

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (373)

Sto lat elektrodynamiki ciał
w ruchu Einsteina
Mikołaj Korzyński

str. 1

Albert Einstein – praca
o ruchach Browna z 1905 roku
Bogdan Cichocki

str. 4

Kwanty światła,
efekt fotoelektryczny
i rozpowszechnienie fotonów.
Janusz Skalski

str. 6

Elementarne wyprowadzenie
równoważności masy i energii
Albert Einstein

str. 9

Zadania

str.10

Aktualności

str.11

Mała Delta:

Czasoprzestrzeń
Marek Kordos

str.12

Klub 44

str.22

Patrz w niebo

str.24

Czerwiec

str.24

Kącik biologiczny

str.25

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Armen Edigarian, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Ryszard J. Pawlak, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwika, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwika Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 663-87-52, 663-11-46)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

???????????

Sto lat elektrodynamiki ciał w ruchu Einsteina

Mikołaj KORZYŃSKI

Spośród trzech słynnych prac, które 26-letni Albert Einstein opublikował w czso piśmie „Annalen der Physik” w 1905 roku największą karierę poza fizyką, w świadomości ogółu wykształconych ludzi, zrobiła zapewne ta z numeru 17, o krótkim tytule „O elektrodynamice ciał w ruchu”. Praca zawiera wykład teorii przestrzeni, czasu i zjawisk elektromagnetycznych, którą potem, za Maxem Planckiem, nazwano szczególną teorią względności.

Historia problemu, z którym postanowił zmierzyć się w swojej pracy Einstein, jest długa i powikłana i sięga co najmniej prac Galileusza. W swoim „Dialogu o dwóch systemach świata” florentczyk wysuwa hipotezę, że prędkość światła jest skończona. Oczywiście za jego czasów technika eksperymentalna nie pozwalała zweryfikować tego przypuszczenia.

W 1676 duński astronom Olaf Rømer zauważył, że pewne nieregularności w ruchach księżyców Jowisza można łatwo wyjaśnić zakładając skończoną prędkość światła. Ponieważ jednak rozmiary Układu Słonecznego nie były wówczas dobrze znane, nie podał on żadnej wartości prędkości światła.

Na początku XVIII wieku angielski astronom James Bradley odkrył aberrację gwiazd, czyli zjawisko pozornej zmiany położenia gwiazdy na niebie podczas roku. Okazało się, że wszystkie stałe gwiazdy wydają się zataczać małe elipsy bądź okręgi na niebie w takt orbitalnego ruchu Ziemi. Fakt ten łatwo było wytłumaczyć posługując się korpuskularną teorią Newtona, w której światło rozchodziło się ze skończoną prędkością. Efekt staje się analogiczny do skośnych śladów kropel, jakie zostawia padający pionowo deszcz na bocznych szybach pędzącego samochodu.

Więcej kłopotów dostarczała teoria falowa, która przeważała w optyce XIX wieku. Fale z konieczności wyobrażano sobie jako fale mechaniczne rozchodzące się w jakimś ośrodku, który nazwano eterem. Ten obraz mocno zaważył nad myśleniem fizyków tego stulecia. Eter na ogół wyobrażano sobie jako najzupełniej materialny, lecz bardzo lekki płyn przenikający materię.

Samą aberrację trudniej wytłumaczyć na gruncie teorii falowej, gdyż czoła płaskiej fali, w przeciwieństwie do strumienia cząstek, wyglądają tak samo bez względu na ruch obserwatora. Proste i zgodne z ówczesnymi pomiarami wyjaśnienie podał Fresnel, przyjmując, że eter jest częściowo unoszony, czy też „wleczony” przez ciała takie jak szkło soczewek teleskopów z prędkością $v = (1 - \frac{1}{n^2})$, gdzie n to współczynnik załamania materiału. Z kolei w poruszającym eterze prędkość światła była inna niż w spoczywającym, tak, jak prędkość fal na powierzchni płynącej wody jest inna niż tam, gdzie woda poczywa. Model wleczonego eteru działał dobrze, ale wiadomo już wówczas było, że dla praktycznie wszystkich materiałów współczynnik n jest nieco inny dla różnych długości fal świetlnych. Oznaczało to konieczność wprowadzenia nieco inaczej wleczonych „eterów” dla różnych długości fal, co wielu uczonych uznawało za niezadawalające.

Inną teorię aberracji światła przenoszonego przez eter podał Stokes, zakładając, że eter, jako nieściśliwy płyn, opływa Ziemię podczas jej ruchu. Problemem jego teorii było to, że prędkość eteru (a więc i kąt aberracji) na powierzchni Ziemi zależał od położenia obserwatora.

W międzyczasie powstała teoria elektromagnetyzmu Maxwella, rozwinięta potem przez Hertza, Heaviside’a i innych. Jedną z jej konsekwencji była możliwość rozchodzenia się fal z prędkością bardzo bliską ówczesnej prędkości światła. Szybko przyjęto więc, że światło jest po prostu falą elektromagnetyczną opisywaną równaniami Maxwella. Należy zaznaczyć, że sam Maxwell posługiwał się w swoich pracach na ten temat obrazem wirów i fal w mechanicznym ośrodku.

**Rozwiązanie zadania F 645.**

W czasie Δt przez przekrój wirnika przechodzi strumień $\rho v \pi r^2 \Delta t$ powietrza. Wirnik przekazuje więc mu pęd $\rho v^2 \pi r^2 \Delta t$ w jednostce czasu, więc siła nośna wynosi

$$F = \rho v^2 \pi r^2.$$

Śmigłowiec zwisa w polu grawitacyjnym Ziemi, więc $F = Mg$. Z kolei energia kinetyczna powietrza popychanego w jednostce czasu wynosi

$$\rho \frac{v^3 \pi r^2}{2} \Delta t.$$

Silnik musi więc dostarczać co najmniej tyle energii w jednostce czasu, a więc

$$P > \rho \frac{v^3 \pi r^2}{2},$$

a po podstawieniu poprzednio wyprowadzonych zależności

$$P > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M^3 g^3}{\rho \pi r^2}} \approx 73 \text{ kW}$$

**Rozwiązanie zadania M 1099.**

Korzystając z nierówności pomiędzy średnimi potęgowymi uzyskujemy

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{(\frac{1}{3}a)^n + (\frac{1}{2}b)^n}{2}} &\geq \frac{\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b}{2} = \\ &= \frac{2a + 3b}{12} = 1, \end{aligned}$$

skąd teza.

¹ Wydaje się ponadto, że Lorentz również nie był pierwszym, który odkrył transformacje nazwane jego imieniem, w 1900 roku napisał je Larmor.

W 1887 roku dwaj amerykańscy doświadczalnicy, Albert Abraham Michelson (pochodzący ze Strzelna) i Edward Morley spróbowali bezpośrednio wykryć wspomniany wcześniej ruch Ziemi względem eteru, tzw. wiatr eteryczny, związany z ruchem Ziemi wokół Słońca. Eksperyment oparty był na pomysł Michelsona z roku 1881. Ich urządzenie, interferometr, miał wykrywać niewielkie różnice w czasie przelotu światła w dwóch prostopadłych kierunkach. Z teoretycznych rozważań wiadomo było, że jeśli układ pomiarowy porusza się względem eteru (a więc prędkość światła jest nieco inna w różnych kierunkach), sygnał świetlny wysłany wzdłuż kierunku ruchu powinien systematycznie spóźniać się w stosunku do sygnału wysłanego prostopadle. Aparatura Michelsona i Morleya miała teoretyczną możliwość wykrywania zmian prędkości światła rzędu $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, więc powinna przynajmniej pokazać okresową zmienność prędkości światła w czasie roku związaną z ruchem orbitalnym Ziemi wokół Słońca o prędkości ok. $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Jednak rezultat eksperymentu Michelsona-Morleya, jak i zresztą kolejnych, coraz dokładniejszych pomiarów w latach 1902–1904 (Morley), 1921 (Miller), 1924 (Miller), był negatywny.

Ten zaskakujący wynik próbowano tłumaczyć na wiele sposobów. George FitzGerald, aby wyjaśnić problem, wysunął w hipotezę *ad hoc*, że ciała poruszające się w eterze doznają skrócenia w kierunku ruchu. Pomysł rozwinął Hendrik Lorentz, proponując w 1903 roku dokładne wzory na transformacje długości i czasu przy przechodzeniu z jednego układu do drugiego poruszającego się względem niego, nazwane potem transformacjami Lorentza.

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Jak zauważył Lorentz, transformacje te mają interesującą własność: zachowują postać równań Maxwella. Co za tym idzie, wszystkie zjawiska elektromagnetyczne, w tym rozchodzenie się światła, stały się „niewrażliwe” na ruch względem eteru. Tak, jak Maxwell, obaj fizycy w chwili publikacji swoich wyników nadal byli zwolennikami istnienia eteru przenoszącego oddziaływania elektromagnetyczne. Lorentz wciąż skłonny był uznawać parametr t występujący w transformacjach Lorentza jako abstrakcyjny, niefizyczny „czas lokalny”¹.

Nieco inne podejście do zagadnienia przedstawił wybitny francuski matematyk Poincaré. Zapostulował on, wobec danych doświadczalnych powinno się przyjąć, że zjawiska elektromagnetyczne nie zależą od prędkości biorących w nich udział względem żadnego ośrodka. Innymi słowy – fizycy powinni starać się, by tworzone przez nich prawa, zarówno mechaniki, jak i elektrodynamiki, były takie same we wszystkich układach poruszających się ze stałą prędkością względem siebie. Eter, wyróżniający jeden układ, stawał się w tej sytuacji zbędny.

Zarówno prace Lorentza, jak i Poincarégo opublikowano kilka lat przed Einsteinem. Zawierały one już dużą część współcześnie pojmowanej szczególnej teorii względności. Co więc zrobił w swojej pracy w „Annalen der Physik” Einstein i dlaczego to jego historycy nauki, a za nimi publiczność, uznali za twórcę tej teorii?

W skrócie można napisać, że Einstein uporządkował całą teorię i nadał jej przejrzystą strukturę logiczną – od postulatów do wniosków. Praca rozpoczyna się od prostego eksperymentu myślowego. Rozważmy poruszający się magnes spoczywający kawałek przewodnika. W teorii Maxwella poruszający magnes wytwarza pole elektryczne, a to powoduje przepływ prądu w obwodzie (rysunek 2).



Rozwiązanie zadania F 646.

Niech M oznacza chwilową masę rakiety, a ΔM masę wyrzucaną w krótkim czasie Δt . Pęd rakiety zmienia się w tym czasie o

$$\Delta(Mv) \approx -\Delta M v + M \Delta v.$$

Jednocześnie za rufą pojawia się ΔM gazów o prędkości $v - u$. Z zasady zachowania pędu musi więc zająć

$$-\Delta M v + M \Delta v + \Delta M (v - u) = 0,$$

a stąd

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{u}{M} \cdot \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Wielkość ta rośnie wraz z ubytkiem masy rakiety.

Zasadę zachowania energii rozpatrujemy w podobny sposób: zmiana energii kinetycznej rakiety w Δt to

$$\Delta \left(\frac{Mv^2}{2} \right) \approx -\Delta M \frac{v^2}{2} + M v \Delta v.$$

Energia kinetyczna wyrzuconych w tym czasie gazów to

$$\frac{\Delta M (v - u)^2}{2}.$$

Wobec tego

$$-\Delta M \frac{v^2}{2} + M v \Delta v + \frac{\Delta M (v - u)^2}{2} = P \Delta t.$$

Łącząc oba wyrażenia dostajemy, że

$$P = \frac{\Delta M}{\Delta t} \cdot \frac{u^2}{2},$$

co jest wielkością stałą podczas ruchu rakiety.

Z kolei w drugiej sytuacji magnes spoczywa, a przewodnik porusza się. Żadne pole elektryczne nie występuje, ale siła Lorentza działająca na ładunki w przewodniku powoduje przepływ prądu tak samo, jak w pierwszym przypadku. Efekt (przepływ prądu) jest taki sam bez względu na to, czy za poruszający uznamy magnes, czy przewodnik. To rozumowanie prowadzi Einsteina do sformułowania pierwszego postulatu swojej pracy: prawa elektrodynamiki powinny pozostawać takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, tak, jak prawa mechaniki. Ponadto wprowadza drugi, słynny postulat o stałości prędkości światła w różnych układach odniesienia, od razu zaznaczając, że jest on „tylko pozornie sprzeczny z pierwszym”. Cała praca to rozwinięcie tych idei.

Wpierw Einstein zajmuje się samym pomiarem długości i czasu zgodnie ze swoimi postulatami. Definiuje co rozumie przez dobry (zsynchronizowany) układ zegarów i przez pomiar długości poruszającego się ciała. Wyprowadza wówczas transformacje Lorentza jako jedyny zestaw transformacji liniowych współrzędnych zgodny ze swoimi postulatami. Zauważa przy okazji, że nowe definicje wymagają przyjęcia nowego prawa składania prędkości.

W drugiej, „elektrodynamicznej” części swojej pracy zajmuje się teorią Maxwella i wyprowadza wzory na transformacje pól elektrycznego i magnetycznego przy zmianie układu, zarówno w przypadku próżniowym (czyste pole elektromagnetyczne), jak i przy obecności ładunków.

Wyposażony w te narzędzia Einstein rozwiązuje kilka podstawowych problemów elektrodynamiki. Zaczyna od wyprowadzenia relatywistycznych wzorów na wspomnianą na początku aberrację światła i efekt Dopplera. Oblicza też związki między wartościami ciśnienia i strumienia energii fali elektromagnetycznej obserwowanymi w różnych układach inercjalnych. Na koniec bada przyspieszenie elektronu w polu elektrycznym i magnetycznym obserwowane z różnych układów inercjalnych. Jako ciekawostkę można podać fakt, że w żadnym miejscu tej pracy nie pojawia się „najpopularniejszy” i najczęściej kojarzony teorią względności wzór $E = mc^2$.

Praca ta oczywiście nie zakończyła dyskusji o problemie eteru i o elektrodynamice. Trzy lata po omówionej pracy Ritz zaproponował teorię, w której prędkość światła była stała w stosunku do źródła promieniowania. Jednocześnie trwały prace doświadczalników nad badaniem rozchodzenia się światła w różnych warunkach: w 1932 roku Kennedy i Thorndike zmodyfikowali oryginalny eksperyment Michelsona–Morleya, dzięki czemu udało im się wykluczyć pierwotną hipotezę skrócenia FitzGerala. Sagnac w 1913 zbadał z kolei rozchodzenie się światła w obracającym się, nieinercjalnym układzie odniesienia, uzyskując pełną zgodność z teorią Einsteina.

Współczesną, elegancką formę nadał szczególnej teorii względności matematyk Hermann Minkowski. Zobaczył on w koncepcjach Einsteina obraz pewnej geometrii, różniącej się od zwyczajnej definicją „odległości”.

Sam Einstein zajął się od 1907 roku próbami pogodzenia teorii grawitacji z teorią względności. Problem okazał się bardzo trudny i dopiero w 1915 roku opublikował równania ogólnej teorii względności – to jednak temat na co najmniej kolejny artykuł.

Literatura

- [1] Praca „Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, *Annalen der Physik* **17**, 891-921 (1905), w polskim tłumaczeniu dostępna w skrypcie „Literatura źródłowa do kursu Podstawy Fizyki na Politechnice Warszawskiej, tom 1: szczególna teoria względności” pod redakcją Witolda Kruczka, Biblioteka Dydaktyczna Zespołu Metodologii Dydaktyki Fizyki Instytut Fizyki Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1981
- [2] A. Trautman, W. Kopczyński, „Czasoprzestrzeń i grawitacja”, wyd. II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1984
- [3] <http://en.wikipedia.org>

Albert Einstein – praca o ruchach Browna z 1905 roku

Bogdan CICHOCKI

Historia ruchów Browna jest niezwykle pasjonująca. Jest to historia zmagania mających na celu wyjaśnienie tajemniczego zjawiska, jakie odkrył w 1827 roku szkocki botanik Robert Brown. Patrząc przez mikroskop na zawieszoną drobnymi cząsteczkami o rozmiarach rzędu 1 μm i mniej zauważył on, że cząstki te wykonują dziwne nieregularne ruchy (wygląda to jakby się trzęsły). Po wykonaniu w miarę systematycznych badań tych ruchów i wyeliminowaniu szeregu możliwych przyczyn Brown doszedł do wniosku, że cząstki te poruszają się „same z siebie”. To już wtedy było nie do zaakceptowania przez fizyków. Sytuacja stała się jeszcze bardziej trudna, gdy w latach czterdziestych i pięćdziesiątych XIX wieku ostatecznie sformułowano zasady termodynamiki. Zgodnie z tymi zasadami nie jest możliwe skonstruowanie perpetuum mobile I i II rodzaju. Cząstki zawiesiny nie mogą zatem ruszać się same z siebie. Jednak ruszały się pomimo wysiłków wielu eksperymentatorów by im to „uniemożliwić”. Był jeszcze jeden problem eksperymentatorów – mieli poważne kłopoty z ilościowym opisem ruchów Browna. Stwierdzali wprawdzie, że cząstki o rozmiarach rzędu 1 μm przesuwały się o około 1 μm w ciągu sekundy, ale nie byli w stanie zmierzyć precyzyjnie prędkości tych cząstek. Używali jedynie subiektywnego pojęcia intensywności tych ruchów – w zależności od warunków (np. temperatury) cząstki poruszały się według nich bardziej lub mniej intensywnie. Stosunkowo wcześniej (ok. 1860 r) wysunięto hipotezę, że ruchy te pojawiają się na skutek zderzeń atomów płynu z cząstką zawiesiny. Tyle tylko, że nie przedstawiono żadnej sensownej teorii ilościowej tego zjawiska, a o realności atomów przekonani byli wtedy bardzo nieliczni. Przełom nastąpił w latach 1905–1906 za sprawą Alberta Einsteina i Mariana Smoluchowskiego. W kilku wzajemnie uzupełniających się pracach przedstawili pełne wyjaśnienie zagadki ruchów Browna. Po potwierdzeniu doświadczalnym ich wyników społeczność fizyków ostatecznie zaakceptowała fakt istnienia atomów. O osiągnięciach naszego rodaka na tym polu pisaliśmy w specjalnym numerze Deltę 12 (1997). Tutaj omówimy pierwszą pracę Alberta Einsteina na ten temat, pracę wydaną w 1905 roku.

O ruchach Browna Einstein wspomina w swojej pracy tylko raz. We „Wstępie” stwierdza, że być może nieregularne ruchy cząstek, o których będzie pisał dalej są ruchami odkrytymi przez Roberta Browna, ale nieprecyzyjna wiedza nie pozwala mu na zajęcie stanowiska w tej sprawie. Jednak struktura pracy i jej treść przeczą temu stwierdzeniu. Wskazują one na to, iż Einstein doskonale wiedział, że jego rozważania dotyczą właśnie tego zjawiska. Jasny jest na przykład ostateczny cel pracy – znaleźć wielkość, która charakteryzowałaby wspomniane ruchy, czyli to co najbardziej bolało eksperymentatorów. Cel ten Einstein osiąga rozpatrując kolejno cztery zagadnienia, o których pokrótce.

Swoje rozważania rozpoczyna od analizy zjawiska ciśnienia osmotycznego. Przedzielmy naczynie na dwie części umieszczając w nim błonę półprzepuszczalną, przez którą może przenikać rozpuszczalnik, ale nie może substancja rozpuszczona. Jeżeli następnie w jednej części będzie czysty rozpuszczalnik, a w drugiej roztwór to pojawi się różnica ciśnień pomiędzy obu częściami zwana ciśnieniem osmotycznym. Z takim samym zjawiskiem mamy do czynienia, gdy zamiast roztworu będzie zawiesina. Einstein zauważa, że zjawiska tego nie ma, gdy nie ma cząstek zawiesiny. Nie ma również, gdy nie ma płynu. Zatem nieregularne ruchy cząstek (spowodowane obecnością płynu!) są bezpośrednią przyczyną ciśnienia osmotycznego. Następnie idzie dalej stwierdzając, że na zawieszinę można spojrzeć tak jak na gaz składający się z atomów i można zastosować te same narzędzia, które prowadzą np. do prawa gazu doskonałego w przypadku gazów dostatecznie rozrzedzonych. W ten sposób wprowadza prawo:

$$p = \frac{RT}{N_A} n$$

gdzie p – ciśnienie osmotyczne, R – stała gazowa, N – liczba Avogadra, T – temperatura bezwzględna i n – koncentracja (liczba cząstek w jednostce

objętości). Jest to znane ówczesnie prawo van't Hoffa, ale Einstein nie wspomina o tym (nie był bowiem skory do cytowania kogokolwiek).

W następnym kroku rozważa sytuację, w której na cząsteczki działa stała siła K np. w kierunku x . Wtedy koncentracja cząstek n w stanie równowagi zależy od położenia x . Zależność ta dana jest przez tzw. wzór barometryczny. Einstein wyprowadza go z zasady minimum energii swobodnej i zapisuje w postaci równości:

$$(1) \quad K_n - \frac{RT}{N_A} \frac{\Delta n}{\Delta x} = 0$$

gdzie Δn jest zmianą koncentracji cząstek na odległości Δx .

Teraz Einstein zauważa (i jest to jego trzeci krok), że ta równość musi być zgodna z warunkiem równowagi dynamicznej. Mianowicie, jeżeli na dostatecznie małe cząstki o promieniu a umieszczone w płynie o lepkości η działa stała siła K to zgodnie z prawem Stokesa poruszają się będą one z prędkością

$$\frac{K}{6\pi\eta a}$$

To prowadziło do zagęszczania się cząstek w kierunku działania siły. Wtedy jednak na skutek zjawiska dyfuzji pojawi się przepływ cząstek w przeciwnym kierunku. W procesie dyfuzji liczba cząstek przepływająca w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni jest równa

$$D \frac{\Delta n}{\Delta x},$$

D – współczynnik dyfuzji. W stanie równowagi efekty obu procesów muszą się zniżyć i musi zatem zachodzić równość:

$$(2) \quad \frac{K}{6\pi\eta a} n - D \frac{\Delta n}{\Delta x} = 0$$

Porównanie (1) i (2) daje bardzo ważny wynik dla współczynnika dyfuzji zawiesziny:

$$D = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{6\pi\eta a}$$

Wynik ten wykorzystał Einstein w swoim doktoracie do wyznaczenia liczby Avogadra. W omawianej pracy poszedł jednak w innym kierunku. Stwierdził mianowicie, że proces wyrównywania się koncentracji cząstek (czyli proces dyfuzji) odbywa się na skutek nieregularnych ruchów cząstek zawiesziny. Ruchy te można spróbować opisać wykorzystując rachunek prawdopodobieństwa. Przyjął, że ruchy oddzielnych cząstek są od siebie niezależne. Następnie, że przesunięcia wybranej cząstki w nie przekrywających się przedziałach czasu są również statystycznie niezależne. Wprowadzając te założenia używał magicznych słów typu „oczywiste”, „proste”, „jak łatwo pokazać” itp. Dzisiaj wiemy, że nie jest to takie oczywiste i założenia te wymagają głębszego uzasadnienia. Jednak o ile je przyjmujemy to rzeczywiście dość prosto można wykazać (Einstein uczynił to w trzech posunięciach), że zachodzi związek:

$$\langle (\Delta x(t))^2 \rangle = 2Dt$$

gdzie $\Delta x(t)$ jest zmianą w czasie t składowej x położenia cząstki, zaś nawias oznacza średnią. W ten sposób Einstein doszedł do wzoru, który wskazywał jak należy „mierzyć” intensywność ruchów Browna. Eksperymentalne potwierdzenie tego wzoru stało się punktem przełomowym w procesie „powołania atomów do życia” (jak to sformułował Mark Kac). Tyle tylko, że Einstein nie wspominał słowem o ruchach Browna omawiając ten wynik. Dociekliwy czytelnik końcowej części jego pracy może jednak zauważyć, że dziwnym trafem znajduje się tam wyliczenie na podstawie wzoru (3) średniego przesunięcia cząstki o rozmiarach 1 μm w ciągu jednej sekundy w warunkach typowego eksperymentu. Einsteinowi wyszło, że jest ono ok. 0,6 μm . I za to go podziwiamy, a na resztę spuścimy zasłonę.

Kwanty światła, efekt fotoelektryczny i rozpowszechnienie fotonów.

Janusz SKALSKI

¹ Annalen der Physik 17, 132 (1905).

W marcu 1905 r. A. Einstein wysłał do publikacji pracę¹, którą jako jedyną w swym dorobku uznał za „bardzo rewolucyjną”. Zawierała taką oto ideę:

...energia promienia światła ze źródła punktowego nie rozkłada się w sposób ciągły w powiększającej się objętości, ale składa się ze skończonej liczby kwantów energii, które są zlokalizowane w punktach przestrzeni, poruszają się bez podziału i mogą być wytwarzane lub pochłaniane tylko jako całości.

Natchnieniem Einsteina był o pięć lat wcześniejszy pomysł M. Plancka. Aby wytłumaczyć obserwowany rozkład natężeń promieniowania elektromagnetycznego (EM) wysyłanego w poszczególnych zakresach częstotliwości przez ciała o stałej temperaturze, Planck musiał przyjąć niezwykle założenie: materia pochłania i wysyła promieniowanie o częstotliwości ν tylko w porcjach – kwantach – o wielkości $h\nu$, gdzie h , o wymiarze [energia \times czas], jest stałą uniwersalną (stała Plancka). Jej doświadczalnie wyznaczona w 1900 r. wartość wyniosła:

$$h \approx 6,55 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Jako pretekst do wysunięcia śmiałej hipotezy posłużył Einsteinowi wyprowadzony przez niego przybliżony wzór na entropię promieniowania krótkofalowego. Po stwierdzeniu jego podobieństwa do wzoru dla gazu doskonałego sformułował rewolucyjną sugestię:

Monochromatyczne promieniowanie małej gęstości² [...] zachowuje się pod względem termodynamicznym tak, jakby składało się z wzajemnie niezależnych kwantów energii o wielkości $h\nu$. [...] ..sugeruje to zbadanie, czy procesy wysyłania i transformacji światła nie przebiegają tak, jakby światło miało się składać z kwantów energii tego rodzaju.

Następnie, posługując się tymi wyobrażeniami, przewidział prostą zależność energii elektronów wybijanych z metalu od częstotliwości padającego światła dla zjawiska fotoelektrycznego.

Zjawisko to odkrył H. Hertz (1887 r.) w trakcie badań nad wyładowaniami iskrowymi między dwiema powierzchniami metalowymi. Zauważył, że pierwotna iskra z jednej powierzchni wytwarza wtórną iskrę na drugiej. W serii pomysłowych doświadczeń udowodnił, że wtórna iskra powodowana jest przez światło pierwszej. W. Hallwachs pokazał (1888 r.), że oczyszczona, izolowana płytka cynkowa wystawiona na promieniowanie ultrafioletowe ładuje się dodatnio, a płytka naładowana ujemnie traci ładunek, nawet jeśli jest umieszczona w próżni. J.J. Thomson stwierdził, że fotoefekt polega na emisji elektronów: zmierzył stosunek (ładunek/masa) dla emitowanych cząstek (1897 r.), a następnie oddzielnie wyznaczył ich ładunek (1899 r.). J. Elster i H.F. Geitel stwierdzili w 1900 r., że prąd fotoelektryczny jest proporcjonalny do natężenia światła i powstaje natychmiast po oświetleniu metalu. Kluczowego i niespodziewanego odkrycia dokonał w 1902 r. P. Lenard, używając jako źródła światła łukowej lampy węglowej, której intensywność mógł zmieniać tysiąckrotnie. Okazało się, że energia wybijanych elektronów w ogóle nie zależy od natężenia światła, rośnie natomiast wraz z jego częstotliwością. Charakter tego wzrostu nie był znany w 1905 r, gdy Einstein opublikował swą hipotezę.

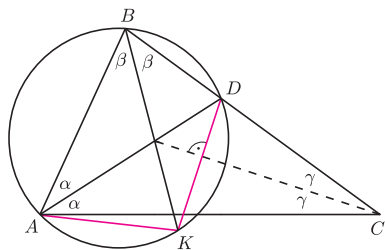
Zaproponował następujące wytłumaczenie fotoefektu: jeden kwant światła, zupełnie niezależnie od pozostałych, przekazuje całą swoją energię elektronowi. Elektron wyrzucony z metalu traci pewną jej część zanim dotrze do powierzchni.

² tzn. dla $h\nu \gg 3kT$ (T – temperatura, k – stała Boltzmanna); przy $T = 300 \text{ K}$ oznacza to długości fal $\lambda \ll 20 \mu\text{m}$.



Rozwiązanie zadania M 1100.

Oznaczmy: $\alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$, $\beta = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$, $\gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$.



Wówczas $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Mamy

$$\begin{aligned} \sphericalangle ADK &= \sphericalangle ADC - \sphericalangle KDC = \\ &= (180^\circ - \alpha - 2\gamma) - (90^\circ - \gamma) = \\ &= 90^\circ - \alpha - \gamma = \beta = \sphericalangle ABK, \end{aligned}$$

skąd wynika, że na czworokącie $ABDK$ można opisać okrąg. Z równości $\sphericalangle ABK = \sphericalangle KBD$ wynika zatem, że $AK = DK$.



Rozwiązanie zadania M 1101.

Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb $a + b$ i $a^2 + b^2$. Ponieważ liczby a i b są względnie pierwsze, a ich suma jest podzielna przez d , więc liczba d jest względnie pierwsza z liczbami a i b . Ponadto liczba $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ jest podzielna przez d . Stąd wynika, że $d | 2$, czyli $d \leq 2$.

Jeśli E_{max} oznacza energię wyrzuczonego elektronu dla przypadku, gdy ta strata wynosi zero, to:

$$(1) \quad E_{max} = h\nu - P,$$

gdzie $P = h\nu_0$ jest tzw. pracą wyjścia – charakterystyczną dla metalu minimalną energią, która pozwala elektronowi opuścić jego powierzchnię, a ν_0 – częstotliwością, poniżej której nie ma emisji elektronów. Zatem minimalna różnica potencjałów, powstrzymująca fotoprąd między oświetlonym metalem a innym uziemionym przewodnikiem, wynosi:

$$V = E_{max}/e = (h/e)(\nu - \nu_0).$$

Pomysł kwantów światła fizycy potraktowali jak naciąganą spekulację, którą był w istocie. Jego porównanie z hipotezą Plancka pokazuje dlaczego. Planck skwantował energie promieniujących oscylatorów – krok śmiały, ale dopuszczalny wobec braku danych o strukturze materii i jej oddziaływaniu z promieniowaniem. Dzięki temu opisał dotychczas niezrozumiałe dane doświadczalne. Tymczasem Einstein kwantował samo promieniowanie, czym zaprzeczał teorii Maxwella, i to w chwili, gdy odniosła ona ogromne sukcesy tłumacząc falową naturę światła. Co więcej, w 1905 r. żadne dane *nie wymagały* hipotezy kwantów światła. Ówczesne poglądy dobrze oddaje fragment opinii o Einsteinie w związku z jego kandydaturą do Pruskiej Akademii Nauk w 1913 r.³:

...To, że czasami chybiał w swych spekulacjach, jak np. w hipotezie kwantów światła, nie może być traktowane jako zbyt wielki zarzut, bo niemożliwym jest wprowadzanie nowych idei w nawet najściślejszych naukach bez podejmowania ryzyka.

Natomiast sam wzór (1) szybko wzbudził zainteresowanie jako nowe, niespodziewane i proste przewidywanie dotyczące znanego zjawiska: maksymalna energia fotoelektronów powinna zależeć liniowo od częstotliwości światła, a nachylenie prostej $E_{max}(\nu)$ powinno być, niezależnie od oświetlanego metalu, równe liczbowo znanej stałej Plancka.

Doświadczalny test prostej zależności nie okazał się wcale prosty. Potwierdzenie zależności liniowej wymagało dostatecznie szerokiego zakresu częstotliwości – praktycznie ograniczało to wybór do metali alkalicznych (są fotoczułe dla $\lambda < c/\nu_0 \approx 0,6 \mu\text{m}$). Dokładne wyznaczenie potencjału V hamującego fotoelektrony polegało na ekstrapolacji zmierzonej zależności natężenia fotoprądu od napięcia do natężenia zerowego. Tymczasem fotoprąd potrafił zmieniać się stukrotnie pod wpływem zmian na powierzchni metalu. Inne możliwe błędy wiązały się z rozproszonym światłem o częstotliwości wyższej od używanych linii widmowych rtęci, kontaktową siłą elektromotoryczną między tarczą a metalem drugiej elektrody, wreszcie z fotoprądem z drugiej elektrody, powstającym od światła odbitego. Poświęcając kilka lat pracy, wszystkie te trudności pokonał R. Millikan. W 1916 r. opublikował swoje bardzo dokładne rezultaty, które potwierdziły wzór Einsteina. Błąd wyznaczonej fotoelektrycznej wartości $h = 6,57 \times 10^{-27}$ oceniał na 0,5 %.

Mimo tego, większość fizyków nadal wątpiła w realność kwantów światła. Trwało to do 1923 r., gdy A. Compton przeprowadził eksperyment, w którym rozpraszał na graficie promienie X z molibdenowej antykotydy. Zmierzone różnice końcowej i początkowej długości fali X zgadzały się ze wzorem, wynikającym z potraktowania ich jak cząstek o energii $h\nu$ i pędzie $h\nu/c$:

$$\Delta\lambda = (h/mc)(1 - \cos\theta)$$

(m – masa elektronu, θ – kąt rozproszenia). W 1925 r. A. Compton i A.W. Simon obserwowali odrzut elektronów w komorze mgłowej i znaleźli bezpośrednie potwierdzenie zachowania pędu w zderzeniu X -elektron. Gdy w 1926 r. powstała nazwa „foton”⁴, wbrew swemu pierwotnemu, dość mętnemu znaczeniu, błyskawicznie przyjęła się jako określenie kwantu światła, którego istnienie wydawało się ustalone przez efekt Comptona.

³ Autorzy: M. Planck, H.W. Nernst, H. Rubens i E. Warburg.

⁴ G.N. Lewis, Nature 118, 874 (1926).

Tymczasem w latach 1925–27 powstała mechanika kwantowa. Fizyka musiała pogodzić się z tym, że nie umie przewidzieć wyniku eksperymentu z elektronami i światłem – umie jedynie wyznaczać *prawdopodobieństwa wszystkich możliwych* wyników. Stan elektronu charakteryzuje amplituda prawdopodobieństwa, będąca funkcją położenia i czasu. Ma ona własności ograniczonego przestrzennie impulsu falowego, a więc ani położenie, ani pęd elektronu nie są określone dokładnie, lecz wykazują fluktuacje kwantowe⁵. Gdy elektron o początkowej energii E_p znajduje się w zmiennym polu elektrycznym o częstotliwości ν , to po kilku okresach drgań pola pojawia się nowa składowa amplitudy elektronu. Jest ona proporcjonalna do amplitudy pola \mathcal{E} i odpowiada energii $E_k = E_p + h\nu$. Oznacza to, że niemal natychmiast po oświetleniu, elektron może zwiększyć swą energię o $h\nu$, z prawdopodobieństwem na jednostkę czasu proporcjonalnym do \mathcal{E}^2 , tzn. do natężenia światła. Równanie Einsteina (1) wynika więc z kwantowej natury elektronów przy ich oddziaływaniu z *klasycznym* promieniowaniem. Także inne cechy fotoefektu, jak kierunek fotoprądu, otrzymano bez hipotezy Einsteina (G. Wentzel, 1927 r.). W tym samym roku E. Schrödinger opisał efekt Comptona, używając amplitud elektronu i klasycznych płaskich fal EM.

Fotony nabrały konkretnego sensu w 1927 r., gdy P.A.M. Dirac przedstawił kwantową teorię promieniowania. Po ok. 20 latach usuwania z niej sprzeczności stała się ona, jako elektrodynamika kwantowa, podstawową teorią oddziaływań EM. Fotony rozpowszechniły się na stronach monografii naukowych i podręczników szkolnych. Czy pomagają zrozumieć fizykę promieniowania?

Większość zjawisk elektrooptycznych, poza zjawiskiem fotoelektrycznym także emisja wymuszona (maser, laser), fluorescencja rezonansowa itd., daje się pojąć traktując materię kwantowo, a pole EM klasycznie. Obraz punktowego kwantu światła może nawet utrudniać zrozumienie klasycznych zjawisk interferencji i dyfrakcji, które najłatwiej tłumaczyć się przez klasyczne stany pola, opisywane równaniami Maxwella.

Jednak według teorii kwantowej, amplitudy pola elektrycznego \mathcal{E} i magnetycznego \mathcal{B} monochromatycznej fali EM nie są dokładnie określone, ale, podobnie jak położenie i pęd cząstki, wykazują fluktuacje kwantowe $\Delta\mathcal{E}$ i $\Delta\mathcal{B}$. W „klasycznych” stanach pola EM, zawierających nieokreśloną liczbę fotonów, ta nieoznaczoność jest mała w porównaniu do średnich wartości \mathcal{E} i \mathcal{B} . Kwantowa natura promieniowania uwydatnia się tam, gdzie fluktuacje pola EM dominują wobec zerowania się średnich \mathcal{E} i \mathcal{B} . Przykładem są stany fotonowe, w których światło jest spontanicznie emitowane przez wzbudzone atomy i jądra atomowe. Przy emisji spontanicznej obserwuje się odrzut atomu (jądra) równoważący pęd fotonu $h\nu$, sprzeczny z teorią Maxwella. Fluktuacje pola elektrycznego $\Delta\mathcal{E}$ występują nawet w stanie bez żadnych fotonów. Powodują rozszczepienie poziomów $2s_{1/2}$ i $2p_{1/2}$ atomu wodoru o $\Delta\nu = 1057$ MHz – tzw. przesunięcie Lamba. Podobne źródło ma anomalny moment magnetyczny elektronu. Eksperymenty, w których mierzy się korelacje między detektorami światła przy bardzo słabych źródłach dowodzą, wbrew teorii klasycznej, że fotonu wysłanego przez jeden atom nie da się zarejestrować w dwóch detektorach. Pozwalają też w końcu stwierdzić, że foton zapewnia zachowania energii w zjawisku fotoelektrycznym: energia fotoelektronu zarejestrowanego po krótkim czasie oświetlania t bywa większa od klasycznej energii padającego światła: $E = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 S t$ (S – powierzchnia detektora).

Fotony nie są tym samym co kwanty światła z 1905 r.: nie są punktowe, bowiem ich rozciągłość przestrzenna wynika z warunków brzegowych, np. rozmiarów wnęki rezonansowej lub czasu życia stanów atomowych (rzędu 10^{-8} s); nie są niezależne, bowiem np. w równowadze termodynamicznej podlegają statystyce Bosego; nie są podobne do gazu doskonałego, bowiem ich liczba nie jest ustalona, itd. Pomimo tego, spekulatywna hipoteza kwantów światła pozostaje świadectwem wyjątkowej intuicji fizycznej Einsteina, który trafnie odgadł, że poprawna teoria wymaga oddziaływania kwantowego światła z kwantowymi promieniującymi oscylatorami.

⁵ Fluktuacje te spełniają zasadę Heisenberga: $\Delta x \cdot \Delta p \geq h/4\pi$.

Albert Einstein (1879–1955) był nie tylko uczonym, ale też popularyzatorem fizyki, a w pewnym sensie także publicystą naukowym. Zamieszczony obok jego artykuł popularny „Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy” nie znany jest szerokim kręgom, zapewne dlatego, że Einstein opublikował go w mało znanym fizykom piśmie izraelskim [*Technical Journal* (Haifa), 1946, V, 16–17]. Niniejszy tekst jest tłumaczeniem z rosyjskiego przekładu artykułu [Albert Einstein, *Sobranije naucznych trudow*, tom 2, 650–652, Izd. „Nauka”, Moskwa 1966].

Elementarne wyprowadzenie równoważności masy i energii

Albert EINSTEIN

Przedstawione tu wyprowadzenie prawa równoważności, dotychczas nigdzie nie publikowane, ma dwie zalety. Chociaż wykorzystuje się w nim szczególną zasadę względności, nie wymaga to jednak stosowania formalnego aparatu teorii; dowód opiera się na trzech znanych wcześniej prawach:

- (1) zasadzie zachowania pędu,
- (2) wyrażeniu na pęd promieniowania, czyli – na pęd pakietu falowego poruszającego się w danym kierunku,
- (3) znanym wyrażeniu dla aberracji światła (wpływu ruchu Ziemi na widziane z Ziemi położenie nieruchomych gwiazd, czyli – prawie Bradleya).

Aberracja światła, odkryta w 1726 r. przez astronoma angielskiego J. Bradleya, to zmiana położenia gwiazdy widzianej z Ziemi na skutek ruchu samej Ziemi. Aberracja roczna, uwarunkowana ruchem orbitalnym Ziemi wokół Słońca, widoczna jest jako ruch gwiazdy po maleńkiej (jak to widać z Ziemi) orbicie eliptycznej. Aberrację można poglądowo wyjaśnić jako wynik (wektorowego) sumowania się prędkości światła gwiazdy i prędkości obserwatora (wraz z Ziemią).

Rozpatrzmy teraz następujący układ. Niech ciało B spoczywa swobodnie w przestrzeni względem układu odniesienia K_0 . Dwa pakiety falowe S i S' , o energii $E/2$ każdy, poruszają się odpowiednio w dodatnim i ujemnym kierunku osi x_0 , padają na ciało i są przez nie pochłonięte. W wyniku tego procesu energia ciała zwiększa się o E . Ciało B pozostaje przy tym w spoczynku względem układu K_0 , a wynika to z symetrii zdarzenia.

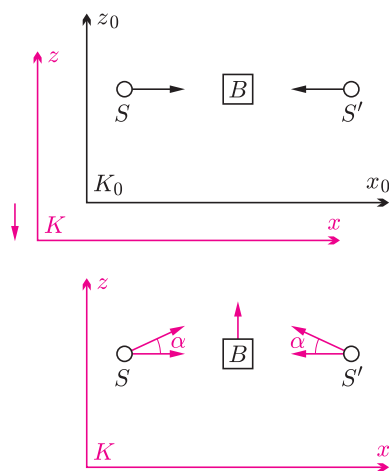
Rozważmy teraz ten sam proces z układu odniesienia K poruszającego się względem układu K_0 ze stałą prędkością o wartości v w ujemnym kierunku osi z_0 . W układzie K rozważany proces opisuje się następująco: ciało B porusza się w dodatnim kierunku osi z z prędkością o wartości v . Kierunki dwóch pakietów falowych w układzie K tworzą z osią x kąt α . Zgodnie z prawem aberracji, w pierwszym przybliżeniu zachodzi związek: $\alpha = \frac{v}{c}$, gdzie c – prędkość światła. Z rozważań dotyczących przebiegu procesu w układzie K_0 wiemy, że prędkość ciała B po pochłonięciu pakietów falowych S i S' nie ulegnie zmianie.

Zastosujemy teraz do naszego układu prawo zachowania pędu dla składowych w kierunku z w układzie K .

I. Niech M oznacza masę ciała B do chwili pochłonięcia pakietów falowych; w takim razie Mv jest pędem ciała B (zgodnie z mechaniką klasyczną). Każdy pakiet falowy ma energię $E/2$, a więc – zgodnie ze znanym wnioskiem z teorii Maxwella – jego pęd ma wartość $E/2c$. Ściśle rzecz biorąc, tyle jest równym pęd pakietu falowego S względem układu odniesienia K_0 . Kiedy jednak prędkość v jest mała w porównaniu z c , wówczas pęd w układzie K ma taką samą wartość – z dokładnością do wielkości małej drugiego rzędu ($\frac{v^2}{c^2}$ w porównaniu z 1). Wartość składowej tego pędu wzdłuż osi z jest równa $\frac{E}{2c} \sin \alpha$, albo – z wystarczającą dokładnością (jeśli pominąć wielkości małe wyższych rzędów) – $\frac{E}{2c} \alpha$, lub $\frac{E}{2} \frac{v}{c^2}$. Zatem składowe pędów pakietów falowych S i S' wzdłuż osi z są w sumie równe $E \frac{v}{c^2}$. Tak więc pęd całkowity układu przed aktem pochłonięcia jest równy

$$Mv + \frac{E}{c^2}v.$$

Wobec tego, że $v \ll c$, gdzie c – wartość prędkości światła, więc $c^2 \cong c^2 - v^2$ i kąt aberracji $\alpha = \frac{v}{c}$ (prawo Bradleya). Ten przybliżony wzór bardzo dobrze zgadza się z wynikami pomiarów, co oznacza, że w tym przypadku ($v \ll c$) wystarczającą dokładność obliczeń zapewnia klasyczna reguła składania prędkości Galileusza.



II. Niech M' oznacza masę ciała B po akcie pochłonięcia. Z góry bierzemy tu pod uwagę możliwość zwiększenia masy po pochłonięciu energii E (jest to konieczne na to, aby ostateczny wynik naszych obliczeń był niesprzeczny). Wobec tego pęd układu po akcie pochłonięcia będzie równy

$$M'v.$$

Skorzystamy wreszcie z zasady zachowania pędu dla składowych wzdłuż osi z . Daje to związek

$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v$$

lub

$$M' - M = \frac{E}{c^2}.$$

Związek ten wyraża prawo równoważności energii i masy. Zwiększenie energii o E wiąże się ze wzrostem masy o $\frac{E}{c^2}$. A wobec tego, że energię określa się zazwyczaj z dokładnością do stałej addytywnej, więc tę ostatnią możemy wybrać tak, aby zachodził związek:

$$E = Mc^2.$$

Ponieważ dla $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ transformacja Lorentza przechodzi w klasyczną transformację Galileusza, więc i wyrażenie na pęd ciała ma dla małych prędkości postać klasyczną. Związek $E = pc$, spełniony dla świetlnej paczki falowej, może być udowodniony przy pomocy transformacji Lorentza i zasady względności bez uciekania się do równań Maxwella. Dowód jest elementarny, choć dość długi.



Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 645. Oszacować minimalną moc silnika nieruchomo unoszącego się w powietrzu śmigłowca o masie $M = 2000$ kg, promieniu wirnika $r = 5$ m, w powietrzu o gęstości $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Dla uproszczenia założyć, że wirnik tworzy skierowaną pionowo w dół strugę powietrza o jednorodnym rozkładzie prędkości i o przekroju koła o promieniu r , oraz pominąć mały wirnik w ogniu. Rozwiązanie na str. 2

F 646. W silniku pewnej rakiety stała ilość spalin ΔM jest wyrzucana w czasie Δt do tyłu ze stałą prędkością u względem rakiety. Pokazać, że przyspieszenie rakiety rośnie wraz z ubytkiem paliwa. Czy tak samo rośnie moc silnika P ? Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Waldemar POMPE

M 1099. Liczby dodatnie a, b spełniają warunek $2a + 3b = 12$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

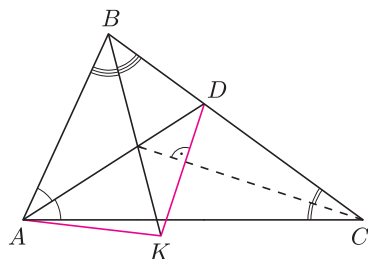
$$\left(\frac{a}{3}\right)^n + \left(\frac{b}{2}\right)^n \geq 2.$$

Rozwiązanie na str. 2

M 1100. Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina bok BC w punkcie D (rys.). Prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do dwusiecznej kąta ACB przecina dwusieczną kąta ABC w punkcie K . Udowodnić, że $AK = DK$. Rozwiązanie na str. 6

M 1101. Największy wspólny dzielnik liczb całkowitych dodatnich a i b jest równy 1. Dowieść, że największy wspólny dzielnik liczb $a + b$ i $a^2 + b^2$ nie przekracza 2.

Rozwiązanie na str. 7



Ciepło, zimno

Tę zabawę znają wszyscy. Słyszymy „ciepło”, gdy zbliżamy się do poszukiwanego przedmiotu, i „zimno”, gdy od celu się oddalamy. Czasami jednak lepiej pójść w „zimną” stronę.

Tak jest w przypadku poszukiwania pozasłonecznych planet. Odkryto już ponad sto takich obiektów, ale żadnego z nich jeszcze nie widziano bezpośrednio. Do niedawna.

Trudno się temu dziwić. Światło gwiazdy oślepia. Chyba że zacząć się przyglądać w takim zakresie długości fal, w którym gwiazda nie świeci tak mocno, za to sama planeta świeci. Takim zakresem jest światło podczerwone, które, niestety, nie dociera do powierzchni Ziemi, zatrzymywane przez atmosferę.

Od niedawna krąży wokół nas Spitzer Space Telescope, czyli największy teleskop dla zakresu podczerwonego, jaki kiedykolwiek wysłano w przestrzeń kosmiczną. Teleskop mierzy fale w zakresie od 3 do 180 mikronów (światło widzialne to zakres dziesiątych części mikrona).

W tym zakresie gwiazdy już tak nie dominują nad planetami, o ile te ostatnie są jednak duże i gorące, czyli orbitują blisko swojego słońca.

I właśnie dwie takie planety udało się zaobserwować [1] dwóm niezależnym zespołom badawczym. Oczywiście, planety były odkryte wcześniej, ale nie bezpośrednio. Mają one wdzięczne nazwy: HD 209458b i TrES-1. Odkryto charakterystyczne zachowanie krzywej blasku: pociemnienie w czasie tranzytu planety, wyjaśnienie, gdy planeta i jej słońce są widoczne, oraz poziom pośredni, gdy planety nie widać.

Są to planety typu „gorący Jowisz”. Mają temperatury około 1000 stopni Celsjusza. To w końcu widać je dlatego, że są ciepłe czy że zimne?

Sposób na chlapanie

Czy zdarzyło Wam się kiedyś być ochlapanym przez samochód? Może można takim przypadkom jakoś zaradzić? Oczywiście, nie chodzi mi tu o wyremontowanie dróg czy edukację kierowców. Takie, pozornie oczywiste, sposoby nie zdają egzaminu, przynajmniej w naszym kraju.

Czy można zrobić coś, żeby wychłupnięcie wody z kałuży po prostu nie było możliwe? Wyobraźmy sobie złośliwego kierowcę, który widzi człowieka stojącego przy kałuży. Kierowca specjalnie wjeżdża w kałużę, a tu nic, człowiek pozostaje suchy.

Popatrzmy, jak wygląda wychłupnięta woda. Z pomocą przychodzą nam... telewizyjne reklamy. Ostatnio przyszła moda na pokazywanie kropli wpadającej do naczynia. Jest to rzeczywiście efektowne. Wpadająca kropla powoduje powstanie wychłupnięcia w postaci korony kropelek. Gdyby kropelki się nie tworzyły, to maksymalna wysokość, na którą płyn wydostaje się z naczynia, byłaby mniejsza. Wynika to po prostu z zasady zachowania energii. Jeżeli więc udałoby się coś zrobić, żeby takie kropelki się nie tworzyły, to zasięg wychłupnięcia z kałuży byłby mniejszy, co utrudniłoby zabawę złośliwym kierowcom.

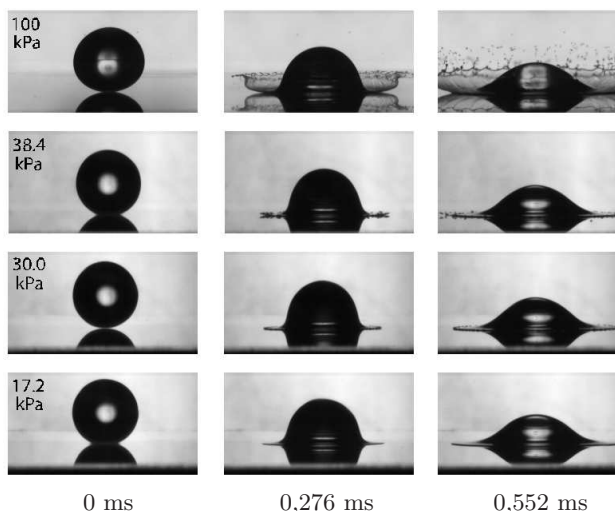
Tego typu problemami od lat zajmują się naukowcy. Wbrew pozorom badania te mają konkretne zastosowania. Wystarczy wspomnieć o wtrysku paliwa czy plujkach (drukarkach, a nie muchach). Ostatnio naukowcy z Uniwersytetu w Chicago dokonali zaskakującego odkrycia [1].

Badali oni rozpryskiwanie się kropli o szklaną powierzchnię. Okazuje się, że wystarczy zmniejszyć ciśnienie, żeby nie tworzył się rozbryzg. Kropla alkoholu etylowego, zderzająca się ze szklaną powierzchnią z prędkością powyżej 3 m/s, nie tworzy rozbryzgu, jeżeli ciśnienie (powietrza) obniży się do jednej trzeciej ciśnienia atmosferycznego.

Dokładniejsze zbadanie efektu pozwoliło ustalić, że znaczenie ma gęstość gazu. Ciśnienie progowe, poniżej którego nie obserwuje się rozbryzgu, skaluje się jak odwrotność pierwiastka z gęstości. Im większa gęstość, tym bardziej trzeba obniżyć ciśnienie, żeby uniknąć powstawania kropelek.

Drugim czynnikiem jest lepkość płynu. Tu również wysokość progu jest odwrotnie proporcjonalna do lepkości. Im bardziej lepki płyn, tym bardziej trzeba obniżyć ciśnienie.

Wróćmy do naszych baranów (za kierownicą). Widać, jakie jest rozwiązanie. Wystarczy zmniejszyć ciśnienie atmosferyczne do jednej trzeciej obecnej wartości lub zastąpić powietrze helem. Prawda, że proste?



Zdjęcia kropli alkoholu spadającej na suchą szklaną powierzchnię w powietrzu o różnym ciśnieniu. Normalne ciśnienie to 100 kPa. Przy ciśnieniu 38,4 kPa, minimalnie przewyższającym ciśnienie progowe, tworzy się jedynie kilka kropelek. Poniżej progu krople się nie tworzą, ale można dopatrzeć się prawie „kroplotwórczej” struktury rozplywającego się alkoholu. Przy najniższym ciśnieniu płyn rozplywa się już całkiem gładko.

Piotr ZALEWSKI

[1] Mark Peplow, *Light from alien planets confirmed*, Nature z 7 kwietnia 2005

[2] Lei Xu, Wendy W. Zhang, Sidney R. Nagel, *Drop splashing on a dry smooth surface*, <http://kauzmann.uchicago.edu>. Na podanej stronie można również zobaczyć filmy pokazujące rozbryzgującą się i nierozbryzgującą się kroplę.



Czasoprzestrzeń

czyli geometryczny odpowiednik szczególnej teorii względności, to dzieło Hermanna Minkowskiego (1864–1909), u którego zresztą Einstein studiował na politechnice w Zurichu. Pierwsza publikacja na ten temat ukazała się w 1909 roku i to tak nieszczęśliwie, że zmarły nagle Minkowski jej nie zobaczył.

Proponuję przyjrzenie się temu pomysłowi od strony geometrycznej i to w najprostrzym przypadku, gdy jest to czasoprzestrzeń dwuwymiarowa. Ma to być geometria, więc (przynajmniej na początku) nie będzie mowy o żadnym czasie.

Geometria czasoprzestrzeni, to – oczywiście – geometria nieeuklidesowa, zatem nie wszystkie z postulatów Euklidesa są w niej prawdziwe. Wiemy, że pierwsza geometria nieeuklidesowa powstała przez zaprzeczenie piątego postulatu, który mówił o równoległych. W czasoprzestrzeni postulat piąty jest spełniony. Geometrię czasoprzestrzeni otrzymuje się przez zaprzeczenie postulatu czwartego, który orzeka:

(IV – Euklides) *wszystkie kąty proste są równe.*

Jak mogą wyglądać nierówne kąty proste?

Zauważmy najpierw, że skoro z równoległością jest tak, jak w naszej geometrii, więc w czasoprzestrzeni możliwe są takie same przesunięcia, jak w geometrii szkolnej.

Z prostopadłością musi jednak być jakoś inaczej, niż jesteśmy przyzwyczajeni. Wprowadźmy więc układ współrzędnych. W zwykłej geometrii wektory $[a_1, a_2]$ i $[b_1, b_2]$ są prostopadłe, gdy $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$. W czasoprzestrzeni będą one prostopadłe, gdy

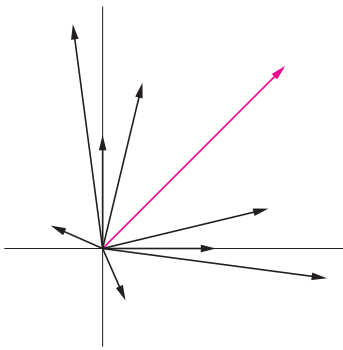
$$(1) \quad a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 = 0.$$

Ta minimalna zmiana daje właśnie to, o co chodzi. Teraz do dowolnego wektora $[p, q]$ jest prostopadły wektor $[q, p]$. Rysunek 1 pokazuje, co się stało: każda para strzałek jednakowej długości to wektory prostopadłe. Kąty proste nie są więc równe – są większe i mniejsze takie kąty. Ale najciekawsza jest strzałka kolorowa: ona jest prostopadła sama do siebie! Faktycznie proste sprawdzenie pokazuje, że każdy wektor $[p, p]$ jest prostopadły sam do siebie podobnie, jak i każdy wektor $[p, -p]$. Wektory (i proste) o takich kierunkach nazywają się *izotropowe*. Pojęcie to pozwala wyrazić (1) geometrycznie:

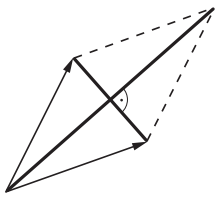
kąt jest prosty, gdy ma izotropową dwusieczną.

Mimo zaskoczenia okazuje się to zupełnie dobrym warunkiem, np. na płaszczyźnie proste, mające wspólną prostopadłą, są równoległe.

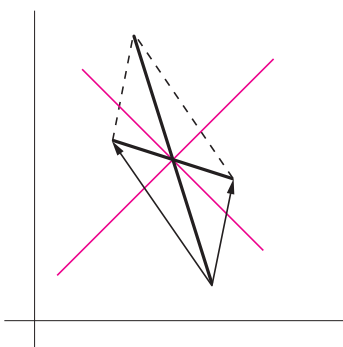
Każdy wie, jak za pomocą prostopadłości określić równość odcinków, szczególnie, gdy można je przesuwać: zsuwamy je, by miały wspólny koniec, potem robimy z nich równoległobok i sprawdzamy, czy jest rombem, czyli **czy ma prostopadłe przekątne**! Rysunek 2 pokazuje to w przypadku euklidesowym, a 3 w przypadku czasoprzestrzeni. Ten drugi przypadek wydaje się jakiś dziwny, więc naturalnie nasuwa się pytanie o to, jak wobec tego w czasoprzestrzeni wyglądają okręgi.



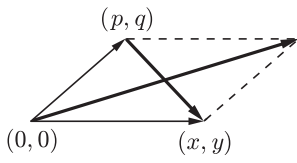
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



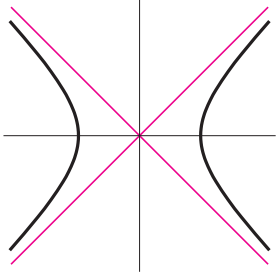
Rys. 4

Najprościej sięgnąć tu po współrzędne. Warunek prostokątności przekątnych, zgodnie ze wzorem (1) daje (w oznaczeniach z rysunku 4) warunek na prostokątność wektorów przekątnych

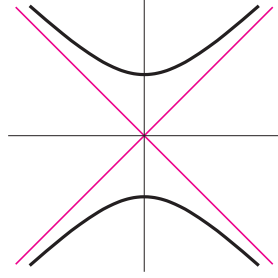
$$(x+p)(x-p) - (y+q)(y-q) = 0, \quad \text{czyli} \quad x^2 - y^2 = p^2 - q^2.$$

I to jest równanie okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ przechodzącego przez punkt o współrzędnych (p, q) .

Co to jest? Taką figurę nazywa się hiperbolą równoosiową i jest to obrócony o $\pm 45^\circ$ wykres odwrotnej proporcjonalności. Na rysunku 5 mamy przypadek, gdy $|p| > |q|$, na rysunku 6 – gdy $|p| < |q|$.



Rys. 5



Rys. 6

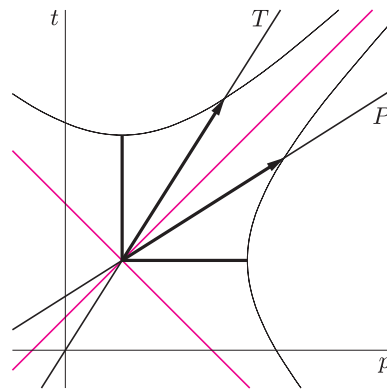
Okręgi okazują się dziurawe, bo każdy z łatwością wskaże proste przechodzące przez środek okręgu i okręgu nie przecinające. Warto zwrócić uwagę na inną geometryczną konsekwencję tej sytuacji. Gdy mamy odcinek odłożony od środka okręgu to z tego, czy przecięcie zawierającej go półprostej poprzedza jego drugi koniec, czy też jest odwrotnie możemy wnioskować o tym, czy jest od promienia dłuższy, czy krótszy. W świetle tego kryterium odcinki w czasoprzestrzeni mogą się nie dać porównać. Dokładniej: porównywać można odcinki, które wszystkie tworzą z tą samą osią układu współrzędnych kąty mniejsze od 45° . Zauważmy, że odcinki izotropowe nie należą do żadnej z tych grup – ich porównywać w ogóle nie można!

To samo analitycznie prezentuje się tak. W zwykłej geometrii równanie okręgu o środku $(0, 0)$ przechodzącego przez (p, q) to $x^2 + y^2 = p^2 + q^2$ i wtedy liczbę $\sqrt{p^2 + q^2}$ nazywamy długością wektora $[p, q]$. Konsekwentnie tutaj długością takiego wektora powinien być pierwiastek z $p^2 - q^2$, ale on dla jednej grupy wektorów da się wyciągnąć, dla drugiej trzeba by raczej wyciągać go z $q^2 - p^2$. Wektory izotropowe mają tę sprawę z głowy – długość każdego z nich jest zero.

Mamy więc pokusę, aby wektory jednej z grup traktować inaczej, niż te z drugiej grupy. I fizycy tak robią. Jedne wektory uznają za przyzwoite, drugim wymyślają od *tachionów*. Aby wyjaśnić tę obelgę, trzeba niestety odwołać się do fizycznej interpretacji opisanej geometrii.

Jeśli uznamy poziomą oś (w wyżej wymiarowej przestrzeni – osie), a pionową za czas, to wówczas każda z linii prostych o kierunku bliższym pionu, niż poziomemu oznaczać będzie (przy takim obiorze jednostek, by prędkość światła była równa 1) historię jakiegoś układu inercyjnego, tj. poruszającego się jednostajnie po prostej (w naszym przypadku ten drugi warunek jest oczywisty, ale są przecież czasoprzestrzenie o większej liczbie wymiarów). Linie bardziej poziome, niż pionowe, będą fizycznie bez sensu. W sposób naturalny uogólnia się to na krzywe, odmawiając prawa bytu tym, którym zdarza się mieć jako styczną „nielegalną” prostą. Te niedopuszczone krzywe to odpowiedniki nierzeczywistych przemieszczeń, odbywających się z prędkością większą od prędkości światła – *tachion* to w tłumaczeniu z greckiego *prędkościowiec*.

Wypada jednak przed zakończeniem zadać pytanie, po co było kwestionować IV postulat Euklidesa i narażać się na te wszystkie dziwności. Powód jest taki: chodzi o to, jak w naszym świecie opisywać świat poruszający się jednostajnie (i prostoliniowo) względem naszego. I tu przyjmuje się założenie, że czas pozostaje zawsze prostopadły do przestrzeni. Jeśli ktoś znajduje się w spoczynku w takim świecie, poruszającym się względem naszego w sposób opisany przez linię T , to z jego punktu widzenia wszelkie zmiany to upływ czasu. Jemu więc przestrzeń będzie jawiła się jako linia P . Badanie relacji między tymi odmiennymi postrzeganiem czasu i przestrzeni – naszym i jego, to właśnie problem, dla opisu którego powołana została geometria czasoprzestrzeni.



Małą Deltę opracował Marek KORDOS



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 VI 2005

Skrót regulaminu

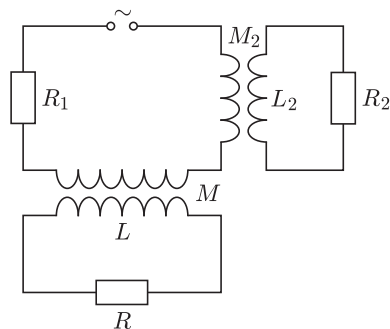
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z fizyki nr 400, 401

Redaguje Jerzy B. BROJAN

400. Dlaczego dźwięk słychać dalej w kierunku wiatru? (Oczywiście, prędkość wiatru jest mniejsza od prędkości dźwięku.)

401. Jak wiadomo, w Europie częstotliwość sieciowa wynosi 50 Hz, a w USA – 60 Hz. Aby zrozumieć powód, dla którego niekorzystny byłby wybór częstotliwości znacznie większej lub znacznie mniejszej, rozważmy następujący model (rys. 1). Odbiornik energii (opornik R) jest dołączony do źródła napięcia przemiennego przez transformator o indukcyjności uzwojenia wtórnego L i współczynniku indukcji wzajemnej między uzwojeniami M . Ponadto w obwodzie występuje opornik R_1 odpowiadający oporności przewodów i uzwojenia transformatora oraz drugi transformator opisany parametrami L_2 i M_2 , do którego dołączony jest opornik R_2 . Ten drugi obwód symbolizuje prądy wirowe wzbudzone w przewodnikach, które przypadkiem znajdują się w pobliżu kabli doprowadzających energię do właściwego odbiornika.



Rys. 1

- Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby stosunek strat energii (łącznej mocy traconej na opornikach R_1 i R_2) do mocy dostarczanej do opornika R osiągał minimum dla pewnej częstotliwości?
- Jeśli powyższy warunek jest spełniony, to jakim wzorem dana jest optymalna częstotliwość?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2005

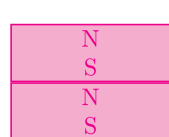
Przypominamy treść zadań:

392. Izolowany termicznie cylinder jest podzielony nieprzewodzącym ciepła tłokiem na dwie równe części zawierające jednakowe ilości tego samego gazu o temperaturze T_0 pod ciśnieniem p_0 (rys. 2). Do wnętrza doprowadzamy pewną ustaloną ilość ciepła Q (np. grzałką elektryczną). W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej: gdy całe ciepło dostarczymy do jednej części cylindra, czy gdy do każdej części dostarczymy połowę?

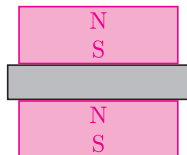
393. Jak wiadomo, silny magnes wrzucony do pionowej rury miedzianej lub aluminiowej spada dość powoli ze względu na efekty indukcyjne (prądy wirowe wzbudzone w rurze). Czy dwa takie magnesy połączone ze sobą jak na rysunku 3a spadają szybciej, czy wolniej niż pojedynczy magnes? A jak szybko – w porównaniu z tymi dwoma przypadkami – spadają te dwa magnesy rozdzielone lekką niemagnetyczną przekładką (rys. 3b)? Należy podać fizyczne uzasadnienie odpowiedzi.



Rys. 2



Rys. 3a



Rys. 3b

392. Oznaczmy objętości obu części cylindra po dostarczeniu ciepła przez V_1 i V_2 , ich temperatury przez T_1 i T_2 , ciśnienie (jednakowe) przez p , a liczbę moli w każdej z części przez n . Spełnione są równania

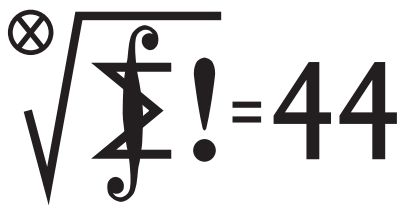
$$pV_1 = nRT_1, \quad pV_2 = nRT_2$$

Energia wewnętrzna gazu jest dana wzorem $U = nC_V T$, a przyrost całkowitej energii wewnętrznej w każdym z rozpatrywanych przypadków jest równy Q . Stąd

$$2nC_V T_0 + Q = nC_V (T_1 + T_2) = \frac{C_V}{R} p(V_1 + V_2) = \frac{2C_V}{R} pV_0$$

Równanie to obowiązuje dla dowolnego podziału Q , czyli wzrost ciśnienia nie zależy od tego podziału. (Dość podobne były przed wieloma laty zadania 198 i 257.)

393. Z doświadczeń przeprowadzonych przez autora wynika, że magnesy połączone „na styk” spadają wolniej, niż magnes pojedynczy, natomiast odsunięte od siebie – z prędkością pośrednią. Aby to wyjaśnić, zauważmy, że podwójny magnes wytwarza silniejsze pole, a stąd i silniejsze prądy wirowe, niż pojedynczy. Oddziaływanie *każdego* z magnesów składowych z tymi prądami będzie silniejsze, a zatem przy niezmięnionej prędkości spadania siła hamująca wzrosłaby więcej niż dwukrotnie w porównaniu z przypadkiem pojedynczego magnesu. Ponieważ ciężar magnesów wzrósł dwukrotnie, więc logicznym wnioskiem jest zmniejszenie prędkości spadania. Rozsunięte magnesy wytwarzają pole słabsze, niż zetknięte ze sobą, dlatego i efekt hamowania jest słabszy (ale silniejszy, niż dla pojedynczego magnesu).



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2005

Zadania z matematyki nr 503, 504

Redaguje Marcin E. KUCZMA

503. Wyznaczyć najmniejszą liczbę dodatnią a , dla której zachodzi implikacja: Jeżeli funkcja $f: \langle 0; 1 \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$ spełnia warunki $f(1) = 1$ oraz

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y) \quad \text{dla } x \in \langle 0; 1 \rangle, y \in \langle 0; 1-x \rangle,$$

to $f(x) \leq ax$ dla $x \in \langle 0; 1 \rangle$.

504. Gra: odgadywanie liczby. Przeciwnik wybiera liczbę ze zbioru $\{0, 1, \dots, 15\}$. Mamy prawo zadać 7 pytań, oczekując odpowiedzi *Tak* lub *Nie*. Przeciwnik na wszystkie pytania odpowiada; wolno mu przy tym skłamać, ale co najwyżej jeden raz. Podać taktykę gwarantującą prawidłowe rozpoznanie wybranej liczby.

Zadanie 504 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2005

Przypominamy treść zadań:

495. Wyznaczyć zbiór tych liczb wymiernych dodatnich, które można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$ dla pewnych liczb naturalnych a, b, c, d .

496. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie BIC w punktach I i D ; prosta BI przecina okrąg opisany na trójkącie CIA w punktach I i E ; prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie AIB w punktach I i F . Wyznaczyć największą możliwą wartość iloczynu $\frac{|AI|}{|AD|} \cdot \frac{|BI|}{|BE|} \cdot \frac{|CI|}{|CF|}$.

495. Wykażemy, że każda dodatnia liczba wymierna ma przedstawienie wymaganej postaci. Weźmy dowolną liczbę wymierną $x > 0$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $1 < x < 2$; tak więc $x = m/n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), $n < m < 2n$. W tym przypadku wystarczy przyjąć

$$a = c = m + n, \quad b = 2m - n, \quad d = 2n - m;$$

wówczas $a + b = 3m$, $ab = 2m^2 + mn - n^2$,

$$a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = 3m(3m^2 - 3mn + 3n^2),$$

podobnie wyrażamy $c^3 + d^3$ i otrzymujemy

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3} = \frac{3m(3m^2 - 3mn + 3n^2)}{3n(3n^2 - 3nm + 3m^2)} = x.$$

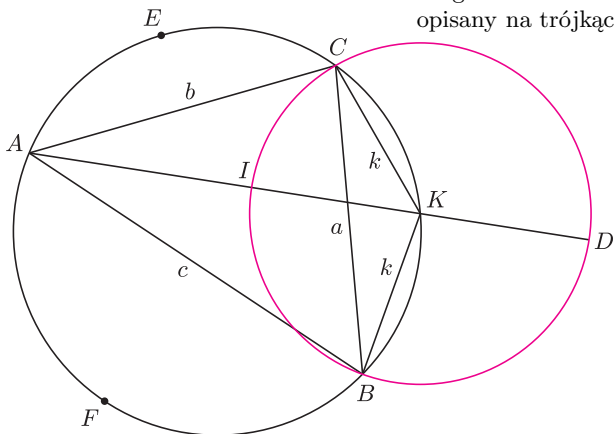
W przypadku ogólnym, gdy x jest dowolną liczbą wymierną dodatnią, znajdujemy liczbę wymierną $y = k/l$ taką, że $1 < xy^3 < 2$. W myśl konkluzji poprzedniego przypadku liczba xy^3 daje się zapisać jako ułamek

$$\frac{A^3 + B^3}{C^3 + D^3}; \quad A, B, C, D \in \mathbb{N}.$$

Stąd dostajemy żądane przedstawienie liczby x :

$$x = \frac{1}{y^3} \cdot \frac{A^3 + B^3}{C^3 + D^3} = \frac{(Al)^3 + (Bl)^3}{(Cl)^3 + (Dl)^3}.$$

496. Punkt K , w którym prosta AI przecina ponownie okrąg opisany na trójkącie ABC , jest środkiem łuku BC , więc cięciwy KB, KC mają równą długość k . Tę samą długość ma też odcinek KI (fakt znany lub łatwy do udowodnienia). Zatem okrąg opisany na trójkącie BIC ma środek w punkcie K , a odcinek ID jest jego średnicą.



Twierdzenie Ptolemeusza, zastosowane do czworokąta $ABKC$, daje równość $|AK| \cdot a = bk + ck$ (gdzie jak zwykle a, b, c to długości boków trójkąta ABC). Stąd

$$\frac{|AI|}{|AD|} = \frac{|AK| - |KI|}{|AK| + |KI|} = \frac{\frac{bk + ck}{a} - k}{\frac{bk + ck}{a} + k} = \frac{b + c - a}{b + c + a}$$

i z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną trójki liczb wynika, że

$$\frac{|AI|}{|AD|} \cdot \frac{|BI|}{|BE|} \cdot \frac{|CI|}{|CF|} = \frac{b + c - a}{b + c + a} \cdot \frac{c + a - b}{c + a + b} \cdot \frac{a + b - c}{a + b + c} \leq \frac{1}{27}.$$

Ponieważ dla trójkąta równobocznego zachodzi równość, szukane maksimum wynosi $1/27$.

Patrz w niebo

Od dość dawna wiemy już, że pulsary są szybko wirującymi gwiazdami neutronowymi z silnym polem magnetycznym i że powstają w wyniku zagłady bardzo masywnych gwiazd eksplodujących jako supernowe II typu. W naszej Galaktyce znamy znacznie ponad 1000 pulsarów i kilka z nich jest stowarzyszonych z mgławicami pozostałymi po wybuchu. Jednak do niedawna tylko o jednym pulsarze było wiadomo, że powstał w wyniku wybuchu zaobserwowanej supernowej. Był nim pulsar w Krabie, mgławicy powstałej – jak i sam pulsar – podczas eksplozji obserwowanej w roku 1054. Współczesna wiedza o tych gwałtownych zjawiskach pochodzi głównie z badań tego właśnie obiektu.

Od niedawna znamy już takie dwa obiekty. Grupa amerykańskich astronomów w roku 2001 ogłosiła, że odkryta za pomocą rentgenowskiego satelity Chandra mgławica G11.2-0.3 powstała w wyniku eksplozji zaobserwowanej przez chińskich astronomów w roku 386, co wynika z tempa jej ekspansji. Mgławica, odkryta w latach 1970., leży w Strzelcu w odległości 5 kpc, a w jej centrum znajduje się rentgenowski pulsar wirujący w tempie 14 obrotów na sekundę. Ten fakt – niestety – sugeruje, że coś jest nie w porządku. Bowiem pulsary, działając swoim polem magnetycznym na otoczenie, tracą stopniowo energię i zwalniają obroty. Skoro pulsar w Krabie, wirujący w tempie 33 obrotów na sekundę, ma prawie tysiąc lat, to pulsar w G11.2-0.3 powinien mieć znacznie więcej niż 1620 lat – niektórzy badacze skłonni są oceniać jego wiek na ponad 24 000 lat. Przez taki czas pulsar powinien opuścić centrum własnej mgławicy, gdyż podczas ruchu w Galaktyce doznaje ona znaczącego oporu ze strony rozproszonej materii międzygwiazdowej, natomiast sam pulsar praktycznie nie. Tymczasem pulsar leży dokładnie w centrum mgławicy, co dowodzi ich jednakowego i młodego wieku. Albo więc tempo rotacji pulsarów jest gorszym, niż się dotąd zdawało, miernikiem ich wieku, albo pulsar w G11.2-0.3 od urodzenia wirował wyjątkowo powoli. W każdym razie sprawa wymaga dalszych badań.

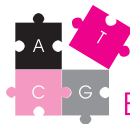
Tomasz KWAST

Czerwiec

W czerwcowe wieczory nisko nad południowym horyzontem widać niepozorny gwiazdozbiór Wagi. W Starożytności jego obszar należał do sąsiedniego obecnie Skorpiona. Pozostałością po tym są arabskie nazwy najjaśniejszych gwiazd Wagi, oznaczające Północny i Południowy Kleszcz Skorpiona. Wtedy też w Wadze znajdował się punkt równonocy jesiennej, który do dziś zdążył – wskutek precesji – przemieścić się do Panny. Przez niewielki teleskop można w Wadze zobaczyć właściwie tylko jeden niegwiazdowy obiekt: gromadę kulistą NGC 5897. Jej jasność wynosi 10,9 mag, a oddalona jest o ponad 16 kpc.

Wenus jest w Bliźniętach i wieczorem zachodzi. W trzeciej dekadzie miesiąca w Bliźniętach będzie też Merkury i 27 VI zajdzie żądka sytuacja, że ta planeta znajdzie się o drobny ułamek stopnia od Wenus. Dzięki Wenus być może da się Merkurego łatwo znaleźć na niebie – będzie to wprawdzie krótko po zachodzie Słońca, ale warto spróbować. Mars jest Rybach i wschodzi koło północy. Jowisz jest w Pannie i widać go w pierwszej połowie nocy, a Saturn na granicy Bliźniąt i Raka, przez co – podobnie jak Wenus – widać go krótko po zachodzie Słońca. Nów Księżycy wypada 6 VI, a pełnia 22 VI. Księżyc zakryje Jowisza 16 VI, ale zobaczą to mieszkańcy Indonezji i Australii, a 20 VI zakryje Antaresa, co będzie widoczne z południowej Europy, Bliskiego Wschodu i południowej Azji. 21 VI rozpocznie się lato, czyli Słońce wejdzie w znak Raka, a dni zaczną się już skracać.

T. K.



O ewolucji słów kilka

Jeśli obejrzymy jakikolwiek żywy twór natury, czy to będzie mrowisko, szpak, najprostsza bakteria, czy nawet pojedyncze białko, zauważymy, jak bardzo są to skomplikowane obiekty, zazwyczaj rozpoznamy funkcje które pełnią i zauważymy jak precyzyjnie do ich pełnienia są przystosowane.

Mechanizmem, który doprowadził do takich efektów jest ewolucja biologiczna.

Ewolucja to mechanizm, w którym działają dwa mechanizmy: w pierwszym generowana jest różnorodność rozwiązań podobnych do wejściowego, w drugim wybierane są te rozwiązania, które są lepsze. One stają się rozwiązaniami wyjściowymi i za razem wejściowymi dla kolejnego kroku ewolucji.

Mechanizm tworzenia zmienności, czyli pierwszy etap ewolucji wygląda tak: Struktura organizmów żywych zapisana jest w pewnej sekwencji symboli liniowo zapisanej w cząsteczce DNA (lub RNA). Zapis ten można porównać raczej do przepisu na ciasto czy programu komputerowego, niż do projektu będącego modelem gotowego obiektu. Zapis ten jest przekazywany potomkom, czyli dziedziczony. Ewolucję opartą o tego typu dziedziczną strukturę nazywamy procesem genetycznym. Jednak w zapisie genetycznym pojawiają się czasem przypadkowe zmiany czyli mutacje. Cóż z tego można by powiedzieć? Otóż przypadkowe błędy w przepisie na organizm, powodują powstanie przypadkowych zmian w strukturze organizmu.

Analogicznie moglibyśmy napisać słówko:

geny

i wygenerować serię błędnych wersji tego słowa:

grny, jeny, geby...

Jak widzimy, większość przypadkowych zmian powoduje, iż słówko staje się bezsensownym zbiorem liter, ale czasem pojawi się nowe znaczenie (jeny).

Zabawę można ciągnąć dalej:

jjwny, jedy, jony itd.

Podobnie jest z zapisem genetycznym. Zazwyczaj mutacje tylko psują coś, co wcześniej działało dobrze, ale czasem zdarza się, iż po mutacji struktura działa lepiej, albo wręcz inaczej.

I w tym momencie wkracza dobór. Jest to niesłychanie prosty, oczywisty mechanizm: zapis genetyczny może tworzyć obiekt który działa skuteczniej, mniej skutecznie, lub nie działa wcale. Pozostaje sobie odpowiedzieć na pytanie, co jest miarą skuteczności działania zapisu genetycznego? Otóż w procesie ewolucyjnym tą miarą jest efektywność tworzenia swoich kopii. Oczywiście gdy rozważamy sprawy cząstkowo, możemy wyróżnić poszczególne adaptacje: skrzydła

zoptymalizowane tak, aby ptak mógł skutecznie latać. Oczywiście zoptymalizowane tak, aby człowiek mógł obserwować świat. Czy choćby cząsteczka hemoglobiny zoptymalizowana do tego, żeby skutecznie przenosić tlen do konkretnych miejsc, w których jest on potrzebny [tu odnośnik do delty z hemoglobina]. Jednak wszystkie te cząstkowe cele optymalizacyjne, mają w ewolucji biologicznej wartość tylko o tyle, o ile składają się na cel nadrzędny, jakim jest powielenie informacji genetycznej. Dlaczego tak się dzieje? Wyobraźmy sobie organizm żywy wyposażony w najdoskonalsze skrzydła, pozwalające np. bardzo szybko latać. Dla technika czy inżyniera mogą one być niedoścignionym wzorem doskonałości, ale cóż z tego, jeśli nie przyczynią się do powielenia zapisu genetycznego, który jest przepisem na nie? A nie muszą! W takim wypadku okażą się jednorazowym wybrykiem natury!

Zwróćmy uwagę na fakt, że choć różne warianty genetycznych przepisów powstają w sposób zupełnie losowy, a w związku z tym w swej masie nie zawierają więcej informacji, niż biały szum widoczny na ekranie telewizora, który akurat nie odbiera żadnej stacji, to jednak w kolejnym etapie, dzięki selekcji czy doborowi naturalnemu, ewoluujący system odbiera informację o strukturze otaczającego świata. Dzieje się to pośrednio. Jedyną informacją, którą odbiera ewoluujący system jest fakt, czy dany organizm poradził sobie w świecie zewnętrznym i jak sobie poradził (to znaczy, czy przeżył i spłodził dzieci a w istocie: ile spłodził dzieci). Ta liczba spłodzonych potomków jest w istocie sumaryczną oceną jakości (współ)działania poszczególnych elementów powstałych dzięki współdziałaniu poszczególnych fragmentów zapisu genetycznego. Mogłoby się wydawać, że to bardzo niewielka porcja informacji, którą dodatkowo obdzielić należy wszystkie organy i wszystkie geny danego organizmu... ta skromna informacja zwrotna działa jednak przez dziesiątki, setki czy miliony pokoleń, na populacje złożone czasem z tysięcy, a czasem z miliardów osobników. Doświadczenie zebrane przez fakt, że pojedynczy osobnik rozmnożył się skutecznie a inny zmarł bezdzietnie, może być znikome, jednak suma takich znikomych doświadczeń osobników należących do danego pokolenia już może być już całkiem pokaźna, a suma doświadczeń kolejnych pokoleń okazuje się wykorzystywać skutecznie wiedzę o świecie zewnętrznym.

Tak więc ewolucja biologiczna to mechanizm przetwarzający informację o świecie zewnętrznym, wykorzystujący ją do tworzenia struktur dobrze radzących sobie z życiem i rozmnażaniem w tym świecie, mechanizm który pod wieloma względami działa podobnie jak komputer, co prawda bezmyślny i działający nie intencjonalnie, ale przetwarzający równoległe ogromną liczbę procesów, która jest na pewno większa niż 10^{20} .

Paweł Poręba

Współpraca: Anna LORENC, Jarek BRYK



Olimpiada

Zadania II stopnia oraz finału

Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

LVI OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2004/2005

ZAWODY II STOPNIA (25–26 lutego 2005)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których $n^n + 1$ oraz $(2n)^{2n} + 1$ są liczbami pierwszymi.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC . Wykazać, że jeżeli

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD,$$

to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

3. W przestrzeni danych jest n punktów ($n \geq 2$), z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Niektóre z tych punktów zostały połączone odcinkami. Niech K będzie liczbą poprowadzonych odcinków ($K \geq 1$), a T liczbą powstałych trójkątów. Udowodnić, że $9T^2 < 2K^3$.

4. Dany jest wielomian $W(x) = x^2 + ax + b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:

Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k , że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p .

Dowieść, że istnieje liczba całkowita m , dla której

$$W(m) = W(m+1) = 0.$$

5. Dany jest romb $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle BAD > 60^\circ.$$

Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD , przy czym

$$\sphericalangle ECF = \sphericalangle ABD.$$

Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że

$$\frac{PQ}{EF} = \frac{AB}{BD}.$$

6. Liczby a , b , c należą do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

ZAWODY III STOPNIA (13–14 kwietnia 2005)

1. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, n) liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie

$$(x - y)^n = xy.$$

2. Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na okręgu o . Punkt S leży wewnątrz okręgu o i spełnia warunki

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB \text{ oraz } \sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC.$$

Prosta zawierająca dwusieczną kąta ASB przecina okrąg o w punktach P i Q . Dowieść, że $PS = QS$.

3. W kwadratowej tablicy o wymiarach $2n \times 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, znajduje się $4n^2$ liczb rzeczywistych o sumie równej 0 (na każdym polu tablicy jedna liczba). Wartość bezwzględna każdej z tych liczb jest nie większa od 1. Dowieść, że wartość bezwzględna sumy wszystkich liczb z pewnego rzędu (poziomego lub pionowego) nie przekracza n .

4. Dana jest liczba rzeczywista $c > -2$. Dowieść, że jeżeli liczby x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) są dodatnie oraz

$$\sqrt{x_1^2 + cx_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 + cx_2x_3 + x_3^2} + \dots$$

$$\dots + \sqrt{x_n^2 + cx_nx_1 + x_1^2} = \sqrt{c+2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

to $c = 2$ lub $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

5. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech $m = 4k^2 - 5$. Wykazać, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b , że każdy wyraz ciągu (x_n) określonego wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ dla } n \geq 1$$

jest względnie pierwszy z liczbą m .

6. Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt wypukły o polu nie mniejszym niż $3/4$.

Informacje o przebiegu LVI Olimpiady Matematycznej

I. W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1231 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 506 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego 124 uczniów.

II. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 15 kwietnia br. postanowił przyznać 16 osobom tytuł laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 punktów możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

I miejsce: Michał PILIPCZUK (24 pkt.), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Joanna Jaszkańska, Waldemar Pałuba, Tomasz Żukowski, Karol Cwalina, Marcin Pilipczuk, Wojciech Czerwiński, Jakub Onufry Wojtaszczyk, Łukasz Bury, Maria Donten i Bartłomiej Romański).

II miejsce: Tomasz WARSZAWSKI (23 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca, Michał Kapustka, Grzegorz Kapustka, Jacek Dymel, Sławomir Dinew, Żygomir Dinew, Leszek Pieniążek i Witold Jarnicki).

Nagrody stopnia drugiego

Miejsca III–IV:

Piotr ACHINGER (19 pkt.), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Jerzy Konarski, Wojciech Boratyński, Edward Stachowski i Marcin Pilipczuk).

Nadbor DROZD (19 pkt.), kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciele: Cezary Urban i Augustyn Kałuża).

Miejsca V–VIII:

Krzysztof KAŚ (18 pkt.), kl. III, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska, Adam Neugebauer i Robert Kaś).

Tomasz KULCZYŃSKI (18 pkt.), kl. I, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Jolanta Jerzy, Henryk Pawłowski i Lev Kourliandtchik).

Wojciech ŚMIETANKA (18 pkt.), kl. I, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Filip WOLSKI (18 pkt.), kl. II, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Miejsca IX–XI:

Piotr BUTRYN (17 pkt.), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Michał Krych, Paweł Strzelecki, Tomasz Żukowski i Jerzy Bednarczuk).

Michał JASTRZĘBSKI (17 pkt.), kl. I, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Wiktor Bartol i Jerzy Bednarczuk).

Andrzej KAMIŃSKI (17 pkt.), kl. III I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie (nauczyciel: Paweł Rudecki).

Nagrody stopnia trzeciego

Miejsce XII:

Małgorzata BLADOSZEWSKA (15 pkt.), kl. I, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska i Adam Neugebauer).

Miejsca XIII–XVI:

Filip GROTKOWSKI (14 pkt.), kl. III, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (nauczyciel: Henryk Pawłowski).

Jakub KALLAS (14 pkt.), kl. I, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (nauczyciel: Wojciech Tomalczyk).

Michał MARCINKOWSKI (14 pkt.), kl. II, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (nauczyciele: Przemysław Szczepaniak, Augustyn Kałuża i Zbigniew Romanowicz).

Sylwester ZAJĄC (14 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

III. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 18 zawodników:

Miejsca XVII–XXXIV:

Marek ADAMCZYK (12 pkt.), kl. III, LO im. Bolesława Prusa w Żarach (nauczyciel: Jerzy Kacierzynski).

Krzysztof DOROBISZ (12 pkt.), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca, Lucyna Cięciwa, Bartosz Walczak i Michał Lasoń).

Łukasz GARNCAREK (12 pkt.), kl. II, II LO im. Marii Konopnickiej w Opolu (nauczyciele: Maria Romanowska i Zbigniew Garncarek).

Jarosław GŁOWACKI (12 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Szymon GWÓŹDŹ (12 pkt.), kl. III, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim (nauczyciel: Paweł Kwiatkowski).

Kamil HERBA (12 pkt.), kl. II, XIII LO w Szczecinie (nauczyciele: Beata Bogdańska i Adam Neugebauer).

Martyna JÓŹWIĄK (12 pkt.), kl. II, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Anna Karaszewska i Lev Kourliandtchik).

Karol KOSIŃSKI (12 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Stefan ŁAPICKI (12 pkt.), kl. III, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (nauczyciel: Augustyn Kałuża).

Maciej MACHULEC (12 pkt.), kl. I, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Lucyna Cięciwa, Michał Matuszczyk i Dorota Didik).

Piotr NAYAR (12 pkt.), kl. III, VIII LO im. Władysława IV w Warszawie (nauczyciele: Waldemar Pałuba i Emilia Psoda).

Hubert ORLIK-GRZESIK (12 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Patryk PAGACZ (12 pkt.), kl. III, ZSO nr 1 im. Mikołaja Kopernika w Jarosławiu (nauczyciel: Krzysztof Wilgucki).

Paweł PASTECZKA (12 pkt.), kl. II, II LO im. Emilii Plater w Sosnowcu (nauczyciele: Maria Bańska i Michał Matuszczyk).

Jan SZEJKO (12 pkt.), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Waldemar Pałuba i Tomasz Żukowski).

Łukasz WIATRĄK (12 pkt.), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: Ryszard Gruca).

Paweł ZABORSKI (12 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Ryszard Gruca i Alicja Dłużeń).

Paweł ZACZKOWSKI (12 pkt.), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Lucyna Cięciwa i Tomasz Szymczyk).

IV. W skład delegacji polskiej na XLVI Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbędzie się w Meksyku w dniach 9–18 lipca br., powołani zostali:

*Piotr Achinger,
Nadbor Drozd,
Tomasz Kulczyński,
Michał Pilipczuk,
Wojciech Śmietanka
i Tomasz Warszawski.*

Jako zawodników rezerwowych powołano
*Filipa Wolskiego
i Michała Jastrzębskiego.*

V. Na XXVIII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się w dniach 27 czerwca – 6 lipca br. w Austrii, powołano delegację w składzie:

*Małgorzata Bladoszewska,
Piotr Butryn,
Krzysztof Dorobisz,
Kamil Herba,
Andrzej Kamiński
i Paweł Zaczkowski.*

Zawodnicy rezerwowi:

*Jan Szejko,
Łukasz Wiatrak,
Martyna Józwiak
i Paweł Pasteczka.*

VI. Powołano też delegację na XVI Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich, które odbędą się w Szwecji na początku listopada br. Skład tej delegacji jest następujący:

*Michał Jastrzębski,
Jakub Kallas,
Maciej Machulec
Michał Marcinkowski
i Filip Wolski.*

Zawodnicy rezerwowi:

*Jan Szejko,
Martyna Józwiak,
Łukasz Wiatrak
i Paweł Pasteczka.*

VII. Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbędzie się w dniach 5–19 czerwca br. w Domu Wczasowym *Zgoda* w Zwardoniu. Na obóz ten zostały powołane następujące osoby:

<i>Piotr Achinger, Małgorzata Bladoszewska, Piotr Butryn, Szymon Doroz, Szymon Giżeczki, Michał Jastrzębski, Martyna Józwiak, Jakub Kallas, Tomasz Kulczyński, Maciej Machulec,</i>	<i>Michał Marcinkowski, Przemysław Mazur, Paweł Pasteczka, Natalia Sakowska, Jan Szejko, Tomasz Szumny, Wojciech Śmietanka, Tomasz Warszawski, Łukasz Wiatrak i Paweł Zaczkowski.</i>
---	---

Zawodnicy rezerwowi:

*Aleksander Jurkowski,
Filip Wieczorek,
Michał Frankiewicz
i Urszula Swianiewicz.*

LIV OLIMPIADA FIZYCZNA 2004/2005

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej: <http://www.kgof.edu.pl>

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Pocisk w kształcie stożka o polu podstawy S i kącie rozwarcia 2α porusza się z prędkością v wzdłuż swojej osi (w stronę wierzchołka) w bardzo rozrzedzonym jednoatomowym gazie. Temperatura gazu jest na tyle niska, a prędkość v na tyle duża, że można przyjąć, że atomy gazu są nieruchome. Gęstość gazu jest równa ρ .

Zakładając, że atomy gazu zderzają się z powierzchnią pocisku doskonale sprężyste i nie zderzają się ze sobą, obliczyć siłę oporu, jaka działa na pocisk. Powierzchnia pocisku jest idealnie gładka. Podaj wartość liczbową dla $\rho = 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, $v = 7 \text{ km/s}$, $\alpha = 45^\circ$, $S = 0,01 \text{ m}^2$.

2. Wąska wiązka fullerenów – cząsteczek węgla C_{60} w kształcie piłki futbolowej – pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną o stałej sieci $d = 100 \text{ nm}$ (siatką dyfrakcyjną jest płytka z azotku krzemu z wyciętymi równoległymi wąskimi szczelinami). Za siatką znajdują się detektory zliczające cząsteczki docierające do poszczególnych punktów płaszczyzny („ekranu”) znajdującej się w dużej odległości od siatki i równoległej do niej. Wskazania detektorów służą do wyznaczenia powstałego obrazu interferencyjnego.

a) Przyjmując, że rozkład prędkości cząsteczek (v) w wiązce jest rozkładem jednorodnym w zakresie $v \in [v_0 - \Delta v, v_0 + \Delta v]$, wyznacz kąt ugięcia wiązki α_n odpowiadający położeniu środka prążka interferencyjnego n -tego rzędu oraz kąt $\Delta\alpha_n$ odpowiadający szerokości tego prążka (prążek jest obszarem, do którego dolatują cząsteczki). Podaj wartości liczbowe dla $n = 1$, $v_0 = 117 \text{ m/s}$, $\Delta v = 0,17v_0$. Rozważ tylko te prążki, dla których $\sin \alpha_n \approx \alpha_n$.

b) Jaki jest dopuszczalny rozrzut Δv prędkości cząsteczek w wiązce (przy ustalonym v_0), aby prążek n -tego rzędu był dobrze rozróżnialny, tzn. aby po obu jego stronach były miejsca, do których nie docierają cząsteczki?

Zakładamy, że każda z cząsteczek ma dokładnie określony pęd.

Masa atomu węgla jest równa $2,0 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

3. Rozważmy gumowy balonik, który po nadmuchaniu powietrzem ma kształt kuli.

a) Gdy promień balonika wynosił $r_1 = 0,1 \text{ m}$, to wewnątrz panowało ciśnienie $p_1 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Jakie ciśnienie panuje wewnątrz balonika, po nadmuchaniu go tak, by miał promień $r_2 = (3/2)r_1$? W obu przypadkach temperatura powietrza wewnątrz balonika jest równa temperaturze otoczenia i wynosi $T_0 = 300 \text{ K}$. Ciśnienie powietrza otaczającego balonik jest równe $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

b) Balonik o promieniu r_2 (czyli po nadmuchaniu zgodnie z pkt. a)) zanurzono powoli w wodzie na taką głębokość, by jego promień zmalał do $r_3 = r_1$. Ile wynosi ta głębokość? Jakie są temperatura i ciśnienie wewnątrz balonika po zanurzeniu? Zakładamy, że powłoka balonika nie przepuszcza ciepła. Początkowa temperatura wewnątrz balonika była równa T_0 . Balonik przed zanurzeniem znajdował się tuż nad powierzchnią wody.

c) Jaką pracę wykonano w trakcie zanurzania zgodnie z pkt. b)?

Energia sprężysta gumy, z której jest wykonany balonik, jest równa $E_s = (1/2)\alpha S^2$, gdzie α jest pewną stałą, a S – powierzchnią balonika. Balonik jest na tyle mały, że również po zanurzeniu w wodzie ma kształt kuli. Przyjmij, że powietrze zachowuje się jak gaz doskonały o molowym cieple właściwym przy stałej objętości $c_V = (5/2)R$, gdzie R jest uniwersalną stałą gazową. Guma, z której jest wykonany balonik, ma zaniedbywalną masę oraz zaniedbywalną pojemność cieplną. Zaniedbaj również gęstość powietrza w porównaniu z gęstością wody $d_w = 1000 \text{ kg/m}^3$. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:

- cienki drut z niemagnetycznego metalu,
- silny magnes stały,
- ciężarek o masie $m = (100,0 \pm 0,5) \text{ g}$,
- statyw, pręty stalowe, uchwyty,
- linijkę,
- generator napięcia sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości,
- przewody elektryczne z zaciskami,
- papier milimetrowy.

Wyznacz gęstość liniową (masę na jednostkę długości) drutu. Przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Wskazówka. Prędkość V fal poprzecznych w strunie o gęstości liniowej μ napiętej siłą F wyraża się wzorem $V = \sqrt{F/\mu}$.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Statek kosmiczny Obcych zbliża się do Ziemi wzdłuż jej osi obrotu ze stałą prędkością v (porównywalną z prędkością światła c) od strony Bieguna Północnego.

a) Gdy radar statku pokazuje, że Biegun Północny znajduje się w odległości d_r od statku, Obcy robią Ziemi zdjęcie. Jaki zakres szerokości geograficznych Ziemi obejmuje to zdjęcie?

b) Na innym zdjęciu wykonanym przez Obcych widać obszar Ziemi o szerokościach geograficznych północnych od 30° do 90° . Jaką odległość (mierzoną w wielokrotnościach promienia Ziemi R) wskazywał radar statku w chwili zrobienia tego zdjęcia, jeśli zbliżał się on z prędkością $0,8c$? Jaka była w układzie statku odległość statku Obcych od Bieguna Północnego

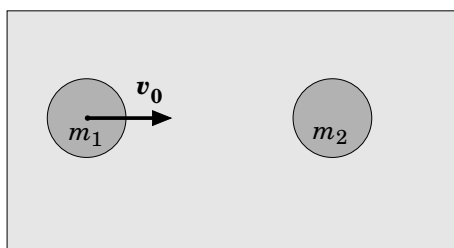
w chwili zrobienia zdjęcia? Jakie byłyby te odległości, gdyby zamiast zbliżać się, statek oddalał się od Bieguna Północnego z prędkością $0,8c$?

Statek jest mały w porównaniu z Ziemią i odległością d_r . Aparat ma wystarczająco szeroki „kął widzenia”.

Radar mierzy odstęp czasu pomiędzy wysłaniem a odebraniem sygnału odbitego. W momencie odebrania sygnału radar podaje odległość równą połowie tego czasu pomnożonej przez prędkość światła.

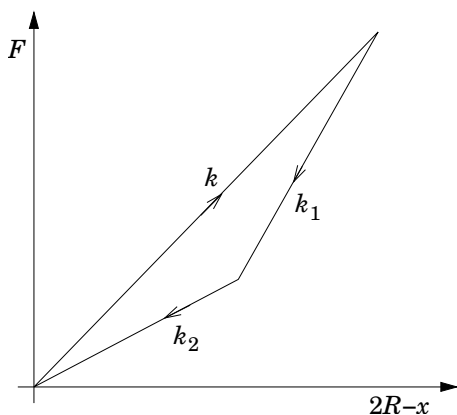
Zrobienie zdjęcia polega na otwarciu na bardzo krótką chwilę migawki aparatu i naświetleniu błony fotograficznej.

2. Dwa krążki o jednakowych promieniach R i jednakowych grubościach, lecz różnych masach m_1 i m_2 mogą się ślizgać bez tarcia po poziomej płaszczyźnie. Ich osie są pionowe. Nastąpiło centralne zderzenie krążków. Przed zderzeniem pierwszy krążek poruszał się ruchem postępowym (bez obrotu) z prędkością v_0 w kierunku spoczywającego drugiego krążka (patrz rys. 1).



Rys. 1

Ugięcie każdego krążka podczas zderzenia było znacznie mniejsze od R . Siła $\vec{F}(x)$, z jaką odpychają się krążki podczas zderzenia, jest funkcją odległości x między ich środkami i działa wzdłuż prostej łączącej te środki. Siła ta zależy od tego, czy środki krążków zbliżają się, czy oddalają. Podczas zbliżania się krążków $F(x) = k \cdot (2R - x)$. Natomiast podczas oddalania się krążków wykres zależności $F(x)$ składa się z dwóch odcinków o nachyleniu k_1 i k_2 (zobacz rys. 2), przy czym $k_1 > k > k_2$.



Rys. 2

v

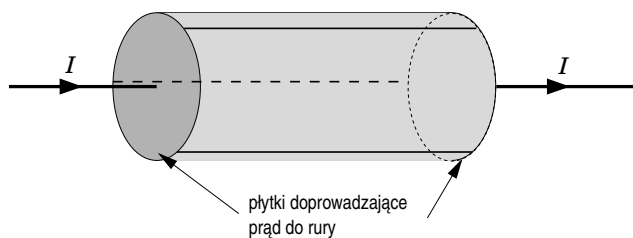
W wyniku zderzenia pierwszy krążek zatrzymał się.

Oblicz iloraz m_1/m_2 mas krążków.

Jaką prędkość uzyskał drugi krążek w wyniku zderzenia? Podaj wartości liczbowe tych wielkości dla

$$v_0 = 5 \text{ m/s}, \quad k_1/k = 2, \quad k_2/k = 0,5.$$

3. Metalową, cienkościenną rurę (boczną powierzchnię walca), o promieniu r i długości l przecięto wzdłuż tworzących na trzy identyczne części. Części tych od siebie nie oddalono. Do końców układu (podstaw walca) przytknięto płytki (krążki) z idealnego przewodnika. Do pierwszej z nich jest doprowadzany, a z drugiej – odprowadzany wzdłuż osi układu długimi przewodami prąd o natężeniu I (rys. 3).



Rys. 3

Wyznacz siłę elektrodynamyczną, jaka działa na każdą z części rury.

Podaj liczbową wartość tej siły dla

$$l = 1 \text{ m}, \quad r = 1 \text{ cm}, \quad I = 100 \text{ A}$$

oraz dla

$$l = 1 \text{ cm}, \quad r = 1 \text{ m}, \quad I = 100 \text{ A}.$$

Przenikalność magnetyczna próżni $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$.

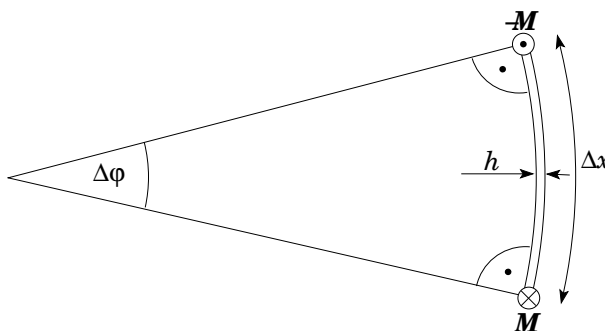
Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:

- kartkę papieru formatu A4 o gęstości powierzchniowej 80 g/m^2 ,
 - papier milimetryowy,
 - linijkę,
 - dwie książki,
- wyznacz moduł Younga papieru, z którego wykonana jest kartka.

Wskazówka. Działanie na końce elementu belki o długości Δx przeciwnie skierowanych momentów sił o wartości M (rys. 4) powoduje zgięcie tego elementu o kąt $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = \frac{12M}{Ebh^2} \Delta x,$$

gdzie E — moduł Younga, h — grubość belki, b — szerokość belki.



Rys. 4

Laureaci LIV Olimpiady Fizycznej 2004/2005

1. Czajka Sieciech, nauczyciel: mgr Andrzej Majerowski, klasa III, V Liceum Ogólnokształcące im. ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie.
2. Grzybowski Marcin Jan, nauczyciel: mgr Stanisław Szymonik, klasa III, Liceum Ogólnokształcące im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli.
3. Kąs Krzysztof Robert, nauczyciel: mgr Tomasz Skowron, klasa III, XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie.
4. Niemkiewicz Krzysztof Zbigniew, nauczyciel: mgr Marek Golka, klasa II, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Radomiu.
5. Maczyński Kornel Maksymilian, nauczyciel: mgr Ewa Gajda, klasa II, V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej.
6. Pecelerowicz Michał Waław, nauczyciel: mgr Robert Stasiak, klasa III, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.
7. Smoleński Tomasz Marek, nauczyciel: mgr Marek Golka, klasa I, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Radomiu.
8. Sobczyk Marcin Piotr, nauczyciel: dr Jerzy Mucha, klasa II, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

9. Chrapkiewicz Radosław Tomasz, nauczyciel: mgr Ewa Gajda, klasa II, V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej.
10. Purski Jakub Krzysztof, nauczyciel: mgr Anna Dobek, klasa III, Liceum Ogólnokształcące im. Marii Curie-Skłodowskiej w Rawie Mazowieckiej.
11. Drozd Nadbor Długosz, nauczyciel: mgr Janusz Skiba, klasa III, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.
12. Jasiński Daniel, nauczyciel: mgr Ewa Kulas, klasa III, I Liceum Ogólnokształcące im. Wojciecha Kętrzyńskiego w Giżycku.
13. Podkowa Bartosz Mateusz, nauczyciel: dr Marek Sowa, klasa III, Prywatne Liceum Ogólnokształcące im. Królowej Jadwigi w Lublinie.
14. Barmuta Paweł, nauczyciel: mgr Wilhelmina Czerniawska, klasa III, III Liceum Ogólnokształcące im. Krzysztofa Kamila Baczyńskiego w Białymstoku.
15. Żukiewicz Filip Remigiusz, nauczyciel: mgr Krystyna Jagielska, klasa III, Społeczne Liceum Ogólnokształcące STO w Szczecinku.
16. Grad Michał, nauczyciel: mgr Józef Greupner, klasa III, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach.

XLVIII OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2004/2005

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (druga seria)

1. Zderzająca się z Księżycem planetoida może spowodować znaczne zniszczenia. Warto zorientować się, jakie musi mieć rozmiary ciało, by jego zderzenie z Księżycem było znaczące. Aby tego dokonać:

a) zaproponuj orbitę planetoidy przyjmując, że jest ona ciałem Układu Słonecznego, dla której szybkość zderzenia z Księżycem będzie stosunkowo wysoka oraz orbitę, dla której prędkość będzie możliwie mała. W obu przypadkach oszacuj te prędkości.

b) Jakie rozmiary musi mieć ciało zderzające się z Księżycem z określonymi w punkcie a) prędkościami, by energia zderzenia odpowiadała wybuchowi bardzo wielkiej (gigatona TNT) bomby jądrowej.

Przyjmij gęstość ciała jako równą 2000 kg/m^3 . Energia wydzielana przy wybuchu 1 kg TNT wynosi około $4 \cdot 10^6 \text{ J}$.

2. Zaobserwowano, że gwiazda zmienna pulsująca δ Cephei osiągnęła maksimum swojej jasności w następujących datach i momentach (podanych w czasie uniwersalnym):

2004	kwiecień	18	godzina 01.52
2004	maj	4	godzina 04.14
2004	maj	14	godzina 21.49

Ponadto stwierdzono, że gwiazda w nocy 12/13 maja oraz 17/18 maja była blisko minimum swojej jasności. W trakcie całego okresu obserwacji jasność gwiazdy zmieniała się w granicach 3,48–4,37 mag.

Na podstawie tych danych wyznacz przybliżony okres zmian jasności tej cefeidy, a następnie korzystając z zależności (odkrytej przez H. Leavitt) pomiędzy okresem cefeidy i jej jasnością absolutną, oblicz odległość tej gwiazdy.

3. Księżyc Saturna, Phoebe – jeden z celów badań misji Cassini-Huygens – obiega macierzystą planetę po wydłużonej orbicie o mimośrodku $e = 0,164$ w średniej odległości $a = 13 \cdot 10^6 \text{ km}$. W punkcie swojej orbity położonym najdalej od planety na niebie oglądanym z Saturna miałby jasność ok. $6^m 8$ w „pełni”. Czy będąc w najmniejszej odległości od planety byłby w „pełni” widoczny gołym okiem?

Zakładamy, że Saturn obiega Słońce po okręgu o promieniu $a = 1427 \cdot 10^6 \text{ km}$.

4. Opisz zjawiska w układzie Ziemia – Księżyc w sytuacji, gdy orbita Księżyca leżałaby dokładnie w płaszczyźnie ekliptyki. Orbits Ziemi i Księżyca traktuj jako okręgi o promieniach równych ich obecnym średnim odległościom odpowiednio od Słońca i Ziemi.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. W dniu 31 XII 2004 po przebyciu 187 km w czasie 15 dni Marek Kamiński, Janek Mela oraz Wojciech Ostrowski stanęli na południowym biegunie Ziemi. Przyjmując, że ich droga przebiegała południkowo, opisz ruch Słońca na sferze niebieskiej podczas wędrówki Polarników.

Deklinacja Słońca δ w grudniu 2004 r. wynosiła:

dzień	16	17	18	19
δ	$-23^{\circ}19'$	$-23^{\circ}22'$	$-23^{\circ}24'$	$-23^{\circ}25'$

dzień	20	21	22	23
δ	$-23^{\circ}26'$	$-23^{\circ}26'$	$-23^{\circ}26'$	$-23^{\circ}26'$

dzień	24	25	26	27
δ	$-23^{\circ}25'$	$-23^{\circ}24'$	$-23^{\circ}22'$	$-23^{\circ}19'$

dzień	28	29	30	31
δ	$-23^{\circ}17'$	$-23^{\circ}13'$	$-23^{\circ}10'$	$-23^{\circ}05'$

2. Ciała Obłoku Oorta uchodzą za pierwotną materię Układu Słonecznego. Jednak zmiana temperatury ciał Obłoku może bardzo zmienić własności ich powierzchni. Oszacuj, jaki wpływ na temperaturę powierzchni składnika Obłoku Oorta może mieć:

- gwiazda o jasności absolutnej $M_g = -5$ wielkości gwiazdowej, przechodząca w pobliżu Słońca w odległości około $d_g = 1$ ps;
- wybuch gwiazdy supernowej znajdującej się w odległości $d_s = 1$ kps, o jasności absolutnej $M_s = -18$ wielkości gwiazdowej.

O ile stopni wzrośnie temperatura powierzchni ciała z Obłoku Oorta w obu przypadkach?

Przyjmij następujące założenia:

- ciało z Obłoku Oorta znajduje się na wokółsłonecznej orbicie kołowej o promieniu $R_o = 2000$ AU;
- ciało z Obłoku Oorta ma własności ciała doskonale czarnego;

- jasność absolutna Słońca wynosi 4,75 wielkości gwiazdowej, a stała słoneczna (w odległości 1 AU) wynosi 1372 W/m².

Przedyskutuj, jaki wpływ na rzeczywistą temperaturę będzie miał okres obrotu ciała wokół własnej osi.

3. Rozpatrzmy takie zaćmienie Słońca, które zaczyna się dokładnie w momencie, gdy linia łącząca środki tarcz Słońca i Księżycy jest prostopadła do ekliptyki, czyli drogi Słońca na sferze.

Jakie to będzie zaćmienie? Oceń, jak długo ono trwa z punktu widzenia obserwatora geocentrycznego, w sytuacji, gdy Ziemia jest w średniej odległości od Słońca, a Księżyc w średniej odległości od Ziemi.

Uwaga: całe zjawisko zachodzi na niewielkim obszarze sfery niebieskiej i można je rozpatrywać tak, jakby przebiegało na płaszczyźnie, a wprowadzenie obserwatora geocentrycznego dopuszcza pominięcie wpływu obrotu Ziemi na czas zjawiska.

4. „Sfera oddziaływania” jest obszarem wokół planety, w którym ruch ciała o małej masie lepiej jest opisywać jako ruch keplerowski względem planety i perturbowany przez gwiazdę niż odwrotnie. W dowolnym kierunku od planety tworzącym kąt φ z kierunkiem ku gwiazdzie odległość granicy sfery oddziaływania od planety wynosi

$$r = R \sqrt{\frac{\mu^2}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}}},$$

gdzie R jest odległością planety od gwiazdy, μ – stosunkiem masy planety do masy gwiazdy.

Zbadaj, czy realnie mógłby istnieć układ: gwiazda o masie M , obiegająca ją planeta o masie m i satelita planety o pomijalnej masie, taki by kołowa keplerowska orbita satelity w całości leżała w sferze oddziaływania planety, a okres obiegu satelity wokół planety równałby się okresowi obiegu planety wokół gwiazdy.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Stacja kosmiczna porusza się po kołowej orbicie na wysokości 300 km nad powierzchnią Ziemi. Podczas spaceru w otwartej przestrzeni nastąpiło nieprzewidziane wydarzenie, po którym astronauta oddzielił się od stacji i zaczął poruszać się względem niej z prędkością początkową $\Delta v = 5$ m/s prostopadłe do wektora Δv_o prędkości orbitalnej stacji.

Przedyskutuj, jakie są szanse uratowania astronauty. Jakie znaczenie ma założenie o prostopadłości wektora Δv do orbity.

Przyjmij, że dostępne aparaty odrzutowe mogą rozpędzić astronautę jedynie do prędkości 3 m/s.

2. W dniu 19 września 1903 roku Tadeusz Banachiewicz (1882–1954) zaobserwował bardzo rzadkie zjawisko zakrycia gwiazdy BD -6°6191 przez Jowisza.

Oszacuj, jak często (średnio) w danym miejscu na Ziemi można zaobserwować zakrycie przez Jowisza gwiazdy jaśniejszej niż 7 wielkość gwiazdowa. Przyjmij, że na całej sferze niebieskiej jest widocznych n gwiazd jaśniejszych od 7 wielkości gwiazdowej ($n = 8240$).

3. Jedna z gwiazd pewnej gromady ruchomej jest oddalona od apeksu gromady o $\vartheta = 42^{\circ}$, ma prędkość radialną $v_r = 12$ km/s i roczny ruch własny $\mu = 0,09$. Określ odległość do tej gwiazdy i wartość jej wektora prędkości.

Wskazówki: wektory prędkości gwiazd gromady ruchomej są równoległe do kierunku apeksu tej gromady.

4. W wysokiej temperaturze, w stanie równowagi termodynamicznej cząstki powstają i giną tak, by ich ilość N na jednostkę objętości była stała. W niezbyt wysokich temperaturach, w których cząstki można traktować nierelatywistycznie, liczba ta jest opisana rozkładem Maxwella-Boltzmann'a $N = A(m c^2)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m c^2}{k_B T}}$, gdzie m jest masą cząstki, k_B stałą Boltzmann'a, T – temperaturą, natomiast A – pewną stałą o znanej wartości.

W trakcie ewolucji Wszechświata liczba protonów i neutronów była kształtowana w reakcji $n \leftrightarrow p + e + \nu + E$, podczas której neutrony przechodzą w protony i na odwrót. W powyższej reakcji oznaczają

odpowiednio neutron, proton, elektron, neutrino i energię wydzielającą się przy rozpadzie neutronu.

Równowaga termodynamiczna w odniesieniu do liczby neutronów i protonów utrzymuje się tak długo, jak długo energia kinetyczna cząstek umożliwia przechodzenie protonów w neutrony.

Zakładając, że elektronów i neutronów w mieszaninie nie brakuje, oraz że wszystkie neutrony istniejące w momencie, gdy równowaga termodynamiczna zostanie naruszona, zostaną związane w jądra helu, oszacuj stosunek ilości wodoru do helu we Wszechświecie.

Dane: Dla ułatwienia obliczeń wszystkie potrzebne dane przeliczono do jednolitych jednostek, tj. zarówno masa, jak i energia została podana w megaelektronowoltach ($1 \text{ eV} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

masa protonu – 938,256 MeV,

masa neutronu – 939,550 MeV,

masa elektronu – 0,511 MeV,

stała Boltzmanna – $8,6 \cdot 10^{-11} \text{ MeV} \cdot \text{K}^{-1}$.

Uwagi:

1. Aby obliczyć potrzebne gęstości cząstek, trzeba znaleźć temperaturę, w której ustaje reakcja powstawania neutronów, a tym samym kończy się równowaga termodynamiczna. Dla celów oszacowania przyjmij, że reakcja praktycznie ustaje, gdy energia, potrzebna do zajścia reakcji, jest równa $k_B T$, a więc $2/3$ średniej energii kinetycznej cząsteczek. Przyjmij również, że energię związaną z neutrinem można pominąć.

2. Wynik otrzymany przy powyższych założeniach jest oczywiście oszacowaniem, bo pominięto wiele istotnych procesów i zjawisk. Między innymi fakt, że reakcja nie ustaje dokładnie, gdy średnia energia kinetyczna cząstek spadła poniżej $2/3$ energii reakcji. Również powstawanie jąder helu nie jest procesem natychmiastowym oraz nie wszystkie neutrony znalazły się w cząstkach α . Pewna liczba neutronów rozpadła się, zanim zostały związane w jądro helu. Mimo to oszacowanie jest zupełnie niezłe, choć nie należy zapominać, że jest to tylko oszacowanie od góry, w rzeczywistości helu powinno być mniej.

5. Aparatura planetarium odtworzy wygląd nieba widoczny z pewnego miejsca w Układzie Słonecznym. Określ możliwie dokładnie obserwowaną sytuację, datę oraz usytuowanie hipotetycznego obserwatora. (Odtworzono zaćmienie Słońca przez Ziemię z 17 października 2005 r. z pozycji obserwatora na Księżycu).

6. Na podstawie dat opozycji, kształtów, rozmiarów i położenia pętli zakreślanych na niebie przez Marsa w pobliżu opozycji (mapki znajdują się na stronie www.planetarium.chorzow.net.pl) oraz odległości Ziemia–Mars oszacuj wartości elementów orbity marsjańskiej przy założeniu, że orbita Ziemi jest okręgiem o promieniu 149,6 mln km.

Daty opozycji Marsa, odległość Marsa od Ziemi [mln km], długość i szer. ekliptyczna[°]:

L.p.	opozycja	odl.	dł.	szer.
1	25.02.1980	101,2	156,1	4,37
2	31.03.1982	95,3	190,8	2,99
3	11.05.1984	80,4	231,2	-0,12
4	10.07.1986	60,6	287,9	-5,51
5	28.09.1988	59,1	5,4	-4,57
6	27.11.1990	78,2	65,8	1,42
7	07.01.1993	93,8	108,1	4,01
8	12.02.1995	100,9	142,8	4,54
9	17.03.1997	98,7	176,9	3,69
10	24.04.1999	87,2	214,4	1,37
11	13.06.2001	68,1	262,9	-3,23
12	28.08.2003	55,5	335,2	-6,64
13	07.11.2005	70,3	45,0	-0,48
14	24.12.2007	88,6	92,8	3,32
15	29.01.2010	99,2	130,0	4,52
16	03.03.2012	100,7	163,8	4,18
17	08.04.2014	92,8	199,0	2,49
18	22.05.2016	76,2	241,7	-1,14
19	27.07.2018	57,5	303,9	-6,47

Końcowa klasyfikacja

Laureaci

I miejsce (ex aequo):

Radosław CHRAPKIEWICZ, V LO w Bielsku-Białej, naucz. mgr Ewa Gajda

Szymon JĘDRZEJEWSKI, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu, naucz. mgr Marek Golka

II miejsce: Piotr CZARNIK, II LO im. płk Leopolda Lisa-Kuli w Rzeszowie, naucz. mgr Jerzy Mackiewicz

III miejsce: Marcin GRONOWSKI, II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Grudziądzu, naucz. mgr Tatiana Napieralska-Dąbrowska

IV miejsce: Karol WĘDOŁOWSKI, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku, naucz. mgr Mariusz Sobczak

Finaliści

V miejsce: Daniel HANS, L LO im. Ruy Barbosa w Warszawie, naucz. Aleksandra Miłoś

VI miejsce: Jacek RONDIO, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi, naucz. Andrzej Sperka

VII miejsce: Radosław KONIECZNY, V LO im. Adama Asnyka w Szczecinie, naucz. mgr Janusz Jura

VIII miejsce: Krzysztof GAWRYLUK, II LO im. Hetmana Jan Zamoyskiego w Lublinie, naucz. mgr Elżbieta Wójtowicz

IX miejsce: Michał JANUSZEWSKI, VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach, naucz. mgr Bogusław Lanuszny

X miejsce: Anna SZARLA, VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach, naucz. mgr Józef Grupner

XI miejsce: Krystyna MACIOSZEK, V LO im. Krzysztofa Kiesłowskiego w Zielonej Górze, naucz. mgr Urszula Kobus

XII miejsce: Rafał SZEPINETOWSKI, III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni, naucz. mgr Ewa Skrzypczak

oraz

Kamil KONERA, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim, naucz. mgr Antonina Szemberg

Łukasz MEJŁUN, LO im. K. K. Baczyńskiego we Włocławku, naucz. mgr Zbigniew Wawrzonkoski

Karolina SOŁTYS, I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie, naucz. mgr Kamil Kamiński

Paweł ŻUK, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, naucz. mgr Marian Bąk