Dnia 5 marca 2005 roku
zmarł
Stanisław Balcerzyk
matematyk, algebraik
Autor *Delty*

SPIS TREŚCI
NUMERU 5 (372)

W następnym numerze:

Trojaczki Einsteina

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delty", ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: (22) 55-44-545.

Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. (22) 663-87-52, (22) 663-11-46)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące**. Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

   Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH" SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

http://www.mimuw.edu.pl/delta

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Wiosną 2004 roku na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego odbył się cykl imprez pod wspólnym tytułem ***Konfrontacje Matematyczne***. Były to cztery pary wykładów. Każda para wykładów miała wspólny temat, przy czym jeden z wykładających był matematykiem, a drugi – przedstawicielem całkowicie odmiennej dyscypliny. Numer jest sprawozdaniem z tych konfrontacji archeologa, prawnika, historyka sztuki i filologa z matematykami.

Krótkie rozmowy między sumerologiem a matematykiem

Marek STĘPIEŃ,
Jerzy TYSZKIEWICZ

W roli sumerologa *Marek Stępień*, w roli matematyka *Jerzy Tyszkiewicz*.

(Awers)
1. 59 gu2 mangaga
2. ki *ur*-{*d*}*li9-si4*-na
3. ensi2 umma{ki}
4. *u-bar-um*
5. szu ba-an-ti
6. sza3 i-szim-{d}szul-gi{ki}-ra

(Rewers – niewidoczny na zdjęciu)
1. ugula *nu-i-da*
2. giri3 *ur*-{*d*}*nin-gubalag* sukkal

(pusta linia)
3. iti ezem me-ki-gal2-la
4. mu en {d}nanna ba-hun

AKT PIERWSZY

Sumerolog: Zobacz, co ze sobą przyniosłem. To gliniana tabliczka zapisana znakami klinowymi w języku sumeryjskim przed 4 tysiącami lat.

Matematyk: Śliczna! A co na niej jest napisane?

S: To pokwitowanie na 59 talentów (gu2) liści palmowych (mangaga), które Ur-Lisi, gubernator (ensi2) miasta Umma, przekazał człowiekowi o imieniu Ubarum. Zapewne ensi sam tym towarem się nie zajmował, a tylko formalnie jest wymieniony na tabliczce jako główny zarządca majątku państwowego na tym terenie. Był on również odpowiedzialny za wysłanie poza prowincję liści zebranych z gajów państwowych. Ur-Ningubalag, posłaniec (sukkal), miał je przetransportować do miejscowości Iszim-Szulgi, gdzie głównym zwierzchnikiem pracowników (ugula) był Nuida. Transliterację tekstu masz obok, a tłumaczenie właśnie poznałeś.

To wszystko działo się w państwie III Dynastii z Ur, która rządziła Mezopotamią w XXI wieku przed naszą erą. Dokładnie, było to w XI miesiącu 9. roku panowania króla Amar-Suena (data to ostatnie dwie linijki).

Marek Stępień, Instytut Historyczny Uniwersytetu Warszawskiego

Jerzy Tyszkiewicz, Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

M: I co się potem stało z tą masą liści? Kiedyś mi mówiłeś, że talent to około 30 kilogramów, więc ten transport to było ponad 1,7 tony.

S: Nie wiadomo. Nie znaleziono dotąd żadnej tabliczki, na której można by o tym przeczytać. Zapewne wykorzystano ten materiał przy jakichś budowach.

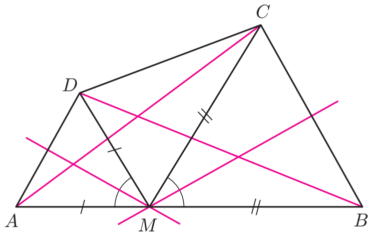
M: A zdarza się, że można prześledzić losy jakiegoś towaru lub człowieka na kilku tabliczkach?

S: Tak, znanych jest wiele takich przykładów. Popatrz na tę parę dokumentów:

	(Awers)	
1) 47 geme2 usz-bar	47 tkaczek	1) 47 geme2 usz-bar
2) en-du8-du-ta	z Endudu	2) gi zi ga6-ga2
3) e2-masz-sze3	do Emasz	3) en-du8-du-ta
4) gi-zi ga6	trzcinę nosiło	4) e2-masz-sze3
5) gurum2 ak u4 8-kam	kontrola 8. dnia	5) ugula *i3-kal-la*
	(Rewers)	
1) ugula *i3-kal-la*	nadzorca Ikalla	1) IGI-NIG2 ak u4 22-kam
giri3 *ad-da*	pośrednik Adda	2) giri3 *ad-da*
2) iti ezem {d}szul-gi	miesiąc X	3) iti ezem {d}szul-gi
8) mu {*d*}*i-bi2*-{*d*}*suen*	rok Ibi-Suen	4) mu {*d*}*i-bi2*-{*d*}*suen*
lugal	królem	lugal

W prawym tekście pojawia się 22. dzień zamiast 8., a kolejność informacji jest lekko zmieniona.

Rozwiązanie zadania M 1096.
Z równości $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ wynika, że $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$, a więc również $\sphericalangle AMC = \sphericalangle DMB$.

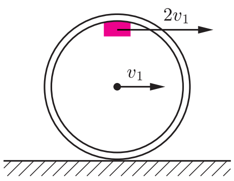


Ponadto $AM = DM$ oraz $BM = CM$. Stąd wynika, że trójkąty AMC i DMB są przystające, a zatem $AC = BD$.

Rozwiązanie zadania F 643.
W momencie, gdy klocek znajduje się w najniższej pozycji, całkowita energia układu składa się tylko z energii kinetycznej ruchu obrotowego i postępowego rurki:

$$E = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{v_0^2}{R^2} = Mv_0^2,$$

a w położeniu najwyższym dochodzi energia kinetyczna i potencjalna klocka (rysunek).



$$E = Mv_1^2 + \frac{m(2v_1)^2}{2} + 2mgR = \\ = Mv_1^2 + 2mv_1^2 + 2mgR.$$

Warunek, aby układ toczył się, a nie „bujał”, to $v_1^2 > 0$, a warunek nieoderwania się klocka w najwyższym położeniu to

$$m\frac{v_1^2}{R} > mg,$$

czyli $v_1^2 > gR$. Drugi warunek jest silniejszy od pierwszego, więc zajmiemy się tylko nim. Z zasady zachowania energii otrzymujemy

$$v_1^2 = \frac{Mv_0^2 - 2mgR}{M + 2m},$$

a po podstawieniu do warunku

$$v_0 > \sqrt{gR\left(1 + \frac{4m}{M}\right)}.$$

W rzeczywistości podobnych tabliczek jest 8, tkaczek raz jest o kilka więcej, a raz o kilka mniej. Wygląda, że nosiły tę trzcinę z Endudu do Emasz codziennie przez prawie cały X miesiąc owego roku.

M: Fantastyczne. Czy warto byłoby szukać dalszych takich grup tekstów?

S: Oczywiście, ale ostrzegam, że to strasznie pracochłonne zajęcie.

AKT DRUGI

M: Cześć, Marku! Mówiłeś, że warto szukać par powiązanych ze sobą dokumentów. Zabrałem się za to i mam chyba pewne efekty. Czy chciałbyś rzucić na nie okiem, żeby mi powiedzieć, co naprawdę znalazłem i jaką to ma wartość?

S: Pokaż, co tam masz! Rzeczywiście! To dokumenty wypłat dla tkaczek pracujących w zakładzie tekstylnym. Płaca była „w naturze”, tutaj jest mowa o przydziałach zboża – jednostką jest `sila3`, taki sumeryjski litr.

`1) 18 geme2 50 sze lugal-ta`	18 pracownic po 50 sila	`1) 18 geme2 50 sze lugal`
`2) 134 geme2 30-ta`	134 pracownice po 30 sila	`2) 134 geme2 30-ta lugal`
`3) 5 geme2 a2 1/2 30-ta`	5 pracownic na pół etatu po 30 sila	`3) 5 geme2 a2 1/2 30-ta`
`4) 4 geme2 szu-gi4 20-ta`	4 stare pracownice po 20 sila	`4) 4 geme2 szu-gi4 20-ta`
`5) 19 dumu 20-ta`	19 dzieci po 20 sila	`5) 19 dumu 20-ta`
`6) 25 dumu 15 sila3-ta`	25 dzieci po 15 sila	`6) 25 dumu 15 sila3-ta`
`7) 41 dumu 10-ta`	różnica! po lewej 41, po prawej 43 dzieci po 10 sila	`7) 43 dumu 10-ta`
`8) 1 gurusz szu-gi4 50`	1 stary pracownik po 50 sila	`8) 1 gurusz szu-gi4 i3-du8 50`
`9) sze-bi 6365 sila3 gur`	podsumowania `sze-bi` różnią się o wypłatę dla 2 dzieci po 10 sila	`9) sze-bi 6385 sila3 gur`

`10) iti 1-kam iti 3-sze3`
`11) szu+nigin2 19095 sila3 gur`
`12) sze-ba geme2 usz-bar`
`13) ugula` *ur-{d}da-mu*
`14) iti ezem {d}ba-u2-ta`
`15) iti amar-a-a-si-sze3`
`16) mu sza-asz-ru-um{ki} ba-hul`
	Wprowadzono podsumowanie znakiem `szu+nigin2` po lewej, bo ten dokument obejmuje miesiące od VIII do X roku, w którym Szaszrum zostało zniszczone, a prawy tylko jeden, XI miesiąc tego roku, więc dodatkowego podsumowania nie ma. Nadzorca tej pracy to Ur-Damu, ten sam w obu dokumentach.	`10) sze-ba geme2 usz-bar`
		`11) ugula` *ur-{d}da-mu*
		`12) iti sze-KIN-ku5`
		`13) mu sza-asz-ru-um{ki} ba-hul`

Wygląda, że w dokumentach zachował się ślad po narodzinach dwojga dzieci. To, że są wymienione na liście płac, nie znaczy, że same naprawdę tkały, a raczej, że ich matki dostawały na nie zasiłek socjalny (4 tysiące lat temu!) wypłacany przez pracodawcę. Podobnie było zapewne ze starymi pracownikami wspomnianymi w tekście. To byli w rzeczywistości emeryci.

M: A czy to ważne odkrycie?

S: W każdym razie – ciekawe. Na pewno trzeba będzie zmienić pogląd na datowanie obu tabliczek. Spójrz na ich sygnatury: lewa to BM 17970=ZT 2017=ASJ (AS6/m08), a prawa BM 20461=SAT 1:276 (S42/m11). Czyli pierwsza jest datowana na 6. rok panowania Amar-Suena (AS6), a druga na 42. rok panowania jego ojca Szulgiego (S42). Obydwaj w tych latach niszczyli miasto Szaszrum i umieścili ten czyn w datach rocznych tabliczek (ostatnie linie obu tekstów). Widać z porównania tabliczek, że jeden z tłumaczy miał rację, a drugi się mylił co do wyboru roku.

Zestawienie tych tabliczek potwierdza regularność comiesięcznych wypłat dla pracownic tkalni państwowych oraz dla osób objętych opieką społeczną. To istotne ustalenia.

Ale jak wpadłeś na to, żeby je porównać? Dla mnie jedynym łącznikiem jest imię Ur-Damu, popularne w owych czasach. Nosiło je wielu ludzi, z których zresztą żaden nie zrobił jakiejś oszałamiającej kariery.

M: Spójrz na sekwencje liczb na tabliczkach. To one je zdradziły. Są prawie identyczne (jedyna różnica to 41 / 43) aż do miejsca, gdzie zaczynają się podsumowania. Moi studenci napisali program, który z tekstów tabliczek zebranych w bazie danych (sam zresztą uczestniczyłeś w jej tworzeniu) wydobył

Rozwiązanie zadania F 644.
W sytuacji, gdy pierścienie są w równowadze, siła odśrodkowa (w układzie nieinercjalnym związanym z prętem) musi równoważyć siłę sprężystości:

$$\omega^2(l+\Delta l) = \frac{k\cdot\Delta l}{m},$$

gdzie Δl to wydłużenie pojedynczej sprężyny, a stąd

$$\Delta l = \frac{m\omega^2 l}{k-m\omega^2}.$$

Widzimy, że położenie równowagi będzie istnieć tylko wtedy, gdy $k > m\omega^2$, w przeciwnym przypadku po rozpędzeniu układu pierścienie będą oddalać się, aż zależność siły od wydłużenia sprężyn przestanie być liniowa bądź sprężyny zerwą się.

Moment bezwładności wynosi

$$2m(l+\Delta l)^2 = \frac{2mk^2l^2}{(k-m\omega^2)^2},$$

a energia kinetyczna to

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2k^2l^2}{(k-m\omega^2)^2}$$

i jest większa niż energia kinetyczna w przypadku, gdy pierścienie są sztywno zamocowane.

tylko sekwencje liczb, a następnie specjalnie zaadaptowany algorytm, zaczerpnięty z dziedziny biologii obliczeniowej, porównywał te ciągi z różnych tabliczek, oceniając ich podobieństwo na podstawie długości dopasowanych fragmentów i częstości występowania dopasowanych liczb. Te dwie okazały się bardzo podobne pod tym względem. Mam setki albo i tysiące innych par, które również zasługują na sprawdzenie.

S: Czy możesz to dokładniej wyjaśnić?

M: Hmmm, będę musiał mówić językiem dość matematycznym, ale spróbujmy.

W moim eksperymencie miarą podobieństwa dwóch dokumentów jest suma nagród i kar za następujące operacje: wymiany, usunięcia i wstawienia, niezbędne do zamiany ciągu liczb z jednego dokumentu w ciąg liczb z tego drugiego. Nagrody i kary ustalamy na podstawie tego, jak często poszczególne liczby występują wśród wszystkich znanych nam tekstów. Im liczba jest rzadsza, tym większa nagroda za to, że, mówiąc obrazowo, pasuje do siebie w obu dokumentach.

Bardziej formalnie, w celu porównania dwie sekwencje liczb mogą być ze sobą *uliniowione*, co polega na wstawieniu do nich spacji (czyli wolnych miejsc, oznaczanych poniżej kreskami), by osiągnęły identyczną długość, napisaniu ich pod sobą i policzeniu kar i nagród. Najlepiej rozważyć to na przykładzie poprzednich dokumentów. W uliniowieniu

18	50	134	5	4	19	25	15	41	1	50	6365	19095
18	50	134	5	4	19	25	15	43	1	50	6385	–

mamy 9 nagród za zgodność liczb, jedną karę wewnątrz ciągu za niezgodność 41 i 43, oraz jedną niezgodność i jedna spację na końcach sekwencji. Tych ostatnich nigdy się nie liczy, więc wychodzi w sumie 9 nagród i 1 kara. Nagrody są różne: za zgodność dwóch liczb 134 jest większa niż za zgodność dwóch jedynek, bo te drugie są nieporównanie częstsze i mniej z ich dopasowania wynika. Z pewnych przyczyn matematycznych kara za dopasowanie liczb to – wybacz mi słowa, które tu padną – minus logarytm przy podstawie 2 z względnej częstości występowania konkretnej liczby w całym zbiorze dostępnych dokumentów. Kara za niezgodność też jest wyliczana stosowną formułą matematyczną, ale nie zależy od tego, jakie konkretnie liczby do siebie nie pasują. Niestety, nie ma jeszcze teorii matematycznej, która pozwalałaby wyprowadzić wzór na karę za spację, więc jest ona dobierana przez nas eksperymentalnie i też nie zależy od tego, jaka liczba stoi naprzeciwko. *Wartość* uliniowienia to suma kar i nagród dla wszystkich miejsc.

S: A po co te spacje, skoro są z nimi kłopoty?

M: Użyłbym ich, gdyby np. kilka liczb z jednego tekstu było uszkodzonych i przez to nieczytelnych, albo w większym tekście gdzieś w trakcie wyliczenia pojawiło się podsumowanie cząstkowe, a w tym drugim, podobnym, nie byłoby go.

S: Czy z tego wynika, że żeby się twoją metodą posłużyć, będę musiał powtórzyć logarytmy ze szkoły?

M: Nie, choć nie wiem, co ci się w logarytmach nie podoba. Prawda jest taka, że napisałem program komputerowy, który wyszukuje najlepsze uliniowienia, czyli te, które mają największą wartość – zauważ, że mogąc wstawiać spacje, te same dwa ciągi liczb można uliniowić ze sobą na ogromną liczbę sposobów i wcale niełatwo jest odszukać ten najlepszy. W moim przykładzie uliniowienie jest optymalne, co nietrudno zauważyć. Do jego znalezienia wykorzystałem algorytm Smitha–Watermana, który jest używany przez genetyków molekularnych do porównywania chemicznych sekwencji białek w różnych organizmach. [Był omówiony w *Delcie* 10/2002.] Mój program po prostu odpowiada na pytanie, jak podobne są dwa dokumenty i już. A potem kazałem mu sprawdzać dokumenty z naszej bazy danych każdy z każdym i wypisywać te pary, które uznał za wystarczająco podobne. Obliczenia trwały trochę ponad tydzień ciągłej pracy procesora. Teraz przyniosłem ci pierwsze 1800 par do przejrzenia. Oczywiście, będę miał ich więcej.

S: Jeśli jest tak, jak mówisz, będę miał co robić.

M: Ja też, bo mojej metodzie daleko do doskonałości. Zauważ, że nie sposób nią wychwycić podobieństwa dokumentów o tkaczkach noszących trzcinę, bo liczb na nich za mało, a w dodatku mówiłeś, że nie są one zawsze identyczne. Z kolei ta ogromna ilość liści palmowych na dalszych dokumentach pojawiała się zapewne już podzielona na mniejsze porcje. Tematów do przyszłych rozmów na pewno nam nie zabraknie.

KURTYNA

Paradoksy dedukcji

Wiktor BARTOL

Paradoks – *twierdzenie niezgodne z powszechnie przyjętym mniemaniem, rozumowanie, którego elementy są pozornie oczywiste, ale wskutek zawartego w nim błędu logicznego lub nieostrości wyrażeń prowadzące do wniosków sprzecznych ze sobą lub z uprzednio przyjętymi założeniami.*

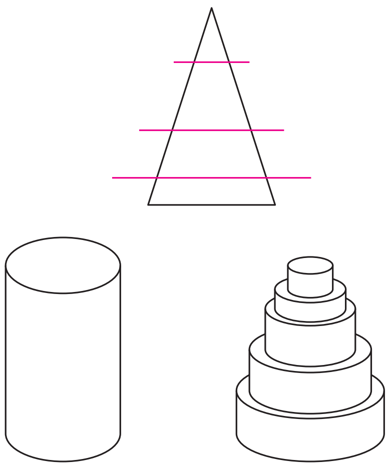
Encyklopedia Multimedialna PWN

Definicja paradoksu obejmuje różne sytuacje, powody i postacie paradoksów. Wobec tej różnorodności form spróbujmy dokonać klasyfikacji.

Paradoks w sensie potocznym – twierdzenie niezgodne z powszechnie przyjętym mniemaniem. Matematyka zna wiele twierdzeń, nazywanych paradoksami dlatego, że choć uzyskane *lege artis*, stoją w sprzeczności z potoczną intuicją. To, na przykład, twierdzenie Banacha–Tarskiego orzekające o możliwości rozkładu kuli na skończenie wiele części, z których można złożyć dwie przystające do niej kule, lub paradoks Skolema–Löwenheima o istnieniu przeliczalnego modelu teorii mnogości, teorii, która swoją siłę zawdzięcza temu, że dopuszcza istnienie zbiorów nieprzeliczalnych.

Ten przypadek paradoksu nie jest dla nas interesujący, gdyż świadczy o intuicjach raczej niż o samej matematyce. Zajmiemy się natomiast innymi postaciami paradoksów, o których niżej.

Aporia – trudność myślowa, wynikająca z nieumiejętności rozstrzygnięcia wartości argumentów za i przeciw pewnej tezie. Najbardziej znane aporie pochodzą sprzed około 2500 lat, z okresu, gdy m.in. w środowisku eleatów rozwijały się początki rozumowania dedukcyjnego. Paradoksy Zenona z Elei, służące do uzasadnienia tezy o niezmienności i niepodzielności bytu, są powszechnie znane, przyjrzyjmy się więc podobnemu rozumowaniu Demokryta (przełom V i IV wieku p.n.e). Wyobraźmy sobie stożek, który przecinamy płaszczyznami równoległymi do podstawy. Czy pola przekrojów są jednakowe dla każdej płaszczyzny, czy różne dla różnych płaszczyzn? Jeśli jednakowe, to stożek jest w istocie walcem. Jeśli różne, to stożek musi być bryłą podobną do piętrowego tortu (rysunek). Nie ma zatem dobrej odpowiedzi.



Paradoks Demokryta jest bardzo bliski znanemu paradoksowi strzały Zenona z Elei. Chodzi tu o strukturę przestrzeni: jeśli odcinek (wysokość stożka) składa się z pojedynczych punktów, otrzymać musimy tort; jeśli jest nierozkładalną całością, otrzymujemy walec. Rozwiązanie przynosi dopiero nowożytne pojęcie przestrzeni, łączące oba te aspekty. Odcinek jest istotnie zbiorem punktów, jednak tzw. naturalny porządek tworzy z niego pewną całość, strukturę ciągłą bez luk i skoków, co tłumaczy ciągłą, a nie skokową zmianę pola przekroju stożka. Takie wyjaśnienie nie było jednak dostępne w czasach Demokryta i Zenona. Trudność wynikła z niedostatku dostępnego aparatu pojęciowego.

Czytelnika zainteresowanego tematem ciągłości gorąco zachęcam do sięgnięcia po książkę pt. *Ciągłość. Szkice z historii matematyki* Jerzego Mioduszewskiego, WSiP 1996.

Przeskoczmy około 2400 lat, lądując na przełomie XIX i XX wieku. Teoria mnogości przekracza właśnie wiek niemowlęcy i wchodzi w dzieciństwo, legitymując się następującą definicją zbioru, wprowadzoną przez jej twórcę, niemieckiego matematyka Georga Cantora: „Zbiór to dowolna, traktowana jako całość mnogość M różnych dobrze określonych obiektów naszej intuicji lub umysłu, zwanych elementami M”.

Rozważmy zatem za Bertrandem Russellem, angielskim filozofem i logikiem, zbiór U określony następująco: $U = \{X : \ X \notin X\}$. Czy $U \in U$? Przedstawione na marginesie rozumowanie wykazuje, że $U \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U \notin U$.

Jeśli $U \notin U$, to U spełnia warunek przynależności do U, więc $U \in U$. Jeśli $U \in U$, to U nie spełnia warunku przynależności do U, a więc $U \notin U$.

Paradoks Russella wynika z nader ogólnej definicji zbioru, dopuszczającej tworzenie zbioru takiego jak U (który bez trudu ogarniamy umysłem jako całość). Wśród różnych odpowiedzi na ten niepożądany w matematyce paradoks przeważyła koncepcja oparcia teorii zbiorów na mocnych fundamentach aksjomatycznych, stanowiących pośrednio precyzyjną definicję zbioru, m.in. wykluczających możliwość tworzenia zbioru „wszystkich elementów” spełniających dany warunek. Taki zbiór można zbudować tylko z elementów zbioru już istniejącego. Źródłem paradoksu okazała się nieostrość definicji.

Antynomia – sprzeczność, wynikająca z rozumowania uznanego za poprawne i przesłanek uznanych za prawdziwe. Poszukując antynomii, cofnijmy się

Wiktor Bartol, Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

ponownie do czasów greckich. Eubulidesowi (IV wiek p.n.e.) przypisuje się wygłoszenie następującego zdania: „To, co teraz mówię, jest kłamstwem." To paradoks kłamcy, który w dzisiejszym języku moglibyśmy zapisać jako zdanie Z: *Zdanie Z jest fałszywe.* Zdanie Z jest oczywiście prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest fałszywe.

Jeśli zdanie Z jest prawdziwe, to prawdą jest to, co orzeka, a więc Z jest fałszywe. Jeśli natomiast Z jest fałszywe, to nie jest prawdą to, co głosi, a zatem nie jest fałszywe – jest więc prawdziwe.

Rozumowanie przedstawione na marginesie wydaje się sugerować, że problem bierze się ze zbyt małej liczby wartości logicznych: zdanie niefałszywe uznajemy od razu za prawdziwe. Pomyślmy zatem o logice, w której prawda i fałsz nie są jedynymi wartościami logicznymi i zastanówmy się nad zdaniem Z_1 o treści następującej: *Zdanie Z_1 nie jest prawdziwe.* Ponownie otrzymujemy paradoksalną sprzeczność: zdanie Z_1 jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdziwe.

Jeśli zdanie Z_1 jest prawdziwe, to prawdą jest, że nie jest prawdziwe – a więc nie jest prawdziwe. Jeśli natomiast zdanie Z_1 nie jest prawdziwe, to orzeka prawdę, jest zatem prawdziwe.

Mamy sytuację bardzo niepokojącą: poprawne rozumowanie prowadzi do paradoksalnego wniosku, mimo wprowadzenia nowych wartości logicznych.

Paradoks kłamcy bywa niekiedy przypisywany temu, że mamy do czynienia ze zdaniem, które orzeka samo o sobie. Obok widać jednak dwa zdania, z których żadne nie mówi samo o sobie, ale razem tworzą całość równie paradoksalną jak paradoks kłamcy. Czytelnik może sprawdzić, że można utworzyć zestaw trzech, czterech lub większej liczby zdań, które razem dadzą podobny efekt. Należałoby więc odrzucić możliwość powracania do pierwszego zdania, nawet jeśli po drodze przechodzimy przez kilka innych?

Z_1: Zdanie Z_2 jest fałszywe.

Z_2: Zdanie Z_1 jest prawdziwe.

Popatrzmy na następny przykład. Dla każdego $n \in N$ niech zdanie Z_n stwierdza co następuje: *Dla każdego $k > n$, zdanie Z_k jest fałszywe.* Jeśli zdanie Z_n jest prawdziwe (dla pewnego n), to wszystkie zdania Z_k, gdy $k > n$, są fałszywe, w szczególności zdanie Z_{n+1}. Jednocześnie zdanie Z_{n+1} jest też prawdziwe, bo wszystkie zdania Z_k, gdy $k > n+1$, są fałszywe – sprzeczność. Wniosek: wszystkie zdania Z_k muszą być fałszywe. Ale wtedy każde z nich jest prawdziwe i w rezultacie jednocześnie prawdziwe i fałszywe!

Z_1: Dla każdego $k > 1$, Z_k jest fałszywe.

Z_2: Dla każdego $k > 2$, Z_k jest fałszywe.

...

Z_n: Dla każdego $k > n$, Z_k jest fałszywe.

...

Budowanie zdań – jeśli nie ma prowadzić do paradoksów – musi zatem być poddane pewnym rygorom, podobnie jak budowanie zbiorów. Przede wszystkim, należy jasno rozróżniać poziomy języka. Jeśli zdanie Z należy do jakiegoś języka (np. języka opisu pewnej rzeczywistości), to zdanie mówiące o zdaniu Z powinno być na poziomie wyższym niż poziom samego zdania Z. Przy takim wymogu zdanie mówiące samo o sobie zostałoby wykluczone jako niezgodne z regułami. Co więcej, hierarchia poziomów nie może dopuszczać cykliczności, to znaczy jeśli poziom k jest niższy niż poziom l, to poziom l nie może być niższy niż k. W ten sposób eliminujemy cykle zdań, takie jak zdania Z_1 i Z_2 na marginesie. Wreszcie, hierarchia poziomów musi być dobrze ugruntowana: schodząc na coraz niższy poziom, po skończonej liczbie kroków musimy trafić na poziom, z którego już niżej nie ma dokąd pójść. Pozbywamy się wtedy sytuacji takich, jak w nieskończonym ciągu zdań powyżej.

Jak widać, aporie i antynomie niekiedy skłaniały do istotnych zmian w konstrukcji teorii, niekiedy inspirowały ważne wyniki (dowód twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki jest rozwiniętą trawestacją paradoksu kłamcy). Tak jak gorączka wskazuje na potrzebę interwencji lekarskiej, tak paradoksy wskazują na luki w konstrukcji teorii i na potrzebę interwencji jej twórców.

Pozostawiliśmy na boku jeszcze jeden rodzaj paradoksów: to te, które powstają w wyniku błędu logicznego. Ciekawe są zwłaszcza te zamierzone.

Sofizmat – rozumowanie często świadomie błędne, mające na celu oszukanie słuchacza lub czytelnika. Przykład? Udowodnimy, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe jest zdanie: $(\forall m \in N)(m \leqslant n \Rightarrow m = n)$.

Dowód indukcyjny: Gdy $n = 1$ i $m \leqslant n$, to $m = 1 = n$, gdyż 1 jest najmniejszą liczbą naturalną. Załóżmy, że dla pewnej liczby naturalnej n zdanie jest prawdziwe i niech $m \leqslant n+1$. Wtedy $m - 1 \leqslant n$ i z założenia indukcyjnego $m - 1 = n$. Stąd już mamy równość $m = n + 1$.

Czytelnik łatwo sam wywnioskuje z tego twierdzenia, iż $e = \pi$.

Osobliwości rozumowań prawniczych

Piotr WINCZOREK

Mowa tu będzie nie tyle o rozumowaniach, jakie charakterystyczne są dla badań nad prawem, jego historią, tworzeniem i recepcją w ludzkiej świadomości oraz nad społecznym funkcjonowaniem uregulowań normatywnych, ile o tych, które towarzyszą aktom ich stosowania. W tym celu należy przede wszystkim wyjaśnić znaczenie terminu „stosowanie prawa". By to uczynić, niezbędne jest wprzódy ustalenie, w jakim z możliwych rozumień pojawia się tu słowo „prawo".

Dla współczesnego, nastawionego praktycznie prawnika jest raczej oczywiste, że przez prawo rozumieć należy zespół reguł postępowania odnoszących się do tzw. zachowań zewnętrznych człowieka i innych podmiotów (np. tworów organizacyjnych), o których się sądzi, że mogą korzystać z jakichś uprawnień lub posiadać jakieś obowiązki. Zachowania zewnętrzne zaś to takie, po których pozostaje ślad w rzeczywistości podlegającej obserwacji przez kogoś, kto nie jest podmiotem tych zachowań. Stany emocjonalne, wiedza lub jej brak, dobre lub złe zamiary itp. człowieka lub innego podmiotu prawa mogą być brane pod uwagę, jeśli są okolicznościami, które pozostają w przyczynowo–skutkowym związku z zachowaniami zewnętrznymi.

Tak, na przykład, zły zamiar wobec danej osoby może być okolicznością braną pod uwagę jako przesłanka prawna oceny czynu zakazanego, gdy czyn ten został dokonany lub, choćby, doszło do podjęcia przygotowań do jego dokonania albo, mimo usiłowania jego dokonania, nie miał on miejsca. Zachowaniem zewnętrznym jest wówczas przygotowanie lub usiłowanie jego popełnienia. Gdyby następstwem złych zamiarów nie było przygotowanie, usiłowanie lub dokonanie czynu, innymi zaś słowy, gdyby złe zamiary pozostały jedynie zamiarami i nie zmaterializowały się w istotnych prawnie zachowaniach zewnętrznych, nie mogłyby być oceniane w kategoriach prawnych.

Inny przykład. Okoliczność zwana przez prawo cywilne „dobrą wiarą", co da się w uproszczeniu przełożyć na „uczciwy zamiar", od której zależy skuteczność wielu czynności w obrocie prawnym (np. zawarcie umowy), ma znaczenie, jeśli do czynności tej ostatecznie dochodzi lub przynajmniej podejmowana jest próba jej dokonania.

Tak więc, w oczach prawnika, inaczej niż etyka czy teologa, liczą się przede wszystkim zachowania zewnętrzne podmiotów prawa i tylko one mogą być przedmiotem regulacji normatywnej. Zachowania wewnętrzne (emocje, zamiary, uczucia) mają znaczenie, ale jedynie jako przesłanki towarzyszące zachowaniom zewnętrznym.

Jakkolwiek nadal szeroko rozpowszechniony jest pogląd, że poza regulacjami stanowionymi przez podmioty władzy publicznej (parlamenty, sądy, administrację rządową i samorządową, naród w referendum, państwa w formie umów międzynarodowych, właściwe instytucje organizacji międzynarodowych np. Unii Europejskiej), prawem są lub mogą być także normy zwyczajowe oraz – co w tym przypadku ważne – normy tworzące tzw. porządek naturalny, to współczesny prawnik–praktyk ma do czynienia przede wszystkim z uregulowaniami, w ten czy inny sposób, stanowionymi. Jest przedmiotem sięgającego głębokiej starożytności sporu to, do jakiego stopnia normy porządku naturalnego (prawa naturalnego, prawa natury), niezależnie od źródeł ich pochodzenia, wiążą podmioty prawa, a zwłaszcza, czy w razie sprzeczności z normami prawa stanowionego (zwanego niekiedy prawem pozytywnym) mają przed nimi pierwszeństwo. Przesławnym archetypem tego sporu był konflikt między prawem Antygony a prawem Kreona, przedstawiony w tragedii Sofoklesa.

Co jakiś czas, ostatnio, na przykład, po II wojnie światowej i po upadku systemów komunistycznych w Europie, odnawia się dyskusja na temat istnienia prawa naturalnego i jego prymatu w porządku normatywnym cywilizowanych społeczeństw. Byliśmy świadkami takiej dyskusji w czasie prac nad obowiązującą obecnie konstytucją RP z 1997 r. Przypomina się w związku z tym myśl Gustawa Radbrucha (prawnika niemieckiego z pierwszej połowy XX w.), iż ustawowe bezprawie ustępować winno przed ponadustawowym prawem. Nie zapominając o tym, większość współczesnych prawników za zasadniczy, o ile nie jedyny i ostateczny punkt wyjścia dla swoich rozumowań, przyjmuje jednak prawo pozytywne. Jak niegdyś trafnie zauważono, postawa prawników jest spontanicznie pozytywistyczna, nawet jeśli uznają myśl Radbrucha za trafną.

Wyodrębnienie stosowania prawa na tle innych aktów o istotnym prawnie znaczeniu jest dosyć trudne. Przede wszystkim chodzi o to, na ile stosowanie prawa jest lub może być czymś gatunkowo odmiennym od jego stanowienia. Są systemy prawa, w których znaczna część norm została wprowadzona do katalogu norm obowiązujących w państwie nie tyle odrębnym od stosowania aktem stanowienia, ile decyzją, która nosi zarówno cechy stanowienia, jak i stosowania prawa. Należy do nich anglosaski *judge-made-law* (prawo sędziowskie lub prawo precedensów – *case law*). Stanowi ono element większej całości, to jest *common law* (prawa powszechnego), w skład którego wchodzi również prawo zwyczajowe. Nie wyklucza to równoległego stanowienia prawa aktami np. parlamentu (tzw. *statutory law* – prawo ustawowe). W przypadku *judge-made-law* sędzia, mając do czynienia z jednostkowym, precedensowym przypadkiem, rozstrzyga na podstawie reguły, którą sam dla tego przypadku stworzył. Jeśli reguła ta (tzw. *ratio decidendi*) znajdzie trwałe uznanie innych sędziów, staje się elementem prawa obowiązującego w państwie. Mamy tu zatem do czynienia z dwiema czynnościami jednocześnie – rozstrzyganiem w konkretnym przypadku i tworzeniem reguły stanowiącej podstawę tego rozstrzygnięcia. Kultura prawa sędziowskiego

Piotr Winczorek, Wydział Prawa i Administracji Uniwersytetu Warszawskiego

rozpowszechnia się ostatnio w świecie, czego dowodem jest jej asymilacja w postępowaniach prawotwórczych Unii Europejskiej. Jest kwestią dyskusyjną, do jakiego stopnia współczesna Polska zna, i wobec obowiązujących rozstrzygnięć konstytucyjnych uznawać może za akceptowalne, prawo tego rodzaju. Jest to jednak historia zasługująca na oddzielną opowieść.

W typowych systemach prawa stanowionego (np. francuskim, niemieckim, polskim) oddziela się zatem akty stanowienia prawa (genetycznie i zwykle historycznie pierwotne) i akty stosowania prawa (wtórne). W wyniku stanowienia prawa wprowadza się do systemu normy prawne jako struktury znaczeniowe ujęte, od strony redakcyjnej, w przepisach prawa będących najmniejszymi jednostkami tekstowymi (poszczególnymi zdaniami) aktów normatywnych (np. konstytucji, ustaw, rozporządzeń, umów międzynarodowych itp.). Normy prawne nie istnieją jako zjawiska leżące „na powierzchni” tekstu, lecz muszą być z niego wyprowadzone, wywiedzione, odtworzone, dekodowane – głównie przez tych, którzy prawo stosują. Norma prawna jest strukturą o charakterze abstrakcyjnym, to znaczy, odnosi się do pewnego rodzaju (typu) zachowań zakazanych, nakazanych, lub dozwolonych, a nie do zachowań konkretnych, jednostkowych, niepowtarzalnych. Jest także strukturą kierowaną do generalnego odbiorcy (adresata), a więc nie do jednostki (osoby fizycznej czy prawnej, organu władzy publicznej) wskazanej co do swej tożsamości lub z nazwy własnej, ale do pewnego rodzaju (typu) odbiorcy.

Wedle rozpowszechnionego w prawoznawstwie poglądu (choć nie jest to pogląd jedyny), norma prawna, jako struktura wywiedziona z przepisów w drodze, między innymi, rozumowań interpretacyjnych (por. założenie – nie ma prawa przed interpretacją), zbudowana jest z trzech części: hipotezy, dyspozycji i sankcji. Mówiąc w dużym skrócie: hipoteza wskazuje adresata normy i określa warunki jej aktualizacji, dyspozycja reguluje zachowania (zewnętrzne) jako nakazane, zakazane bądź dozwolone, sankcja określa konsekwencje (dolegliwości), jakie spotkać powinny adresata, gdy w warunkach ujętych w hipotezie naruszy on dyspozycję, to jest nie dopełni nakazu, złamie zakaz albo przekroczy granice dozwolenia.

Gdy przyjąć, że stanowienie i stosowanie prawa to dwa różne akty, stosowanie polega na podejmowaniu przez upoważniony organ władzy publicznej decyzji indywidualnych i konkretnych na podstawie norm abstrakcyjnych i generalnych. Tak, na przykład, sąd skazując pana K. (decyzja indywidualna) na rok pozbawienia wolności za kradzież samochodu (decyzja konkretna), stosuje normę wywiedzioną z art. 278 §1 i z szeregu innych przepisów – kodeksu karnego, kodeksu postępowania karnego, ustawy o sądach powszechnych i konstytucji RP. Inaczej mówiąc, stosowanie prawa polega na podejmowaniu decyzji indywidualnych i konkretnych na podstawie norm (uwaga – nie przepisów) abstrakcyjnych i generalnych.

Osobliwością rozumowań prawniczych, które prowadzić mają do aktów stosowania prawa, jest przyjęcie apriorycznego założenia o racjonalności ustawodawcy (prawodawcy). Organ mający, na mocy postanowień konstytucji lub ustaw, przywilej i obowiązek stosowania prawa nie może się od niego w legalny sposób uchylić. Nie może, na przykład, uznać, że przepisy są na tyle niejasne, iż nie da się z nich wywieść norm prawnych, lub że efekty stosowania norm byłyby w danych okolicznościach całkowicie absurdalne itp. Niegdyś Kodeks Napoleona głosił, że sędzia nie może odmówić wymierzenia sprawiedliwości, zasłaniając się tym, iż prawo jest mętne lub milczy w danej sprawie. Podmiot stosujący normy musi dać sobie radę i z takim prawem.

Założenie o racjonalności ustawodawcy nawiązuje do znanej naukom humanistycznym i społecznym metody tzw. interpretacji humanistycznej. W wielkim, upraszczającym skrócie, powiedzieć można, że sprowadza się ona do tego, iż zakłada możliwość rozumienia przez jeden podmiot znaczenia dzieł kulturowych będących wytworem innego podmiotu. Rozumienie to jest możliwe, ponieważ przyjmuje się, że oba podmioty należą do tego samego gatunku (ludzkiego), przez co nie jest wykluczone pojmowanie przez jeden z nich tego, co wytworzył drugi. Zakłada się ponadto, że podmioty te kierują się tymi samymi, a przynajmniej zbliżonymi założeniami, sterującymi postępowaniem gatunku i jego przedstawicieli – czegoś chcą, do czegoś dążą, czegoś pragną i dla realizacji swoich zamiarów podejmują środki, które, przynajmniej w ich oczach, wydają się adekwatne itp. I da się to *ex post* odtworzyć. Założeniom tym towarzyszy domniemanie pewnej wiedzy o rzeczywistości po stronie podmiotu będącego twórcą danego dzieła kulturowego. Założenie o racjonalnym ustawodawcy opiera się zatem na następujących hipotezach:

(a) stanowiąc normę N i zawierając ją w przepisach $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$, ustawodawca jakiś stan rzeczy chciał dzięki niej osiągnąć, ponieważ, kierując się swym wyobrażeniem o wartościach, które mogą być chronione lub urzeczywistniane za pomocą regulacji prawnej, ten stan rzeczy uważał za cenniejszy od innych;

(b) ustawodawca dysponował wiedzą o rzeczywistości, którą *ex post* da się odtworzyć;

(c) dla realizacji wybranego stanu rzeczy zastosował adekwatne (instrumentalnie niezbędne) środki prawne.

Tak, na przykład, ustawodawca uznaje (wie), iż własność ma być (jest społecznie) wartością wysoko cenioną. Dla jej ochrony ustanawia zatem, między innymi, przepis art. 278 ust. 1 kk i szereg innych, sądząc (np. na podstawie zgromadzonej wiedzy kryminologicznej), że prawny zakaz kradzieży, wsparty sankcją pozbawienia wolności od 3 miesięcy do 5 lat, będzie skutecznym środkiem prowadzącym do zabezpieczenia własności.

Założenie o racjonalności ustawodawcy ma bez wątpienia charakter kontrfaktyczny. W istocie bowiem (czego szczególnie udowadniać, jak mniemam, nie trzeba), rzeczywisty ustawodawca (np. polski parlament) bardzo często nie jest w swych zachowaniach prawotwórczych racjonalny. Ma słabe rozeznanie w kwestii społecznie akceptowanych wartości, ma rozchwiane preferencje aksjologiczne, wykazuje braki w wiedzy o rzeczywistości, ustanawia cele niemożliwe w ogóle do realizacji albo też niemożliwe do realizacji za pomocą regulacji prawnej, tworzy środki (instrumenty) prawne nieadekwatne do osiągnięcia wybranego celu itp.

Co w takim przypadku ma czynić prawnik (np. sędzia)? Nie może odmówić stosowania prawa, bo stosowanie prawa to jego konstytucyjny i ustawowy obowiązek. Nie może odmówić stosowania prawa, ponieważ, niejednokrotnie, uderzałoby to dotkliwie w usprawiedliwione interesy podmiotów prawa, a w szczególności interesy osób fizycznych, które słusznie oczekują na podjęcie przez organy władzy publicznej decyzji w żywotnych dla siebie sprawach. Prawnik musi zatem dokonać wykładni prawa „korygującej" nieracjonalność ustawodawcy, musi nadać temu co nieracjonalne, racjonalne kształty. Ma ustalić, że ustawodawca powinien (jako podmiot racjonalnie działający) chcieć „tego i tego", i że „to i to" mógł i chciał osiągnąć za pomocą „takiego oto, i jedynie takiego" uregulowania itd.

Racjonalizując *ex post* nieracjonalne decyzje ustawodawcy, prawnicy stosujący prawo muszą więc dokonywać rozmaitych operacji na tekstach aktów normatywnych i na wyprowadzanych z nich normach. Służą temu, wypracowane przez setki lat praktyki prawniczej, reguły usuwania sprzeczności w prawie, dokonywania wykładni przepisów i wyprowadzania jednych norm z drugich.

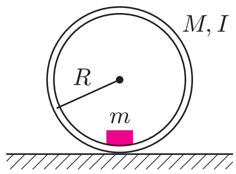
Na postronnym obserwatorze nie robi to na ogół dobrego wrażenia. Sądzi on (czasami słusznie), że dochodzi w takich przypadkach do kuglowania prawem. Jednakże bez takich operacji, w obliczu nieracjonalności ustawodawcy, stosujący prawo musiałby zrezygnować z podejmowania decyzji, co z kolei mogłoby być, jak wspomniałem, bardzo niekorzystne z punktu widzenia interesów społecznych i jednostkowych. Mógłby też, ulegając tej nieracjonalności, podejmować jednak jakieś decyzje odzwierciedlające zamęt panujący po stronie stanowiącego prawo. Lecz chaos przez niego powodowany takim działaniem byłby chyba większy, niż wątpliwości, jakie mogą wywoływać próby „nadawania racjonalności" nieracjonalnym decyzjom urzędowego prawotwórcy.

Są jednak jakieś granice racjonalizacji tworów nieudolnego ustawodawcy. Trudno je *in abstracto* definiować. Lecz, *in concreto*, są one dla większości doświadczonych prawników stosunkowo łatwo uchwytne. Byłbym zdania, że w tych ekstremalnych przypadkach lepiej odstąpić od stosowania prawa i wszcząć wobec prawodawcy akcję protestacyjną, niż pogłębiać zamieszanie powodowane fatalnym stanem legislacji.

Zadania

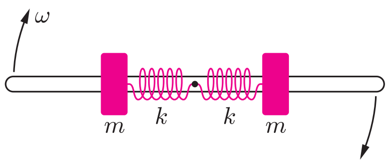
Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 643. Wewnątrz cienkościennej rurki o promieniu R i masie M leży klocek o masie m (rys. 1). Jaką prędkość minimalną v_0 należy nadać układowi, by się potoczył, a podczas toczenia klocek nie oderwał się od powierzchni rurki? Zakładamy, że tarcie między klockiem a rurką jest na tyle duże, że klocek nie może przesuwać się po powierzchni rurki.
Rozwiązanie na str. 2



Rys. 1

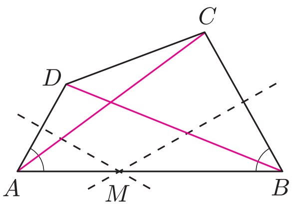
F 644. Dwa pierścienie o masach m każdy nanizane są na sztywny pręt i połączone ze środkiem pręta sprężynami o stałej sprężystości k i długości swobodnej l. Układ wprowadzamy w ruch obrotowy w płaszczyźnie poziomej z prędkością kątową ω (rys. 2) i czekamy, aż pierścienie na sprężynach osiągną stan równowagi. Obliczyć moment bezwładności i energię kinetyczną układu, pomijając masę sprężyn i pręta.
Rozwiązanie na str. 3



Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

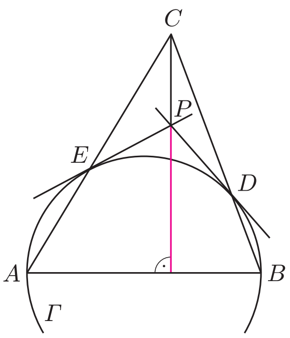
M 1096. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ (rys. 3). Symetralne odcinków AD i BC przecinają się w punkcie M leżącym na odcinku AB. Udowodnić, że $AC = BD$.
Rozwiązanie na str. 2



Rys. 3

M 1097. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, że liczba $a^2 + b^2 + a$ jest podzielna przez ab. Wykazać, że liczba a jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 19

M 1098. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Okrąg Γ o średnicy AB przecina odcinki BC i AC odpowiednio w punktach D i E (rys. 4). Styczne do okręgu Γ w punktach D i E przecinają się w punkcie P. Dowieść, że proste CP i AB są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 4

O jakże pełną słodyczy nauką jest perspektywa!

Marcin ZGLIŃSKI

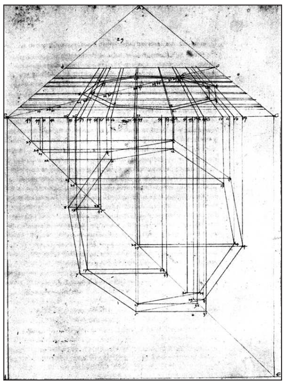
Oh che dolce cosa è questa prospettiva! Tak – według relacji Giorgio Vasariego – odpowiadać miał swej żonie Paolo Ucello, florencki malarz wczesnego renesansu, gdy ta wołała go, by szedł spać, a on w swej pracowni studiował prawa perspektywy. Dla Ucella i innych artystów florenckich doby Quattrocenta nauka o perspektywie stała się symbolem postępu i nowości, i to nie tylko w sztuce, ale nieomal we wszystkich sprawach dotyczących świata i natury, stając się niekiedy rodzajem wiedzy niemal tajemnej, a inicjacja w tej materii dla niektórych miała posmak mistycznej iluminacji. Jeszcze w 1506 r. Albrecht Dürer, przybysz z Transalpinum, późniejszy wielki teoretyk sztuki, pisał w jednym z listów: „pojadę do Bolonii po wiedzę o tajemnej perspektywie, której chce mnie ktoś tam nauczyć”.

Marcin Zgliński, Instytut Sztuki Polskiej Akademii Nauk

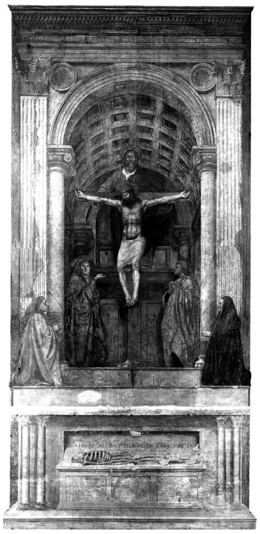
W istocie, wraz z zaraniem Odrodzenia, na pierwszy plan nieomal wszelkich dociekań i rozważań teoretycznych dotyczących sztuki wysuwają się dziedziny oparte na wiedzy matematycznej, o których sądzono, iż mogą i powinny być rozważane naukowo – proporcje i perspektywa. Oczywiście, nie była to wiedza zupełnie na nowo odkryta – perspektywą i jej prawami, a także optyką zajmowali się już wielcy filozofowie i uczeni starożytnej Grecji: Demokryt, Anaksagoras, Euklides, Heliodor z Laryssy, Ptolomeusz, a także Platon, który postrzegał ją jako zjawisko negatywne, przejaw niedoskonałości ludzkiego oka, deformującego rzeczy. Później także uczeni arabscy (Alhazen) oraz średniowieczni (John Peckham, Ślązak Witelon) zajmowali się perspektywą, choć jedynie jako zagadnieniem fizykalnym, bardziej interesując się nią od strony optyki. Dopiero jednak u progu Odrodzenia perspektywa stała się jednym z czołowych zagadnień malarstwa, a na badaniach nad nią koncentrowali się prawie wszyscy najwybitniejsi tego czasu, m.in. Brunelleschi, Alberti, Ucello, Donatello, Ghiberti, Piero della Francesca, Leonardo, Dürer czy Bramante. Oczywiście, zainteresowania te nie tylko wynikały z chęci tworzenia w praktyce dzieł jak najlepiej oddających złudzenie rzeczywistości. Po pierwsze, jak pisał Władysław Tatarkiewicz, „połączenie sztuki z matematyką było naturalne w epoce, która podjęła tradycję platońską, a wraz z nią – pitagorejską”. Inna sprawa, że choć praktyka artystyczna „wracała do estetycznego intelektualizmu starożytnych”, to jednakże równanie „sztuka = nauka ścisła” było nawet wobec starożytności czymś nowym. Oto bowiem sztuce stawiać zaczęto cele, jakie dotąd stawiano przed nauką. Jak wyraził to wówczas wybitny matematyk, ale też teoretyk sztuki Luca Paccioli, w sztuce mniemaniom (opiniom) przeciwstawną kategorią jest pewność – *certezza*. A jak napisał w swym *Traktacie o malarstwie* Leonardo da Vinci: „żadne dociekanie ludzkie nie może zwać się prawdziwą wiedzą, o ile nie przeszło próby dowodu matematycznego”. Jednak nie mniej istotny był także aspekt społeczny – do tej pory artysta traktowany był jak rzemieślnik, a słowo *ars* sprowadzało się do wyuczonej, mechanicznej umiejętności, teraz zaś artyści podnosili swą pozycję, podnosząc się ze stanu rzemieślniczego i stając się równymi przedstawicielom nauk wyzwolonych.

W praktyce umiejętność kreowania iluzji przestrzeni w malarstwie istniała na długo przed renesansem, jednak działania te oparte były na drodze wrażeniowej i intuicji, robione „na oko”, bez zastosowania matematycznych, geometrycznych reguł. Skróty perspektywiczne stosowali Grecy, malarze hellenistyczni, a ostateczny rozkwit reguła ta osiągnęła we freskowym malarstwie rzymskim w 2. połowie I wieku p.n.e., gdy tworzono perspektywiczne obrazy ukazujące fantastyczną, nierealną architekturę, z prześwitami ukazującymi dalsze i bliższe budowle. Starożytni posługiwali się metodą roboczą, gdzie nie znano punktu zbiegu, lecz pionową oś, na której zbiegały się linie prostopadłe do płaszczyzny malowidła. Ale nawet te umiejętności zostaną w dobie średniowiecza zapomniane, a w dobie protorenesansu (tzw. Trecenta) wielcy malarze, jak Giotto czy Duccio, będą kreować przestrzeń intuicyjnie, dość łudząco, jednak nie bez dostrzegalnych na pierwszy rzut oka zniekształceń.

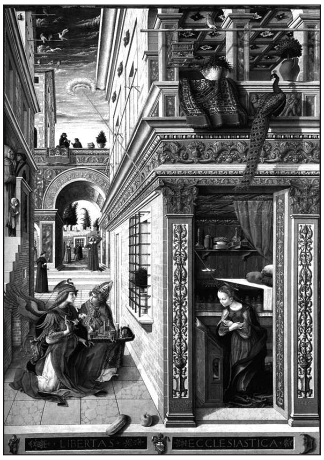
Za odkrywcę perspektywy naukowej, uzyskanej na drodze pojęciowej (intelektualnej) uchodzi pierwszy architekt doby renesansu, **Filippo Brunelleschi** (1377–1446), który, jak pisał Vasari, „studiował z zapałem perspektywę, o czym wówczas nie miano wielkiego pojęcia i popełniano wiele błędów. Poświęcił na to dużo czasu, aż znalazł sposób, aby perspektywa była trafna i wierna, a mianowicie jej prowadzenie od rzutu aż do profilu lub przekroju”. Około roku 1413 zademonstrował we Florencji swój słynny tzw. fotoplastykon – rodzaj płytki perspektywicznej z namalowanym widokiem baptysterium św. Jana przy katedrze florenckiej, opartym na pomiarach wykonanych z punktu umiejscowionego w portalu katedry. W miejscu stanowiącym punkt zbiegu linii perspektywy wywiercił niewielki otwór, a następnie widz spoglądał przez ten otwór od niepomalowanej strony, jednocześnie w drugiej ręce trzymając lustro, tak by widzieć w nim odbicie obrazu. Złudzenie przestrzenności było dla współczesnych porażające, tym bardziej, iż stojąc



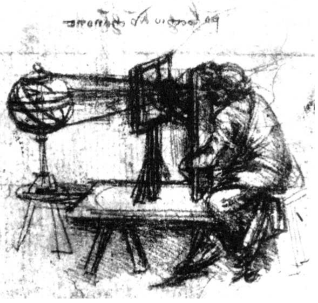
Rysunek z traktatu Piero della Francesca *De prospectiva pingendi*.



Masaccio, Fresk *Trójca Św.* z kościoła Sta. Maria Novella we Florencji, ok. 1427



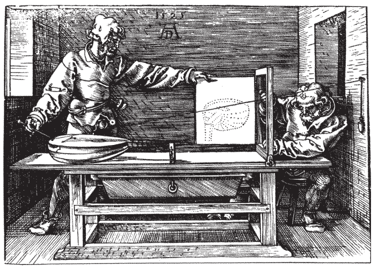
Cralo Crivelli, *Zwiastowanie*, 1486



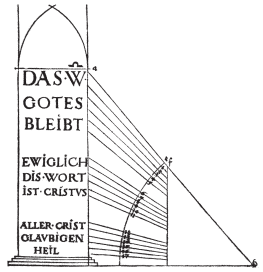
Leonardo da Vinci, rysunek, ok. 1510

w drzwiach katedry, w punkcie, skąd namalowano obraz, mogli skonfrontować rzeczywistość z wykreowaną iluzją. Ten nieco kuglarski sposób demonstracji wielkiego odkrycia, które zdeterminowało na długo charakter sztuk przedstawiających, nie zmienia faktu, iż Brunelleschi musiał być w pełni świadomy matematycznej zasady stanowiącej jego podstawę. Jednak dopiero jakieś dwie dekady później, w 1435 r. perspektywa doczekała się teoretycznej kodyfikacji w *Della pictura* **Giovanniego Battisty Albertiego**, dedykowanym Brunelleschiemu, pierwszym nowożytnym, humanistycznym traktacie o sztuce. Czytamy tam: „jeśli owym starożytnym, którzy mogli wiele się uczyć i mieli kogo naśladować, łatwiej było dojść do doskonałości owych wzniosłych sztuk, dziś dla nas tak trudnych, przeto tym bardziej imię nasze winno być sławniejsze, skoro bez nauczycieli, bez jakiegokolwiek wzoru, wynajdujemy nauki i sztuki nigdy nie widziane i nie słyszane”. Alberti stwierdza tam: „matematycy [...] mierzą wygląd i kształty rzeczy samym tylko rozumem, odrzucają całą ich materię, my zaś omówimy wszystko grubszą jakby Minerwą [mniej subtelnie], ponieważ chcemy, aby temat był wyraźnie przedstawiony. [...] Staram się więc, by moje dzieło wyjaśniało wszystko tak, jak gdyby pisał je nie matematyk, lecz malarz”. Teoria Albertiego opiera się na euklidesowej teorii widzenia, której podstawą są dwa pewniki: że proces widzenia odbywa się za pomocą prostych promieni łączących oglądany obiekt z okiem i że wzajemne ustosunkowanie tych promieni wyznacza położenie odpowiadających im punktów w obrazie optycznym. Dlatego też – w prosty i malarsko obrazowy czy wręcz niekiedy metaforyczny sposób – daje definicję punktu, linii, płaszczyzny, by przejść wreszcie do definicji perspektywy. Obraz malarski jest to *intersegazione della piramide visiva*, przekrój przez piramidę wzrokową, a więc przez proste promienie łączące oko z przedmiotami, zaś powierzchnia obrazu stanowi płaszczyznę przeciętą przez te promienie. Alberti wyznacza tzw. promień centryczny oraz promienie zewnętrzne i wewnętrzne. Obraz nieco metaforycznie określa jako *una finestra aperta donde io miri quello que quivi sara dipinto*, „otwartym oknem, przez które oglądam to, co jest tam namalowane”. Owa prostokątna powierzchnia obrazu jest u Albertiego oparta na *braccio* – jednostce miary (60 cm), a punkt zbiegu jest w miejscu odpowiadającym mniej więcej idealnemu wzrostowi człowieka (180 cm), gdzie znajdować się miała też linia horyzontu. Najistotniejszą sprawą było ustalenie tzw. *construzzione legitima*, czyli ustalenie za pomocą dwóch dodatkowych bocznych rzutów piramidy widzenia prawidłowych odstępów, jakie na płaszczyźnie obrazu powinny dzielić linie równoległe do jego płaszczyzny. Mówiąc inaczej – jak naukowo zmniejszać skalę coraz bardziej oddalonych przedmiotów.

Jeszcze przed powstaniem traktatu Albertiego wielki malarz florenckiego Quattrocento – Masaccio w pełni zastosował zasady naukowej perspektywy, przede wszystkim w słynnym fresku *Trójca Św.* z około 1425 r. I choć następne generacje renesansowych twórców bardzo szybko opanowały posługiwanie się ową nową metodą budowania na płaszczyźnie złudzenia przestrzeni, traktując ją jako niemal rutynowy i mechaniczny środek, dla niektórych artystów problematyka ta nadal była żywa i zajmująca. **Piero della Francesca** (1412–1492) przez współczesnych bardziej chyba był ceniony za uczoność niż za niezwykłą jakość swojej sztuki, a i dziś niektórzy widzą w nim największego matematyka owej generacji. Vasari pisał o jego dokonaniach na tym polu: „górował on w tych naukach nad wszystkimi sobie współczesnymi, a zapewne i wszystkimi dawniejszymi mistrzami”. Większość życia spędził na badaniu geometrycznych brył i mistycznych właściwości liczb, a przez ostatnie 20 lat życia przestał zajmować się sztuką, poświęcając się matematyce, pisząc wówczas traktat *De prospectiva pingendi.* Z kolei inni malarze, jak np. **Andrea Mantegna**, w większym stopniu koncentrowali się na wykorzystaniu wpływu perspektywy na widza, tworząc podwaliny nowożytnego malarstwa iluzjonistycznego. Dla większości artystów Odrodzenia perspektywa centralna stanowiła jedność widzenia i postrzegania świata. Jednak, jak w słynnym eseju z 1925 r. *Die Perspektive als symbolische Form* stwierdził Erwin Panofsky,

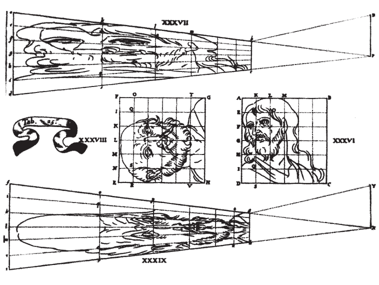


Albrecht Dürer, Ryciny z *Unterweysung der Messung*, 1525



Albrecht Dürer, Litery na ścianie, rycina z *Unterweysung der Messung*, 1525

William Hogarth, *Fałszywa perspektywa*, rycina, 1754

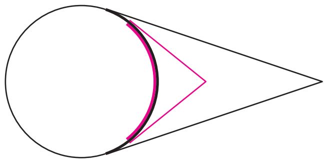


Jean-François Nicéron, *thaumaturgus opticus*, 1638 – anamorfoza.

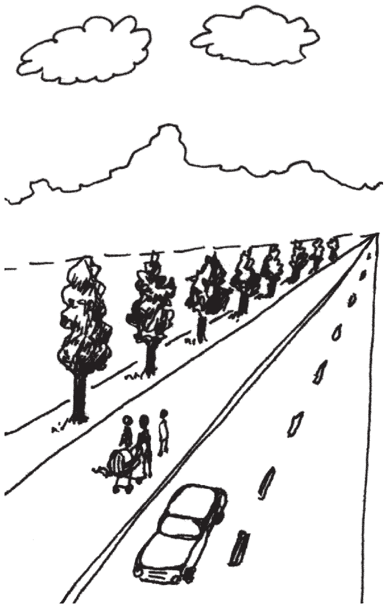
we wczesnorenesansowej sztuce perspektywa, pozwalająca uzyskać jednorodną, nieskończoną, izotropiczną koncepcję przestrzeni, była w istocie jedynie konwencją stylistyczną i symboliczną zarazem, swoistym schematem i abstrakcją. Nie była efektem naturalnego patrzenia, lecz konstruktem, za którego pomocą narzucano przestrzeni ład i porządek. Była to jednak przestrzeń matematyczna, przedstawiająca monookularny obraz widzenia, nieuwzględniający kolistości horyzontu ani sferyczności siatkówki, a co za tym idzie – obrazu i w ogóle nieodpowiadająca widzialnej i namacalnej przestrzeni fizjologicznej. Pomija kwestię fizjologii, ruchów oczu: czyli tego, co nazywane było *perspectiva naturalis*. Dlatego – zdaniem Panofskiego – perspektywa matematyczna, *perspectiva artificialis* w sztuce renesansowej była w istocie „fundamentalną abstrakcją”, przenoszącą przestrzeń psychofizyczną do przestrzeni matematycznej, innymi słowami: „obiektywizującą to, co subiektywne”. Te wątpliwości stały się udziałem największych artystów teoretyków dojrzałego Renesansu. Leonardo w traktacie o malarstwie stawia pytanie: dlaczego rzeczy malowane najściślej według natury nie wyglądają tak plastycznie, jak te same w naturze? I odpowiada: *niemożliwe jest, aby malowidło naśladujące z najwyższą nawet dokładnością linii, cieni, świateł i kolorów przedmiot naturalny wydawało się plastyczne jak ów przedmiot; chyba że jest on oglądany z dużej odległości i tylko jednym okiem.* W istocie bowiem nie patrzymy jednym okiem, z którego biegnie pojedynczy promień centryczny, ale binokularnie. Dostrzega, iż ludzkie pole widzenia jest w istocie zakrzywione, i wreszcie zauważa, że w malarstwie większą rolę powinna odgrywać perspektywa powietrzna. Również Albrecht Dürer w swym traktacie *Underwysung der Mesung* (Pouczenie o mierzeniu, 1525) zajmuje się drobiazgowo kwestią perspektywy, jednak główny nacisk kładzie na umiejętność praktycznego mierzenia, ilustrowanego stosownymi poglądowymi drzeworytami. Myślenie Dürera nie ma wiele wspólnego z perspektywą linearną, a odwołuje się do optyki, i to optyki Euklidesa, będącej podstawą perspectiva naturalis. Jak napisał w znakomitej książce *Pragnienie obecności* Andrzej Markowski, „Dürer nie zbudowałby swych urządzeń, gdyby wierzył, że podstawą obrazu jest geometria, a nie praktyka reprezentacji opartej na widzeniu”. Dlatego też Dürer, w swej melancholii rozdarty pomiędzy opozycję wiedzy i teorii oraz praktyki i doświadczenia, porzucił cechujący wczesnorenesansowych humanistów optymizm i zaufanie do matematycznych narzędzi, stwierdzając: „czym jest piękno, tego nie wiem, tego nie wie nikt prócz Boga”. W XVI w., w dobie manieryzmu, sztuki aklasycznej i anaturalistycznej, nastąpił odwrót renesansowego idealizmu i racjonalizmu. Giorgio Vasari, nie tylko znany historiograf sztuki, ale też malarz i architekt, reprezentujący estetykę manierystyczną, w ten sposób komentował wspomniane już studia Ucella nad perspektywą: „Obdarzony umysłem krytycznym i wytwornym, nie miał innego zamiłowania, jak badać prawa perspektywy, **trudne, lub wręcz niemożliwe do poznania**. Choć były to interesujące i pełne fantazji zagadnienia, tak mu przeszkadzały w oddawaniu postaci ludzkich, że im robił się starszy, tym gorzej malował. Nie ulega wątpliwości, że ci, co studiują naturę ze zbytnią gorliwością, to chociaż wyostrzą swój umysł, jednak wszystko, co zrobią, nie będzie miało lekkości i wdzięku. [...] Jedynie jeżeli obok rozumu obudził się talent, przychodzi natchnienie. Wtedy powstają dzieła znakomite, jakby Boże, i pomysły cudowne”. Jeszcze Dürer, jak Leonardo czy Galileusz, wierzył, że matematyka daje pewność, choć dodawał z namysłem, iż istnieje wiele rzeczy wychodzących poza jej zakres. W drugiej połowie XVI wieku, dylemat ten przerodził się w otwarty konflikt: teoretycy sztuki, tacy jak Raffaele Borghini, Gregorio Comanini czy Federico Zuccari, zaatakowali matematykę jako niewolę ducha, w sztuce zaś na piedestał postawiono oryginalność, kaprys, boskie szaleństwo (*furor divinus*), pasję etc. Giordano Bruno stwierdzał: „Tyle jest reguł, ilu prawdziwych poetów”. Jeśli zaś perspektywą zajmowano się, to nie po to, by wzbudzać zaufanie widza do racjonalnej konstrukcji przedstawianego świata, lecz przeciwnie – by widza zwodzić. W malarstwie pojawiają się tzw. przyspieszone perspektywy, efekty „skoków przestrzeni” oraz zniekształcająca przedmioty poprzez optyczny absurd anamorfoza.

I co widzimy?

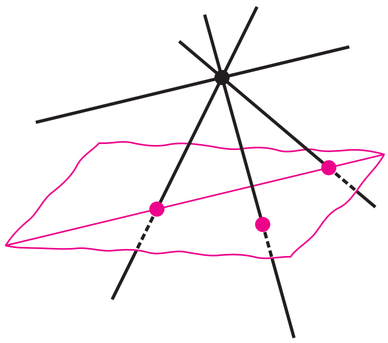
Marek KORDOS



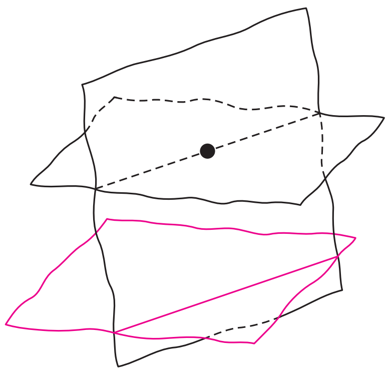
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Będzie to opowiastka z morałem, który można zdradzić już na początku: *ulepszanie codzienności może prowadzić do zdumiewająco absurdalnych, egzotycznych światów.*

Pierwsze bodaj odnotowanie paradoksu związanego z widzeniem zawiera euklidesowe (ponoć) dzieło *Optyka.* Oto on: *gdy zbliżamy się do kuli, wydaje się nam ona coraz większa, choć widzimy coraz mniejszy jej fragment* – istotnie, wystarczy spojrzeć na rysunek obok.

Fakt, że przedmioty oddalone widzimy pod mniejszym kątem niż ich znajdujące się bliżej nas egzemplarze, prowadzi nas do wniosku, że równoległe brzegi drogi – gdyby tylko można było je oglądać dowolnie daleko – spotkałyby się „w końcu". Ów koniec nazywa się tradycyjnie nieskończonością. Matematycy, ludzie zawodowo konkretni, znaleźli dla tego końca prostej nazwę: jest to *kierunek*, bo przecież to wspólny kierunek mają równoległe proste. Słowo się rzekło i pojawiła się pierwsza absurdalna własność prostej: przecież prosta ma ten sam kierunek, niezależnie z której jej strony będziemy go szukać: dołączenie kierunków w sposób konieczny czyni z prostych linie zamknięte jak okrąg.

Ale przecież to samo dołączenie kierunków pozwala wprowadzić perspektywę zbieżną, czego początek znaleźć można w *Małej Delcie* na stronie 15.
Tu spróbujmy zobaczyć, jakie jeszcze własności ma płaszczyzna, na której proste zostały uzupełnione kierunkami. Jeżeli umówić się jeszcze, że linia złożona z samych kierunków to też prosta (a jakże, także zamknięta, jak wszystkie), to otrzymany obiekt nazywa się *płaszczyzną rzutową.*

Matematyk, oglądając jakiś obiekt, stara się zobaczyć go z wielu stron. W tym celu poszukuje obiektów z nim *izomorficznych*, czyli tak samo zbudowanych. Postąpmy w ten sposób.

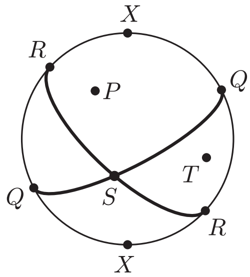
Nad płaszczyzną rzutową wybierzmy jakiś punkt, nazwijmy go środkiem. Za jego pomocą zbudujemy obiekt izomorficzny z płaszczyzną rzutową, który nazywa się jej *modelem środkowym.* Będzie on składał się z nowych „punktów" i nowych „prostych". Nowy punkt powstaje ze starego tak: jest to prosta (w przestrzeni) przechodząca przez stary punkt i środek. Nietrudno zauważyć, że w ten sposób otrzymujemy wszystkie proste przechodzące przez środek: proste równoległe do wyjściowej płaszczyzny przechodzą przez kierunki jej prostych (rys. 3). Nowe proste to płaszczyzny przechodzące przez stare proste i środek. I znów są to wszystkie płaszczyzny, bo ta równoległa do wyjściowej przechodzi przez prostą złożoną z kierunków. Nowy punkt leży na nowej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu stary leży na odpowiadającej mu prostej. Co tu widać? Widać, że na płaszczyźnie rzutowej wszystkie „punkty" (i wszystkie „proste") są równouprawnione – nie sposób poznać, który był poprzednio kierunkiem.

Z modelu środkowego zrobimy teraz *model analityczny.* Jeśli w przestrzeni wprowadzimy układ współrzędnych o początku w środku, to każda przestrzenna prosta będzie złożona z punktów, których współrzędne będą proporcjonalne: $\{(at,\, bt,\, ct)\}$, gdzie a, b, c są dowolnie ustalonymi liczbami (byle nie same zera), a t jest dowolnie zmieniającym się parametrem. Widać więc, że każdy „punkt" modelu środkowego jest opisany przez trójkę liczb $[a,\, b,\, c]$ daną z dokładnością do proporcjonalności. Podobnie „proste": każda z nich jest opisana równaniem $px_1 + qx_2 + rx_3 = 0$, przy czym dla proporcjonalnych trójek p, q, r otrzymuje się tę samą „prostą". Zatem i one dane są przez trójki $[p,\, q,\, r]$. A „punkt" leży na „prostej", gdy $ap + bq + cr = 0$. Widać więc, że gdyby ktoś pozamieniał wszystkie „punkty" na „proste" i odwrotnie, to nie dałoby się tego odkryć. To spostrzeżenie można wyrazić tak: *jeżeli w dowolnym twierdzeniu o płaszczyźnie rzutowej zamienimy punkty na proste i odwrotnie, to pozostanie ono prawdziwe* – nazywa się to *dualnością.* To już jest egzotyczne, ale jeszcze nie przeraża.

Następny model, *na sferze*, będzie tylko pomocniczy. Mianowicie przetnijmy model środkowy ze sferą o środku w środku (gdzieżby indziej). Teraz „punkty" staną się parami punktów antypodycznych (czyli leżących na końcach jednej

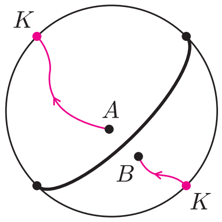
Marek Kordos, Instytut Matematyki,
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

średnicy), a „proste” – okręgami wielkimi tej sfery (czyli mającymi środek w środku sfery).



Rys. 5

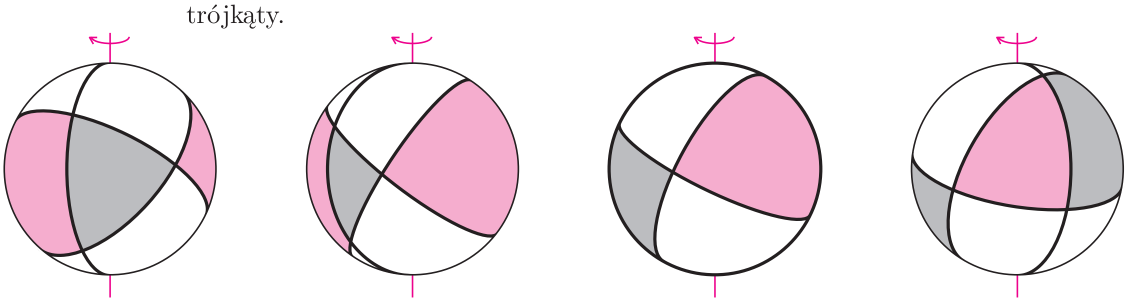
Jeśli jednak odpowiednio do rozstawu źrenic dobierzemy promień sfery, to może się zdarzyć, że zobaczymy dokładnie jej połowę. To, co będzie widać, nazywa się *modelem na półsferze*. Nowe punkty są tu punktami, z wyjątkiem tych, które leżą na brzegu półsfery – te mają na nim antypodycznego brata-bliźniaka (rys. 5). Nowe proste to półokręgi wielkie mające jednak utożsamione końce: przecież są one antypodyczne, a więc reprezentują ten sam punkt.



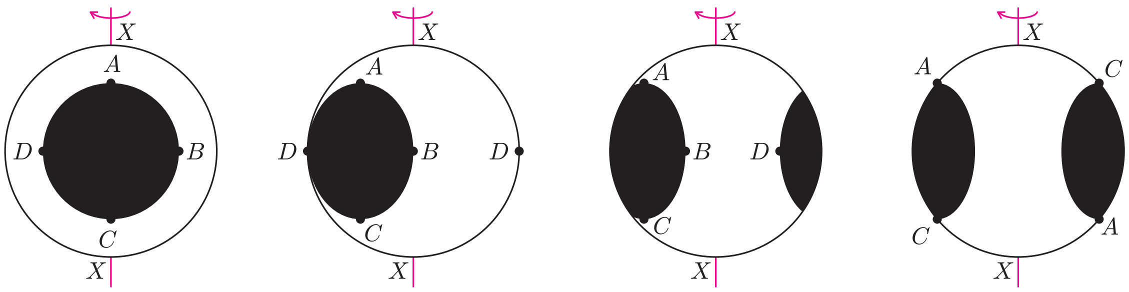
Rys. 6

Zauważmy tu bardzo już egzotyczną osobliwość: prosta nie rozcina płaszczyzny – cała leży po jednej jej stronie, co oznacza, że od dowolnego punktu do dowolnego innego można dojść, nie przecinając prostej (rys. 6).

Model na półsferze ma wielką zaletę – jest ruchomy, co pozwala oglądać narysowane w nim figury z różnych stron. Możemy mianowicie przez parę leżących na jego „brzegu” (nie jest to, oczywiście, żaden brzeg – prawda?) antypodycznych punktów poprowadzić (w przestrzeni) oś i obracać sferę względem tej osi. Pewne punkty będą przy tym obrocie ginęły z oczu, ale równocześnie będą się pojawiali ich bliźniaczy bracia, słowem – stale będzie wszystko widać, choć coraz to inaczej. Na rysunku 7 widzimy ilustrację korzyści, jakie z takiego obracania można wynieść: np. jak pokazać, że dowolne trzy nieprzecinające się w jednym punkcie proste dzielą płaszczyznę na cztery trójkąty.

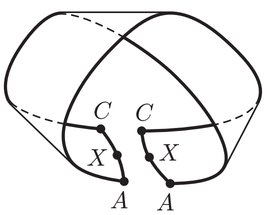

Rys. 7. Widać, że tak obszar szary, jak kolorowy jest trójkątem; wtykając gdzie indziej oś, można to pokazać dla pozostałych obszarów.

A teraz zobaczmy, co zostanie z płaszczyzny rzutowej, gdy wytniemy w niej okrągłą dziurę.



Rys. 8

I tu największe zaskoczenie: jeśli bowiem skleimy pozostałych jeszcze antypodycznych braci-bliźniaków (rys. 9), okaże się, że jest to wstęga Möbiusa! Płaszczyzna rzutowa jest to wstęga Möbiusa, do której brzegu przyklejono koło o takim samym obwodzie. Zatem *płaszczyzna rzutowa dziedziczy egzotyczne cechy wstęgi Möbiusa: jest jednostronna i nieorientowalna*! A o wstędze można poczytać w *Kalejdoskopie Matematycznym* Hugona Steinhausa, albo i w *Delcie* 9/2002 (s. 11).



Rys. 9

Czy tak powinna wyglądać płaszczyzna, jaką posługują się malarze stosujący perspektywę zbieżną? Z całą pewnością nikt się tego nie spodziewał, że dokonując pozornie błahego kroku – wyposażając prostą w dodatkowy punkt, mianowicie jej kierunek, otrzymamy aż tak bardzo egzotyczny, zagadkowy obiekt.

Przestrzenie rzutowe, w tym płaszczyzna, mają oczywiście szereg zalet (patrz np. *Delta* z 2003 r.: nr 3 (s.8), nr 8 (s.v), nr 12 (s.vii)), tak że obecnie są głównym rodzajem geometrii uprawianej przez zawodowych matematyków, ale to już zupełnie inna historia.

Paradoksalna gra

Większość znanych gier ma tę miłą własność, że kończy się po skończonej liczbie ruchów. Gdyby jednak gra polegała na tym, że gracze na przemian wskazują liczby naturalne, a wygrana na tym, że przeciwnik nie może już wskazać liczby większej, to taka gra musiałaby trwać nieskończenie długo (jeśli na chwilę zapomnimy o prawach biologii…).

Nazwijmy te pierwsze gry – kończące się zawsze po skończonej liczbie ruchów – grami normalnymi i zajmijmy się grą, której odpowiednią nazwą będzie „gra uniwersalna”.

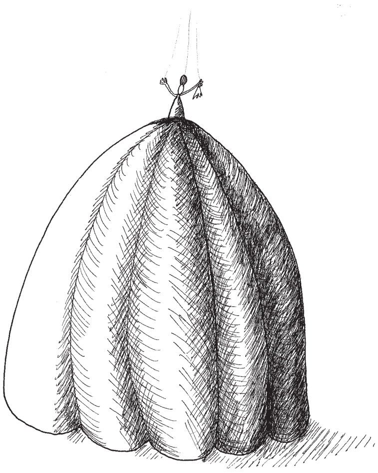
Oto reguły:
(1) Pierwszy gracz wybiera grę normalną.
(2) Drugi gracz wykonuje pierwszy ruch wybranej gry.
(3 –) Gracze wykonują na przemian ruchy wybranej gry zgodnie z jej regułami i zgodnie z jej regułami wyznaczają zwycięzcę.

Widać już, dlaczego gra jest „uniwersalna”. A czy gra uniwersalna jest normalna?

Zbadajmy wszystkie możliwości. Jeśli gra uniwersalna jest normalna, to można ją wybrać w pierwszym jej ruchu. Oto, jak mogłaby wtedy wyglądać rozgrywka:
(1) Pierwszy gracz wybiera grę uniwersalną.
(2) Drugi gracz wykonuje jej pierwszy ruch, który polega na wyborze gry normalnej. Wybiera grę uniwersalną.
(3) Pierwszy gracz wykonuje kolejny ruch w grze uniwersalnej, czyli wybiera grę normalną. Wybiera grę uniwersalną.
($4 - \infty$) Gracze na przemian wybierają grę uniwersalną.

Okazało się, że założenie, iż gra uniwersalna jest normalna, prowadzi do nieskończonej rozgrywki. Tak więc gra ta nie jest normalna.

Ale jeśli nie jest normalna, to nie wolno jej wybrać w pierwszym jej ruchu. Trzeba wybrać grę naprawdę normalną, a wtedy rozgrywka zakończy się w skończonej liczbie ruchów. Tyle tylko, że jeśli gra uniwersalna kończy się zawsze po skończonej liczbie ruchów, to… jest normalna. Wyszło na to, że gra uniwersalna jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest normalna. Paradoks!



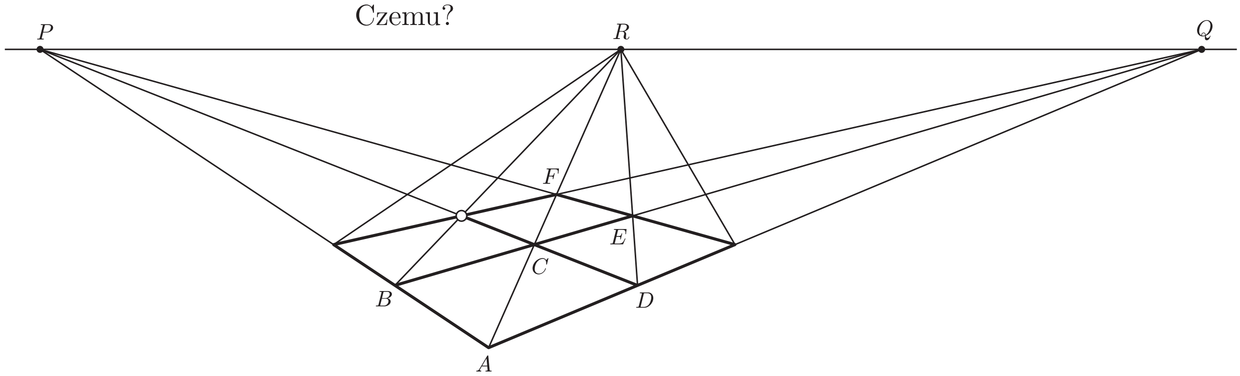
Takie lub podobne paradoksy pojawiały się nieraz w matematyce i logice. Niekiedy wynikały z nie dość precyzyjnego określania pojęć, niekiedy z nadmiaru swobody w budowaniu zdań. Jak ocenić słynne zdanie kłamcy, który powiada: „To, co teraz mówię, jest kłamstwem”? Prawdę mówi, czy kłamie? Cechą istotną tego zdania jest to, że mówi samo o sobie. Tak jak gra uniwersalna, która „gra w samą siebie”. W tym kryje się niebezpieczeństwo.

Dlatego matematycy najczęściej wykluczają podobne konstrukcje z arsenału dopuszczalnych środków. Trochę szkoda, ale przecież matematyka na paradoksach rosnąć nie może!

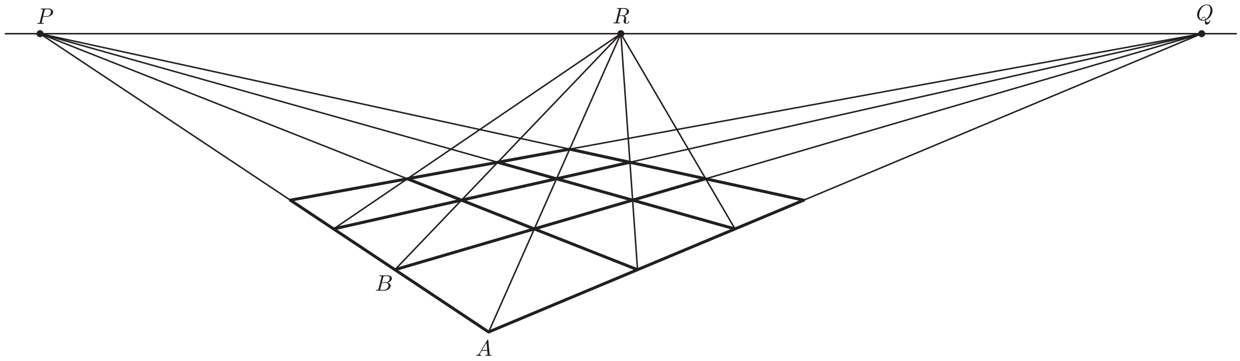
Wiktor BARTOL

Narysuj i pomyśl

Chcemy narysować siatkę kwadratów leżących na poziomej płaszczyźnie. W tym celu rysujemy poziomą prostą – horyzont płaszczyzny – a na niej obieramy dwa punkty P i Q: będą to kierunki boków kwadratów. Niech jeszcze R (narysujmy go jako środek PQ) będzie kierunkiem jednej z przekątnych kwadratów. Obierzmy dodatkowo punkt A – wierzchołek jednego z kwadratów siatki – i na prostej AP punkt B – sąsiedni wierzchołek. To pozwala już jednoznacznie nakreślić siatkę – należy po prostu przez kolejne punkty rysować kolejne proste o właściwych kierunkach. Na rysunku poniżej prosta BQ (bok) przecina prostą AR (przekątną) w punkcie C – jest to trzeci wierzchołek kwadratu. Prosta PC pozwala znaleźć D – czwarty wierzchołek. Przecięcie BQ z DR daje E. Prosta EP daje kolejny kwadrat siatki. I teraz widzimy, że czy przetniemy BR z CP, czy też z FQ, otrzymamy ten sam punkt. Czemu?



Jeśli nawet nie umiemy odpowiedzieć na to pytanie, możemy kontynuować rysowanie, otrzymując coraz to więcej kwadratów siatki.



Teraz coraz więcej prostych będzie przechodzić przez liczne, otrzymane w rozmaity sposób punkty i wypada pomyśleć, czemu się tak dzieje? Można też spróbować coś pomierzyć: okazuje się, że

$$|BC| \cdot |EQ| = |BQ| \cdot |EC|, \quad \text{podobnie} \quad |AC| \cdot |FR| = |AR| \cdot |FC|,$$

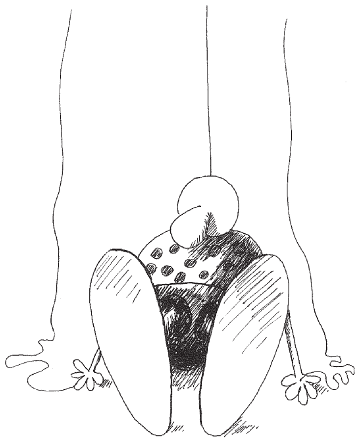
choć niczego nie odmierzaliśmy – czemu?

Wszystkie „drugie" przekątne kwadratów siatki okazują się równoległe do PQ – dlaczego?

A gdy narysujemy R w innym miejscu odcinka PQ i powtórzymy rysunek, to wszystkie „drugie" przekątne przetną się w jednym punkcie S leżącym na prostej PQ i spełniającym warunek

$$|PR| \cdot |QS| = |PS| \cdot |QR|.$$

Czemu tak się dzieje?



Odpowiedź brzmi: to są twierdzenia geometrii rzutowej. *Disce puer geometriae!* (oczywiście *puella* też nie powinna się wzbraniać).

Marek KORDOS

Literatura jako matematyka

Agnieszka SZUREK

Wiele zadań matematycznych – o ile mnie pamięć nie myli, bo miałam z nimi kontakt dość dawno – zaczynało się od słów: „umówmy się, że...". Jeśli patrzymy na związki między matematyką i literaturą i chcemy widzieć je nieco głębiej niż tylko jako wzajemne zapożyczenia motywów czy metafor, wydaje mi się, że powinniśmy spojrzeć na te właśnie słowa. Kategoria umowności, fikcji, jest ważnym punktem wspólnym obu dziedzin. W końcu utwory literackie też są poprzedzone takim domyślnym „umówmy się" – umówmy się, że istniał ktoś taki jak Hamlet albo Sherlock Holmes, że to Skrzetuski przeniósł wiadomość z oblężonego Zbaraża, że jedną z ras mieszkających w Śródziemiu są hobbici. Niektórzy literaturoznawcy określali to jako „nadzdanie" i nadawali mu różną formę (np. „Zapraszam was, żebyście wyobrazili sobie świat, w którym...").

Przypis M. Szurka. Teksty matematyczne pisze się na ogół w pierwszej osobie liczby mnogiej. Nie chodzi tu *o pluralis maiestatis*, tylko o zaproszenie Czytelnika przez autora do wspólnej wycieczki po świecie matematyki.

Świat przedstawiony w dziele fikcji literackiej jest fikcyjny w całości – a zatem Jagiełło w „Krzyżakach" jest fikcyjny dokładnie tak samo jak Zbyszko z Bogdańca, a Warszawa z „Lalki" nie jest bardziej prawdziwa niż ogród Królowej Kier z „Alicji w Krainie Czarów". Jeżeli w szkole proszono nas o wypisanie w dwóch oddzielnych kolumnach fikcyjnych i historycznych postaci z „Potopu", było to źle sformułowane polecenie.

Agnieszka Szurek, dr filologii polskiej

Definiując pojęcie fikcji, literaturoznawcy za jej główne cechy uznają czasami nieasertoryczność i nieprawdziwość. To, w jakim stopniu dane dzieło odpowiada rzeczywistości, nie decyduje o jego fikcyjnym bądź niefikcyjnym charakterze. Nawet najbardziej zafałszowana książka historyczna pozostaje książką historyczną; nawet ściśle oparta na autentycznych faktach powieść pozostaje powieścią. Można oczywiście patrzeć na świat dzieła literackiego jako na pewną hipotezę lub możliwość; można wreszcie widzieć w nim twór czysto językowy. Wiele spośród teorii fikcji za jej istotę uważa specyficzne zastosowanie języka. Język w dziele fikcji literackiej pasożytuje na wypowiedziach „serio", a fikcja jest bardzo często porównywana z lustrem, obrazem, odwzorowaniem – wiernym lub zniekształcającym rzeczywistość. Jest zatem, jak często się przyjmuje, naśladowaniem, imitacją – imitacją świata albo też (Ingarden) imitacją normalnego języka.

W dziele literackim, jak wszyscy zdajemy sobie sprawę, mogą występować „bardziej" i „mniej" fikcyjne fragmenty. Czasami autor umyślnie „osłabia" iluzyjność dzieła, przypomina czytelnikowi, że oto ma przed sobą utwór literacki; łamie zasadę umowności. Tego rodzaju chwyty zacierające granice między prawdą a fikcją są bardzo popularne we współczesnej literaturze i kulturze, stosowano je jednak od dawna. Nieco podobnym chwytem jest „teatr w teatrze". Klasycznym przykładem jest tutaj scena ze „Snu nocy letniej" Szekspira. Jacek Bolewski ujmuje to tak:

Mistrzostwo Szekspira wyraża się w tym, iż obnażając „słabość" odgrywanego na scenie widowiska, daje zarazem odczuć autentyczną moc teatru. Przez ukazywanie fikcji jako fikcji widowisko przybliża się do prawdy nie mniej skutecznie, niż imitując rzeczywistość tak, aby fikcyjne wydarzenia jawiły się jako prawdziwe. Rozpoznanie teatru w teatrze sprawia, że na tle fikcji demaskowanej zapomina się o fikcji demaskującej: jakże prawdziwi wydają się zarówno rzemieślnicy, jak i mityczni bohaterowie, gdy włączają się w grę, której przedmiotem są losy Pirama i Tyzbe. Dopiero po skończeniu tego teatru w teatrze może się dokonać ostateczne przejście – do rzeczywistości poza teatrem.

J. Bolewski, *Sen nocy letniej: teatralne przebudzenie*, w: *Objawienie Szekspira*, Warszawa 2002, s. 171.

Jako następny przykład rozważmy dramat Cypriana Kamila Norwida *Aktor*. Dramat ten jest rozważaniem samej istoty umowności, gry, fikcji. Warto krótko przypomnieć treść. Hrabia Jerzy stracił cały majątek; zmuszony był zastawić zamek i przenieść się, z matką i siostrą, do skromnego mieszkania w mieście. Przed nimi zataił jednak całą sytuację, przedstawiając wyjazd jako wakacje. Hrabina ma słabe zdrowie i nie przeżyłaby takiego wstrząsu, zaś siostra, Eliza, ma właśnie wyjść za mąż za młodego „biznesmena", Erazma. Jerzego poznajemy, gdy czeka na efekt swoich desperackich posunięć finansowych – ostatnie pieniądze zainwestował w znaną międzynarodową spółkę. Początek dramatu ukazuje go w chwili, gdy dowiaduje się o bankructwie tej spółki. Mimo to jednak Jerzy nadal podtrzymuje fikcję wobec matki i siostry. Czyni to tak skutecznie, że kiedy Erazm mówi wprost o ruinie i przepadku majątku, żadna z kobiet mu nie wierzy. Jerzy znajduje zresztą nieocenioną pomoc w osobie dawnego szkolnego kolegi, słynnego aktora. Kiedy Jerzemu braknie sił, by podtrzymywać fikcję, przyjaciel przejmuje jego rolę. Elizie i jej matce przedstawia się jako „finansista" i, owszem, powiadamia je o bankructwie spółki, lecz wplata tę wiadomość w romantyczno-rycerską historię o dwóch konkurentach do ręki pewnej księżniczki.

Biedniejszy, lecz i oczywiście szlachetniejszy z nich, miał posłużyć się fortelem, rozpuszczając fałszywą plotkę o tym, że wraz z bankructwem spółek przepadł posag księżniczki.

Wydaje się, że w tym przypadku bardzo łatwo jest widzieć fikcję jako kłamstwo, ucieczkę od nieprzyjemnej rzeczywistości. A jednak to te postacie dramatu, które najbardziej trzeźwo, bez złudzeń, patrzą na rzeczywistość, są postaciami negatywnymi i właśnie one są pełne fałszu, jak pokazuje to chociażby zachowanie Erazma.

Jaki wpływ ma natomiast życie w fikcji, tworzenie coraz to nowych zmyśleń, na życie głównych bohaterów? Eliza, dość naiwnie zachwycając się romantyczną historią, stawia się w położeniu księżniczki – i dzięki temu dostrzega interesowność swojego narzeczonego.

Czym jest, w myśl przytoczonych na początku definicji fikcji, opowieść aktora? Bardzo zdeformowanym odwzorowaniem rzeczywistości? Po części tak, ale chyba nie o to w niej chodzi. Jest stworzeniem nowego porządku, który wykorzystywał pewne elementy rzeczywistości, lecz umieszczał je w całkowicie nowych układach. Hrabina, w miarę upływu czasu, coraz wyraźniej bierze fikcję za rzeczywistość – do tego stopnia, że kiedy wreszcie wszystkie meble i obrazy z domu zostają sprzedane, ten fakt nie dociera w ogóle do jej świadomości. Widzi je nadal tak samo wyraźnie, jak gdyby wciąż były na swoich miejscach. Nie jest to ani schizofrenia, ani życie w wygodnym kłamstwie – Hrabina jest postacią, której w dramacie towarzyszy aura niemal świętości.

Sam główny bohater wreszcie z „aktora” w życiu codziennym staje się aktorem na scenie: przygotowuje się do występu w rozreklamowanym (i to również z pomocą pewnej fikcji!) przedstawieniu „Hamleta”. Przedsięwzięcie okazuje się wielkim finansowym sukcesem; ostatnie słowa Jerzego informują, że zaczął on spłacać swoje długi. Rzecz charakterystyczna, nawet po zejściu ze sceny, Jerzy nadal gra Hamleta i odzywa się jego słowami („Reszta – jest tylko ciszą!...”).

Wszystkie te gry, udawania i zmyślenia wchodzą w obręb dramatu Norwida; struktura fikcji jest więc w tym utworze wielowarstwowa. Czemu służy odkrywanie kolejnych warstw? Nie jest to rozwiewanie kolejnych złudzeń. Każda kolejna fikcja lepiej odsłania rzeczywistość; wszystkie wzięte razem mają odsłonić coś przed widzem czy czytelnikiem.

Pora wrócić do bardziej matematycznych rozważań. Istota fikcji w dramacie Norwida nie polegała na odwzorowywaniu, na tworzeniu imitacji czegokolwiek – świata zewnętrznego czy zdań „normalnego” języka. Słuszniej byłoby zatem powiedzieć, że światy fikcyjne nie są odbiciem jakiś wybranych elementów rzeczywistości, ale pewną kompletną strukturą. Jeśli w obrębie tej struktury zostanie ustanowione jakieś prawo, działa ono cały czas, niezależnie od twórcy. Kiedy dzieci bawią się, że podłoga to morze, a dywaniki to tratwy, to nawet jeśli nie zauważą jakiegoś dywanika, on też „liczy się” jako tratwa. Ta sama zasada obowiązuje w przypadku dzieł literackich. Autor nie musi o wszystkim mówić; wystarczy, że ustanowi prawa, a ten świat działa dalej „bez niego” i każdy przedmiot, każdy szczegół raz wprowadzony do takiego fikcyjnego świata generuje dalsze „prawdy w fikcji”.

Sceny z dramatu Norwida ilustrują też kolejne fundamentalne dla fikcji zagadnienie. Fikcja nie istnieje bez uczuciowego zaangażowania odbiorców. Na tym polega istota przeżycia estetycznego. Powieść, w którą odbiorca się nie zaangażuje, choćby w minimalnym stopniu, „nie zdarzyła się”, nie zaistniała jako fakt estetyczny, była niefortunnym aktem mowy. Kwestia emocjonalnego zaangażowania odbiorców jest zatem fundamentalna dla zrozumienia dzieł sztuki – ale zarazem najbardziej kłopotliwa w opisie. Widać to w przypadku wprowadzanego przez niektórych „operatora fikcyjności” F. Mamy zatem oczywiście

$$\text{Hamlet umarł} = \text{Hamlet umarł w „Hamlecie”} = F(\text{Hamlet umarł}).$$

Ten operator nie sprawdza się, gdy chcemy opisać emocje, jakie budzi dzieło sztuki. Dzieje się tak dlatego, że emocje, które wywołują dzieła fikcji literackiej, nie są imitacją prawdziwych emocji, nie są ich obrazem za pomocą operatora F. To te same uczucia, tylko inaczej przeżywane. Jeśli w utworze są zastosowane chwyty „demaskujące”, nie niweczą one emocji. Wręcz przeciwnie, wzmacniają je, „destylują” poprzez świadomość fikcyjności. Mamy na przykład:

$$\text{Hamlet postąpił słusznie} \neq F(\text{Hamlet postąpił słusznie})$$

i

$$\text{Hamlet postąpił słusznie} \neq (\text{Hamlet postąpił})\ F(\text{słusznie}).$$

Przypomnijmy raz jeszcze scenę z dramatu Norwida, kiedy Hrabina widzi nieistniejące obrazy. Fakt ich nieistnienia w niczym nie zmienia jej uczuć. Fikcja nie powstaje zatem jako coś wtórnego, naśladowanie, nie na zasadzie zastosowania wobec istniejącej rzeczywistości jakiegokolwiek rodzaju przekształceń. Jest naturalnym sposobem oglądania i poznawania świata. Fikcja nie przysłania rzeczywistości. Wręcz przeciwnie: nie dostrzegalibyśmy rzeczywistości, gdyby nie fikcje (a dramat Norwida zdaje się pokazywać, że im bardziej będą one odległe od „realiów życia”, tym lepiej). W fikcji „nic” przecież nie ma, a jednak to „nic” odczuwamy jako istniejące. I na to właśnie zwracał uwagę Szekspir w „Śnie nocy letniej”. Książę Tezeusz mówi tam:

> *Domysł nieznanych rzeczy (...)*
> *W kształt je obleka i zwiewne nicości*
> *Przyszpila nazwą do miejsca w przestrzeni.*

Naturą fikcji jest więc to, że „z niczego, mocą wyobraźni” powołuje do życia kształty zajmujące przestrzeń. I to właśnie, mam nadzieję, jest matematyką literatury.

Matematyka jako literatura

Michał SZUREK

Michał Szurek, Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Może się wydawać, że w tytule artykułu jest pomyłka. Co może mieć wspólnego matematyka z literaturą? Czy sztywna, zimna matematyka, w której nie ma miejsca na różnicę zdań na temat prawdziwości dawno udowodnionych twierdzeń, nie jest pod każdym względem przeciwieństwem humanistyki, w której nic nie jest do końca precyzyjnie zdefiniowane i rozwój polega w dużej mierze na ścieraniu się poglądów? Czy fikcja literacka nie jest przeciwieństwem prawdy matematycznej?

Stosuję niekiedy w swoich wykładach pewien trick. Zaczynam mianowicie zdanie: „Matematyka, jako nauka humanistyczna...", zawieszam głos i czekam na reakcję. Wcześniej czy później ktoś zawsze zaprotestuje: przecież matematyka jest nauką ścisłą! „Tak jest", odpowiadam, „jest to jedyna humanistyczna nauka ścisła". O tej dualności matematyki my, matematycy, wiemy bardzo dobrze. Warto, żeby wiedzieli o tym i wszyscy inni. Warto, żeby przedstawiciele nauk uznawanych tradycyjnie za humanistyczne uczyli się czegoś od nas... i na odwrót; my od nich. Zacznijmy od narzucających się, dość płytkich analogii.

1. Matematyka dostarcza wątków literackich.
Jest to temat na najzupełniej poważną pracę; choć raczej nie pracę naukową. Omówię to w sms-owym skrócie (telegramów poczta już nie przyjmuje).
W języku potocznym używamy na co dzień kilku czy kilkunastu zwrotów matematycznych. Jeśli coś wiemy na pewno, możemy to podkreślić, mówiąc, że jest to *pewne jak dwa a dwa cztery*. Rzecz niemożliwa do wykonania, osiągnięcia, urzeczywistnienia to *kwadratura koła*, a bardzo przybliżone rachunki to *pi razy oko*. Jeżeli nasz mały synek chce zobaczyć, co jego zabawka ma w środku, to *rozłoży ją na czynniki pierwsze*. Człowiek *prostolinijny* z pewnością ułoży sobie z każdym stosunki na *płaszczyźnie porozumienia*.
Niekiedy możemy za pomocą matematyki wyrazić to, co bez niej przekazać jest bardzo trudno:

Dlaczego sobie Pani ze mnie kpi?
Cierpieniom moim niech nadejdzie kres,
Siła mojej miłości równa się π
Pomnożone przez $\sqrt{\frac{2(P+Q)(l^2+a^2)+Gy^2}{sg(2(P+Q)a+Gs)}}$

(Julian Tuwim)

Ale używając alegorii matematycznych, można niekiedy wyrazić głębszą myśl. Odgrodzenie się od świata za pomocą matematyki – choć wyeksploatowane niemal jak rym Tatry-wiatry – może przybierać groteskowe formy (jak u Kornela Makuszyńskiego, *Szatan z siódmej klasy*, gdzie Iwo Gąsowski próbuje rozwiązać równanie Fermata).

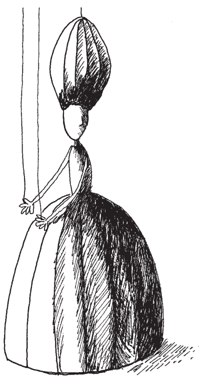
Bardzo udatnie wykorzystał liczby zespolone Robert Musil – posiadający przecież wykształcenie matematyczne – do opisu roli intuicji i wiary (nie mówię o sensie religijnym) w procesie twórczym. W powieści „Niepokoje wychowanka Törlessa" nauczyciel tak charakteryzuje swego ucznia:

„... Törless odszukał mnie kiedyś, by prosić o wyjaśnienie pewnych zasadniczych pojęć matematycznych, w tym również liczb urojonych, które niewyszkolonemu umysłowi istotnie mogą sprawiać trudności. Muszę nawet przyznać, że wykazywał przy tym niezaprzeczalną bystrość umysłu, jednak z istną manią wyszukiwał tylko takie rzeczy, które w pewnej mierze zdają się oznaczać lukę w przyczynowości naszego myślenia – przynajmniej dla niego. (...) Powiedziałem, że w tych wypadkach wydaje mi się, iż samym myśleniem nie możemy przejść na drugą stronę, lecz potrzebujemy jakiejś innej, wewnętrznej pewności, która nas na tamtą stronę przeniesie.

(cyt. według przekładu Wandy Kragen, Wydawnictwo Literackie, Kraków 1993).

Sam Törless mówi do kolegi:

„Pomyśl sobie: w takim rachunku występują z początku całkiem solidne liczby, które mogą przedstawiać metry, ciężary lub coś innego, równie realnego, i przynajmniej są prawdziwymi liczbami. Przy końcu rachunku też są takie liczby. Ale te liczby łączy coś, czego nie ma. Czy to nie jest jak most, w którym jest tylko pierwsze i ostatnie przęsło, a przez który przechodzi się mimo to tak pewnie, jak gdyby stał cały? Dla mnie w takim rachunku jest coś, co powoduje zawrót głowy, jak gdyby kawałek drogi prowadził Bóg wie dokąd".



2. Metafizyczna siła przyciągająca matematyki.
W eseju *Matematyk i mistyk* (w tomie *Mini wykłady o maxi sprawach*, wyd. Znak 1997–1999) Leszek Kołakowski przyznaje najpierw, że nie wie, co to jest całka ani nie pamięta już, co to sinus, potem daje jednak dowód, że doskonale rozumie, o co chodzi w matematyce.

Na pośmiewisko łatwo może się wystawić ten, kto matematykiem ani mistykiem nie będąc, zabiera się do rozważań na temat stosunku między matematyką a mistyką. [...]. Z drugiej strony jest w matematyce rodzaj metafizycznej siły przyciągającej, która z nauką, a tym bardziej z umiejętnością rozwiązywania równań, nic wspólnego nie ma, a która – rzecz podziwienia godna – pokrewna jest tej sile, jaka promieniuje ze znanych nam przekazów doświadczenia mistycznego.

A jako ilustracja tej „metafizycznej siły przyciągającej” niech posłuży wyimek z powieści Igora Neverly'ego *Zostało z uczty bogów*:

– Matematyka? – spytałem. – Ty lubisz matematykę?!

– Ogromnie. W szkole pomagałam koleżankom nawet ze starszych klas, a teraz tak sobie czytam dla przyjemności, rozwiązuję. To piękne.

– Co, mianowicie?

– A chociażby binom Newtona.

– Ależ to koniec algebry, zadanie maturalne! Na tym piekielnym binomie, słyszałem, najczęściej obcinają, ja jeszcze do tego nie doszedłem, a ty tak sama? Byłaś w gimnazjum? W której klasie?

– W piątej, trzy lata temu...

Podczas kolacji i potem, gdy robiła sobie posłanie na podłodze pod oknem, zdołałem powypytywać i wydobyć sporo innych szczegółów z jej życia, nie podważały jednak w niczym zdumienia – Nadia i binom! – nie pomniejszały kontrastu – hoża, czarnobrewa, z wiejska wyglądająca dziewczyna i ta jej matematyka, ze wszystkich nauk najbardziej dla mnie antypatyczna, kojarząca się zawsze z Antypodą. Czytuje stroniczki algebry dla przyjemności, coś podobnego! A powieści, spytałem, a poezje? Owszem, odrzekła, ale to przecież same słowa. – Ty wolisz znaki? – Naturalnie, tu się czuje rzeczy prawdziwe i wieczne...

3. Figury stylistyczne w matematyce.
Nie należy też całkiem poważnie traktować następnych dwóch przejawów obecności teorii literatury w matematyce. Językoznawcy skłaniają się do poglądu, że sam język jest ze swej natury metaforyczny, że to, co uważamy w nim za *naturalne*, jest tylko figurą retoryczną, przenośnią, której figuratywność dawno już poszła w zapomnienie. Ponieważ w matematyce nic nie może być oparte na niedopowiedzianych przesłankach, metafora musi stać się natychmiast metonimią. Często spotykany w podręcznikach matematyki zwrot

linia prosta $ax + by + c = 0$

nie jest metaforą, lecz dzięki odkryciom Kartezjusza – właśnie metonimią. Dla samych matematyków zaskoczeniem będzie zaś to, że nadzwyczaj często używają synekdochy. Otóż dowiadujemy się w szkole, że trójkąt to część płaszczyzny ograniczona trzema odcinkami, przecinającymi się w trzech punktach. Więc zwrot „*trójkąt ABC*” to klasyczna synekdocha, *pars pro toto*, część zamiast całości. Często sama możliwość użycia takiej figury retorycznej musi być poprzedzona dowodem poprawności: płaszczyzna jest wyznaczona przez trzy punkty, mając trzy wysokości, można skonstruować trójkąt i tak dalej.

4. Matematyka jako hermeneutyka.
W literaturoznawstwie są dwie zasadniczo odmienne metody: poetyka i hermeneutyka. Można w badaniach matematycznych dopatrywać się jednej i drugiej. Poetyka to badanie, dlaczego dany tekst wpływa na czytelnika tak, a nie inaczej. Co powoduje, że tekst jest „lekki”, „dramatyczny”, „ironiczny” ? Hermeneutyka zagląda pod podszewkę tekstu – próbujemy znaleźć ukryte interpretacje i na nowo odczytać zawarte w tekście myśli. Jeśli zatem zastanawiam się, dlaczego twierdzenie Pitagorasa jest ważne, to zbliżam się do poetyki. Wchodzimy w obszar hermeneutyki wtedy, gdy formułę Pitagorasa uogólniamy na przykład na trójkąty sferyczne lub na trójkąty w przestrzeniach funkcyjnych, albo gdy badamy samą *formę algebraiczną* $a^2 + b^2 = c^2$.

Rozwiązanie zadania M 1097.
Oznaczmy $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Wykażemy, że $a = d^2$.

Ponieważ liczba d^2 jest dzielnikiem liczby ab, więc d^2 jest również dzielnikiem liczby $a^2 + b^2 + a$. Ponadto $d^2 \mid a^2 + b^2$, skąd uzyskujemy podzielność $d^2 \mid a$.

Z drugiej strony, liczba $a^2 + b^2 + a$ jest podzielna przez a, skąd wynika, że $a \mid b^2$. Zatem liczba a jest wspólnym dzielnikiem liczb a^2 i b^2, skąd wniosek, że a jest dzielnikiem liczby $\mathrm{NWD}(a^2, b^2)$, czyli $a \mid d^2$. W efekcie $a = d^2$.

5. Wszystko jest w Księdze.
Nieco poważniej można potraktować alegorię „matematyka jako obraz Księgi”. Od pewnego bowiem czasu wśród matematyków robi karierę powiedzenie Pála Erdősa:

Pan Bóg ma pozaskończoną Księgę, w której zapisane są wszystkie dowody i gdy jest dla nas szczególnie łaskawy, pokazuje nam jej mały fragment. Myślę, że nawet nie trzeba wierzyć w istnienie Boga, a tylko w istnienie tej Księgi.

Pojawiają się więc książki o *dowodach z Księgi*, o *liczbach z Księgi*. O algorytmach z Księgi jeszcze nie słyszałem, choć niewątpliwie algorytm Euklidesa na wyznaczanie największego wspólnego dzielnika dwu liczb naturalnych na pewno by wszedł do takiego spisu.

6. Fikcja i zawieszenie niewiary.

Najważniejsza i zasadnicza analogia to jednak podobieństwo fikcji literackiej do fikcji matematycznej. Twory matematyczne powstają w naszych, ludzkich umysłach i – przynajmniej według kierunku filozoficznego zwanego nominalizmem – nie mają innej racji bytu.

. . . my, panie,
o idealnym mówiliśmy kole,
Bez względu, jakie ma zastosowanie:
Czy kto zeń pierścień ślubny lub niewolę
Czy kto triumfu ark, kościoła banię
Lub do zegarka łańcuch zeń utworzy.
Cyprian Kamil Norwid („Promethidion")

Thomas Kuhn w latach sześćdziesiątych XX wieku wprowadził pojęcie paradygmatu. Można powiedzieć, że jest to zbiór idei lub procedur, które implicite mówią naukowcom, w co wierzyć i jak pracować. Dając dowód niezrozumienia, o co chodzi w matematyce, Kuhn wypowiada pogląd, że nie niesie ona znaczenia, że składa się z reguł syntaktycznych bez żadnej treści semantycznej. Podobne zdania wypowiadają niekiedy również sami matematycy i trudno uwierzyć, że... sami w to wierzą. Jeżeli matematyk twierdzi z całą powagą, że Królowa Nauk to tylko przekształcanie napisów na kartce papieru/tablicy/ekranie komputera – i jednocześnie zajmuje się tym z pasją – to może powinien zastanowić się, czy nie jest... zmęczony psychicznie?

Najsilniejszym filozoficznym aspektem łączącym bardzo ściśle matematykę i literaturę stanowi koncepcja „zawieszenia niewiary". Nawiązuje ona do fikcji – stanowiącej przecież fundament konstrukcji tekstu literackiego i teorii matematycznych.

Omawiałem kiedyś z profesorem polonistyki szczegóły dotyczące mojego wystąpienia na konferencji retorycznej na UW. Chodziło o pojęcie fikcji. Rozmowa miała miejsce w bufecie. Akurat wszedł mój bardzo dobry student (obecnie już doktor matematyki). „Zróbmy eksperyment", powiedziałem do polonisty i bez wyjaśniania, o co chodzi, zapytałem studenta, co to jest fikcja, jak rozumie on to pojęcie. Odpowiedział bez wahania: to to samo, co nieprawda. Ale już na ostatniej głosce wypowiedzi zawahał się i jednym tchem uzupełnił definicję: to raczej to, co jest wytworem ludzkiego umysłu.

W zdaniu „Natenczas Wojski chwycił na taśmie przypięty swój róg bawoli . . ." pierwsze ze słów nie oznacza chwili, w której czytam naszą epopeję narodową, ani czasu jej powstania. Oznacza chwilę na osi (fizyk by powiedział: strzałce) własnego czasu utworu. Czas ten jest niezależny od zewnętrznego i płynie w specyficzny sposób, charakterystyczny dla danego utworu literackiego. Tekst literacki ma swoją własną czasoprzestrzeń, wytwarza swój własny świat, w który można wierzyć lub nie. Gdy czytając powieść, „nie możemy się od niej oderwać", wiemy, że takiego świata nie ma... a jednak na czas czytania tę niewiarę zawieszamy. Co nam to daje? Jaki jest sens na przykład umieszczania na Krakowskim Przedmieściu w Warszawie (w pobliżu Uniwersytetu) tablic informujących, że tu mieszkał Wokulski, a tam Rzecki? Jaki jest cel istnienia tablicy w celi w Wilnie, że tu zmarł Gustaw, a narodził się Konrad?

Może zrozumiemy to, prześledziwszy sposób, w jaki do matematyki zostały wprowadzone liczby urojone. Można powiedzieć, że liczba urojona jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby ujemnej. „Takie liczby nie istnieją" odpowie chyba każdy. Nieprawda. Prawdą jest tylko, że nie ma takich liczb *rzeczywistych*.

7. Równania kwadratowe i zawieszenie niewiary.

Zawieszenie niewiary przynosi dobre rezultaty przy rozwiązywaniu równań kwadratowych. Chcąc rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 + 10x + 21 = 0$, przepisuję je w postaci $x^2 + 10x = -21$. Robię rysunek, na którym „widzę", że pole pewnej figury jest równe minus 21. Nie ma to sensu? Tak, ale zawieszamy niewiarę. Przyjmijmy, że jednak sens to ma. Wykonamy obliczenia . . . i wyjdzie nam coś interesującego: dobre, prawdziwe pierwiastki naszego równania kwadratowego. Skoro zatem „to działa", to może nie jest bez sensu? I na tym – zdaniem autora tego artykułu – polega ścisła analogia między matematyką a literaturą. Gdy czytamy o Sherlocku Holmesie, wiemy, że nigdy nie istniał... i chętnie zawieszamy naszą niewiarę. Pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej wyciągnąć się nie da . . ., ale jeżeli zawiesimy niewiarę, to otrzymamy prawdziwe, porządne pierwiastki. Dla równań stopnia trzeciego zawieszenie niewiary (tj. wprowadzenie liczb urojonych) jest jedynym sposobem wyprowadzenia wzorów na pierwiastki.

8. Niebo gwiaździste nade mną, prawo moralne we mnie.

Niewiele jest przesady w powiedzeniu, że koncepcja zawieszenia niewiary przenika całą naszą egzystencję. Tak, czy owak, wszystko zaczyna się i kończy matematyką. Ale to już naprawdę zupełnie inna historia.

Zawieszenie niewiary a równania kwadratowe

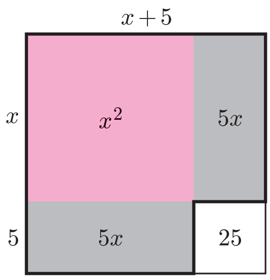
Jak rozwiązać równanie

$$x^2 + 10x + 21 = 0,$$

czyli

$$x^2 + 10x = -21.$$

Zacieniowana figura („gnomon") ma pole... -21. Polem „dużego" kwadratu jest więc ...tak, $-21 + 25 = 4$. A więc $(x+5)^2 = 4$, tj. $x + 5 = 2$ lub $x + 5 = -2$, skąd $x = -3$ lub $x = -7$.



Rysunek jest zupełnie niedobry, ale wynik końcowy w porządku! Na tym polegały właśnie niepokoje wychowanka Törlessa: most łączący dwa brzegi wisi w powietrzu, a jednak można po nim pewnie chodzić, jeśli się wierzy!

Koncert kwantowy

Muzyk swój kunszt może wykazać dopiero, gdy ma do dyspozycji odpowiedni instrument. Marzeniem każdego skrzypka są legendarne stradivariusy (przynajmniej przekonani są o tym ci, którzy na skrzypcach nie grają). Wykonanie instrumentu o wyjątkowym brzmieniu wymaga nieprzeciętnych umiejętności, graniczących z magią. Zdobywane przez długie lata doświadczenie często pozostaje tajemnicą firmy. Jest przekazywane „z ojca na syna". Prawie dla każdego rodzaju instrumentu można podać tę „najlepszą" firmę, często sygnowaną nazwiskiem jej założyciela. Czy słyszeliście jednak o firmie *Mohanty*? Pewnie nie słyszeliście, a szkoda. Skonstruowano w niej jedyny w swoim rodzaju instrument. Nigdy nic, co „ręką ludzką uczynione", nie grało w taki sposób.

Zadziwiającym instrumentem [1], któremu poświęcone są bieżące aktualności, jest pokazany na zdjęciu... grzebień. Może powiecie, że nie słyszeliście jeszcze o wirtuozach grzebienia? Przyznam się, że do niedawna ja również nie słyszałem. Sprawa trochę się wyjaśni, gdy dokładniej opiszemy to coś, co pokazane jest na zdjęciu. Konstruktorzy nazywają swój instrument anteną, a nie grzebieniem. Ale czy ktoś kiedyś słyszał, żeby grać na antenie?

Widoczne na zdjęciu (mikrografii zrobionej za pomocą mikroskopu elektronowego) coś może budzić więcej skojarzeń. Najczęściej wydaje się przypominać szkielet „lub coś w tym rodzaju" jakiegoś żywego organizmu [2]. Gdyby to jednak miał być kręgowiec, to musiałby być wyjątkowo mały. Pokazany szkielet ma długość około 10 μm, szerokość 400 nm, nie licząc żeber, które mają długość 500 nm. Porównywalnej wielkości są roztocza.

Grzebień jest wykonany z monokryształu krzemu za pomocą litografii elektronowej i „nanomachinacji" (angielski termin *nanomachining* został użyty przez autorów pracy [1], ale bez żadnego wyjaśnienia, na czym innym niż litografia ta machinacja polegała). Z jednej strony został przygotowany kontakt elektryczny ze złota (słabo widoczna jaśniejsza warstwa na bliższej płytce kończącej grzebień).

Skoro instrument mamy już przygotowany (opisany), to należałoby na nim zagrać. Autorzy zaangażowali w tym celu znanego wirtuoza – Lorentza. Wystarczyła im jego siła, osoba nie była potrzebna. Instrument umieścili w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 16 T skierowanej prostopadle do osi grzebienia. Jako smyczka użyto prądu o określonej częstości podawanego poprzez złotą elektrodę. Siła Lorentza wymusza w takim przypadku drgania instrumentu.

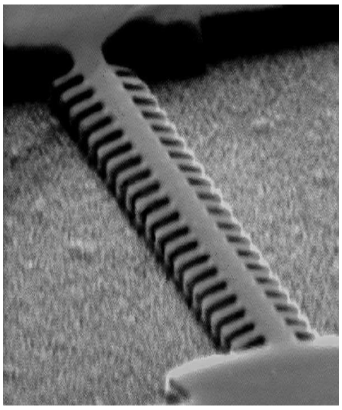
Jak silny może być tak wzbudzany dźwięk? Wcześniej w podobnych urządzeniach udawało się uzyskać amplitudy rzędu femtometrów. To nie pomyłka. Chodzi o amplitudy rzędu rozmiarów jąder atomowych! Czyli tysiące razy mniejsze od rozmiarów atomu. Skoro te ruchy są tak nieznaczne (słowo „mikroskopijne" czy nawet „nanoskopijne" jest zupełnie nieadekwatne), to możemy powoli przestać się dziwić słowu „kwantowy" w tytule. Rzeczywiście, autorzy biorą udział w konkursie na pierwszy kwantowy koncert wykonany makroskopowym instrumentem. W dodatku twierdzą, że go wygrali.

Jeżeli im się udało (krygują się, że nie są jeszcze w stanie tego bezapelacyjnie udowodnić), to zawdzięczają to nowemu podejściu. Dotąd wysiłki nanomuzyków koncentrowały się na detekcji tak małych amplitud. Zwycięzcy natomiast postanowili tego typu drgania wzmocnić. I do tego właśnie potrzebowali tej grzebieniopodobnej struktury. Nawet jeżeli amplituda drgań pojedynczych zębów jest rzędu femtometrów, to potrafią one rozbujać cały grzebień do amplitudy kilkudziesięciu pikometrów (czyli rzędu rozmiarów atomu: $100\,pm = 1$Å).

Kiedy jednak efekty kwantowe mogą pojawić się w ruchu obiektu makroskopowego i jak mogą się one przejawiać? Charakterystyczną wielkością jest termiczna liczba obsadzeń $N_{th} = \mathrm{k}_B T/hf$. Specjaliści spodziewali się, że jeżeli uda się skonstruować obiekt, który można doprowadzić do warunków, w których $N_{th} \to 1$, to taki obiekt powinien zacząć wykazywać np. skwantowane poziomy energetyczne. Z powyższego wzoru wynika, że aby liczbę obsadzeń zmniejszyć, należy obniżać temperaturę T i zwiększać częstość drgań f. Zwiększanie częstości drgań rezonansowych wiąże się jednak ze zmniejszaniem rozmiarów, a z tym z kolei wiąże się zwiększanie odpowiednika stałej sprężyny, a w konsekwencji dalsze zmniejszanie amplitudy. Specjalny kształt grzebienia miał temu niepożądanemu zjawisku przeciwdziałać. Udało się uzyskać drgania o częstości rezonansowej 1,49 GHz i wystarczająco dużej amplitudzie. Amplituda ta była mierzona poprzez pomiar napięcia prądu indukowanego w grzebieniu.

Można sprawdzić, że w opisanej sytuacji temperaturze $T = 110$ mK odpowiada liczba $N_{th} \sim 1$. Najpierw przeprowadzono jednak pomiary dla temperatury wyższej o rząd wielkości. Sprawdzono, że zgodnie z przewidywaniami amplituda drgań jest proporcjonalna do kwadratu indukcji magnetycznej, czyli stwierdzono klasyczne zachowanie grzebienia. Następnie zbadano układ oziębiony do temperatury $T = 110$ mK i wykryto skokową zależność amplitudy od indukcji pola. Prawie na pewno świadczy to o przechodzeniu ze stanu o najniższej energii do pierwszego stanu wzbudzonego, czyli o oczekiwanym zachowaniu kwantowym.

Myślę, że w najbliższym czasie możemy spodziewać się wielu podobnych koncertów kwantowych.



Piotr ZALEWSKI

[1] A. Gaidarzhy i inni, *Evidence for Quantized Displacement in Macroscopic Nanomechanical Oscillators*, Phys. Rev. Lett. **94**,030402(2005)

[2] sondaż przeprowadzony przez autora na niezbyt licznej próbce fizyków

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2005

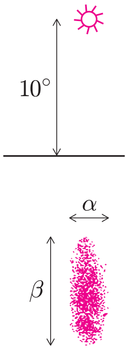
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 398, 399

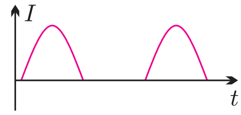
Redaguje Jerzy B. BROJAN

398. Po jeziorze biegną liczne drobne fale, których kierunki zmieniają się dowolnie, a maksymalne nachylenie powierzchni wody wynosi $\gamma = 2°$. Obserwujemy odbicie w wodzie Słońca, które jest na wysokości $\varphi = 10°$ nad horyzontem. Ocenić rozmycie kątowe odbitego obrazu Słońca, wzdłuż osi „w poprzek" (kąt α na rysunku 1) i „wzdłuż" (kąt β).

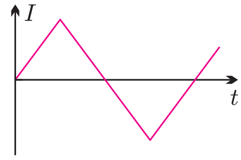


Rys. 1

399. Amperomierz przeznaczony do pomiaru natężenia prądu zmiennego może działać na następujących zasadach:
1) mierzyć średnią wartość kwadratu natężenia prądu (poprzez np. pomiar siły wzajemnego oddziaływania dwóch cewek),
2) mieć wbudowany prostownik dwupołówkowy prądu i mierzyć amplitudę natężenia prądu wyprostowanego,
3) mieć wbudowany prostownik dwupołówkowy i mierzyć średnią wartość natężenia prądu wyprostowanego.
Mamy trzy amperomierze A_1, A_2 i A_3 działające według powyższych zasad, przy czym skala wszystkich amperomierzy jest tak dobrana, że w przypadku prądu o przebiegu sinusoidalnym wskazują one wartość skuteczną natężenia. Jakie będą wskazania amperomierzy A_2 i A_3, jeśli amperomierz A_1 wskazuje 1 A, a prąd jest a) stały, b) o przebiegu jednopołówkowym (tzn. połowa sinusoidy, rys. 2), c) o przebiegu piłokształtnym (rys. 3)?



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2005

Przypominamy treść zadań:

390. Z równi pochyłej o kącie nachylenia α stacza się kula o masie M zawierająca współśrodkowe kuliste wydrążenie, przy czym stosunek wewnętrznego promienia do zewnętrznego (wynoszącego R) jest równy k, a poza wydrążeniem rozkład masy jest jednorodny. Wewnątrz kuli toczy się podobnie wydrążona kulka o masie m, zewnętrznym promieniu r i tej samej wartości k. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby środki kul i punkt zetknięcia większej z równią leżały stale na tej samej prostej (rys.)?

391. Jak długo mogłoby świecić Słońce z niezmienioną mocą, gdyby czerpało wypromieniowaną energię: a) ze spalania węgla (załóżmy, że Słońce składa się z węgla i tlenu), b) z grawitacyjnego zapadania się (załóżmy, że Słońce zmniejszyło swój promień o 10%)? Niezbędne dane należy wziąć z tablic. Wystarczy przybliżona ocena wyniku.

390. Oznaczmy prędkość środków obu kul przez v. Prędkość kątowa dużej kuli (Ω) jest powiązana z v wzorem $\Omega = v/R$, a prędkość liniowa punktu styku kul względem układu związanego z ich środkami wynosi $k\Omega R$. Przyrównując to wyrażenie do ωr (gdzie ω – prędkość kątowa małej kuli), znajdujemy $\omega = kv/r$. Te same związki obowiązują dla przyspieszenia liniowego a, przyspieszenia kątowego dużej kuli ε_1 oraz małej kuli ε_2, tzn. $\varepsilon_1 = a/R$, $\varepsilon_2 = ka/r$. Oznaczmy przez X składową poziomą siły wzajemnego oddziaływania kul, a przez Y – składową pionową. Zgodnie z II zasadą dynamiki ruchem postępowym małej kuli rządzą równania $X = ma\cos\alpha$, $mg - Y = ma\sin\alpha$, a ruchem obrotowym – równanie $Yr\sin\alpha - Xr\cos\alpha = I_2\varepsilon_2$. Centralny moment bezwładności wydrążonej kuli wyraża się wzorem $I_2 = \frac{2}{5}mr^2\frac{1-k^5}{1-k^3}$, podobnie $I_1 = \frac{2}{5}MR^2\frac{1-k^5}{1-k^3}$. Dla dużej kuli najwygodniej jest rozpatrywać ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu, przechodzącej przez punkt styczności z podłożem. Ramionami sił X i Y (które – zgodnie z III zasadą dynamiki – należy tu uwzględnić z przeciwnym zwrotem) są składowe odcinka łączącego punkty styczności, którego długość wynosi $R(1-k)$. Równanie ruchu obrotowego ma postać $MgR\sin\alpha + YR(1-k)\sin\alpha - XR(1-k)\cos\alpha = (I_1 + MR^2)\varepsilon_1$.

Po wyeliminowaniu sił i przyspieszeń dochodzimy do prostego wyniku $M = km$. Z warunkiem współliniowości środków kul i punktu zetknięcia z podłożem zgodny jest też przypadek graniczny, odpowiadający przejściu $k \to 1$ (kule stają się bardzo cienkimi łupinami) – inne parametry są wtedy nieistotne.

391. a) Masa Słońca wynosi $2\cdot 10^{30}$ kg, z czego początkowo mogłoby być 27% węgla, tzn. około $5\cdot 10^{29}$ kg. Przyjmując ciepło spalania równe 40 MJ/kg, obliczamy całkowitą energię równą $2\cdot 10^{37}$ J. Aby wyznaczyć moc wypromieniowaną, pomnóżmy stałą słoneczną (tzn. moc promieniowania na jednostkę powierzchni prostopadłej), która w okolicy Ziemi wynosi 1,35 kW/m^2, przez $4\pi R^2$, gdzie R jest promieniem orbity ziemskiej ($1{,}5\cdot 10^{11}$ m). Stąd moc $P \approx 4\cdot 10^{26}$ W, czyli energii zawartej w węglu wystarczyłoby na $5\cdot 10^{10}$ s $\approx$ 1500 lat.
b) Promień Słońca wynosi $7\cdot 10^8$ m, a stąd przyspieszenie grawitacyjne na jego powierzchni – 270 m/s^2. Do celów orientacyjnej oceny uzyskanej energii przyjmijmy, że 1/5 masy Słońca „spada" w polu o powyższym natężeniu z wysokości równej 1/10 promienia. Wyliczona wartość mgh okazuje się równa $8\cdot 10^{39}$ J, co wystarczyłoby na $2\cdot 10^{13}$ s $\approx$ 600 tysięcy lat.

Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\oint\!\!\!\!\sum !} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2005

Zadania z matematyki nr 501, 502

Redaguje Marcin E. KUCZMA

501. Dane są dwa współśrodkowe okręgi o promieniach R, r $(R > r)$. Wypukły czworokąt $ABCD$ jest wpisany w mniejszy okrąg, a półproste $AB^{\rightarrow}$, $BC^{\rightarrow}$, $CD^{\rightarrow}$, $DA^{\rightarrow}$ przecinają większy okrąg odpowiednio w punktach C_1, D_1, A_1, B_1; przy tym stosunek obwodów czworokątów $A_1B_1C_1D_1$ i $ABCD$ wynosi R/r. Obliczyć te obwody.

502. Wykazać, że dla prawie wszystkich liczb naturalnych n istnieje przedstawienie liczby 1 w postaci sumy odwrotności sześcianów n liczb naturalnych.

Zadanie 502 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **485** ($WT = 2{,}56$) i **486** ($WT = 1{,}24$) z numeru 9/2004

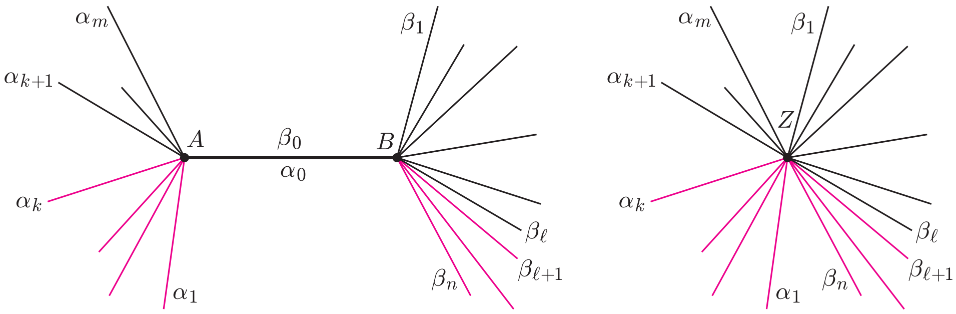
Witold Bednarek	– Łódź	43,23
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	40,39
Jerzy Witkowski	– Radlin	39,38
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	35,75
Tomasz Warszawski	– Kraków	33,13

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2005

Przypominamy treść zadań:

493. Każda krawędź wielościanu wypukłego (o wszystkich kątach dwuściennych mniejszych od 180°) została pomalowana jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje wierzchołek A oraz płaszczyzna, przechodząca przez A i niezawierająca innych wierzchołków wielościanu, o tej własności, że po każdej jej stronie wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka A mają jednakowy kolor.

494. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \dfrac{\sqrt{13}-1}{6\sqrt{13}}\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n$. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \lfloor a_n \rfloor)$.



493. Szkielet wielościanu można traktować jako graf na płaszczyźnie (przez rzutowanie z punktu położonego na zewnątrz wielościanu, blisko dowolnie wybranej ściany, na płaszczyznę równoległą do tej ściany – „zaglądanie do wnętrza wielościanu przez przezroczystą ścianę”). Na ten graf przenosimy zadane pokolorowanie krawędzi. Wierzchołek grafu nazwiemy *małopstrokatym*, jeśli obchodząc wszystkie wybiegające z niego krawędzie (w ustalonym kierunku obiegu – na przykład zgodnie z ruchem wskazówek zegara) napotkamy co najwyżej dwie zmiany koloru. Takiemu wierzchołkowi grafu odpowiada wierzchołek wielościanu o wymaganej w zadaniu własności; wynika to z założenia, że żadne dwie ściany nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wystarczy więc dowieść, że każdy graf płaski o 2-pokolorowanych krawędziach ma wierzchołek małopstrokaty.

Wykażemy to przez indukcję względem liczby krawędzi. Gdy graf ma tylko jedną krawędź, nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla każdego grafu płaskiego mającego q krawędzi i weźmy pod uwagę graf płaski G mający $q+1$ krawędzi, pomalowanych dwoma kolorami. Wybierzmy dowolną krawędź AB. Numerujemy krawędzie wychodzące z wierzchołka A oraz krawędzie wychodzące z B kolejno (w ustalonym kierunku obiegu) $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ oraz $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, oznaczając przez α_0 oraz β_0 tę samą krawędź AB.

Usuwamy krawędź AB i łączymy wierzchołki A, B w jeden wierzchołek Z; w powstałym q-krawędziowym grafie istnieje wierzchołek małopstrokaty (założenie indukcyjne). Jeśli jest to wierzchołek różny od Z, to jest on także wierzchołkiem małopstrokatym w grafie G i mamy tezę indukcyjną. Mamy ją także wtedy, gdy wszystkie krawędzie α_i lub wszystkie krawędzie β_j są jednego koloru, gdyż wówczas (odpowiednio) A lub B jest wierzchołkiem małopstrokatym grafu G.

Pozostaje do rozpatrzenia sytuacja, gdy w ciągu krawędzi $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ otaczających małopstrokaty wierzchołek Z mamy dwie zmiany koloru, usytuowane wewnątrz bloków (α_i) oraz (β_j). Niech na przykład krawędzie $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_\ell$ będą czarne, a krawędzie $\beta_{\ell+1}, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – kolorowe $(0 < k < m,\ 0 < \ell < n)$. Niezależnie od koloru krawędzi AB $(= \alpha_0 = \beta_0)$, zarówno A, jak i B, jest wierzchołkiem małopstrokatym w grafie G. To kończy indukcyjne uzasadnienie dowodzonej tezy.

494. Przyjmijmy

$\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\quad \beta = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ $\quad$ (więc $\alpha+\beta = 3,\ \alpha\beta = -1$),

$A = \frac{\sqrt{13}-1}{6\sqrt{13}}$, $\quad B = \frac{\sqrt{13}+1}{6\sqrt{13}}$ $\quad$ (więc $a_n = A\cdot\alpha^n$),

$s_n = A\cdot\alpha^n + B\cdot\beta^n$ $\quad$ (więc $s_0 = \frac{1}{3},\ s_1 = \frac{1}{3}$).

Z przekształcenia

$$\alpha^n = -\beta\alpha^{n+1} = (\alpha-3)\alpha^{n+1} = \alpha^{n+2} - 3\alpha^{n+1}$$

mamy $\alpha^{n+2} = 3\alpha^{n+1} + \alpha^n$; podobnie $\beta^{n+2} = 3\beta^{n+1} + \beta^n$, i w konsekwencji $s_{n+2} = 3s_{n+1} + s_n$. Stąd przez łatwą indukcję wynika, że $s_n - \frac{1}{3}$ jest dla każdego n liczbą całkowitą. Ponieważ zaś $|\beta| < 1$ oraz

$$a_n = A\cdot\alpha^n = s_n - B\cdot\beta^n = \left(s_n - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - B\cdot\beta^n\right),$$

to (dla dużych n) $\lfloor a_n \rfloor = s_n - \frac{1}{3}$, więc ostatecznie $a_n - \lfloor a_n \rfloor = \frac{1}{3} - B\cdot\beta^n \to \frac{1}{3}$.

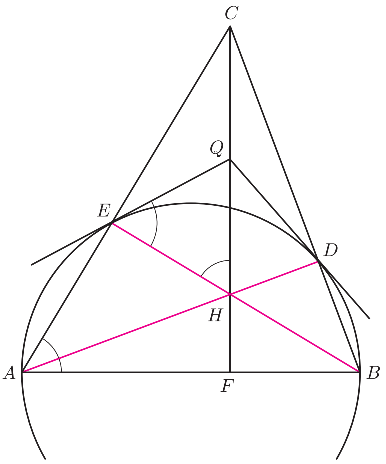
Patrz w niebo

Nasza Galaktyka z racji swojej wielkości, symetrii i określonej budowy może robić wrażenie obiektu w pełni uformowanego. Tymczasem pojawiają się ostatnio głosy, że mająca kilkanaście miliardów lat Galaktyka jeszcze nie jest „wykończona”. Argumenty za tym są zdobywane z trudem, co wynika z kilku powodów. Po pierwsze, zalegająca w Drodze Mlecznej materia międzygwiazdowa dość skutecznie przesłania wszystko, co znajduje się w jej płaszczyźnie zarówno w Galaktyce, jak i poza jej granicami, po drugie – otoczka Galaktyki, czyli halo galaktyczne, jest obiektem bardzo rozproszonym i dopiero teraz staje się ledwo dostępnym współczesnym technikom obserwacyjnym. Wreszcie generalnie dużo trudniej jest badać strukturę Galaktyki, mieszkając w jej wnętrzu, niż gdyby można było ją obejrzeć z daleka.

I tak, na przykład, całkiem niedawno okazało się, że halo bynajmniej nie jest równomiernie wypełnione gwiazdami. W 1994 roku odkryto w Strzelcu karłowatą galaktykę, która spada na naszą, a ponadto siły pływowe naszej Galaktyki wyrwały z niej pasma gwiazd rozciągające się na niebie na ponad 90°. Warto tu przypomnieć, że w Strzelcu znajduje się centralne zgęszczenie naszej Galaktyki, zatem odkryta tam galaktyka leży niemal dokładnie po przeciwnej jego stronie niż Układ Słoneczny. Wydaje się, że galaktyczne halo zawiera wiele tego rodzaju pasm składających się z gwiazd. Inna grupa badaczy twierdzi, że Omega Centauri, największa i najjaśniejsza gromada kulista gwiazd, nie jest w istocie gromadą, lecz jądrem karłowatej galaktyki, która przypadkowo zbliżyła się do naszej i już dawno została odarta ze swoich zewnętrznych gwiazd. Pojawiają się głosy, że odkrywane od niedawna zgęszczenia gwiazd w halo to właśnie resztki karłowatych galaktyk wchłoniętych przez naszą. Zresztą zjawisko tzw. kanibalizmu wśród galaktyk nie jest niczym wyjątkowym. W odniesieniu do naszego najbliższego otoczenia przewiduje się nawet – w każdym razie są badacze, którzy przewidują – połączenie się naszej Galaktyki z sasiadką, czyli z M 31, Wielką Mgławicą w Andromedzie. Trudno tu orzec, która którą wchłonie, gdyż ich rozmiary i masy są zbliżone, w dodatku miałoby to nastąpić w przybliżeniu za 3 mld lat. Nie sposób też przewidzieć, czym takie zderzenie może się skończyć – brzmi groźnie, ale nie zapominajmy, że między gwiazdami jest zazwyczaj ogromnie wiele miejsca. Tak czy inaczej – to nie nasz problem.

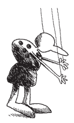
Tomasz KWAST

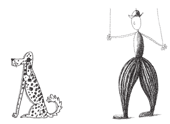
Rozwiązanie zadania M 1098.
Oznaczmy przez H punkt przecięcia odcinków AD i BE.



Punkt H jest wówczas punktem przecięcia wysokości w trójkącie ABC. Niech Q będzie środkiem odcinka CH. Punkt Q jest wówczas środkiem okręgu opisanego na czworokącie $DCEH$, a zatem $QE = QH = QD$. Wykażemy, że $Q = P$, skąd bezpośrednio wynika, że $CP \perp AB$.

Niech F będzie punktem przecięcia prostych CH i AB. Ponieważ punkty A, F, H, E leżą na jednym okręgu, więc $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CHE = \sphericalangle BEQ$. Stąd wynika, że prosta QE jest styczna do okręgu Γ w punkcie E. Analogicznie dowodzimy, że prosta QD jest styczna do okręgu Γ w punkcie D. Zatem $Q = P$.





Maj

W majowe wieczory niemal całkiem nie widać Drogi Mlecznej. Jej połowa ciągnie się wprawdzie wzdłuż północnego horyzontu, ale na tyle nisko, że wątpliwe, żeby można ją było dostrzec przez zazwyczaj zanieczyszczoną atmosferę. W każdym razie z geometrii wynika, że blisko zenitu powinniśmy wtedy widzieć okolice północnego bieguna Galaktyki, który znajduje się w gwiazdozbiorze Warkocza Bereniki. Jest to mało wyraźny gwiazdozbiór leżący (wraz z Psami Gończymi) między Wielką Niedźwiedzicą na północy a Panną na południu. Najjaśniejsza gwiazda Warkocza, alfa – Diadem, o jasności 4,5 mag, jest gwiazdą podwójną, co można by dostrzec przez amatorski teleskop, ale przy dużym powiększeniu. Składniki tego układu dzieli bowiem odległość 12 j.a., a cały układ znajduje się od nas w odległości 17 pc. Przez taki teleskop, ale przy małym powiększeniu, można w Warkoczu zobaczyć gromadę kulistą M 53 (odległą o 16 kpc), a może nawet galaktykę M 85 (odległą o 14 Mpc).

Wenus jest w Byku i zachodzi wkrótce po zachodzie Słońca. Mars jest w Wodniku i widać go dużo po północy. Jowisz znajduje się w Pannie, wschodzi więc jeszcze za dnia, a zachodzi przed wschodem Słońca. Saturn jest w Bliźniętach, przez co widać go tylko w pierwszej połowie nocy. Nów Księżyca wypada 8 V, a pełnia 23 V. W maju Księżyc zakryje Jowisza, Antaresa i Marsa. Jednak żadne z tych zjawisk nie będzie widoczne w Polsce: pierwsze będzie widać od Karaibów po Południową Afrykę, drugie – na Pacyfiku i w Ameryce Środkowej, trzecie – na Antarktydzie, w Ameryce Południowej i w Zachodniej Afryce. W okolicach 5 V można oczekiwać roju meteorów eta-akwarydów (od Aquarius – Wodnik), pochodzącego od komety Halleya. Wodnik, jak wspomnieliśmy, wschodzi dopiero po północy, a sam rój jest skromny: można spodziewać się jednego błysku na kilka minut.

T. K.

O zaletach współpracy

Nietrudno zauważyć, że praca w zespole pozwala osiągnąć więcej niż działanie pojedynczych osób. Nawet osiągnięcia naukowe wybitnych jednostek nie byłyby możliwe, gdyby nie praca wielu ludzi: przygotowujących przyrządy pomiarowe, robiących doświadczenia i opracowujących wyniki. Zazwyczaj trudno początkowo rozpoznać, czy się nie idzie fałszywym tropem. Wśród wielu, którzy pobłądzą, co jakiś czas znajdzie się ktoś, kto rozwinie naszą wiedzę o świecie. W ten sposób zbiorowość ludzka jako całość jest w stanie znacznie efektywniej przetwarzać informacje o świecie zewnętrznym i wykorzystywać ją w praktycznych zadaniach, niż byliby w stanie to zrobić pojedynczy ludzie zostawieni samym sobie. To truizmy. Chyba nikt nie ma wątpliwości, że nawet najbardziej genialny człowiek rzucony bez zaplecza w czasy paleolitu nie skonstruowałby komputera, samochodu czy choćby noża ze stali nierdzewnej...

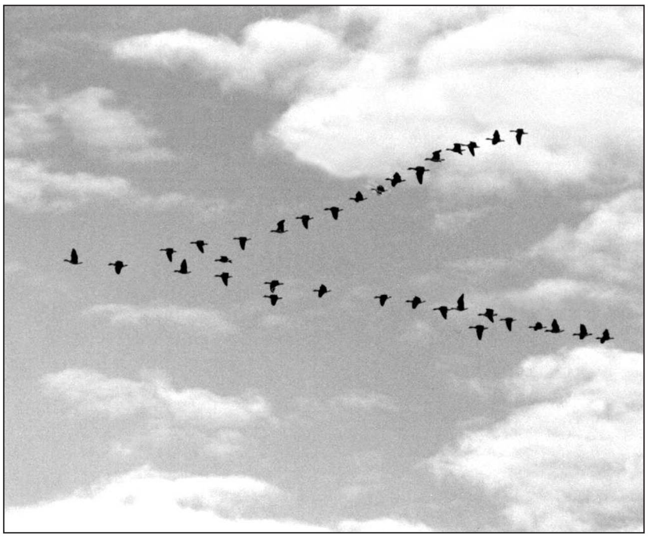
Czy podobnie dzieje się u innych organizmów żywych? Czy one też odnoszą korzyści z zespołowego przetwarzania informacji o świecie zewnętrznym?

Mogłoby się wydawać, ze zespołowe przetwarzanie informacji wymaga współpracy i komunikacji pomiędzy osobnikami. Niekoniecznie! Jaskółki rdzawoszyje wylatują z gniazd w poszukiwaniu owadów dla piskląt. Jeśli ptak wraca do gniazda, znalazłszy obfite źródło pokarmu, to z reguły następnym razem leci w to samo miejsce. Jeśli jednak mu się wyprawa nie powiedzie, to zazwyczaj śledzi innego członka kolonii. Najczęściej któregoś ze swoich sąsiadów. Pokarm, którego szukają jaskółki, występuje w rzadkich, ale obfitych płatach. Stosowana przez nie strategia pozwala powiększyć obszar poszukiwań, z którego korzysta osobnik, o obszary przeszukane przez jego sąsiadów. W rezultacie każdy członek kolonii przynosi więcej pokarmu, niż gdyby musiał działać sam. To wszystko się dzieje bez wymiany jakichkolwiek zamierzonych sygnałów!

Gołębie żerujące na ziemi muszą dzielić czas pomiędzy wyszukiwanie pokarmu i śledzenie nieba, na którym może pojawić się jastrząb. Oczywiście, pojedynczy gołąb zauważy jastrzębia dopiero w momencie uniesienia głowy, tak więc drapieżnik ma sporo czasu, aby zbliżyć się do żerującej ofiary. Gołębie żyjące w stadzie poświęcają nawet mniej czasu na czaty niż samotnicy. W losowych momentach unoszą głowy do góry, aby skontrolować sytuację. Ale jeśli spojrzymy na stado jako całość, to poświęca ono na to znacznie więcej czasu, niż mógłby pojedynczy osobnik. Wszak wystarczy, że jeden gołąb zauważy nadlatującego jastrzębia i poderwie się do ucieczki, aby reszta podążyła za nim.

W pewnym eksperymencie nauczono szczury, że w labiryncie pokarm o określonym zapachu zawsze był wykładany w określonym korytarzu. Podczas testu pierwszy szczur wypuszczony z klatki przeszukiwał cały labirynt, aż znalazł pokarm. Następne jednak potrafiły skorzystać z jego doświadczenia. Po prostu obwąchiwały go i potem szły od razu we właściwe miejsce: tam, gdzie zazwyczaj leżał pokarm o tym zapachu.

To są wszystko przykłady, w których zwierzęta wcale nie dążą do tego, aby współpracować ze sobą, przeciwnie, starają się wyłącznie wykorzystać inne osobniki. Jednak ten wykorzystywany niewiele traci, a wykorzystujący sporo



Fot. T. Wojszcz

zyskuje. Każdy mniej więcej tak samo często występuje w obu rolach, więc na dłuższą metę wszystkim się ten system opłaca.

Koczkodany potrafią się aktywnie i precyzyjnie ostrzegać o różnych zagrożeniach. Gdy któryś z członków stada wyda okrzyk, który można by przetłumaczyć na polski jako „uwaga wąż”, wszystkie małpy stają na palcach i wpatrują się w ziemię. Gdy któryś ostrzeże o jastrzębiu, całe stado zaczyna wpatrywać się w niebo. W razie zauważenia lamparta ostrzeżenie powoduje, iż małpy uciekają i wspinają się na najbliższe drzewo. Tak więc małpy w odróżnieniu od jaskółek czy gołębi celowo wydają sygnały ostrzegawcze, a więc współpracują ze sobą.

Najliczniejsze społeczności w świecie zwierząt tworzą oczywiście owady. Roje pszczół składają się z dziesiątek tysięcy osobników wspólnie pracujących dla rodziny. Pojedyncze pszczoły przeszukują okolicę w poszukiwaniu kwiatów. Gdy znajdą pożytek, sygnalizują swoim towarzyszkom w ulu, gdzie należy szukać pokarmu. Jeśli pokarm znajduje się bliżej niż kilkadziesiąt metrów od ula, drepcą po okręgach, co nie niesie informacji o kierunku, ale wystarcza, by towarzyszki szybko odnalazły blisko znajdujące się kwiaty. W innych przypadkach pszczoły chodzą po bardziej skomplikowanej figurze, czymś w rodzaju ósemki: biegną po prostej, wywijając odwłokiem, potem zawracają, robiąc łuk w jedną stronę, znowu biegną po prostej, zataczają łuk w drugą stronę... i tak powtarzają kilka razy.

Kierunek tego biegu po prostej niesie informacje o kącie w stosunku do słońca, jaki trzeba utrzymać, aby dotrzeć do celu. Liczba wywinięć odwłoka i tempo biegu – o odległości. Pozostałe pszczoły czułkami obserwują ruchy zwiadowcy, dzięki czemu informację odbiera wiele robotnic, które następnie lecą prosto we właściwe miejsce odległe nawet o 8 km od ula.

Dzięki takiemu współdziałaniu rój pszczół znacznie podnosi efektywność przeszukiwania przestrzeni wokoło ula, a więc i ilość zbieranego pyłku czy nektaru.

Jak widać, zespołowe przetwarzanie informacji zwiększa efektywność i przynosi korzyści współpracującym jednostkom. Pamiętajcie jednak, że na sprawdzianach jest zakazane!

Paweł PORĘBA
Współpraca: Anna LORENC

Korespondencję do Kącika Biologicznego prosimy przysyłać do Jarka Bryka pod adresem: bryko@poczta.onet.pl