania rozkładu galaktyk, za to najprostsza. Dostrzegamy zapewne, że nasuwają się problemy w rodzaju: jak wynik obserwacji zależy od rozmiaru kraterów, jakie znaczenie ma ograniczoność zdjęcia nieba, jak przełożyć rozkład galaktyk na zdjęciu na informację o ich rozkładzie w trzech wymiarach itd. Do uzyskania odpowiedzi na te pytania potrzebne są jednak metody bardziej wyrafinowane, a więc trudniejsze rachunkowo.

Tomasz KWAST



Nawiasy  $\langle \rangle$  oznaczają średnią.

## Mendel Hubble'a

W chwili, gdy piszę ten tekst, jest (przynajmniej jeszcze w Stanach Zjednoczonych) 25 kwietnia 2005 roku. Dokładnie 15 lat temu prom kosmiczny Discovery wyniósł na orbitę wokółziemską teleskop Hubble'a.

Od tamtej pory do dziś instrument ten dostarcza zdjęć, które zna cały świat. Trafiały one na niezliczoną liczbę okładek, wkładek, plakatów nie tylko pism specjalistycznych czy popularnonaukowych, ale również wielkonakładowej prasy. HST (*Hubble Space Telescope*) jest chyba najbardziej rozpoznawalnym skrótem naukowym. Taka naukowa „Coca-Cola”.

Z okazji piętnastolecia misji przygotowano i opublikowano [1] dwa zdjęcia zmontowane z bardzo wielu ekspozycji: galaktykę M51 (NGC 5194) Whirlpool (Wir) i detal mgławicy Orzeł M16. Pierwsze z tych zdjęć prezentujemy na okładce. W jeszcze bardziej imponującej rozdzielczości, pozwalającej na przygotowanie plakatów o powierzchni rzędu 10 stóp kwadratowych i jakości rozkładówek, będą one prezentowane w ponad 100 ośrodkach popularnonaukowych w Stanach Zjednoczonych na początku maja br.

Majestatyczne ramiona M51 rzeczywiście sprawiają wrażenie wciągającego w głąb wiru. Prawdopodobnie ta piękna struktura została utworzona poprzez fale pływowe wywołane przejściem małej galaktyki NGC 5195 za dominującą towarzyszką. To najwyraźniejsze, jak dotąd, zdjęcie układu pokazuje, że NGC 5195 nie znajduje się, wbrew temu co mogłoby się wydawać, na przedłużeniu jednego z ramion NGC 5194, tylko za nim. Wyraźnie widoczne „rubiny” to miejsca intensywne tworzenia się gwiazd. Najmasywniejsze z nich kończą jako supernowe, a z ich popiołów rodzą się niebieskie, gorące „diamenty”. Galaktyka ta znajduje się w Psach Gończych (*Canes Venatici*) w odległości 31 milionów lat świetlnych od Ziemi. Jej piękny, frontalny widok pozwala astronomom na badanie klasycznej struktury galaktyki spiralnej i zgłębianie procesów gwiazdotwórczych.

Detal mgławicy Orzeł wygląda jak impresjonistyczna rzeźba albo uwolniony z lampy Dżin. Struktura ta ma rozmiary około 100 bilionów kilometrów (prawie 10 lat świetlnych). To prawie dwukrotność odległości do najbliższej Słońcu gwiazdy. Gwiazdy w tej mgławicy rodzą się w chmurach zimnego wodoru, które są rzeźbione przez światło młodych gwiazd. Struktura ta może być gigantycznym inkubatorem gwiazd. Dominujące kolory są związane ze świeceniem gazu

wywołanym potężnym światłem ultrafioletowym skupisk gwiazd. Niebieski kolor pochodzi od tlenu, a czerwony od wodoru.

Głównym celem misji Hubble'a jest dostarczanie jak najwyraźniejszych zdjęć. Nie chodzi jednak o materiał na okładki, choć astronomia jest o tyle wyjątkowa, że bardzo często zdjęcie jest jednocześnie tyleż wartościowe, co po prostu piękne. Ponad 700 tysięcy ekspozycji dokonanych przez 15 lat działania Hubble'a przyczyniło się, między innymi, do (i) określenia wieku Wszechświata na 13,7 miliarda lat, pomogło potwierdzić istnienie tzw. (ii) ciemnej energii, pozwoliło na wykrycie (iii) małych proto-galaktyk świecących we Wszechświecie około 15 razy młodszym niż obecnie, udowodniło istnienie (iv) super-masywnych czarnych dziur, udokumentowało (v) zderzenie komety z Jowiszem, przekonało o powszechności (vi) procesów planetotwórczych w naszej Galaktyce.

Niestety, misja Hubble'a powoli dociera do kresu. Głównym powodem jest przygotowywany następcą w postaci *James Webb Space Telescope* (JWST), który, wyposażony w lustro o sześciokrotnie większej powierzchni niż HST, ma być wystrzelony na orbitę pozaksiężycową w 2011 roku. Zaawansowany projekt JWST zmniejsza motywację kosztownego podtrzymywania działania HST. W lutym br. Biały Dom wydał preliminarz budżetowy na rok 2006. Nie ma w nim środków na planowaną czwartą misję naprawczą HST. Najprawdopodobniej HST nie będzie już serwisowany. Podzespołami krytycznymi dla jego działania są żyroskopy, umożliwiające zorientowanie Hubble'a w przestrzeni i utrzymywanie go w stabilnej pozycji, oraz baterie, bez których nie jest w stanie działać. Z sześciu żyroskopów nie działają już dwa. Do normalnej pracy wystarczą trzy, więc jeden jest jeszcze w zapasie. Przewiduje się jednak, że obecne tempo psucia się żyroskopów to... jeden na rok. Już opracowano technikę wykorzystania *Fine Guidance Sensors* (czujników dokładnego celowania) do pracy normalnie wykonywanej przez jeden żyroskop. W miarę umierania kolejnych żyroskopów prawdopodobnie zostaną podjęte próby opracowania procedur radzenia sobie bez nich.

W każdym razie nasz piętnastolatek nadal działa i dostarczy jeszcze wielu fascynujących zdjęć.

Piotr ZALEWSKI

[1] <http://hubblesite.org/newscenter/newsdesk/archive/releases/2005/12/text/>  
<http://www.nasa.gov/vision/universe/watchtheskies/hst15.html>





# mała delta

## Dlaczego machamy rękoma?

Wielu zdolności ruchowych uczymy się przez naśladownictwo. W takim razie sposób poruszania się powinien być uwarunkowany kulturowo. Jednak wszyscy ludzie chodzą, biegają i skaczą w taki sam sposób. Jest to oczywiście uwarunkowane genetycznie. Ale czy tylko?

Zacznijmy od rzeczy najprostszych. Dzieci uczą się chodzić w wieku od siedmiu do kilkunastu miesięcy. Na czym ta umiejętność polega? I czy to w ogóle jest umiejętność? Przecież chodzić umie każdy, kto chodzić może.

Chodzenie jest możliwe dzięki umiejętności utrzymywania równowagi, ale to jest konieczne nawet do stania. Do chodzenia potrzebne jest coś więcej. Żeby ruszyć z miejsca, musimy zacząć... upadać. Pierwszy krok częściowo powstrzymuje upadek, ale upadamy dalej, co wymusza następny krok i tak dalej. W każdym kroku, żeby nie zejść do parteru, musimy trochę podnieść nasz środek ciężkości. W rezultacie środek ciężkości w każdym kroku opada i wznosi się, co jest głównym powodem zmęczenia przy chodzeniu.

Nie ma jednak innego sposobu chodzenia na dwóch nogach. Podczas chodzenia robimy jednak coś jeszcze. Machamy rękoma. To już wcale nie jest konieczne. Można np. iść z rękami w kieszeniach. Dlaczego, zwłaszcza wtedy, gdy idziemy szybko, tak nie robimy? Może to kwestia wychowania?

Okazuje się jednak, że nie. Machanie rękoma zmniejsza nasze zmęczenie. Objawia się to tym, że tak iść jest nam wygodniej. Energiczne chodzenie sprowadza się do energicznego wymachiwania nogami. Jeżeli chcemy sprawdzić uboczne skutki machania nogami, to najprościej zawisnąć na gimnastycznych kółkach i zacząć majtać nogami. Okaże się, że powoduje to skręcanie się górnej części ciała w przeciwną stronę (gdy prawa noga wysuwa się do przodu, to ciało skręca się w prawo). Wymachiwanie rękami zmniejsza konieczność skręcania całego ciała. Gdyby nie było to oszczędniejsze, nie byłoby nawykiem (prawie) wszystkich ludzi.

Jeżeli bardzo nam się spieszy, to w pewnym momencie zaczynamy biec. Tym, którzy chcą dowiedzieć się, dlaczego bieganie przy pewnej prędkości wymaga mniej wysiłku niż chodzenie, z czego wynika górna granica prędkości chodu, i dlaczego chodździarze chodzą w tak specyficzny sposób, polecam pierwszy rozdział *Fizyki sportu* Krzysztofa Ernsta. My skoncentrujemy się tylko na jednym aspekcie biegania – pracy rąk.

Gdy zaczynamy biec albo nawet tylko bardzo szybko iść, to automatycznie zginamy ręce w łokciach. Czy zastanawialiście się kiedyś, dlaczego? Przecież gdy stoimy, to ciężko nam w ten sposób utrzymywać ręce. Do czego w czasie biegu potrzebny jest nam ten dodatkowy wysiłek?





Oczywiście do tego, żeby się mniej męczyć. To tylko pozorna sprzeczność. W czasie biegu zmieniamy nogi energiczniej niż w czasie chodu. Ruchy rąk muszą stać się równie energiczne. No to teraz spróbujcie bardzo energicznie pomachać wyprostowanymi rękoma, a następnie, nie przestając machać, zegnijcie ręce w łokciach. Prawda, że tak jest łatwiej? Dodatkowy wydatek energetyczny, potrzebny do utrzymywania zgiętych rąk, jest z naddatkiem kompensowany mniejszym wysiłkiem związanym z machaniem rękoma.

Doszliśmy do miejsca, w którym wyłącznie jakościowe rozważania mogłyby zaprowadzić na manowce. Ustaliliśmy, że machanie rękoma pomaga, następnie doszliśmy do wniosku, że szybkie machanie wyprostowanymi kończynami górnymi jest męczące, więc kończyny te zgięliśmy w łokciach. Ale skoro zgiętymi łatwiej jest machać, to może gorzej wypełniają tę funkcję, dla której nimi wymachujemy? To może lepiej po prostu przestać machać w ogóle?

Dowodem na to, że jednak machanie się opłaca, jest to, że tak robimy, wcale się nad tym nie zastanawiając. Spróbujmy zrozumieć, dlaczego tak jest, nie wychodząc poza jakościowe rozważania.

Zarówno ruch rąk, jak i nóg w czasie biegu wywołuje momenty skręcające względem dwóch osi: osi mniej więcej pionowej równoległej do kręgosłupa i osi poziomej leżącej w płaszczyźnie zawierającej średnie (w układzie spoczywającego środka masy naszego ciała) położenie stawów biodrowych i barkowych. Zauważmy, że nieskompensowany moment skręcający, osobno dla nóg i osobno dla rąk, pojawia się tylko w pierwszym przypadku. W drugim kompensują się zarówno same nogi, jak i same ręce. W takim razie w machaniu rękoma chodzi o kompensację momentów skręcających względem osi kręgosłupa. Naprzemienna praca nóg powoduje powstawanie tych momentów dlatego, że stawy biodrowe znajdują się w pewnej odległości od kręgosłupa. Ich kompensacja za pomocą pracy rąk jest z kolei możliwa dzięki temu, że ręce też nie wyrastają bezpośrednio z kręgosłupa. Zauważmy jednak, że moment skręcający względem kręgosłupa, wywołany pracą rąk, nie zależy od tego, czy ręce mamy zgięte, czy nie, gdyż w obu przypadkach odległość rąk od kręgosłupa jest taka sama.

Teraz możemy podsumować nasze krótkie rozważania. W czasie biegu nie można uniknąć powstawania momentów skręcających względem osi kręgosłupa wywoływanych pracą nóg. Najwygodniej jest je kompensować za pomocą pracy rąk. Najefektywniej służą temu ręce zgięte w łokciach.

Pracując w ten sposób rękoma, minimalizujemy momenty skręcające względem osi poziomej. A czy nóg nie dałoby się prowadzić w taki sposób, żeby również minimalizować powstawanie „niepotrzebnych” momentów skręcających względem osi poziomej? Oczywiście można. Najlepiej robią to średniodystansowi biegacze. Ich sposób biegania to wysokie prowadzenie kolana z przywiedzionym podudziem nogi przedniej i ocieranie o pośladek pięty nogi tylnej w środkowej fazie lotu. Taki sposób biegania nie dla każdego jest jednak naturalny. Pomóc może ćwiczenie skippingu A (bieg z wysokim unoszeniem kolan) i B (bieg z uderzaniem piętami o pośladki).

A może by tak praktycznie przećwiczyć omawiany temat? Zachęcam.

*Piotr ZALEWSKI*

# Losowanie liczby naturalnej

Michał ADAMASZEK

Rozpatrzmy takie, całkiem naturalne i często pojawiające się pytanie: dla ustalonego  $k$  jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba naturalna dzieli się przez  $k$ ? Zanim radośnie stwierdzimy, że odpowiedzią jest  $\frac{1}{k}$  (to przecież jasne, co  $k$ -ta liczba ma tę własność...), przyjrzyjmy się sprawie dokładniej.

Zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych  $\Omega$  w naszym zadaniu jest zbiór  $\mathbb{N}$  (na potrzeby tego tekstu niech  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ). W schemacie klasycznym każdemu zdarzeniu losowemu  $A \subset \Omega$  przypisujemy prawdopodobieństwo

$$\frac{\#A}{\#\Omega},$$

gdzie przez  $\#X$  oznaczamy liczbę elementów zbioru  $X$ .

$$(2) \quad P(\mathbb{N}) = 1 \text{ i } P(\emptyset) = 0,$$

$$(3) \quad P(k\mathbb{N}) = \frac{1}{k} \text{ dla każdego } k \in \mathbb{N}.$$

**Odpowiedź.** Nie. Zainteresowanych dowodem odsyłam do podręczników rachunku prawdopodobieństwa, pod hasło „lemat Borela–Cantellego”.

Skoro odpowiedź jest negatywna, to najwyraźniej nasze wymagania są zbyt wygórowane. Możemy więc zapytać o słabsze wersje problemu. Na przykład osłabienie warunku (3) daje następujące

**Zadanie.** Znaleźć prawdopodobieństwo określone na  $2^{\mathbb{N}}$  (czyli dla wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych), które spełnia warunek (3) dla  $k$  będących liczbami pierwszymi.

My jednak skierujemy się w inną stronę. Będziemy walczyć o ostatnią własność, rezygnując w zamian z przeliczalnej addytywności. Innymi słowy, pytamy o istnienie prawdopodobieństwa takiego, jakie rozważa się w „szkolnym” rachunku prawdopodobieństwa, to znaczy skończenie addytywnego. Zmieniamy więc definicję  $\mathcal{F}$  – teraz będzie to *ciało* zbiorów, czyli rodzina zamknięta na branie *skończonych* sum i dopełnienia do  $\mathbb{N}$  generowana przez zbiory postaci  $k\mathbb{N}$  – i zastępujemy warunek (1) żądaniem, aby

$$(4) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

dla rozłącznych  $A, B \in \mathcal{F}$ .

Zanim zaczniemy zgłębiać strukturę ciała  $\mathcal{F}$  i w gąszczu należących do niego zbiorów sprawdzać, czy szukana funkcja daje się określić bez żadnych konfliktów (co jest nietrudne i wykonalne, ale trochę pracochłonne), spróbujmy spojrzeć na całe zagadnienie z szerszej perspektywy. Dlaczego w zasadzie nasze intuicyjne wyobrażenia podpowiadają, że prawdopodobieństwo podzielności przez  $k$  powinno być równe  $\frac{1}{k}$ ? Zapewne dlatego, że skłonni jesteśmy mierzyć prawdopodobieństwo zbioru  $A \subset \mathbb{N}$  jego *gęstością*, która jest zdefiniowana tak:

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n}$$

(o ile ta granica istnieje). Faktycznie  $d(k\mathbb{N}) = \frac{1}{k}$ .

Michał Adamaszek, student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Tym razem jest to oczywiście niemożliwe! Musimy zastanowić się nad tym, jakie zbiory zdarzeń chcemy brać pod uwagę, i jak określić ich prawdopodobieństwo – a można to zrobić na wiele sposobów. Przyjmijmy na przykład

$$P(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$$

dla  $A \subset \mathbb{N}$ . Jest to poprawna definicja, tymczasem

$$P(\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}.$$

Dla innych definicji  $P$  wyniki mogą być inne. Jest to sytuacja typowa dla rozważań o losowości – od tego, jaką miarę prawdopodobieństwa wybierzemy, zależy, jakie wyniki otrzymamy. Musimy więc zacząć od znalezienia, wśród wielu możliwych definicji prawdopodobieństwa w naszej przestrzeni, takiego, które wydaje się najodpowiedniejsze dla rozważanego problemu.

Oto nasze minimalne wymagania: prawdopodobieństwo  $P$  powinno być określone dla każdego zbioru postaci

$$k\mathbb{N} = \{kn : n \in \mathbb{N}\},$$

opisującego własność bycia podzielnym przez  $k$ .

Co więcej, aby uczynić zadość naszym początkowym intuicjom, chcemy, aby  $P(k\mathbb{N}) = \frac{1}{k}$ . Pozostałe warunki wynikają wprost z przeliczalnej addytywności prawdopodobieństwa. Skoro zbiory  $k\mathbb{N}$  mają mieć określone prawdopodobieństwo (powiemy, że są *mierzalne*), to mierzalne muszą też być wszystkie zbiory powstałe z nich przez przeliczalne sumy i branie dopełnienia do  $\mathbb{N}$  (czyli zbiory tworzące tzw.  $\sigma$ -*ciało* generowane przez zbiory  $k\mathbb{N}$ ).

Jesteśmy gotowi, aby porządnie sformalizować nasz problem.

**Pytanie.** Czy istnieje funkcja  $P$  (prawdopodobieństwo) określona na  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{F}$  generowanym przez zbiory postaci  $k\mathbb{N}$ , o wartościach w  $[0, 1]$ , taka że dla  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  parami rozłącznych

$$(1) \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

To podejście wydaje się dobre, bo gęstość wyraża naszą intuicję: patrzmy, jaką część początkowego odcinka liczb naturalnych wypełnia badany zbiór, i przechodzimy do granicy z długością tego odcinka.

Zauważamy szybko, że gęstość zachowuje się jak prawdopodobieństwo także pod innymi względami:  $d(\emptyset) = 0$ ,  $d(\mathbb{N}) = 1$ ,  $0 \leq d(A) \leq 1$ . Ponadto, jeśli  $A \cap B = \emptyset$  i zbiory  $A, B$  mają gęstość (odpowiednie granice istnieją), to także zbiór  $C = A \cup B$  ma gęstość, i  $d(C) = d(A) + d(B)$ . Ta równość zachodzi, bo

$$\#((A \cup B) \cap \{1, 2, \dots, n\}) =$$

$\#(A \cap \{1, 2, \dots, n\}) + \#(B \cap \{1, 2, \dots, n\})$   
dla  $A \cap B = \emptyset$ . Teraz wystarczy podzielić przez  $n$  i skorzystać z rozdzielnosci granicy względem dodawania.

Czyżby więc o to chodziło? Nie, jest bowiem pewien problem, który był już delikatnie zasugerowany: ze względu na operację brania granicy nie dla wszystkich zbiorów gęstość jest dobrze określona. Przykładem zbioru, dla którego definicja gęstości nie działa, jest zbiór:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^{2n}, 2^{2n} + 1, \dots, 2^{2n+1} - 1\}.$$

Dla tego zbioru ciąg z definicji gęstości ma granice dolną i górną równe odpowiednio  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{2}{3}$ , więc nie jest zbieżny. Nie jest to zatem dobra miara każdego zbioru.

Co więcej, nawet jeśli ograniczymy się do zbiorów, które mają dobrze określoną gęstość, to ich rodzina nie jest zamknięta ze względu na sumę zbiorów.

**Zadanie.** Podać dwa zbiory mające gęstość, których suma nie ma gęstości (w świetle jednej z ostatnich uwag takie zbiory nie mogą być rozłączne).

Wyklucza to sensowne określenie prawdopodobieństwa jako gęstości na tych zbiorach, dla których jest ona określona, bo nie tworzą one ciała zbiorów.

Cóż, próby uogólnienia wydają się prowadzić donikąd. Może uda się chociaż sprawdzić, jak gęstość zachowuje się w naszym pierwotnym problemie i czy przynajmniej na ciele zbiorów generowanym przez zbiory postaci  $k\mathbb{N}$  jest ona dobrą funkcją skończenie addytywną. Chyba że coś jeszcze wymyślimy. . .

Ostateczne rozwiązanie nadchodzi z zupełnie innej strony. Jedyne, co jest potrzebne, to. . . jeszcze większe uogólnienie! Paradoxs? Skorzystamy z pewnego pięknego i zaskakującego twierdzenia, które w pierwszej chwili wydaje się całkowicie nieprawdopodobne.

**Twierdzenie (granica Banacha).** Każdemu ciągowi ograniczonemu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  można przypisać liczbę rzeczywistą, którą oznaczymy (nie bez powodu)  $Lim(a_n)$  w taki sposób, że:

$$Lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha Lim(a_n) + \beta Lim(b_n),$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq Lim(a_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$Lim(a_n) = Lim(a_{n+1}).$$

W szczególności z drugiego warunku wynika, że jeśli ciąg jest zbieżny, to  $Lim(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Pierwszy warunek oznacza, że  $Lim$  jest (jak zwykła granica) rozdzielne z dodawaniem ciągów i mnożeniem ich przez liczbę. Zatem (uwaga!)  $Lim$  jest rozszerzeniem pojęcia granicy na wszystkie ciągi ograniczone (niekoniecznie zbieżne) i to w sensowny sposób – uogólniona granica mieści się tam, gdzie się jej spodziewamy: pomiędzy granicą dolną i górną ciągu. Na dodatek granica uogólniona nie zmienia się przy przesuwaniu ciągu (warunek ostatni).

**Pytanie kontrolne.** Względem jakiego działania na ciągach nie została zachowana rozdzielnosc granicy?

Dowód twierdzenia o granicy Banacha wymaga metod analizy funkcjonalnej – korzysta się z twierdzenia o przedłużaniu funkcjonału, które z kolei opiera się na lemacie Kuratowskiego–Zorna, co niejako „gwarantuje” niekonstruktywnosc całego dowodu.

**Zadanie.** Mimo owej niekonstruktywnosci granice uogólnione pewnych ciągów dają się obliczyć. Ile jest równe  $Lim(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ ?

Choć ciągle w szoku nad niezwykłością tego faktu, możemy już łatwo zastosować go do naszego zadania. Zdefiniujemy mianowicie uogólnioną gęstość wzorem

$$\varrho(A) = Lim \frac{\#(A \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n}.$$

Jest ona określona tym razem już dla wszystkich podzbiorów  $\mathbb{N}$  i zachowuje wszystkie wcześniejsze własności gęstości. Z własności  $Lim$  wynika, że  $\varrho(A) = d(A)$  dla zbiorów mających gęstość  $d$  i  $0 \leq \varrho(A) \leq 1$  dla dowolnego  $A \subset \mathbb{N}$  (to z drugiej własności  $Lim$ ). Addytywnosci  $\varrho$  dla zbiorów rozłącznych dowodzi się identycznie jak dla  $d$ , bo  $Lim$  jest addytywne.

Uzyskaliśmy zatem dużo więcej niż trzeba! Sformułujmy ten wynik w postaci twierdzenia

**Twierdzenie.** Istnieje skończenie addytywne prawdopodobieństwo  $P$ , określone na *wszystkich* podzbiorach  $\mathbb{N}$  (czyli funkcja spełniająca warunki  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  dla dowolnych  $A, B \subset \mathbb{N}$  rozłącznych,  $0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\mathbb{N}) = 1$ ) które jest rozszerzeniem gęstości, tzn.  $P(A) = d(A)$  dla zbiorów  $A$  mających gęstość. Jest ono określone wzorem  $P(A) = \varrho(A)$ .

Jak widać, całe zagadnienie okazało się, dzięki odpowiedniemu uogólnieniu, dużo prostsze. Można teraz zdradzić, że wcześniej postulowana konstrukcja dla szczególnego przypadku – zdefiniowanie miary tylko na mniejszym ciele zbiorów (generowanym przez zbiory postaci  $k\mathbb{N}$ , a nawet  $k\mathbb{N} + r$ ) jako ich gęstości – udaje się, choć po cięższej pracy. Całe to zagadnienie to kolejny przykład na to, jak odpowiednie uogólnienie czy też spojrzenie na problem w świetle innych dziedzin matematyki niż te, w których języku został sformułowany, może przyspieszyć jego rozwiązanie.

Porównywanie obiektów może być trudne. Często wynik zależy od wybranej metody. Zjawisko to zilustrujemy, porównując wielkości zbiorów, których elementami są liczby naturalne.

Liczby parzyste są podzbiorem właściwym zbioru liczb naturalnych. Z tego punktu widzenia (relacji zawierania) zbiór liczb parzystych jest *mniej* od zbioru liczb naturalnych. Możliwość stosowania tej relacji jest jednak bardzo ograniczona. Na przykład zbiory  $U = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\}$  oraz  $V = \{1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots\}$  nie są w tym sensie porównywalne.

Można jednak na zbiory  $U$  i  $V$  spojrzeć inaczej. Gdyby przynajmniej jeden z nich miał skończoną ilość elementów, to za *większy* zbiór można by uznać ten, który ma więcej elementów. Nietrudno jednak zauważyć, że zbiory  $U$  i  $V$  są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych, mają więc tyle samo elementów i można je uznać za *równe*. Takie podejście nie pozwala więc rozróżniać zbiorów przeliczalnych.

Opiszemy więc inne sposoby porównywania wielkości zbiorów (ciągów) złożonych z liczb naturalnych. Zaznaczając na osi liczbowej elementy zbioru  $U$  oraz zbioru liczb parzystych, zauważamy, że elementy zbioru  $U$  (w przeciwieństwie do liczb parzystych) pojawiają się coraz rzadziej. Przyjmijmy zatem, że *ten ciąg będzie większy, którego elementy będą gęściej rozmieszczone w zbiorze liczb naturalnych*. Problemem jest podanie zasad określania gęstości rozmieszczenia elementów danego zbioru w zbiorze liczb naturalnych i jej liczbowej charakterystyki.

Propozycja jest następująca. Określmy tzw. *funkcję gęstości*  $d: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$  poprzez następujące cztery własności:

- 1) gęstość zbioru liczb naturalnych jest równa 1;
- 2) gęstość dwóch rozłącznych zbiorów jest równa sumie gęstości tych zbiorów;
- 3) przesunięcie dowolnego zbioru nie zmienia jego gęstości:  $d(A) = d(A + 1)$ , gdzie  $A + 1 = \{y : y = x + 1, x \in A\}$ ;
- 4) rozrzedzenie dowolnego zbioru zmniejsza jego gęstość:  $d(sA) = \frac{1}{s}d(A)$ , gdzie  $sA = \{y : y = sx, x \in A\}$  dla  $s \in \mathbb{N}$ .

Korzystając z własności 1–4, nietrudno wykazać, że gęstość zbiorów skończonych jest równa zero. Wynika stąd już łatwo, że funkcja gęstości nie jest miarą na zbiorze liczb naturalnych (zbiór wszystkich liczb naturalnych ma gęstość 1, a jest sumą przeliczalnej rodziny rozłącznych zbiorów jednopunktowych o gęstości 0).

W oparciu o metody matematyki wyższej łatwo wskazać przykład funkcji gęstości. Mianowicie funkcja dana wzorem

$$(*) \quad d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap [1, n])}{n},$$

gdzie symbol  $\lim$  oznacza uogólnioną granicę Banacha, symbol  $\#X$  zaś oznacza liczbę elementów zbioru  $X$ , jest funkcją gęstości.

O związku funkcji gęstości z miarą, czyli prawdopodobieństwem, oraz o uogólnionej granicy Banacha, jest mowa w artykule Michała Adamaszka w tym numerze *Delt*y na str. 10–11.

Na szczęście możliwe jest efektywne stosowanie wzoru (\*). Z określenia uogólnionej granicy Banacha wynika, że jest ona równa zwykłej granicy, o ile ta ostatnia istnieje. Korzystając z tego, można wykazać, że zbiór

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, \dots\}$$

wszystkich liczb bezkwadratowych (tj. liczb naturalnych niepodzielnych przez kwadrat liczby większej od 1) ma gęstość  $d(B) = 6/\pi^2$ .

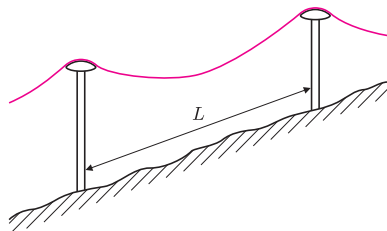
Inny sposób wykorzystania wzoru (\*) opiera się na następującej obserwacji.

**Lemat.** Jeżeli ciąg rosnący liczb naturalnych  $A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \dots\}$  spełnia warunek  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k} = q$ , to  $d(A) = q$ .



**Rozwiązanie zadania F 647.**

Lina kolejki podparta jest w regularnych odstępach na słupach.



Jeśli lina nie porusza się, możliwe jest wzbudzenie w niej drgań o długości równej  $\frac{2L}{n}$ , gdzie  $n$  to liczba naturalna. Zamocowania liny (węzły drgań) znajdują się w takim przypadku na słupach. Jeśli jednak porusza się, pojawia się dodatkowe tłumienie, wynikające z tego, że miejsce styku liny zmienia się i wszelkie wzbudzone drgania szybciej zanikają.



**Rozwiązanie zadania M 1103.**

Przypuśmy, że  $p_{n+1} = 5$  dla pewnego  $n$ . Oznacza to, że istnieją takie liczby całkowite nieujemne  $a, b, c$ , że

$$p_1 p_2 \dots p_n + 1 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c.$$

Stąd oraz z równości  $p_1 = 2, p_2 = 3$  wynika, że  $a = 0, b = 0$ . Wtedy liczba  $p_1 p_2 \dots p_n = 5^c - 1$  jest podzielna przez 4. Otrzymałoby sprzeczność, gdyż  $p_1 = 2$ , a pozostałe wyrazy ciągu  $(p_n)$  są liczbami nieparzystymi.

**Dowód.** Jeśli  $k = \#(A \cap [1, n])$ , to  $a_k \leq n < a_{k+1}$ . Z ostatniej nierówności wynika, że

$$\frac{k}{a_{k+1} - 1} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{k}{a_k}.$$

Ponieważ  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_{k+1} - 1} = q$ , więc  $d(A) = q$ .

Korzystając z tego lematu, obliczamy gęstość zbiorów  $U$  oraz  $V$ :  $d(U) = d(V) = 0$ . Prostymi przykładami zbiorów o niezerowej gęstości są ciągi arytmetyczne

$$A = \{a_k = ak + r : k = 0, 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{N}.$$

Ponieważ  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{ak+r} = \frac{1}{a}$ , więc  $d(A) = 1/a$ .

Wyznamy teraz gęstość zbioru wszystkich liczb pierwszych  $P = \{p_1 < p_2 < p_3 < \dots\}$ , którego rozmieszczenie w zbiorze liczb naturalnych odznacza się dużą chaotycznością i wciąż jest dla nas mało znane. Z twierdzenia o liczbach pierwszych J. Hadamarda – C. de la Vallée Poussina (z 1896 roku) wiadomo, że  $\pi(n) \approx n \ln n$ , gdzie  $\pi(n)$  to liczba liczb pierwszych nie większych od  $n$ . Wobec tego

$$d(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Niech  $z_n$  oznacza liczbę przedstawię  $n$  jako sumy liczb naturalnych ustawionych w porządku niemalejącym. Utwórzmy zbiór

$$Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, \dots\}.$$

Choć nie znamy prostego i ścisłego wzoru na  $z_n$ , to istnieje zadziwiający wzór na przybliżenie tej liczby, podany w 1918 roku przez G.H. Hardy'ego i S.S. Ramanujana:

$$z_n = \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Korzystając z tego przybliżenia, obliczamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z_n} = 0$ , więc  $d(Z) = 0$ .

Podobnie rzecz ma się z ciągiem Fibonacciego (opisanym w 1228 roku)

$$F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\},$$

którego kolejne wyrazy dane są formułą rekurencyjną:  $f_1 = f_2 = 1$ ,  $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ . Korzystając ze wzoru Bineta

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}},$$

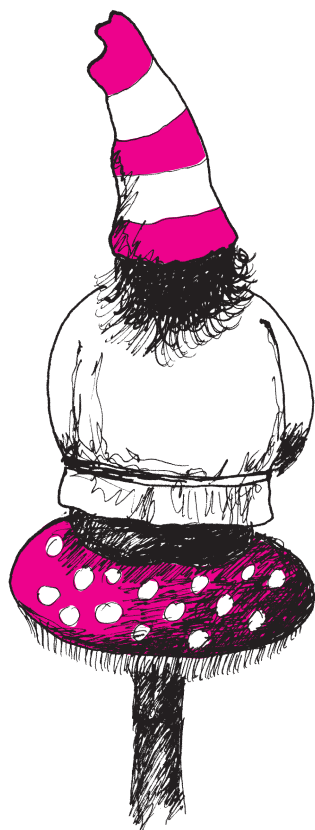
gdzie  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , obliczamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$ . Zatem  $d(F) = 0$ .

Na zakończenie wspomnijmy jeszcze o innym wprowadzeniu gęstości podanym przez L.G. Schnirelmana w 1930 roku. Gęstością Schnirelmana zbioru  $A \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$  nazywamy liczbę

$$D(A) = \inf_{n \geq 0} \frac{\#(A \cap [0, n])}{n}.$$

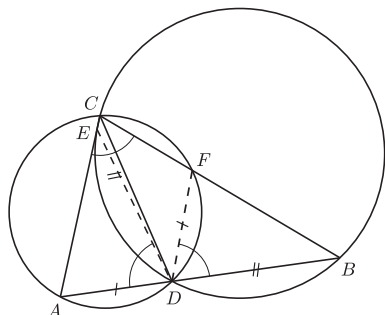
Pojęcie to wykorzystywane było w badaniu tzw. sumy kompleksowej zbiorów  $A$  i  $B$  tzn. zbioru  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ . Wyznaczenie sumy kompleksowej nawet prostych zbiorów jest zazwyczaj dość trudne. Schnirelman wykazał, że  $D(P + P) > 0$ . Ponieważ z własności uogólnionej granicy Banacha wynika, że  $d(A) \geq D(A)$ , więc zbiór  $P + P$  (czyli zbiór liczb parzystych, które można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych) ma dodatnią gęstość, tj.  $d(P + P) > 0$ . Rezultat ten gwarantuje, że słynna hipoteza Goldbacha z 1742 roku (HG: każdą parzystą liczbę naturalną większą od 2 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych) sprawdza się w nieskończenie wielu przypadkach (nawet zachodzi „z dodatnią częstością”). Ale czy we wszystkich? – tego nie wiemy do dziś.

Badania nad gęstością ciągów są pomocne przy analizie pewnych zagadnień matematycznych. Jest to dobrze widoczne w teorii liczb czy analizie funkcjonalnej. Omówienie tej problematyki (pokazującej, co może mały zbiór) wykracza jednak poza ramy tej prezentacji.

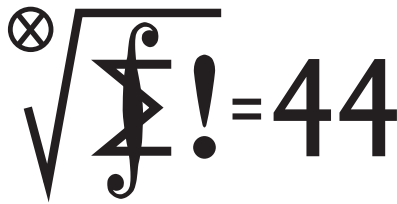


#### Rozwiązanie zadania M 1102.

Ponieważ prosta  $CD$  jest dwusieczną kąta  $ACB$ , więc  $DA = DF$ .



Analogicznie mamy  $DE = DB$ . Ponadto  $\sphericalangle BDF = \sphericalangle ECF = \sphericalangle EDA$ . Uzyskane równości dowodzą, że trójkąty  $ADE$  i  $FDB$  są przystające, skąd  $AE = BF$ .



Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
489 (WT = 1,75) i 490 (WT = 2,61)  
z numeru 11/2004

Jerzy Witkowski	- Radlin	44,49
Bartłomiej Dydą	- Wrocław	40,39
Tomasz Rawlik	- Brunzów	38,21
Zbigniew Galias	- Kraków	36,95
Tomasz Warszawski	- Kraków	35,10
Marcin Kasperski	- Warszawa	34,88

To już czwarta czterdziestka-czwórka  
w wykonaniu Jerzego Witkowskiego.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2005

Przypominamy treść zadań:

497. Dane są liczby rzeczywiste  $a, b$ . Rozwiązać w liczbach rzeczywistych  $x, y, z$  układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6ab \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3(a^3 + b^3) \end{cases}$$

498. Niech  $n$  będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie  $n$ -wyrazowe ciągi  $(a_1, \dots, a_n)$ , spełniające warunki:

- liczby  $a_i$  są całkowite,  $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 1$ ;
- $a_1 + \dots + a_n = 2n$ ;
- dla każdego układu wskaźników  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  (dla dowolnego  $k$ ) suma  $a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$  jest różna od  $n$ .

497. Niech trójka  $(x, y, z)$  będzie rozwiązaniem. Podnosząc pierwsze równanie układu do potęgi drugiej i trzeciej, dostajemy związki

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)] + 6xyz = 0;$$

a zastępując  $(x+y)$  przez  $-z$  (itd.), mamy stąd

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$

Badany układ równań przybiera postać

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = -3ab \\ xyz = a^3 + b^3. \end{cases}$$

To znaczy, że  $(x, y, z)$  jest ciągiem wszystkich pierwiastków (z uwzględnieniem krotności) wielomianu

$$P(t) = t^3 - 3abt - (a^3 + b^3).$$

Od razu widać, że  $P(a+b) = 0$ , co pociąga rozkład na czynniki

$$P(t) = (t - a - b)[t^2 + (a+b)t + (a^2 - ab + b^2)].$$

Jedna z liczb  $x, y, z$  jest więc równa  $a + b$ , pozostałe dwie zaś są pierwiastkami trójmianu w nawiasie kwadratowym. Jego wyróżnik

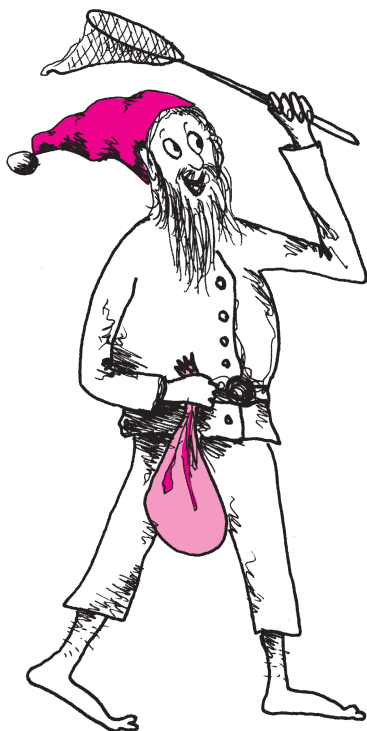
$$\Delta = -3(a - b)^2;$$

stąd  $a = b$  oraz

$$P(t) = (t - 2a)(t + a)^2.$$

Dostajemy odpowiedź: jeżeli  $a \neq b$ , wyjściowy układ równań nie ma rozwiązania rzeczywistego; a jeżeli  $a = b$ , to rozwiązaniami są trójki  $(2a, -a, -a)$ ,  $(-a, 2a, -a)$ ,  $(-a, -a, 2a)$ .

498. Weźmy dowolny ciąg  $(a_1, \dots, a_n)$  spełniający podane warunki. Jeżeli  $a_1 > n$ , to  $(a_1, \dots, a_n) = (n+1, 1, 1, \dots, 1)$  - i jest to dobry ciąg. Jeżeli  $a_n > 1$ , to  $(a_1, \dots, a_n) = (2, 2, \dots, 2)$  - i jest to także dobry ciąg, pod warunkiem, że  $n$  jest liczbą nieparzystą. Dalej zakładamy, że  $a_1 \leq n$ ,  $a_n = 1$ .



Oznaczmy  $s_k = a_1 + \dots + a_k$  i niech  $m$  będzie największym numerem, dla którego  $s_m \leq n$ . Liczba  $n$  jest (z założenia) różna od sumy dowolnie wybranych wyrazów  $a_i$ , więc  $n \neq s_m$  oraz  $n \neq s_m + a_n = s_m + 1$ ; zatem  $s_m \leq n - 2$ . Skoro zaś  $s_{m+1} > n$ , to  $a_{m+1} > 2$ .

Przyjmijmy, że ciąg  $(a_1, \dots, a_n)$  ma na końcu  $x$  jedynek, a przed nimi  $y$  dwójek ( $x > 0$ , bo  $a_n = 1$ ). Tak więc

$$2n = \sum a_i \geq x + 2y + 3(n - x - y),$$

skąd  $2x + y \geq n$ . Mamy też nierówność

$$n - s_m < s_{m+1} - s_m = a_{m+1} \leq a_m \leq s_m,$$

z której wynika, że  $s_m > \frac{1}{2}n$ , więc

$$n - s_m < \frac{n}{2} \leq \frac{2x + y}{2} \leq x + 2y.$$

Wcześniej stwierdziliśmy, że  $a_{m+1} > 2$ . To znaczy, że wśród składników sumy  $s_m = a_1 + \dots + a_m$  nie ma wyrazów  $a_i \leq 2$ . Mamy w takim razie do dyspozycji wszystkie  $x$  jedynek i  $y$  dwójek, z których można zbudować każdą liczbę mniejszą od  $x + 2y$ . W szczególności liczba  $n - s_m$  daje się przedstawić jako suma pewnej ilości jedynek i dwójek, będących wyrazami ciągu  $(a_i)$ . Tym samym liczba  $n$  okazuje się być równa sumie pewnych wyrazów  $a_i$ , wbrew postawionemu warunkowi.

Wniosek: jedynymi dobrymi ciągami  $(a_1, \dots, a_n)$  są te wspomniane na początku rozwiązania.

Czołówka ligi zadaniowej

#### Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
**390** (WT = 2,20) i **391** (WT = 3,18)  
 z numeru 1/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	31,25
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	26,54
Konrad Kapcia	– Częstochowa	17,65
Mateusz Łącki	– Kraków	17,27

## Klub 44

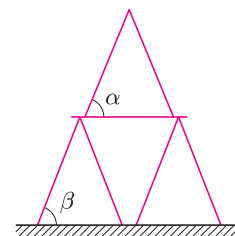


Redaguje Jerzy B. BROJAN

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2005

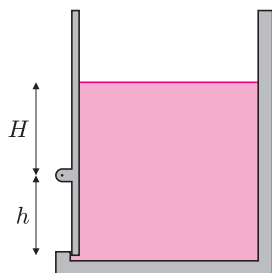
Przypominamy treść zadań:

**394.** Z siedmiu kart do gry zbudowano „domek” (zob. rys. 1). Jeśli współczynnik tarcia kart o stół i o siebie nawzajem jest równy  $\mu = 0,25$ , to jaka jest minimalna wartość kąta  $\alpha$  między górnymi kartami a poziomem? Jaka jest minimalna wartość kąta  $\beta$  między dolnymi kartami a poziomem? Zakładamy, że kąt  $\alpha$  jest jednakowy dla obu górnych kart, a kąt  $\beta$  – jednakowy dla czterech dolnych.



Rys. 1

**395.** Automatyczna spluczka zawiera zbiornik, którego ścianka boczna może się obracać bez oporu wokół ustalonej osi (rys. 2). Jeśli wysokość ścianki poniżej osi obrotu jest równa  $h$ , to do jakiej wysokości  $H$  powyżej osi musi się nalać woda, aby ścianka się obróciła i zbiornik uległ opróżnieniu?



Rys. 2

**394.** Na górną kartę działają cztery siły (rys. 3) – siła ciężkości  $P$  zaczepiona w jej środku, siła reakcji  $R = P$ , siła tarcia  $T$  i równoważąca ją siła ze strony drugiej górnej karty, którą dla uproszczenia oznaczmy także  $T$ . Rozpatrując momenty sił względem punktu podparcia, stwierdzamy, że warunkiem równowagi jest

$$P \cos \alpha = 2T \sin \alpha, \text{ czyli } \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2T} = \frac{1}{2\mu}.$$

Na każdą z dolnych kart działa dodatkowo czwarta część ciężaru trzech leżących na nich kart (rys. 4), a stąd wyliczamy  $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{7\mu}$ . Wartości liczbowe wynoszą  $\alpha = 63,4^\circ$ ,  $\beta = 70,7^\circ$ .

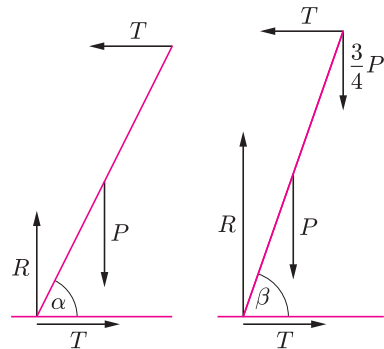
**395.** Ścianka się obróci, gdy całkowity moment działającej na nią siły parcia względem osi stanie się równy zeru, tzn.

$$\int_{-h}^H p h' dh' = 0.$$

Zmienna  $h'$  jest wysokością mierzoną od osi w górę, a ciśnienie  $p$  jest proporcjonalne do głębokości  $H - h'$ . Zatem

$$\int_{-h}^H (H - h') h' dh' = 0.$$

Scałkowanie daje nam równanie  $H^3 = 3Hh^2 + 2h^3$ , czyli  $H = 2h$ .



Rys. 3

Rys. 4



## Patrz w niebo



Od dawna wiadomo było, że warkoczki komet są zawsze skierowane od Słońca. W XIX wieku zauważono, że plamy słoneczne powodują burze magnetyczne na Ziemi, przy czym burza taka następowała w przybliżeniu w dobę po przejściu grupy plam przez centralny południk tarczy słonecznej. Te i inne obserwacje doprowadziły do powstania hipotezy (E.N. Parker), że korona słoneczna nie jest obiektem niezmiennym i musi nieustannie rozpraszać się w przestrzeni okołosłonecznej. Jej grzanie się do temperatury rzędu miliona stopni powodują fale magnetohydrodynamiczne powstające na powierzchni Słońca, które rozchodząc się w górę w ośrodku coraz rzadszym, dopiero w koronie wyładowują swoją energię. Istnienie tego tzw. wiatru słonecznego potwierdziły radzieckie sondy Łuna 2 i Łuna 3 około roku 1960, a pierwszych pomiarów parametrów wiatru dokonał amerykański Mariner 2 w 1962 r. Odtąd wiatr słoneczny stał się powszechnie uznanym składnikiem Układu Słonecznego.

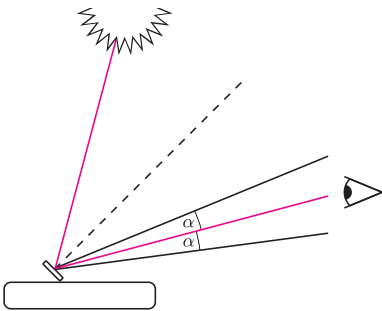
Pojawił się, oczywiście, problem, czy inne gwiazdy również „więcej” podobnie jak Słońce, w szczególności – czy zachowują się tak gwiazdy typu Słońca. Bo wiatry u gwiazd znacznie masywniejszych i gorętszych od Słońca znane są od dość dawna. Kilka lat temu grupa amerykańskich astronomów dokonała pierwszych pomiarów parametrów wiatru alfy Centaura. Ten układ podwójny (a z Proximą Centauri – właściwie potrójny) jest najbliższym sąsiadem Słońca w Galaktyce. Dominujący blaskiem składnik A jest typu widmowego dokładnie takiego jak Słońce (G2 V), składnik słabszy B jest dużo chłodniejszy. Amerykańscy astronomowie za pomocą Teleskopu Hubble’a przebadali absorpcyjne linie wodorowe w nadfioletowym zakresie widma gwiazdy. Okazało się, że oprócz linii pochodzących od międzygwiazdowego wodoru istnieją w tym widmie linie zarówno „poniebieszczone”, czyli powstające w ośrodku poruszającym się ku obserwatorowi, a więc od gwiazdy, jak i „poczerwienione”. Te pierwsze zinterpretowano jako linie powstające w wietrze alfy Centauri, te drugie – w wietrze słonecznym docierającym do granicy heliosfery w odległości 100–200 j.a. od Słońca. Tak więc, dwie sąsiednie, bardzo podobne gwiazdy są jeszcze bardziej podobne, niż się dotąd zdawało.

Tomasz KWAST



### Rozwiązanie zadania F 648.

Przyjmijmy, że kryształki śniegu to płaskie, odbijające powierzchnie. Obserwator widzi odbłysek tylko wtedy, gdy zajdzie sytuacja z rysunku.



Zakładając, że płatki rozłożone są przypadkowo, stwierdzamy, że prawdopodobieństwo tego, iż dany kryształek będzie dawał odbłysek w kierunku obserwatora, wynosi

$$p = \frac{\Delta}{4\pi},$$

gdzie  $\Delta$  to miara kąta bryłowego tworzonego przez stożek o kącie rozwarcia  $2\alpha$ . Z trygonometrii sferycznej

$$\Delta = 2\pi(1 - \cos \alpha),$$

a zatem

$$p = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Zakładając, że powierzchniowa gęstość rozmieszczenia kryształków jest równa  $\sigma$ , dostajemy

$$k = A p \sigma,$$

a więc

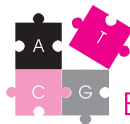
$$\sigma = \frac{2k}{A(1 - \cos \alpha)}.$$

## Lipiec

W lipcowe wieczory wysoko na niebie, lekko na południowy zachód, widać gwiazdozbiór Węża, jedyny gwiazdozbiór dwuczęściowy. Dzieli go Wężownik, niezaliczany do zodiaku, mimo że przechodzi przezeń duży łuk ekliptyki. Na podstawie starych ilustracji zodiaku można by pomyśleć, że mamy tu do czynienia z człowiekiem walczącym z zagrażającym mu wężem. Tymczasem Wężownik uosabia słynnego mitycznego lekarza Asklepiosa, a wąż wcale go nie atakuje, tylko dostał się na niebo, ponieważ pomagał Asklepiosowi wyszukiwać lecznicze rośliny. W Wężowniku można – mimo bliskości Drogi Mlecznej – zobaczyć przez amatorski teleskop przynajmniej 7 gromad kulistych, leżących w odległościach od 4 do 10 kpc – niektóre więc dalej niż centrum Galaktyki.

Merkurego można próbować szukać wieczorami około 9 VII – znajdzie się wtedy najdalej na wschód od Słońca. Wenus jest w Lwie i widać ją po zachodzie Słońca. Mars jest w Rybach i widać go w drugiej połowie nocy. Jowisz jest w Pannie i koło północy zachodzi, a Saturna nie widać z powodu bliskości Słońca (23 VII nastąpi jego złączenie ze Słońcem). Nów Księżyca wypada 6 VII, a pełnia 21 VII. Księżyc zakryje Jowisza 13 VII, lecz zjawisko to będzie widać w Ameryce Południowej, a 18 VII zakryje Antaresa, ale zobaczą to podróżujący po Pacyfiku i mieszkańcy Ameryki Środkowej. Pod koniec lipca można spodziewać się słabego roju meteorów wybiegających z gwiazdozbioru Ryb.

T. K.



## Pokarm dla mózgu

Student przed egzaminem, uczeń przed klasówką siedzi nad książkami, zakuwa, zasypiając przy kolejnej kawie... czy można pracować wydajniej? „Glukoza, pokarm dla mózgu” tak reklamują słodczyce w telewizji. Kiedyś co prawda cukier krzepił, ale już całe lata obwiniany był o tyle zła... czyżby coś się zmieniło?

Co właściwie jedzą komórki naszego organizmu? Glukozę, wolne kwasy tłuszczowe, ciała ketonowe... za chwilę możemy zgubić się w gąszczu przemian opisywanych w każdym podręczniku biochemii. Różne komórki mają różny gust. Komórki mięśniowe zależnie od rodzaju wysiłku mogą zadowolić się bardzo różnymi substancjami. Mięsień sercowy preferuje ciała ketonowe. Wszystkie komórki organizmu potrafią korzystać z glukozy. A mózg? Komórki nerwowe? Otóż, faktycznie, w normalnych warunkach komórki nerwowe żywią się wyłącznie glukozą! Specjalne receptory umieszczone na ich powierzchni wychwytyją cząsteczki tego cukru znacznie sprawniej niż receptory innych komórek, dzięki czemu mózg może funkcjonować nawet wtedy, gdy poziom glukozy we krwi zaczyna spadać. Jednak nie pracuje wtedy dobrze i pierwszy zaczyna szwankować. Człowiek najpierw nie potrafi się skupić, może być zdenerwowany, rozkojarzony. W skrajnych przypadkach może nawet stracić przytomność.

Czyżby okazało się tym razem, że reklama nie kłamie? Nie ma tu żadnej pułapki?

Jednak glukoza, podstawowy pokarm naszych komórek, jak wszystko w nadmiarze, jest trucizną. Osoby, które z powodu choroby mają przez długi czas za wysoki poziom tego cukru we krwi, chorują na szereg przypadłości związanych z uszkodzeniem układu krwionośnego, nerwów i głównych narządów, tracą kondycję, ślepną, wreszcie umierają. A przecież jednak nie umiera się od zjedzenia cukierka! Tak, gdyż u zdrowego człowieka, gdy tylko poziom glukozy zaczyna rosnąć, uruchamiane są mechanizmy usuwające cukier z krwi, doprowadzające go do właściwego poziomu.

Prześledźmy, co się dzieje, gdy jemy. Pokarm stopniowo ulega trawieniu, w wyniku którego uwalniane są proste związki organiczne, takie jak glukoza właśnie. Glukoza jest wchłaniana do krwi. Jej stężenie rośnie. Jednak nadmiar glukozy we krwi powoduje, że trzustka zaczyna wydzielać insulinę, hormon, który powoduje wchłanianie cukru i jego przetwarzanie w substancje zapasowe – glikogen w mięśniach i wątrobie oraz tłuszcz w komórkach tłuszczowych. Wszystko precyzyjnie ewoluowało tak, aby człowiek nigdy nie miał ani za dużo, ani za mało glukozy we krwi.

Jednak w naturze bardzo rzadko można spotkać stężoną, oczyszczoną, maksymalnie łatwo przyswajalną glukozę,

taką, jaka jest w niektórych cukierkach – po ich zjedzeniu stężenie cukru we krwi rośnie bardzo szybko, w związku z tym trzustka szybko zaczyna wydzielać dużą ilość insuliny. Glukoza jest usuwana z krwi ponad potrzebę, gdyż wzrost jej stężenia wywołany zjedzeniem cukierka był tyleż wysoki, co krótki.

W efekcie, niedługo po zjedzeniu czegoś słodkiego, paradoksalnie, poziom glukozy we krwi spada ponad miarę, człowiek czuje się znużony, senny... i głodny! Co więc robi? Sięga po kolejny cukierek, potem kolejny, wprowadzając organizm w huśtawkę glikemiczną. Zamiast skupić się na nauce, myśli o głodzie, o jedzeniu, rozprasza się, momenty, w których może pracować wydajnie, przerywane są chwilami rozkojarzenia.

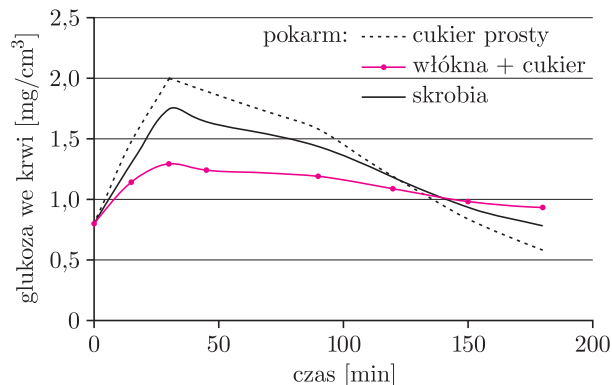
No i gromadzi niepotrzebne zapasy na głód, który nigdy nie nastąpi. Dzieje się tak dlatego, że w historii ewolucji ludzi dużo częściej problemem był głód niż nadmiar pożywienia. Ewolucja wyposażyła nas w potężne mechanizmy obrony przed głodem. Dopiero niedawno doszło do sytuacji, w której człowiek może przeżyć całe życie, mając w zasięgu ręki nadmiar pożywienia. I dopiero od niedawna ten nadmiar zaczął nam przeszkadzać.

Cóż więc poradzić komuś ślęczącemu nad książkami? Z jednej strony cukier jest potrzebny, z drugiej strony nadmiar szkodzi. Czyżby nie było wyjścia?

Jest. Kluczem jest jedzenie pokarmu, który trawi się dłużej, stopniowo i przez długi czas zapewniając stabilną dostawę glukozy do krwi.

Warto tu przypomnieć, że źródłem glukozy są nie tylko słodczyce. Np. mąka składa się ze skrobi, będącej polimerem złożonym z cząsteczek glukozy, które mogą być dość szybko z niej uwolnione. Jak szybko, zależy to od stopnia jej oczyszczenia i zmielenia. Stąd też dobrym źródłem „pokarmu dla mózgu” będzie gruba kasza, chleb z grubo mielonej, ciemnej mąki, brązowy ryż, a nie słodki napój, cukierek albo banan!

Tak więc reklama podaje kawałek prawdziwej informacji, ukrywa jednak to, co dla nas najbardziej istotne. Glukoza istotnie jest pokarmem dla mózgu, jednak od zjedzenia cukierka nie staniemy się bystrzejsi, może być wręcz przeciwnie.



Paweł POREBA  
Współpraca: Anna LORENC