



## Nagrodę Dziekanów

Wydziału Fizyki i Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki  
za najlepszy artykuł *Delta* w roku akademickim 2003/2004

otrzymał

**Paweł Strzelecki**

za artykuł *Hipoteza Poincarégo?* (*Delta* 1/2004)

## SPIS TREŚCI NUMERU 4 (371)

Elektroencefalogram <i>Wiesław W. Jędrzejczak</i>	str. 1
Aktualności	str. 5
Uwierzytelnianie cyfrowe za pomocą grafów – dowody z wiedzą zerową <i>Krzysztof Kulewski</i>	str. 6
<b>Mała Delta:</b>	
Efekt brazylijskiego orzecha <i>Konrad Sklorz</i>	str. 8
Pierwsza prędkość kosmiczna a siła Coriolisa <i>Zbigniew Osiak</i>	str.10
Konkurs Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej <i>Ryszard Rakowski</i>	str.11
King size	str.13
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Kwiecień	str.16
Kącik biologiczny	str.17

**W następnym numerze:**  
Konfrontacje

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki,  
Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Armen Edigarian,  
Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein,  
Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior,  
Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski,  
Adam Michalec, Ryszard J. Pawlak, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski,  
Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga,  
Krzysztof Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński,  
Tomasz Kwast, Anna Ludwika, Urszula Marciniak, Anna Rudnik,  
Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okladki i ilustracje: Anna Ludwika      Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450,  
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem  $\TeX$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 663-87-52, 663-11-46)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres  
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena  
jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie  
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej  
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS  
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe  
„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty +  
rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane  
od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto:  
Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela  
„RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana  
Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax:  
5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numer archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Elektroencefalogram

Wiesław W. JĘDRZEJCZAK

Mózg człowieka składa się z  $10^{11}$  komórek, które porozumiewają się za pomocą impulsów elektrycznych. Przy zastosowaniu odpowiednio czulej aparatury zmiany potencjału elektrycznego można zmierzyć na powierzchni głowy. Zapis takich zmian w czasie nosi nazwę elektroencefalogramu (w skrócie EEG).

## Krótką historia EEG

Aktywność elektryczna mózgu została odkryta przez angielskiego lekarza Richarda Catona w latach siedemdziesiątych dziewiętnastego wieku. Dokonywał on pomiarów na odkrytym mózgu zwierząt. W swoich eksperymentach używał galwanometru i mierzył potencjał pomiędzy elektrodą leżącą na powierzchni kory mózgowej (zewnętrznej warstwie półkul mózgowych) a elektrodą umieszczoną na czaszce.

Duży wkład w poznanie EEG wnieśli również polscy naukowcy. W 1890 roku Adolf Beck opublikował wyniki swoich badań, w których wykrył zanik rytmicznej czynności w korze mózgowej pod wpływem bodźca świetlnego. Nauczyciel Becka z Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, Napoleon Cybulski, wykonał jeden z pierwszych elektroencefalogramów, używając przystawki fotograficznej, podłączonej do galwanometru. Pokazał na nim zmiany, jakie pojawiały się w EEG psa w trakcie napadu padaczki wywołanego elektryczną stymulacją.

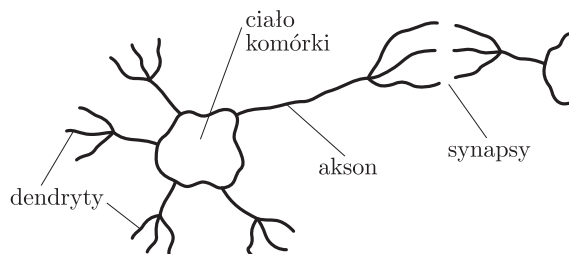
Pierwszy pomiar EEG u człowieka został wykonany przez Hansa Bergera na początku dwudziestego wieku. Początkowo Berger dokonywał pomiarów na pacjentach mających ubytki w kości czaszki na skutek ran wojennych (ofiarami pierwszej wojny światowej). Rozgłos przyniosło mu opublikowanie w 1929 roku wyników pięcioletnich badań prowadzonych w ścisłej tajemnicy. W pracy tej został po raz pierwszy opisany pomiar EEG człowieka poprzez nienaruszoną czaszkę. W swoich dalszych badaniach Berger scharakteryzował rytmy alfa i beta w EEG, opisał zmiany w EEG pod wpływem chorób, np. Alzheimera. To także on pierwszy użył terminu elektroencefalogram.

W kolejnych latach pomiary EEG zaczęto przeprowadzać, wykorzystując większą liczbę elektrod, czyli zapis czynności elektrycznej z różnych obszarów jednocześnie. Ulepszono także urządzenia pomiarowe, wyposażając je w rejestrację przebiegu badania na papierze.

## Budowa i działanie komórek nerwowych

Aby zrozumieć, dzięki czemu możliwe jest wykonywanie EEG, prześledzimy oddziaływania elektryczne od poziomu pojedynczej komórki nerwowej, aż do łącznej aktywności komórek składających się na korę mózgową.

Podstawową jednostką układu nerwowego jest komórka nerwowa – neuron (rys. 1), która zdolna jest do wytwarzania i przewodzenia impulsów elektrycznych.

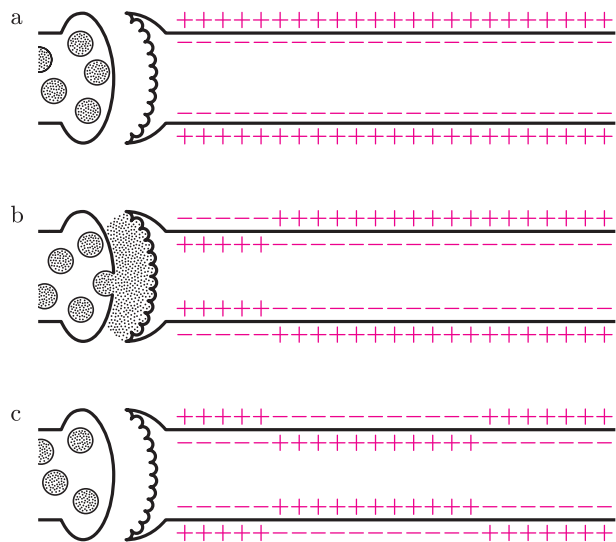


Rys. 1. Schemat budowy komórki nerwowej – neuronu.

Neuron składa się z ciała komórki oraz charakterystycznych wypustek: aksonu i dendrytów. Akson jest z reguły dłuższy i przewodzi impulsy z ciała komórki



do zakończeń nerwowych. Dendryty są dużo krótsze, a impulsy biegną w nich w kierunku ciała komórki. Impulsy przekazywane są pomiędzy neuronami za pomocą synaps, na drodze elektrycznej lub chemicznej. Wnętrze komórki nerwowej w stanie spoczynku jest naładowane ujemnie względem środowiska zewnątrzkomórkowego, na skutek aktywnego transportu jonów (rys. 2a). Skutkiem tego w poprzek błony komórkowej występuje różnica potencjałów – około 80 mV. W stanie pobudzenia natomiast fragment błony komórkowej ulega tzw. depolaryzacji – wnętrze komórki jest wtedy naładowane dodatnio względem środowiska zewnątrzkomórkowego. W przypadku gdy synapsa dendrytu odbiera pobudzenie z innej komórki, generowany jest tzw. **potencjał postsynaptyczny** (rys. 2b) o amplitudzie około 10 mV i trwający około 15 ms. Ze względu na dość długi czas trwania potencjały postsynaptyczne, zarówno te następujące po sobie, jak i pochodzące od różnych komórek, mogą się sumować. Rozróżniane są dwa rodzaje potencjału postsynaptycznego: pobudzający i hamujący. Ma to duże znaczenie ze względu na fakt, że reakcja neuronu na dochodzące pobudzenie jest reakcją progową. Dopiero sumaryczne pobudzenie postsynaptyczne, przekraczające pewną graniczną wartość, powoduje wygenerowanie tzw. **potencjału czynnościowego**. Ma on amplitudę rzędu kilkudziesięciu mV i czas trwania około 1 ms. Potencjał czynnościowy jest przemieszczającą się wzdłuż aksonu strefą, w której błona neuronu ulega chwilowej depolaryzacji (rys. 2c). Po dojściu potencjału do synapsy (chemicznej), będącej zakończeniem aksonu, dochodzi do wydzielania substancji chemicznej do szczeliny synaptycznej (rys. 2b). Substancja ta, działając następnie na błonę dendrytu kolejnej komórki nerwowej, może spowodować powstanie potencjału postsynaptycznego.



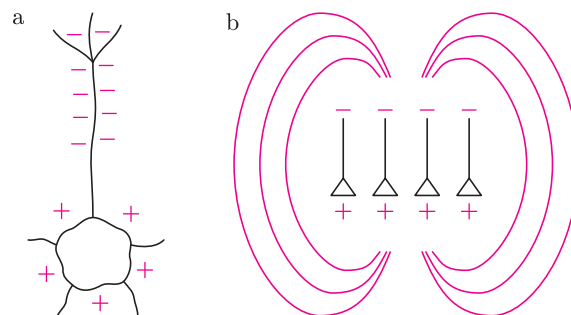
Rys. 2. Pobudzenie neuronu.  
 a) Polaryzacja neuronu w stanie spoczynku.  
 b) Substancja chemiczna wydzielana przez synapsę jednego neuronu pobudza synapsę dendrytu kolejnej komórki nerwowej. Jony dodatnie napływają do wnętrza neuronu – neuron ulega depolaryzacji.  
 c) Pobudzenie rozchodzi się wzdłuż neuronu. Aktywny transport jonów przywraca potencjał komórki do stanu wyjściowego.

Potencjał mierzony na zewnątrz pojedynczej komórki nerwowej jest bardzo mały (około kilku  $\mu\text{V}$ ) i zanika bardzo szybko, proporcjonalnie do kwadratu odległości. Dlatego też nie można zmierzyć potencjału pojedynczego neuronu z powierzchni głowy.

W rzeczywistości **to, co mierzy się na powierzchni głowy, to sumaryczna aktywność dużych grup neuronów.**

Przez wiele lat uważano, że za aktywność mierzoną na powierzchni głowy odpowiedzialne są potencjały o największej amplitudzie, czyli potencjały czynnościowe. Okazało się jednakże, że ich czas trwania jest zbyt krótki, aby potencjały sąsiednich komórek mogły się sumować. Warunek ten spełniają potencjały synaptyczne, ponieważ mimo mniejszej amplitudy mają znacznie dłuższy czas trwania.

Kora mózgowa w dużej mierze zbudowana jest z neuronów piramidowych (nazwa pochodzi od kształtu ciała komórki), które są ułożone prostopadle do jej powierzchni i równolegle względem siebie. W stanie pobudzenia pojedynczy neuron możemy w przybliżeniu traktować jako dipol elektryczny (rys. 3a). Zatem warstwę równoległe ułożonych neuronów piramidowych możemy sobie wyobrazić jako warstwę dipolową, a generowany potencjał jako potencjał pochodzący od warstwy dipolowej (rys. 3b). Pozostałe komórki nie są ułożone w żaden specyficzny sposób, a prądy przez nie generowane znoszą się, dlatego ich wkład do EEG jest niewielki. A zatem **potencjały mierzone na powierzchni głowy to rezultat prądów płynących w środowisku zewnątrzkomórkowym pod wpływem sumarycznej aktywności postsynaptycznej neuronów piramidowych.**



Rys. 3.  
 a) Pobudzony neuron można w przybliżeniu traktować jako dipol.  
 b) Warstwę równoległe ułożonych neuronów piramidowych możemy sobie wyobrazić jako warstwę dipolową, a generowany potencjał jako potencjał pochodzący od warstwy dipolowej.

Pofałdowanie kory mózgowej utrudnia pomiar. Badanie z powierzchni głowy obszarów kory znajdujących się w brzdach jest bardzo utrudnione.

Nie można także zapomnieć o tym, że pomiędzy korą a elektrodą są jeszcze tkanki, takie jak płyn mózgowy, czaszka i skóra. Powodują one osłabienie i rozproszenie sygnału w stosunku do tego, co można by zmierzyć bezpośrednio na powierzchni kory.

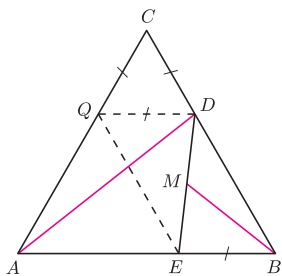


**Rozwiązanie zadania M 1094.**  
 Niech  $f(0) = a$ . Wstawiając  $x = 0$  do danego równania, otrzymujemy  $f(a) = \frac{1}{2}a$ . Wstawiając z kolei  $x = a$ , dostajemy  $f(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{2}a$ . Wstawiając wreszcie  $x = \frac{1}{2}a$  do wyjściowego równania, uzyskujemy  $2a = a + \frac{1}{2}a$ , skąd  $a = 0$ .

Przypuśćmy teraz, że  $f(b) = 0$ . Wstawiając  $x = b$  do danego równania, mamy  $4f(0) = b$ , a skoro  $f(0) = 0$ , więc  $b = 0$ .



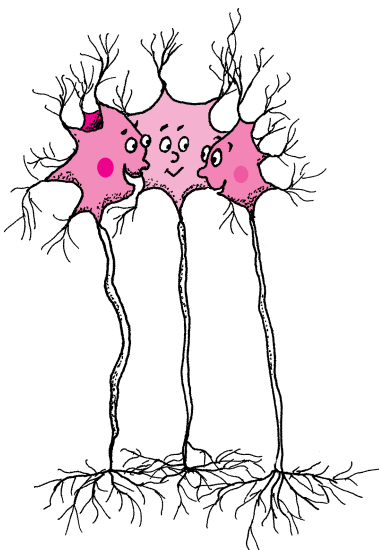
**Rozwiązanie zadania M 1095.**  
 Niech  $Q$  będzie takim punktem leżącym na boku  $AC$ , że trójkąt  $CDQ$  jest równoboczny.



Wówczas czworokąt  $BDQE$  jest równoległobokiem. Zatem

$$BM = \frac{1}{2}BQ = \frac{1}{2}AD,$$

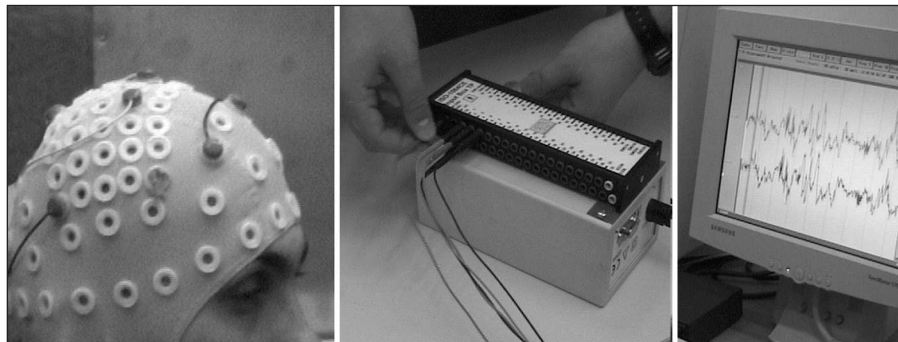
czego należało dowieść.



## Elektroencefalogram

Nazwa elektroencefalogram zawiera greckie słowo *enkephalo* – mózg.

Do pomiaru EEG (zdj. 4) wykorzystuje się wyspecjalizowane urządzenia w postaci wielokanałowych mikrowoltomierzy. Przez wiele lat EEG było zapisywane na papierze. Od czasu rozpowszechnienia komputerów dane przetwarzane są z postaci analogowej na cyfrową, a następnie zapisywane na dyskach komputerowych i przeglądane na ekranie monitora. Zapis cyfrowy umożliwił także rozwój różnych metod analizy korzystających z algorytmów numerycznych.



Rys. 4. Pomiar EEG. Pacjent ma założony specjalny czepek zapewniający stabilne umocowanie elektrod. Przestrzeń pomiędzy elektrodami i głową jest dodatkowo wypełniona przewodzącą pastą. Elektrody są podłączone do wielokanałowego mikrowoltomierza. Mierzone sygnały są obrazowane i zapisywane za pomocą komputera.

### Pomiar

Potencjał generowany przez prądy powstające w wyniku działalności kory jest zbyt niski, aby możliwe było zmierzenie potencjału w wybranym miejscu na głowie. Pomiar zostałby zdominowany przez znacznie silniejszy sygnał elektryczny pochodzący od serca. Dlatego dokonuje się pomiarów różnicy potencjału pomiędzy elektrodami umieszczonymi na głowie.

Wyróżnia się dwa standardowe sposoby pomiaru: pomiędzy dwiema elektrodami umieszczonymi nad korą mózgową (w obszarze zainteresowania), tzw. odniesienia bipolarne, lub pomiędzy elektrodą umieszczoną nad korą a elektrodą odniesienia umieszczoną w miejscu bliskim, pozbawionym wpływu potencjałów generowanych przez mięśnie i mózg, np. na koniuszku ucha (monopolarne). W ten sposób wpływ czynności elektrycznej serca na obie elektrody jest zbliżony, a ponieważ mierzymy różnicę potencjałów, to wszystko, co zmierzyłyby naraz obie elektrody, zostanie zniwelowane.

Najpopularniejszym sposobem umieszczenia elektrod jest obecnie tzw. standard 10–20, w którym 20 elektrod jest rozmieszczonych w miarę równomiernie (w odstępach około 5 cm) nad korą mózgową. Dodatkowe informacje zapewniają elektrody umieszczone w okolicy mięśni szyi (mierząc elektromiogram – czynność elektryczną mięśni), w pobliżu serca (czyli pomiar elektrokardiogramu – EKG), oraz w pobliżu gałek ocznych, które mają nierównomiernie rozmieszczony ładunek elektryczny i ich ruch powoduje zmiany potencjału (elektrookulogram).

Aby wyeliminować zewnętrzne zakłócenia, pomiary EEG często wykonuje się w pomieszczeniach ekranowanych (tzw. klatkach Faradaya).

Jak wygląda pomiar EEG, Czytelnik może zobaczyć w krótkim filmie umieszczonym w Internecie pod adresem: <http://wigner.fuw.edu.pl/~wjedr/peeg.html>.

### Najważniejsze rytmy

Sygnał EEG jest z reguły bardzo złożony i składa się z wielu fal o różnej częstotliwości. Podczas badań EEG sklasyfikowano kilka głównych rytmów, które w zależności od stanu kory mózgowej zwiększają bądź zmniejszają swoją amplitudę (tabela na następnej stronie).



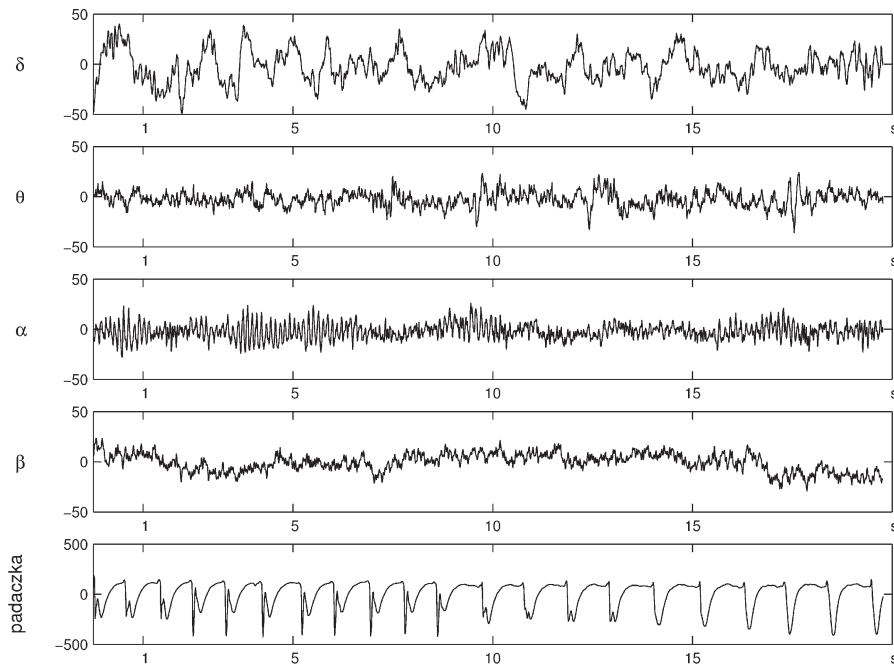
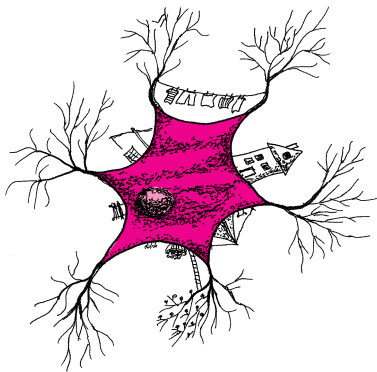
### Rozwiązanie zadania F 642.

Podczas kondensacji i krystalizacji woda oddaje ciepło utajone przemiany. Należy więc oczekiwać, że powietrze po przekroczeniu wysokości kondensacji będzie cieplejsze niż w poprzednim zadaniu, a więc po utracie całej wilgoci będzie miało na danej wysokości mniejszą gęstość niż powietrze suche od początku. To zaś oznacza, że wysokość, na którą się wzniesie, będzie większa.

$\delta$	0,5–4 Hz – głęboki sen
$\theta$	4–8 Hz – u dzieci, w stanach omdlenia, u zwierząt (gryzoni)
$\alpha$	8–13 Hz – w stanie relaksu przy zamkniętych oczach
$\beta$	13–35 Hz – koncentracja uwagi
$\gamma$	około 45 Hz – analiza informacji (słabo widoczne w EEG z powierzchni głowy)

Podstawowe rytmy występujące w EEG to:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  i  $\theta$ .

Co można wyczytać z EEG? Najbardziej znany efekt związany z EEG to odkryte przez Bergera tzw. blokowanie alfa. Gdy człowiek przebywa w stanie relaksu i ma zamknięte oczy, rytm EEG, w obszarze kory wzrokowej, zmienia się z bardzo chaotycznego w wyraźne fale o częstotliwości 8–13 Hz – tzw. fale alfa (rys. 5). Efekt ten związany jest z tym, że kora mózgowa przestaje analizować informacje związane z postrzeganiem. Neurony są wprowadzane w rodzaj jałowego biegu i działają synchronicznie. W efekcie znacznie zwiększa się amplituda fal alfa.



Rys. 5

Jeśli na skutek dysfunkcji neurony zaczną spontanicznie generować impulsy elektryczne, które poprzez synapsy pobudzą pozostałe neurony kory, może nastąpić napad padaczki. Następuje wtedy tak duża synchronizacja wysyłania impulsów, że może dojść do całkowitego zaniku innych rodzajów aktywności i EEG zmienia się bardzo wyraźnie (rys. 5).

### Zastosowania

Wśród metod obrazowania budowy i czynności mózgu pomiar EEG wyróżnia się tym, że jest to metoda nieinwazyjna i nieobciążająca pacjenta żadnym promieniowaniem. Oferuje także największą dostępną rozdzielczość czasową przy badaniach mózgu. Pomiar EEG wykorzystywane są do badania uszkodzeń mechanicznych mózgu (guzów i krwinków), chorób psychicznych, epilepsji, chorób metabolicznych i niektórych wirusowych (np. Creutzfeldta–Jakoba). Jeśli zaś chodzi o czytanie myśli za pomocą EEG, to na razie możliwe jest jedynie badanie wrażeń związanych z prostymi czynnościami motorycznymi. Niektórym naukowcom udaje się za pomocą EEG stwierdzić, czy pacjent dopiero wyobraża sobie, czy już naprawdę grozi palcem badającemu.

### Bibliografia

- [1] Gloor P., *Neuronal generators and the problem of localization in electroencephalography: application of volume conductor theory to electroencephalography*, Journal of Clinical Neurophysiology, 2(4):327-354 (1985).
- [2] Niedermeyer E., Lopes da Silva F., *Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications and Related Fields*, Williams & Wilkins 1999.
- [3] Shepherd G. M., *Neurobiology*, Oxford University Press; 3rd edition (1994).

Autor jest pracownikiem Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego.

## Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych

W 2004 roku rozwiązany został bardzo znany problem dotyczący liczb pierwszych, wydaje się więc, że jest to wystarczający powód, aby tytuł *Aktualności* wziąć serio i poświęcić je teorii liczb, nie zaś fizyce. Otóż, B. Green i T. Tao [1] udowodnili następujący wynik.

**Twierdzenie.** *Dla każdej liczby naturalnej  $k \geq 3$  istnieje nieskończenie wiele  $k$ -wyrazowych ciągów arytmetycznych, złożonych z samych liczb pierwszych.*

Dla  $k = 5$  przykładem jest m.in. ciąg 5, 11, 17, 23, 29, a dla  $k = 22$  – znaleziony przez Morana, Pritcharda i Thyssena ciąg  $11410337850553 + 4609098694200j$ , gdzie  $j = 0, 1, \dots, 21$ . Przypadek  $k = 3$  w powyższym twierdzeniu udowodnił van der Corput już w 1933 roku.

Z dowodu wynika, że pewien ciąg arytmetyczny złożony z  $k$  liczb pierwszych ma wszystkie wyrazy mniejsze od

$$(1) \quad 2^{2^{2^{2^{2^{100k}}}}},$$

ale zapewne jest to oszacowanie wysoce nieoptymalne.

Wynik Greena i Tao jest szczególnym przypadkiem następującej klasycznej hipotezy.

**Hipoteza (Erdős, Turán 1936).** *Jeśli rosnący ciąg  $A = (a_n)$  liczb naturalnych ma tę własność, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty,$$

*to  $A$  zawiera dowolnie długie ciągi arytmetyczne.*

Ciąg liczb pierwszych spełnia założenia tej hipotezy, gdyż szereg odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest rozbieżny. (Więcej na ten temat – w artykule *Sumowanie odwrotności w Delcie 9/1999.*)

Hipotezę związaną z ciągami arytmetycznymi liczb pierwszych sformułowali w 1923 roku Hardy i Littlewood. Spróbujmy ją wysłowić choćby w przybliżeniu. Dla ustalonego  $k$  niech  $L(k, n)$  oznacza liczbę wszystkich takich ciągów arytmetycznych, które mają długość  $k$ , są złożone z samych liczb pierwszych i są zawarte w zbiorze  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Otóż, Hardy i Littlewood wysunęli przypuszczenie, że

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(k, n)}{n^2 / (\log n)^k} = C_k,$$

gdzie  $C_k$  jest konkretną stałą, daną wzorem na tyle strasznym, że nie będziemy go tu przytaczać, lecz na tyle wygodnym, że można  $C_k$  wyznaczyć z dowolną dokładnością. Wspomnimy tylko dla przykładu, że

$$C_3 = \frac{3}{2} \prod_{p \geq 5} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) = 1,53\dots$$

Innymi słowy, jeśli  $k$  jest ustalone, to dla dużych  $n$  liczba ciągów arytmetycznych długości  $k$ , złożonych z samych liczb pierwszych nie większych od  $n$ , jest, z dokładnością do konkretnego stałego czynnika, równa

z grubsza  $n^2 / (\log n)^k$ . Powinno więc być takich ciągów dużo, bo  $n^2 / (\log n)^k \rightarrow \infty$  dla  $n \rightarrow \infty$ .

Green i Tao nie potrafią udowodnić pełnej hipotezy Hardy’ego i Littlewooda. Z ich dowodu wynika jednak, że liczba  $L(n, k)$  rośnie przy ustalonym  $k$  nie wolniej, niż  $c_k n^2 / (\log n)^k$ , gdzie  $c_k$  jest pewną stałą dodatnią – niestety – dużo mniejszą od  $C_k$ .

Dowód twierdzenia Greena i Tao wykorzystuje różne techniki analizy matematycznej, teorii układów dynamicznych i rachunku prawdopodobieństwa. Są w nim trzy zasadnicze składniki. Pierwszy z nich to słynny wynik Szemerédiego z 1975 roku.

**Twierdzenie.** *Niech  $A$  będzie takim rosnącym ciągiem liczb naturalnych, że dla pewnej liczby dodatniej  $\varepsilon$  jest*

$$\frac{|A \cap [1, N]|}{N} > \varepsilon \quad \text{dla nieskończenie wielu } N.$$

*Wtedy  $A$  zawiera dowolnie długie ciągi arytmetyczne.*

To bardzo trudne twierdzenie; jego istotnie nowy dowód był jednym z powodów, dla których W.T. Gowers otrzymał w 1998 roku medal Fieldsa.

Drugi składnik, a zarazem zasadniczy pomysł Greena i Tao, to uogólnienie twierdzenia Szemerédiego ze zbioru liczb naturalnych na dowolne jego pseudolosowe podzbiory. Mniejsza tu o ścisłą definicję pseudolosowości; chodzi o to, że jeśli w nieskończonym pseudolosowym zbiorze liczb naturalnych  $Z$  mamy mniejszy, dowolny, byle „w miarę gęsty” podzbiór  $P$  – tzn. podzbiór  $P$ , zawierający w dobrze zdefiniowanym sensie ustalony dodatni procent elementów zbioru  $Z$  – to wówczas  $P$  zawiera dowolnie długie ciągi arytmetyczne.

Trzeci składnik to konstrukcja odpowiedniego zbioru pseudolosowego  $Z$ , zawierającego m.in. wszystkie liczby pierwsze. Zasadniczą część zbioru  $Z$  stanowią te liczby  $n$ , których wszystkie dzielniki pierwsze są większe od  $\sqrt[n]{n}$ , gdzie  $m$  jest stałą zależną od  $k$ . Z uwagi na techniczny wymóg pseudolosowości trzeba dorzucić jeszcze odrobinę innych liczb. W takim zbiorze  $Z$  wszystkich liczb pierwszych  $P$  jest „w miarę gęsty” (wśród  $N$  początkowych elementów zbioru  $Z$  jest co najmniej  $\varepsilon N$  liczb pierwszych, gdzie  $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$ ).

I to już, w telegraficznym skrócie, wszystko. Wystarczy do takiego zbioru  $Z$  i jego „w miarę gęstego” podzbioru  $P$  zastosować uogólnione twierdzenie Szemerédiego.

Paweł STRZELECKI

### Literatura

- [1] Green, T. Tao. *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions.* (Preprint, 50 str.)
- [2] Tao. *Arithmetic progressions and the primes – El Escorial lectures.* (Preprint, 38 str.)

Oba preprinty można łatwo wyszukać w elektronicznym archiwum <http://www.arxiv.org/>

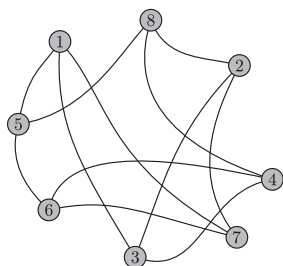
# Uwierzytelnianie cyfrowe za pomocą grafów

## – dowody z wiedzą zerową

Krzysztof KULEWSKI

Artykuł ten jest częścią referatu wygłoszonego na I Kongresie Młodych Matematyków Polskich, który odbył się w Warszawie w dniach 17–19 września 2004 roku.

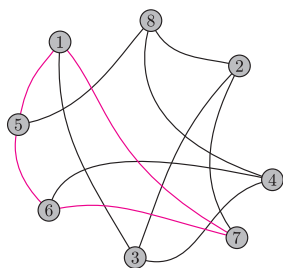
Dowody z wiedzą zerową – w wielkim uproszczeniu jest to sposób przekonania kogoś o naszej znajomości pewnego faktu bez ujawniania mu tego faktu.



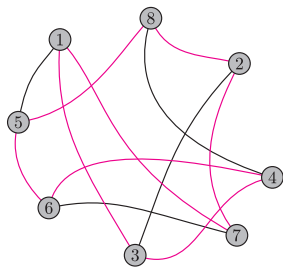
Rys. 1. Przykładowy graf  $G$ .

1	2	3	4	5	6	7	8
3	3	1	3	1	4	1	2
5	7	2	6	6	5	2	4
7	8	4	8	8	7	6	5

Reprezentacja grafu  $G$ .



Rys. 2. Cykl w grafie  $G$ . Reprezentacja cyklu w grafie  $G$ : 1 5 6 7.



Rys. 3. Cykl Hamiltona w grafie  $G$ . Reprezentacja cyklu Hamiltona w grafie  $G$ : 1 3 4 6 5 2 7 8.

Cykl Eulera to taki, w którym każda z krawędzi występuje dokładnie jeden raz.

Powszechnie znane są możliwości stosowania, na przykład, dużych liczb pierwszych w uwierzytelnianiu cyfrowym – tak między innymi działa algorytm RSA. Ale wymyślono także inne metody realizacji tego zagadnienia – niekiedy bardzo zaskakujące i nieoczekiwane. Jedną z nich są dowody z wiedzą zerową.

Ale zacznijmy od początku. Algorytm, o którym będziemy mówili, wykorzystuje do swojego działania grafy („wierzchołki połączone krawędziami”). Graf to zbiór wierzchołków  $V$  oraz zbiór krawędzi  $E$  – połączeń pomiędzy wierzchołkami.

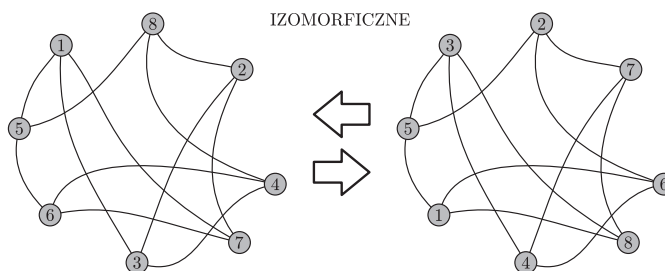
Na rysunku 1. znajduje się przykładowy graf  $G$ . Zawiera on 8 wierzchołków i 12 krawędzi.

Grafy możemy reprezentować np. przez macierz – czyli po prostu tabelkę. Pierwszy wiersz to etykiety kolejnych wierzchołków. Jeżeli pod kreską w kolumnie  $i$  znajduje się liczba  $j$ , oznacza to, że wierzchołki  $i$  oraz  $j$  połączone są krawędzią. Dobrze jest, aby zarówno w pierwszym wierszu, jak i w kolumnach, obowiązywał porządek rosnący.

Cyklem w grafie nazywamy taki ciąg jego krawędzi, który przeprowadza nas przez kilka wierzchołków i wraca do punktu wyjścia. Jeśli w naszym grafie  $G$  pójdziemy ścieżką, zaczynając od wierzchołka 1, potem 5, 6, 7 i na końcu znów wracając do wierzchołka 1, to będzie to cykl, tak jak na rysunku 2.

Cyklem Hamiltona w grafie nazywamy cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz. Na rysunku 3. znajduje się cykl Hamiltona w naszym grafie  $G$ . Dla wygody, cykl Hamiltona rozpoczynamy od wierzchołka oznaczonego etykietą 1.

Ostatnim pojęciem, którego będziemy potrzebowali, jest izomorficzność. Mówimy, że dwa grafy są izomorficzne, gdy jeden powstaje z drugiego przez pozamienianie etykiet wierzchołków. Na rysunku 4. znajduje się nasz graf  $G$  oraz izomorficzny z nim graf  $H$ .



Rys. 4. Izomorficzne grafy  $G$  i  $H$ .

W grafie  $H$  mamy więc cykl Hamiltona: 3 4 6 1 5 2 7 8, co po uporządkowaniu daje 1 5 2 7 8 3 4 6.

Pojawiają się dwa problemy. Jak znaleźć cykl Hamiltona w dowolnym grafie oraz jak stwierdzić, czy dwa grafy są izomorficzne?

W informatyce wyróżniono kilka klas problemów obliczeniowych. Do klasy P (ang. *polynomial* – wielomianowy) zaliczono problemy obliczeniowo łatwe – czyli takie, dla których znane jest rozwiązanie działające w czasie wielomianowym. Przykładem może być zagadnienie znajdowania najkrótszej ścieżki w grafie bądź też znajdowanie cyklu Eulera. Problemy NP (ang. *nondeterministic polynomial* – niedeterministycznie wielomianowy) to takie, których rozwiązania są weryfikowalne w czasie wielomianowym, rozwiązywalne zaś algorytmem niedeterministycznym w czasie wielomianowym (np. na niedeterministycznej maszynie Turinga).

W szczególności łatwo zauważyć, że problemy klasy P są NP, ponieważ ich rozwiązania można sprawdzić w czasie wielomianowym.

Istnieje dość liczna grupa problemów, dla których pokazano, że należą do klasy NP, a nie udało się pokazać, że należą do klasy P. W problemach NP

Jeżeli weźmiemy permutację wierzchołków, przeprowadzającą graf  $G$  na graf  $H$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

to graf  $H$  będzie postaci:

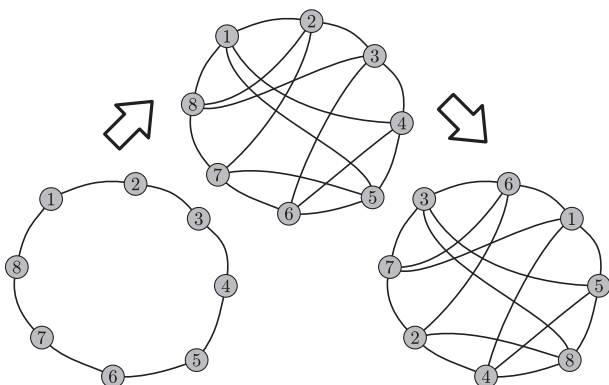
3	7	4	6	5	1	8	2
4	2	3	4	1	6	7	5
8	8	6	1	2	5	3	7
5	4	7	2	3	8	1	6

czyli po uporządkowaniu:

1	2	3	4	5	6	7	8
5	5	4	3	1	1	2	1
6	6	5	6	2	2	4	3
8	7	8	7	3	4	8	7

W grafie  $H$  mamy więc cykl Hamiltona: 3 4 6 1 5 2 7 8, co po uporządkowaniu daje: 1 5 2 7 8 3 4 6.

Jak wygenerować graf wraz z cyklem Hamiltona? Bardzo prosto. Najpierw łączymy kolejne wierzchołki tak, żeby mieć cykl Hamiltona, a następnie losowo dodajemy dużą liczbę krawędzi. Na koniec permutujemy graf. Schemat ten jest pokazany na rysunku 5.



Rys. 5. Schemat tworzenia grafu do uwierzytelniania.

Liczba rund	Szansa oszustwa
10	$9,76562 \cdot 10^{-4}$
30	$9,31323 \cdot 10^{-10}$
100	$7,88861 \cdot 10^{-31}$

Jeśli oszust byłby w stanie wykonywać takie sto rund w czasie  $10^{-9}$  sekundy każda, to udałoby mu się podszyć pod klienta średnio po  $2 \cdot 10^{13}$  lat.

#### Literatura:

- [1] Douglas Robert Stinson *Cryptography. Theory and Practice*, CRC Press LLC, Washington DC. 1995,  
 [2] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest *Wprowadzenie do algorytmów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

Autor jest studentem pierwszego roku Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

wyróżniono również specjalną podgrupę, tak zwane problemy NP-zupełne, które można scharakteryzować jako najtrudniejsze problemy w NP. Problem jest problemem NP-zupełnym, jeżeli jest problemem NP oraz dodatkowo każdy inny problem NP jest do niego redukowalny. A zatem, gdyby pokazano, że któryś problem NP-zupełny jest problemem należącym do klasy P, oznaczałoby to, że wszystkie problemy NP należą również do klasy P.

Pierwszym problemem, dla którego pokazano NP-zupełność, był problem spełnialności formuł logicznych (SAT).

Najprawdopodobniej w NP istnieją także problemy pośrednie, to znaczy takie, które nie należą ani do P, ani do NP-zupełnych.

Zarówno problemy NP-zupełne, jak i problemy uważane za pośrednie, traktowane są obecnie jako problemy obliczeniowo trudne, to znaczy takie, których rozwiązanie w jakimś sensownym czasie jest najprawdopodobniej niemożliwe. Często najlepszym znanym rozwiązaniem jest sprawdzenie po prostu wszystkich możliwych kombinacji.

Problem znajdowania cyklu Hamiltona jest problemem NP-zupełnym, a problem izomorficzności dwóch grafów jest uważany za problem pośredni. Oznacza to, że dla obydwu tych problemów nie są znane algorytmy rozwiązujące je w krótkim czasie (ani nawet w ciągu lat czy wieków), jeżeli tylko mamy dostatecznie dużo wierzchołków i krawędzi. Ten właśnie problem matematyczny można wykorzystać do uwierzytelniania.

A teraz właściwa idea naszego uwierzytelniania. Przypuśćmy, że stroną, która chce udowodnić swoją tożsamość, jest klient banku. Początkowo obydwie strony ustalają graf  $G$  w taki sposób, aby klient znalazł cykl Hamiltona w tym grafie.

W ten sposób przygotowany graf  $G$  oraz cykl Hamiltona w nim są „kluczem” potwierdzającym tożsamość klienta. Jednak schemat uwierzytelniania wygląda nieco zaskakująco:

1. Klient wysyła do banku graf  $H$  będący losową permutacją grafu  $G$ ;
2. Bank losowo odsyła klientowi liczbę 0 lub 1;
3. Klient, jeżeli otrzymał 0, udowadnia bankowi, że graf  $H$  jest permutacją grafu  $G$ , jeżeli zaś otrzymał 1, pokazuje cykl Hamiltona w grafie  $H$ ;
4. Cała procedura jest powtarzana dowolną liczbę razy.

Dowód faktu, że  $G$  jest permutacją  $H$ , może być zrealizowany przez wysłanie permutacji przeprowadzającej graf  $H$  na  $G$ . Zauważmy, że samo sprawdzenie, czy dwa grafy są izomorficzne, gdy dysponujemy taką permutacją, jest bardzo proste i szybkie. Klient zna cykl Hamiltona w grafie  $G$  – zna go więc również w grafie  $H$  – bo to on permutował graf. On też jest w stanie pokazać, że graf  $H$  jest permutacją grafu  $G$ .

Przypuśćmy teraz, że oszust, który wcześniej podsłuchiwał transmisję, chce się podszyć pod klienta. Zna już szereg grafów  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . Do każdego z nich zna dokładnie jedną z informacji: albo permutację przeprowadzającą  $G$  na  $H_i$ , albo cykl Hamiltona w grafie  $H_i$ . Statystycznie pozna więc sam graf  $G$ , ale nie pozna w nim cyklu Hamiltona – ponieważ klient nigdy nie podaje jednocześnie obydwu informacji. Oszust potrafi więc wygenerować dla banku graf  $F$ , będący permutacją grafu  $G$  albo wygenerować graf  $J$ , w którym będzie znał cykl Hamiltona. Jednak nie jest w stanie połączyć tych dwóch faktów – to znaczy wygenerować grafu  $X$ , który byłby permutacją grafu  $G$  i w którym jednocześnie znalazłby cykl Hamiltona. Jednocześnie nie wie, czy bank odeśle mu 0 czy 1. Tak więc szansa na to, że mu się uda, wynosi  $\frac{1}{2}$ . Przy  $n$ -krotnym powtórzeniu całej procedury szansa ta wynosi  $\frac{1}{2^n}$ . A zatem już po 30 rundach zmaleje do mniej niż jeden do miliona. A  $n$  możemy ustalić na przykład na 100, co da nam niezawodność wystarczającą do praktycznie dowolnych celów.





# mała delta

## Efekt brazylijskiego orzecha

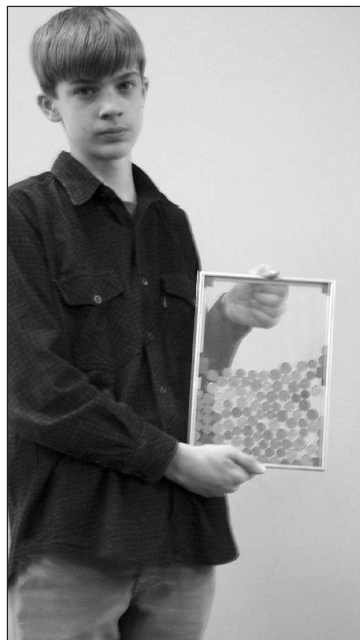
Efekt brazylijskiego orzecha polega na wydobywaniu się na powierzchnię dużych przedmiotów podczas potrząsania. Często się z nim spotykamy, chociaż nie zdajemy sobie z tego sprawy. Np. potrząsając pudełko z solonymi orzechami, sprawiamy, że sól opada na dno. Ale nie wydaje się już takie oczywiste to, że przy okazji większe orzechy wędrują na wierzch, a mniejsze obniżają się (ruch orzechów będzie losowy, ale będzie większe prawdopodobieństwo tego, że duże orzechy przemieść się do góry). Zainteresowany naturą tego zjawiska skonstruowałem przyrząd do jego obserwacji.

## Doświadczenie

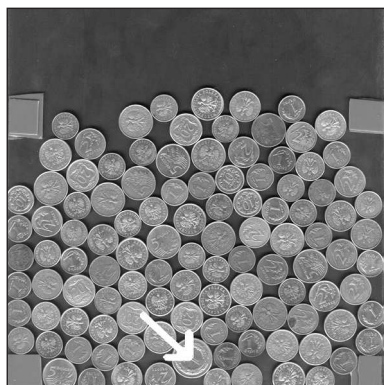
Wykorzystałem aluminiową ramę, do której wsunięte zostały dwie szybki z odpowiednim dystansem (zdjęcie 1).

Następnie wrzuciłem tam monety o nominałach: 1, 2, 5, 10 oraz 20 groszy jako przedmioty małe i jedną monetę jednozłotową jako przedmiot „duży”. Odległości między szybkami dobrałem tak, żeby moneta jednozłotowa mogła się swobodnie poruszać, ale żeby nie nachodziły na siebie dwie monety jednogroszowe.

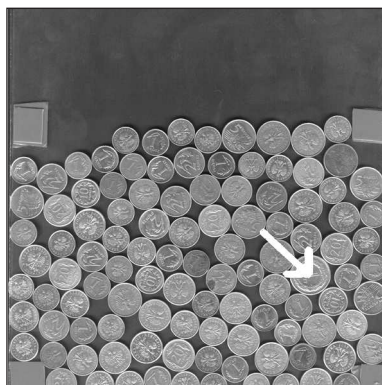
Na początku największą monetę ustawiłem na dole „przyrządu” (zdjęcie 2).



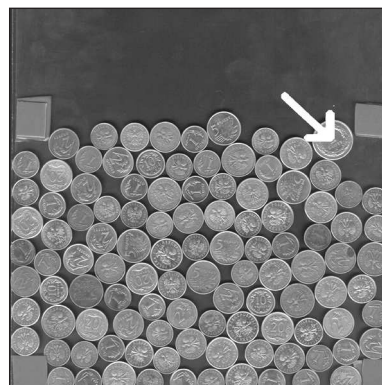
Zdjęcie 1. Autor z przyrządem doświadczalnym



Zdjęcie 2. Faza pierwsza: moneta jednozłotowa znajduje się na dole przyrządu



Zdjęcie 3. Faza druga: moneta jednozłotowa podczas potrząsania przyrządu wędruje w górę



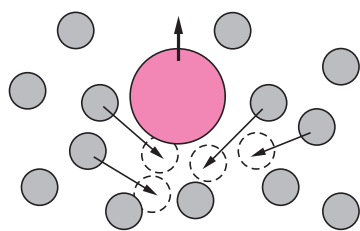
Zdjęcie 4. Faza ostatnia: po dostatecznie długim potrząsaniu moneta jednozłotowa „wypływa” na samą górę

Następnie systematycznie potrząsałem „przyrządem”, wykonując nieregularne ruchy w płaszczyźnie równoległej do szyb: pionowe, poziome i okrężne. Moneta jednozłotowa zaczęła się stopniowo przesuwać do góry (zdjęcie 3), a po pewnym czasie znalazła się na wierzchu i już tam została (zdjęcie 4).

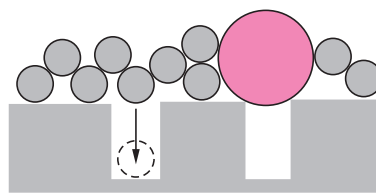
Gdy doświadczenie przeprowadziłem z większą, pięćzłotową monetą, to znalazła się ona na górze jeszcze szybciej.

## Zarys teorii zjawiska

Zachodzi pytanie, jaka jest natura tego procesu? Nie chodzi chyba o zjawisko podobne do siły wyporu cieczy, bo wypychane do góry monety miałyby większy ciężar na jednostkę powierzchni (moneta jednozłotowa jest znacznie grubsza od pozostałych). Raczej mamy do czynienia z wynikiem przypadkowych drgań, które faworyzują mniejsze obiekty przy dążeniu w dół wywołanym oddziałującą na wszystko grawitacją. Wszystkie monety „podskakują” na porównywalną wysokość. Ale przy opadaniu mniejsze mogą wsuwać się pod większe, utrudniając tym ostatnim powrót na dół (rys. 5). Aby podczas „podskakiwania” moneta mogła opaść w dół w stosunku do pozostałych, musi się pod nią utworzyć na chwilę szczelina. W trakcie wstrząsania tworzą się przypadkowe szczeliny, ale prawdopodobieństwo pojawienia się małej szczeliny jest większe niż dużej. Obiekty małe mogą wpaść w małą szczelinę, ale też wpadają w większe otwory. Natomiast obiekty duże mogą wpaść tylko w odpowiednio duże szczeliny (rys. 6)



Rys. 5. Mniejsze monety wsuwają się pod większą, utrudniając jej opadanie.



Rys. 6. Mniejsze obiekty mają większe szanse znalezienia szczeliny odpowiedniej wielkości.

W takim razie małe obiekty łatwiej będą opadać. Z tego powodu mniejsze obiekty mogą wchodzić pod duże, utrudniając ich opadanie. Duże obiekty nie będą mogły wchodzić pod mniejsze. Wszystkie obiekty małe będą się poruszać w dół, a większy obiekt – poziom po poziomie – zawędruje stopniowo na samą górę.

Różne zjawiska mogą spowalniać lub nawet uniemożliwiać zachodzenie tego zjawiska, między innymi:

### 1. Tarcie

Duże tarcie (np. przy obiektach o nieregularnych kształtach) powinno znacząco spowalniać całe zjawisko. Doświadczenia można by przeprowadzić, np. zamieniając monety na kółka zębate, ale nie miałem odpowiednich przedmiotów.

### 2. Duży ciężar dużego obiektu

Musi istnieć jakaś granica, powyżej której wpływ ciężaru będzie górować nad opisanym tu zjawiskiem opadania i obiekt duży będzie się zanurzał zamiast podnosić. Przedmiot większy nie będzie musiał czekać na bardzo dużą szczelinę, tylko będzie każdą powstałą szczelinę dodatkowo rozsuwał, robiąc sobie miejsce do obniżania położenia pod wpływem grawitacji. Bardzo chętnie potwierdziłbym to doświadczalnie, ale, niestety, nie dysponowałem odpowiednimi przedmiotami – np. dużą monetą wykonaną z ołowiu i małymi żetonami z plastiku.

## Podsumowanie

Wydaje się, że opisany tu model teoretyczny (analiza intuicyjna) i wyniki doświadczeń są zadowalająco zbieżne.

Autor jest uczniem trzeciej klasy gimnazjum w Zespole Szkół Ogólnokształcących Szkół Społecznych Towarzystwa Oświatowego im. Stanisława Konarskiego w Katowicach.

Konrad SKLORZ

# Pierwsza prędkość kosmiczna a siła Coriolisa

Zbigniew OSIĄK

## Siła Coriolisa

Na ciało o masie  $m$  poruszające się z prędkością  $v$  w układzie wirującym z prędkością kątową  $\omega$  działa siła Coriolisa

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}.$$

Z punktu widzenia obserwatora związanego z Ziemią siła Coriolisa powoduje między innymi następujące zjawiska:

- Ciało spadające swobodnie zbacza ku wschodowi.
- Ciało poruszające się na półkuli północnej w kierunku północnym zostaje odchylone ku wschodowi.

Według obserwatora związanego z układem nieinercyjnym, który stanowi wirująca planeta, siła dośrodkowa, utrzymująca satelitę krążącego po orbicie kołowej w płaszczyźnie równikowej, jest sumą siły grawitacyjnej i sił bezwładności – odśrodkowej i Coriolisa.

Z definicji, w układzie inercyjnym cząstka pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym wtedy i tylko wtedy, gdy suma działających na nią sił zewnętrznych jest równa zero. Układy niespełniające tego warunku nazywane są układami nieinercyjnymi. Są nimi układy poruszające się względem układu inercyjnego ruchem postępowym przyspieszonym lub opóźnionym, drgającym, obrotowym, krzywoliniowym, itp. W takich układach pojawiają się siły pozorne, zwane siłami bezwładności. Aby można było stosować drugą zasadę dynamiki również w układach nieinercyjnych, należy wśród sił działających na cząstkę uwzględnić także siły bezwładności.

$$F_D = F_G + F_O + F_C,$$

$$F_D = -\frac{mv^2}{r} : \text{siła dośrodkowa utrzymująca satelitę na orbicie,}$$

$$F_G = -\frac{GMm}{r^2} : \text{siła grawitacyjna,}$$

$$F_O = m\omega^2 r : \text{odśrodkowa siła bezwładności związana z ruchem wirowym Ziemi,}$$

$$F_C = mv\omega : \text{siła Coriolisa związana z ruchem wirowym Ziemi,}$$

$$\frac{1}{r}v^2 + 2\omega v + \omega^2 r - \frac{GM}{r^2} = 0, \quad \Delta = \frac{4GM}{r^3} > 0.$$

Powyższe równanie jest trójmianem kwadratowym względem  $v$ , mającym dwa pierwiastki:

$$v_1 = -\omega r + \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{oraz} \quad v_2 = -\omega r - \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

**Przykład.** Przykładowe obliczenia wykonamy dla satelity krążącego tuż nad powierzchnią Ziemi.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{\text{doba}} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, & \omega r &= 467,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ r &= 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}, & \sqrt{\frac{GM}{r}} &= 7,9 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ M &= 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, & v_1 &= +7,4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ G &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}, & v_2 &= -8,4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Prędkość  $v_1$  należy nadać rakiecie wystrzelonej w kierunku wschodnim, siła Coriolisa skierowana jest wtedy radialnie od centrum źródła pola. Prędkość  $v_2$  należy nadać rakiecie wystrzelonej w kierunku zachodnim, siła Coriolisa skierowana jest wtedy radialnie ku centrum źródła pola. Czas powrotu nad ten sam punkt Ziemi, przy poruszaniu się w kierunku ruchu wirowego Ziemi jest większy niż w kierunku przeciwnym.

Istnienie dwóch różnych wartości pierwszej prędkości kosmicznej rozpatrzmy teraz z punktu widzenia obserwatora związanego z układem inercyjnym, spoczywającym względem środka wirującej planety. Według tego obserwatora satelita obiega orbitę kołową w płaszczyźnie równikowej z szybkością  $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ , wynikającą z równości wartości sił dośrodkowej i grawitacyjnej. Przed startem pojazd kosmiczny wirował wraz z planetą z szybkością  $\omega r$ . Aby umieścić satelitę na orbicie, należy wystrzelić go w kierunku obrotu planety z prędkością o wartości  $\sqrt{\frac{GM}{r}} - \omega r$  względem wyrzutni lub w kierunku przeciwnym z szybkością  $\sqrt{\frac{GM}{r}} + \omega r$ . W praktyce wykorzystywany jest, oczywiście, pierwszy sposób.

10



## Rozwiązanie zadania F 641.

Unoszenie trwa dopóty, dopóki gęstość unoszącego się powietrza jest mniejsza od gęstości otaczającego powietrza na danej wysokości. Równanie stanu gazu doskonałego

$$pV = nRT$$

daje zależność między ciśnieniem  $p$  a gęstością  $\rho$  powietrza w postaci

$$p = \frac{\rho RT}{\mu},$$

a więc gęstość powietrza otaczającego maleje według wzoru

$$\rho_{ot}(h) = \frac{\mu p_0}{RT_0} \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_0}\right).$$

Powietrze ogrzane ma na dowolnej wysokości  $h$  ciśnienie równe ciśnieniu gazu dookoła, ale zależność  $p$  i  $V$  opisuje równanie adiabaty  $pV^\kappa = \text{const}$ , albo po przekształceniu

$$\rho(p) = \frac{\mu p_0}{RT_1} \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\kappa}.$$

Po podstawieniu do wzoru barometrycznego mamy

$$\rho(p) = \frac{\mu p_0}{RT_1} \exp\left(-\frac{\mu gh}{\kappa RT_0}\right).$$

Powietrze zatrzyma się na wysokości  $h_z$ , gdzie gęstości są równe

$$\frac{\mu p_0}{RT_0} \exp\left(-\frac{\mu gh_z}{RT_0}\right) = \frac{\mu p_0}{RT_1} \exp\left(-\frac{\mu gh_z}{\kappa RT_0}\right),$$

czyli

$$h_z = \frac{RT_0}{\mu g} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \frac{T_1}{T_0}.$$



Autor jest byłym pracownikiem naukowym Uniwersytetu Wrocławskiego i wrocławskiej Akademii Medycznej.

Dwie różne wartości pierwszej prędkości kosmicznej otrzymuje się również, analizując w ramach ogólnej teorii względności swobodny spadek cząstki próbnej na wirującą planetę. Jeżeli założyć, że promień planety jest dużo większy od promienia Schwarzschilda, a szybkość satelity oraz iloczyn szybkości kątowej i promienia planety są dużo mniejsze od szybkości światła, to uzyskuje się identyczny wynik jak w rachunku klasycznym.

**CORIOLIS, Gaspard Gustave de** (1792–1843). Francuski fizyk i inżynier.

1792 – Urodził się 21 maja w Paryżu.

1808 – Rozpoczął studia w École Polytechnique, które kontynuował w École des Ponts et Chaussées.

1816 – Został profesorem w École Polytechnique.

1836 – Wybrano go na członka Paryskiej Akademii Nauk.

1843 – Zmarł 19 września w Paryżu.

Coriolis znany jest przede wszystkim z tego, że

- podał (1829) definicję pracy i energii kinetycznej (*force vive*)<sup>1)</sup>,
- odkrył (1835) nową siłę bezwładności, co pozwoliło mu sformułować równania ruchu w wirującym układzie odniesienia<sup>2)</sup>.

Obie cytowane prace Coriolisa

<sup>1)</sup> *Du calcul de l'effet des machines* (1829)

<sup>2)</sup> *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps* (1835)

dostępne są pod adresem internetowym: <http://gallica.bnf.fr/>

(Kliknąć Recherche. W oknie Auteur wpisać: Coriolis. Wcisnąć Enter.).

## Dwie nagrody dla Polaków w finałach XVI Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej w Dublinie

*Ryszard RAKOWSKI*

W dniu 29 września 2004 r. odbyła się w sali św. Patryka na Zamku w Dublinie, w obecności przedstawicieli władz państwowych Irlandii, Komisji Europejskiej i laureatów Nagrody Nobla, uroczystość zakończenia XVI Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej.

Jury przyznało trzy I nagrody w wysokości 5 000 euro pracom z Austrii (technika), Danii (chemia) i Niemiec (fizyka). Trzy II nagrody w wysokości 3 000 euro otrzymały prace z Niemiec (informatyka), Polski (matematyka) i Turcji (fizyka). Trzy III nagrody w wysokości 1 500 euro otrzymały prace z Litwy (ekologia), Polski (biologia) i Turcji (informatyka).

Tak więc wśród 9 prac wyróżnionych nagrodami głównymi znalazły się dwie prace reprezentujące Polskę: praca **Marcela KOŁODZIEJCZYKA**, absolwenta Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Łodzi: **Waga szalkowa i uogólniony problem fałszywej monety** oraz praca **Artura LEWANDOWSKIEGO**, absolwenta IV Liceum Ogólnokształcącego im. Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy: **Procesy uczenia się mrówek**.

Jury przyznało laureatom także nagrody honorowe w postaci udziału w Międzynarodowym Forum Młodych Naukowców w Londynie – 3 autorom pracy z Austrii oraz w Międzynarodowym Seminarium Młodzieżowym w Sztokholmie – autorom nagrodzonych prac z Danii i Turcji.

Ponadto zostały przyznane specjalne nagrody w formie tygodniowego pobytu w Europejskim Biurze Patentowym w Monachium – 3 i po jednej w Europejskim Obserwatorium Astronomicznym na Wyspach Kanaryjskich, Europejskiej Agencji Kosmicznej, Instytucie Lauego–Langevina, CERN-ie i Europejskim Laboratorium Biologii Molekularnej. Osiem nagród ufundowały różne irlandzkie instytucje, między innymi nagrodę Intela w postaci laptopa otrzymał Marcel Kołodziejczyk.

Jury finałów europejskich w Dublinie liczyło 15 osób. Składało się z mianowanych przez Komisję Europejską uczonych, reprezentujących różne dziedziny nauki i techniki, oraz przedstawicieli przemysłu. Był wśród nich Polak dr Piotr Chrzastowski z Instytutu Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego. Przewodniczącym jury był niemiecki fizyk i pierwszy europejski kosmonauta dr Ulf Merbold z Europejskiej Agencji Kosmicznej i Europejskiego Centrum

Skrót pracy Marcela Kołodziejczyka zaprezentowany został w numerze 3/2004 *Delt*y.

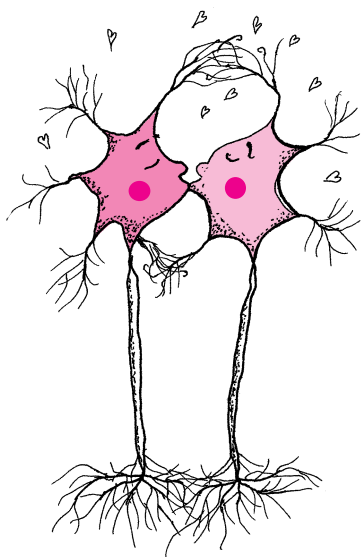
W finałach europejskich w roku 2004 zaprezentowano 72 prace 101 autorów z 32 krajów: 22 krajów Unii Europejskiej oraz Białorusi, Bułgarii, Gruzji, Islandii, Izraela, Norwegii, Rosji, Szwajcarii, Turcji, Ukrainy, a ponadto gościnnie 2 prace laureatów konkursów prac młodych naukowców z Chin i USA. Wśród 74 prac było 17 prac z biologii, 2 z chemii, 13 z fizyki, 4 z informatyki, 7 z matematyki, 6 z medycyny, 5 z ekologii, 1 z nauk o Ziemi, 1 z psychologii i 18 z techniki.

Kosmicznych Badań i Technologii. Z uczestnikami finałów spotkali się dwaj laureaci nagrody Nobla: prof. Harold KROTO z W. Brytanii (Nobel 1996 z chemii) i prof. Erwin NEHER z Niemiec (Nobel 1991 z fizjologii i medycyny).

Polacy uczestniczyli w tym najpoważniejszym konkursie prac naukowych młodzieży europejskiej po raz dziesiąty. Zdobyli już 13 nagród głównych, w tym 2 pierwsze nagrody, 5 drugich i 6 trzecich. Spośród tych nagród aż cztery przyznano pracom matematyków. Każda z tych prac zwyciężała wcześniej w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki. To właśnie po odebraniu złotego medalu w Konkursie *Delty* i PTM zdobywali laury w konkursie europejskim:

- Marcin KOWALCZYK i Marcin SAWICKI z Warszawy („Siła zbioru”, 1995 r., III nagroda),
- Tomasz OSMAN z Kielc i Maciej KUROWSKI z Torunia („Wielowymiarowe uogólnienie twierdzenia Bezout”, 1996 r., II nagroda),
- Grzegorz i Michał KAPUSTKOWIE z Krakowa („O pewnych własnościach parzystokątów wpisanych i opisanych na okręgach”, 1998 r., III nagroda).

Pracy Jakuba WOJTASZCZYKA z Warszawy „O liczbie podziałów wielokąta foremnego na równoległoboki” przyznano nagrodę w postaci stażu badawczego.



Marcel Kołodziejczyk okazał się w tym roku kontynuatorem tej znakomitej tradycji. Obok wymienionych wyżej siedmiu laureatów KPUzM główne nagrody odbierało w konkursie europejskim jeszcze dziewięciu Polaków. Byli to Radosław SKIBIŃSKI („Próba odtworzenia wyglądu i trybu życia oraz ustalenia przynależności systematycznej wymarłego gatunku ryby oligoceńskiej”, 1996 r., III nagroda), Michał KSIĄŻKIEWICZ („Badanie czystości powietrza metodą lichenindykacji”, 1999 r., I nagroda), Maciej WALCZAK („Chemiczna synteza aminoalkilofosforanów nukleozydów”, 1999 r., III nagroda), Grzegorz NIEDŹWIEDZKI („Nowe znaleziska tropów dinozaurów z utworów hetangu północnego obrzeżenia Gór Świętokrzyskich”, 2000 r., I nagroda), Zbigniew PIANOWSKI („Zaprojektowanie, synteza i zastosowanie ciekłych kryształów opartych na barwnikach azonowych”, 2001 r., II nagroda), Marcin WOJNARSKI („Sieć neuronowa do rozwiązywania zadań klasyfikacyjnych”, 2001 r., II nagroda), Piotr GARBACZ („Badanie wpływu kierunku i natężenia bodźca grawitacyjnego na wzrost jęczmienia i rzeżuchy”, 2002 r., III nagroda), Łukasz i Mariusz JAREMKO („Synteza hydrazynu p-aminofenyłowego analogu immunosupresorowego fragmentu ubikwityny”, 2003 r., III nagroda).

Konkurs Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej jest organizowany przez Komisję Europejską od 1989 roku. Jego celem jest promocja zainteresowań naukowych wśród młodzieży. Ocenia się, że w Konkursie uczestniczy co roku ponad 30 tysięcy młodych naukowców.

Konkurs obejmuje obecnie nauki ścisłe, przyrodnicze, nauki społeczne, ekonomiczne i technikę. Wymagane jest przedstawienie wyników własnej pracy badawczej czy technicznej. W Konkursie uczestniczyć mogą uczniowie szkół średnich i studenci I roku studiów. Wiek autorów musi znajdować się w przedziale 15–20 lat. Z jednego kraju można przedstawić do finału europejskiego maksimum 3 prace wyłonione w wyniku konkursów krajowych.

Prace reprezentujące Polskę zostają wytypowane przez Polski Komitet Konkursu w wyniku Polskich Eliminacji, w których uczestniczą prace uprzednio nagrodzone w konkursach ogólnopolskich lub polecane przez pracownika nauki ze stopniem naukowym co najmniej doktora.

Następne finały europejskie odbędą się w dniach 17–22 września 2005 roku w Moskwie.

Szerszą informację o Konkursie oraz Regulamin Polskich Eliminacji można znaleźć na stronie internetowej Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci: [www.fundusz.org](http://www.fundusz.org)

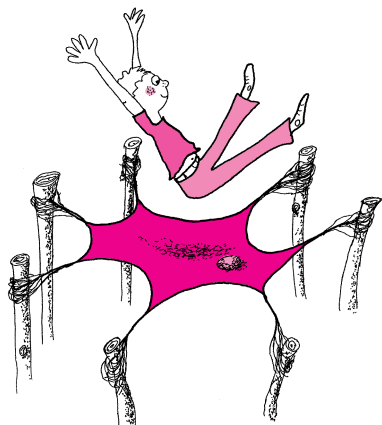
Autor jest Krajowym Organizatorem Konkursu i Sekretarzem Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci.

## King size

Czy postępowi astronomii lepiej służy budowanie wielkich czy mniejszych teleskopów? Przed próbą odpowiedzi na to pytanie trzeba pewne warunki doprecyzować. Jasne, że astronomowie chcieliby mieć jak najwięcej jak największych teleskopów, ale to nierealne, bo teleskopy kosztują i może zamiast jednego wielkiego lepiej byłoby zbudować kilka mniejszych. Teoretycznie można by to rozstrzygnąć, oceniwszy tzw. naukową wydajność poszczególnych teleskopów. Z braku innych pomysłów robi się to, licząc ważne prace naukowe napisane na podstawie obserwacji wykonanych za pomocą danego teleskopu i cytowania tych prac, przy czym prace te powinny ukazać się w powszechnie uznanych za ważne czasopismach naukowych. Nie ma sposobu na zmierzenie „ważności” pracy lub czasopisma, pozostaje więc przyjąć umowę, że np. ważne są czasopisma z tzw. Listy Filadelfijskiej, czy *Nature*, czy jeszcze jakieś inne.

Ciekawe, że w ogóle są ludzie zajmujący się tak niewdzięcznymi sprawami, jak robienie tego rodzaju statystyk. W każdym razie stwierdzono, że wydajność naukowa naziemnego teleskopu jest proporcjonalna do powierzchni obiektywu i zarazem w przybliżeniu proporcjonalna do ceny teleskopu. Nie jest to dokładnie to samo, gdyż cena teleskopu jest podobno proporcjonalna do trzeciej potęgi średnicy jego obiektywu, podczas gdy sama powierzchnia obiektywu – oczywiście do potęgi drugiej. Jeżeli jednak pominąć ten problem, to – jak widać – każda pojedyncza złotówka, dolar, czy euro zaowocują tak samo bez względu na to, na jakich rozmiarów teleskop zostaną wydane. Nie zmienia to faktu, że astronomowie wolą teleskopy duże.

T. K.



## Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

**F 641.** Duża, sucha masa powietrza przy powierzchni Ziemi ogrzewa się do temperatury  $T_1$  i zaczyna konwekcyjnie unosić się. Podczas unoszenia rozpręża się adiabatycznie. Na jaką wysokość wzniesie się, jeśli temperatura otaczającego powietrza jest stała i wynosi  $T_0 < T_1$ ? Przyjąć, że powietrze jest gazem doskonałym, a jego ciśnienie zmienia się zgodnie z równaniem barometrycznym  $p_{ot} = p_0 \exp(-\frac{\mu g h}{RT_0})$ .  
Rozwiązanie na str. 10

**F 642.** Przypuśćmy, że masa powietrza z poprzedniego zadania była wilgotna i podczas wznoszenia na pewnej wysokości doszło do kondensacji pary, a potem do utworzenia się kryształków lodu, które opadły na Ziemię. Czy wysokość osiągnięta przez suche powietrze będzie większa, czy mniejsza niż w poprzednim zadaniu? Uzasadnić jakościowo.  
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1093.** W pięciokącie wypukłym  $ABCDE$  kąty  $ABC$  i  $CDE$  są proste (rys. 1). Wykazać, że długość odcinka  $BD$  nie przekracza połowy obwodu trójkąta  $ACE$ .  
Rozwiązanie na str. 16

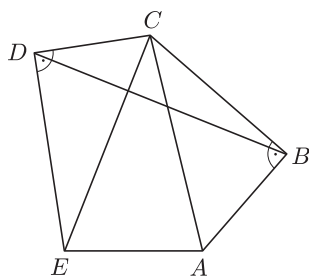
**M 1094.** Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  równość

$$4f(f(x)) = 2f(x) + x.$$

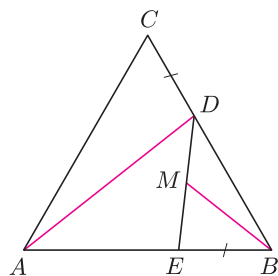
Wykazać, że liczba  $x = 0$  jest jedynym miejscem zerowym funkcji  $f$ .  
Rozwiązanie na str. 3

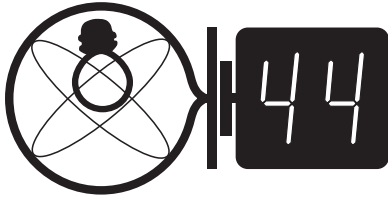
**M 1095.** Punkty  $D$  i  $E$  leżą odpowiednio na bokach  $BC$  i  $AB$  trójkąta równobocznego  $ABC$ , przy czym  $BE = CD$  (rys. 2). Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $DE$ . Wykazać, że  $BM = \frac{1}{2}AD$ .  
Rozwiązanie na str. 3

Rys. 1



Rys. 2





### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2005

### Zadania z fizyki nr 396, 397

**396.** Cylinder, do którego stałym strumieniem wlewa się woda, pełni funkcję zegara wodnego – na bocznej ścianie naklejono pionowo skalę minutową. Czy jakieś inne przezroczyste naczynie o kształcie bryły obrotowej z pionową osią symetrii, po naklejeniu na nie tej samej skali, może pełnić rolę zegara? Skala powinna być umieszczona w jednej płaszczyźnie z osią symetrii. Grubość ścianki należy pominąć. Jeśli jest to możliwe, to narysować przekrój naczynia, na podstawie odpowiednich obliczeń numerycznych.

**397.** Rozważmy dwuwymiarowy model „atomu” składającego się z  $n$  „elektronów” odpychających się wzajemnie siłą Coulomba ( $F = 1/r^2$ ), na które dodatkowo działa przyciągająca siła centralna ze strony nieruchomego „jądra”; siła ta powinna umożliwiać utrzymanie „elektronów” w stanie równowagi (propozycja: niech ta siła będzie postaci  $F = r^\beta$ , gdzie  $\beta > 0$ ). Zadanie polega na numerycznym zbadaniu tych stanów równowagi, w zależności od liczby  $n$  (równej

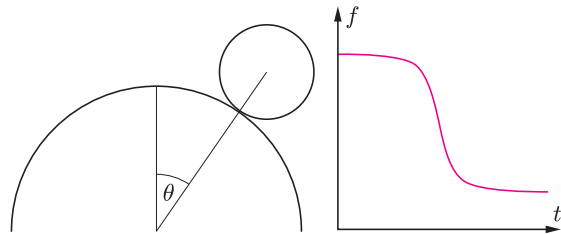
*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

kilka – kilkanaście, maksymalnie około 50) oraz parametrów opisujących siłę centralną (w powyższym przykładzie  $\beta$ ). Proponujemy przyjęcie przypadkowego rozmieszczenia „elektronów” w chwili początkowej i stopniowego dochodzenia do stanu równowagi (np. niech „elektrony” przemieszczają się w kierunku działania siły wypadkowej, jakby znajdowały się w ośrodku lepkim. . .). Rozwiązujący powinni zwrócić uwagę na następujące kwestie:

- czy dla ustalonego  $n$  i ustalonej siły centralnej istnieje jeden, dwa, czy więcej stanów równowagi?
- jak kształt i symetria otrzymanych wyników zależą od  $n$  i parametrów siły centralnej?

Nadesłane rozwiązania powinny zawierać dane dotyczące siły centralnej, opis algorytmu obliczeniowego i wydruk lub szkic wyniku, tzn. otrzymane rozmieszczenie równowagowe. Liczba rozpatrzonych przypadków nie powinna przekraczać około 20. Ciekawe rozwiązania opublikujemy.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2004

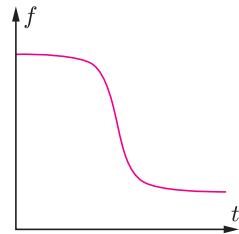


Rys. 1

**388.** Oznaczmy promień łuku, po którym porusza się środek kuli (tzn. sumę promieni półkuli i kuli) przez  $R$ . Prędkość środka kuli w punkcie odpowiadającym kątomu  $\theta$  wyznaczmy z zasady zachowania energii  $mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ . Po podstawieniu momentu bezwładności  $I = \frac{2}{5}mr^2$  oraz prędkości kątowej w postaci  $\omega = v/r$  otrzymujemy  $v^2 = \frac{10}{7}gR(1 - \cos \theta)$ . Siłę nacisku kuli na półkulę  $N$  znajdziemy z II zasady dynamiki, tzn.  $N = mg \cos \theta - \frac{mv^2}{R} = mg(\frac{17}{7} \cos \theta - \frac{10}{7})$ . Siłę tarcia  $T$  wyznaczmy z układu równań wiążących przyspieszenie liniowe  $a$  i kątowe  $\varepsilon$  kuli

$$\begin{cases} Tr = I\varepsilon = \frac{2}{5}mra, \\ mg \sin \theta - T = ma. \end{cases}$$

Stąd  $T = \frac{2}{7}mg \sin \theta$ . Przyrównujemy iloraz  $T/N$  do danego współczynnika tarcia, a wartość kąta  $\theta$  okazuje się równa  $\theta = 35,4^\circ$ .



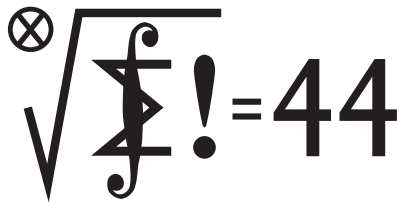
Rys. 2

**388.** Jednorodną kulę położono w najwyższym punkcie nieruchomej półkuli, nadając jej bardzo małą prędkość początkową. Współczynnik tarcia kinetycznego (poślizgowego) wynosi 0,3, natomiast podczas toczenia się bez poślizgu nie ma strat energii. W jakim punkcie kula zacznie się ślizgać po półkuli? Należy podać wartość kąta  $\theta$  (zob. rys. 1).

**389.** Źródło wysyłające dźwięk o stałej częstotliwości porusza się po linii prostej, mijając nieruchomy odbiornik położony w pewnej odległości od tej prostej. Dany jest wykres częstotliwości odbieranego dźwięku w zależności od czasu (rys. 2). Jak na podstawie tego wykresu można wyznaczyć chwilę, w której nastąpiło największe zbliżenie źródła do odbiornika? Należy podać niezbędne wzory.

Przypominamy treść zadań:

**389.** Dźwięk odebrany w chwili największego zbliżenia źródła musiał zostać wysłany wcześniej – w chwili, gdy kąt między prostą a kierunkiem do odbiornika spełniał warunek  $\cos \alpha = v/c$  (gdzie  $v$  – prędkość źródła,  $c$  – prędkość dźwięku). Składowa prędkości źródła wzdłuż kierunku do odbiornika wynosiła wtedy  $v' = v \cos \alpha = v^2/c$ . Tę składową należy podstawić do wzoru opisującego zjawisko Dopplera dla zbliżającego się źródła  $f' = f_0 \frac{c}{c-v'} = f_0 \frac{c^2}{c^2 - v^2}$ , gdzie  $f_0$  – częstotliwość dźwięku wysyłanego. Należy jeszcze wyrazić  $f_0$  i  $v$  przez łatwe do odczytania z wykresu częstotliwości asymptotyczne  $f_1$  (początkowa) i  $f_2$  (końcowa). Ze wzorów  $f_1 = f_0 \frac{c}{c-v}$ ,  $f_2 = f_0 \frac{c}{c+v}$  wyznaczamy  $f_0 = \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2}$ ,  $v = c \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$  i ostatecznie  $f' = \frac{f_1 + f_2}{2}$ . W chwili największego zbliżenia źródła częstotliwość odbieranego dźwięku była równa średniej arytmetycznej częstotliwości początkowej i końcowej.



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 VI 2005

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

**386** ( $WT = 1,90$ ) i **387** ( $WT = 3,51$ )

z numeru 11/2004

Jerzy Witkowski	- Radlin	26,45
Marian Łupieżowicz	- Gliwice	24,04
Konrad Kapcia	- Częstochowa	15,05
Mateusz Łącki	- Kraków	11,53

## Zadania z matematyki nr 499, 500

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**499.** Dla ustalonej liczby naturalnej  $n$  rozważamy ciągi  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  spełniające warunki  $a_0 = 0$  oraz  $|a_k| = |1 + a_{k-1}|$  dla  $k = 1, \dots, n$ . Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość sumy  $a_1 + \dots + a_n$ .

**500.** Znaleźć taką liczbę naturalną  $n$ , że w każdym zbiorze  $n$  punktów kratowych na płaszczyźnie istnieje pięć punktów, których środek ciężkości jest punktem kratowym. Im mniejsza liczba  $n$ , tym lepszy wynik i wyższa ocena.

(Na płaszczyźnie kartezjańskiej: punkt kratowy – to punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi; środek ciężkości piątki punktów – to punkt, którego pierwsza współrzędna jest średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych tych pięciu punktów, i tak samo dla drugich współrzędnych).

Zadanie 500 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2004

Przypominamy treść zadań:

**491.** Wyznaczyć wszystkie wyrazy ciągu  $a_n = n^2 + 44n + 99$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), które są kwadratami liczb całkowitych.

**492.** Liczby dodatnie  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  spełniają warunki:

$$\begin{aligned} a + b + c &= \alpha + \beta + \gamma, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \\ a^3 + b^3 + c^3 &> \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3. \end{aligned}$$

Czy z tych założeń wynika, że  $a^n + b^n + c^n > \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$  dla każdej liczby naturalnej  $n > 3$ ?

**491.** Z nierówności  $(n + 9)^2 < a_n < (n + 22)^2$  wynika, że jeśli  $a_n$  jest kwadratem liczby całkowitej  $m > 0$ , to  $n + 9 < m < n + 22$ ; ponadto  $n$  i  $m$  są różnej parzystości, więc  $m = n + k$ ,  $k \in \{11, 13, 15, 17, 19, 21\}$ . Z równania  $a_n = (n + k)^2$  obliczamy

$$n = \frac{k^2 - 99}{44 - 2k}.$$

Dla  $k = 13$  i  $19$  ten ułamek nie przedstawia liczby całkowitej. Dla pozostałych czterech wartości  $k$  dostajemy liczby  $n = 1, 9, 19, 171$ , wyznaczające szukane wyrazy  $a_n$ , równe kolejno  $12^2, 24^2, 36^2, 192^2$ .

**492.** Odpowiedź: *Tak* (i to dla każdego wykładnika większego od 3, niekoniecznie naturalnego).

Dowód: przypuśćmy, że tak nie jest; wówczas funkcja

$$F(x) = a^x + b^x + c^x - \alpha^x - \beta^x - \gamma^x$$

przyjmuje gdzieś w przedziale  $(3; \infty)$  wartość 0.

Przyjmijmy, że  $a \geq b \geq c$ ,  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ . Z podanych założeń wynika, że wielomiany  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$  oraz  $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$  różnią się o stałą:

$$Q(x) - P(x) = abc - \alpha\beta\gamma > 0;$$

ostatnia nierówność jest konsekwencją tożsamości

$$abc = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} + \frac{a+b+c}{6}((a+b+c)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)).$$

Szkicując wykresy tych wielomianów,

wnioskujemy o uporządkowaniu ich pierwiastków:

$a > \alpha \geq \beta > b \geq c > \gamma$ . Zatem  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$ . Wiemy też, że  $F(3) > 0$ .

W zbiorze  $\{x > 3: F(x) = 0\}$  istnieje liczba

najmniejsza  $u$  oraz liczba największa  $w$ ; przy tym

albo  $u < w$ , albo  $u = w$ , i wtedy  $F(x) > 0$  dla

$x \in (3; u) \cup (u; \infty)$ .

Niech  $(a_1, \dots, a_6)$  będzie dowolną permutacją ciągu  $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ , w której  $a_5 = b$ ,  $a_6 = c$ ; tak więc

$$F(x) = \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i a_i^x; \quad \varepsilon_i = \pm 1; \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1.$$

Określamy indukcyjnie funkcje  $f_1, \dots, f_5$ :

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{a_1}\right)^x F(x), \quad f_{k+1}(x) = \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^x f'_k(x),$$

$k = 1, 2, 3, 4$ . Gdy  $u < w$ , wówczas  $f_1(x) = 0$  dla  $x = 0, 1, 2, u, w$ , i wobec tego funkcja  $f'_1$  ma  $\geq 4$  miejsca zerowe. Gdy zaś  $u = w$ , czyli  $f_1 > 0$  w przedziałach  $(3; u)$  i  $(u; \infty)$ , to  $f'_1(u) = 0$ ; ponadto  $f_1(x) = 0$  dla  $x = 0, 1, 2, u$ , więc  $f'_1$  ma  $\geq 3$  miejsca zerowe, różne od  $u$ . W każdym przypadku funkcja  $f'_1$  (więc także funkcja  $f_2$ ) ma  $\geq 4$  miejsca zerowe. Zatem  $f'_2$  ma  $\geq 3$  miejsca zerowe. Kontynuując to rozumowanie, stwierdzamy, że  $f_5$  ma  $\geq 1$  miejsce zerowe.

Funkcje  $f_k$  można wyrazić wzorem efektywnym, łatwym do uzasadnienia przez indukcję:

$$f_k(x) = \varepsilon_k \lambda_{kk} + \sum_{i=k+1}^6 \varepsilon_i \lambda_{ik} \left(\frac{a_i}{a_k}\right)^x, \quad \text{gdzie } \lambda_{ik} = \prod_{j=1}^{k-1} \ln \frac{a_i}{a_j}$$

(dla  $k = 1$  przyjmujemy  $\lambda_{i1} = 1$ ). Dla  $k = 5$

otrzymujemy

$$f_5(x) = \varepsilon_5 \lambda_{55} + \varepsilon_6 \lambda_{65} \left(\frac{c}{b}\right)^x.$$

Ale

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1,$$

$$\lambda_{55} = \ln \frac{b}{a} \ln \frac{b}{\alpha} \ln \frac{b}{\beta} \ln \frac{b}{\gamma} < 0,$$

$$\lambda_{65} = \ln \frac{c}{a} \ln \frac{c}{\alpha} \ln \frac{c}{\beta} \ln \frac{c}{\gamma} < 0,$$

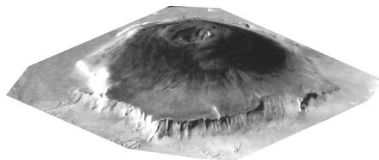
więc  $f_5(x) < 0$  dla wszystkich  $x$  – wbrew wcześniejszemu stwierdzeniu, że ta funkcja ma miejsce zerowe.

Sprzeczność kończy dowód.



## Patrz w niebo

Dzięki sondzie Mariner 9 w 1972 r. stwierdzono, że wielki wygasły wulkan na Marsie, nazwany Olympus Mons, sięga wysokości 25 km nad poziom otaczających go równin. W owym czasie nie było wiadomo, czy te równiny są rzeczywiście poziome i jak mają się one do reszty powierzchni planety, niemniej jednak Olympus Mons okazał się najwyższą górą w Układzie Słonecznym. Najnowsze laserowe sondowania powierzchni Marsa wykonane przez Mars Global Surveyor podtrzymały rekord wysokości tego wulkanu, choć „zmieniły” jego wysokość.



Widok całego wulkanu Olympus Mons. Średnica jego podstawy wynosi w przybliżeniu 500 km, zatem jego wysokość jest tu kilkakrotnie przesadzona.

Okazało się bowiem – jak zawsze, gdy wzrasta dokładność pomiarów – że niezbędne jest ściśle określenie, od jakiego poziomu wysokość się mierzy. Wspomniane 25 km było liczone od poziomu, na którym ciśnienie atmosferyczne wynosiłoby 6,1 mbar (jest to ciśnienie punktu potrójnego wody). Niestety, ten poziom na wielkich obszarach planety znalazł się pod jej powierzchnią. Dzięki nagromadzeniu wielkiej liczby pomiarów stało się jednak możliwe określenie elipsoidy najlepiej pasującej do kształtu Marsa. Elipsoida ta w okolicy Olympus Mons przebiega 2 km nad „zerowym” poziomem ciśnienia atmosferycznego, wobec czego wulkan należało uznać za niższy o 2 km. Obecnie przypisuje mu się wysokość 22,7 km nad elipsoidą Marsa. Zgromadzone do dziś obserwacje umożliwiają również określenie odpowiednika geoidy, czyli areoidy dla Marsa (jest to powierzchnia w każdym miejscu prostopadła do kierunku lokalnego pionu, inaczej – powierzchnia ustalonego potencjału grawitacyjnego). Na Ziemi naturalną geoidą jest powierzchnia oceanów (na obszarach lądowych przebieg fragmentów geoidy odtwarza się teoretycznie tak, by były gładko zszyte z powierzchnią oceanów). Na Marsie oceanów nie ma, zatem areoidą jest tam powierzchnia stałego potencjału najlepiej zarazem pasująca do elipsoidy Marsa. Grawitacja masywu Olympus Mons powoduje, że pod nim areoida wybrzusza się na 1,4 km, zatem wysokość wulkanu względem niej jest o tyleż mniejsza.

Tomasz KWAST

## Kwiecień

W kwietniowe wieczory widzimy w kierunku południowym okazały gwiazdozbiór Lwa, który otaczają gwiazdozbiory mało wyraźne i małe. Jednak przynajmniej jeden z nich jest w pewnym sensie „ważny”, mianowicie leżący przy głowie Lwa, czyli na zachód od niego, Rak. Od niego pochodzi nazwa punktu Raka, czyli punktu, przez który przechodzi Słońce w dniu przesilenia letniego (około 21 VI) i który w starożytności tam właśnie się znajdował. Od tamtego bowiem czasu punkt Raka (i oczywiście zarazem punkt Koziorożca i oba punkty równonocy) wskutek precesji przesunął się w przybliżeniu o  $30^\circ$  i obecnie znajduje się na granicy Byka i Bliźniąt. A nazwa pozostała. Pozostała też nazwa zwrotnika Raka, czyli równoleżnika, nad którym w dniu przesilenia letniego Słońce znajduje się w zenicie. Niepozorny gwiazdozbiór Raka zawiera jednak piękną gromadę otwartą M 44, zwaną Żłóbek lub Praesepe. Widać ją nieuzbrojonym okiem w postaci świetlnej plamki, a poszczególne gwiazdy już w lornetce. Gromada zawiera ponad 300 gwiazd, ma jasność 3,9 mag i leży w odległości 160 pc.

26 IV Merkury znajdzie się najdalej kątowno od Słońca i można próbować odszukać go przed wschodem Słońca. Wenus nie widać, gdyż jest zbyt blisko Słońca. Mars jest w Koziorożcu i wschodzi dopiero nad ranem. Jowisz jest w Pannie i widać go przez całą noc (3 IV znajdzie się w opozycji, czyli w kierunku przeciwnym do kierunku na Słońce), a Saturn w Bliźniątach, przez co widoczny jest tylko w pierwszej połowie nocy. Nów Księżyca wypada 8 IV i nastąpi wtedy zaćmienie Słońca, ale widoczne od Nowej Zelandii po Amerykę Środkową. 24 IV nastąpi pełnia Księżyca i zarazem jego półcieniowe zaćmienie, czyli praktycznie niedostrzegalne, a w dodatku w Polsce będzie wtedy dzień. 22 IV Księżyc zakryje Jowisza, ale zjawisko będzie widoczne w południowej części Afryki, na Oceanie Indyjskim i częściowo na Antarktydzie. 26 IV Księżyc zakryje Antaresa, co – jeżeli pogoda pozwoli – będziemy mogli oglądać koło północy z 26 na 27 IV. Nawiasem mówiąc, w 2005 roku Księżyc zakrywa Antaresa w każdym miesiącu, w marcu nastąpiło to nawet dwukrotnie – aczkolwiek w Polsce będzie widoczne jeszcze tylko to zakrycie kwietniowe. Około 23 IV mogą być widoczne meteory z roju lirydów, czyli wylatujące pozornie z Lutni. Lutnię widać w kwietniu przez całą noc, ale sam rój jest skromny, trudno więc oczekiwać efektownego widowiska.

T. K.

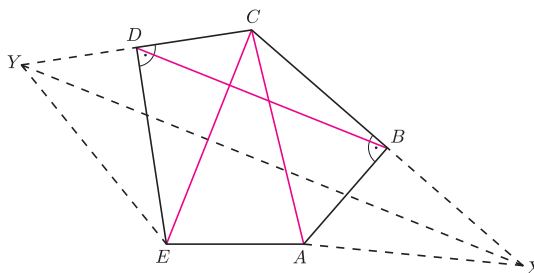


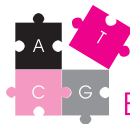
### Rozwiązanie zadania M 1093.

Niech  $X$  i  $Y$  będą obrazami symetrycznymi punktu  $C$  odpowiednio względem punktów  $B$  i  $D$  (rys.). Wówczas

$$2BD = XY \leq XA + AE + EY = CA + AE + EC,$$

co należało udowodnić.

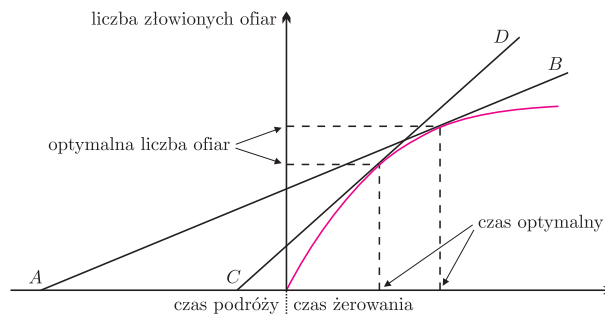




## Podjęcie decyzji u szpaków

Dokonując jakiegoś wyboru, zwykle porównujemy przewidywane zyski z ewentualnymi stratami i wybieramy opcję dla nas korzystniejszą. Podjęcie decyzji w świecie zwierząt działa w podobny sposób. Oczywiście nie są świadome tego, co mogą stracić czy zyskać. Niemniej ich decyzje przypominają rezultat kalkulacji i ważenia potencjalnych kosztów i zysków.

Jedne z ważniejszych dla życia decyzji dotyczą zdobywania pożywienia. Za przykład posłuży nam pospolity szpak. W okresie lęgowym karmi on pisklęta larwami komarnic żyjącymi w glebie, wykonując do 400 wycieczek po pokarm dziennie. Ile larw szpak powinien przynosić za każdym razem? Nie oplaca mu się wracać z jedną. Okazuje się także, że ptak nie przynosi potomstwu maksymalnej liczby komarnic, jaką zdoła zmieścić w dziobie. Szpaki żerują na ziemi, sondując dziobem glebę i odkrywając jej wierzchnie warstwy w poszukiwaniu larw. Im więcej gąsienic w dziobie ptaka, tym trudniejsze staje się sondowanie i poszukiwanie kolejnych, a w rezultacie tym mniej efektywne dalsze żerowanie. Przeanalizujmy zachowanie szpaka. Ptak musi najpierw dotrzeć do miejsca żerowania, a następnie wrócić. Czas niezbędny na przelot w obie strony to czas podróży. Kiedy szpak znajdzie się na łące, zaczyna szukać komarnic. Tempo pozyskiwania larw z początku jest szybkie, ale później szansa na złowienie gąsienic maleje. Jak długo powinien żerować szpak, by zrównoważyć malejącą efektywność żerowania i potrzebę zdobycia jak największej ilości pokarmu dla piskląt? Można to przewidzieć dzięki modelowi opisującemu optymalne żerowanie (rysunek). Zakłada on, że dla szpaka najważniejsze jest dostarczenie jak największej ilości pożywienia dla potomstwa. Ograniczenia to czas podróży oraz sposób żerowania. Liczba ofiar, z którą szpak powinien zawrócić do gniazda, jest optymalna, gdy szpak złowi najwięcej gąsienic w czasie równym (czas podróży + czas żerowania). Na rysunku linie *AB* oraz *CD* wyznaczają optymalny: czas żerowania i liczbę złowionych ofiar.



Tak jak przewiduje powyższy model, szpaki przynoszą pisklętom więcej pożywienia, gdy są zmuszone latać po nie dalej (linia *AB*). Zachowanie szpaków można zatem przyrównać do wydawania przez nas pieniędzy. My podczas robienia zakupów kierujemy się, na przykład, korzystnym stosunkiem jakości do ceny. Jesteśmy ograniczeni grubością portfela czy też wymaganiami co do kupowanego produktu. Koszty szpaka, który ma za zadanie wykarmić rodzinę, to czas spędzony na zdobywaniu pokarmu. Tym, co ptak maksymalizuje, jest ilość pożywienia przyniesionego potomstwu. Szpak jest limitowany przez sposób znajdowania larw komarnic oraz przez czas przelotu między dziuplą

a miejscem żerowania. Zatem w jego świecie też istnieją wydatki, bilans zysków i strat oraz ograniczenia.

W jaki sposób ptak ocenia jakość miejsca, w którym żeruje? To oszacowanie jest niezbędne, żeby szpak mógł stwierdzić, kiedy powinien opuścić dotychczasowe miejsce i przenieść się w bardziej zasobne. Ocena zasobności w pokarm zależy od czasu spędzonego na żerowanie w danej okolicy: im dłuższy, tym wartość danego miejsca jest dla ptaka niższa. Ocena tę modyfikuje sposób rozmieszczenia ofiar na żerowisku. Jeśli są rozmieszczone skupiskowo, napotkanie każdej ofiary podwyższa ocenę danego miejsca. Przypomina to naszą reakcję podczas zbierania grzybów: gdy znajdziemy jedną kurkę, zaraz rozglądamy się, czy w pobliżu nie ma więcej, wiedząc, że kurki rosną w skupiskach. Z kolei równomierne rozmieszczenie ofiar jest niczym tykanie zegara, ponieważ szpak chwytając ofiarę mniej więcej w równych odstępach czasu. W takim przypadku szpak wie, że z każdą następną złowioną gąsienicą miejsce żerowania jest coraz uboższe w ofiary. Natomiast gdy ofiary rozmieszczone są losowo i niezależnie od siebie, ich napotkanie nie dostarcza informacji o tym, ile ich jeszcze pozostało na żerowisku, i nie ma wpływu na ocenę miejsca żerowania przez szpaka. Ocena ta spada wraz z upływem czasu poświęconego na żerowanie, aż w końcu zwierzę przenosi się na inne żerowisko.

Kolejnym sposobem zdobywania informacji o środowisku jest podpatrzenie, gdzie inne osobniki znajdują pokarm. Podczas żerowania szpak ograniczony jest przez szybkość, z jaką wyszukuje larwy. Szpaki żerują jednak w stadzie. Dzięki obserwacji zachowania innych ptaków mogą chwytac więcej gąsienic. Osobnik obserwujący inne ptaki w grupie mniej czasu przeznaczają na sondowanie gleby w losowym miejscu w poszukiwaniu larw. W stadzie szpaków można więc wyróżnić dwie alternatywne strategie: niezależne poszukiwanie pokarmu oraz wykorzystywanie „informacji publicznej” uzyskanej przez obserwację innych. Dany osobnik zmienia „strategię” w trakcie żerowania, dzięki czemu udaje mu się efektywniej znajdować ofiary, niż gdyby poszukiwał pożywienia samodzielnie.

Podsumowując, zwierzęta podejmują decyzje, kierując się pewnymi sygnałami jakości środowiska. Na tyle, na ile pozwalają im na to ograniczenia, dokonują wyborów optymalnych, co oczywiście nie wiąże się ze świadomym porównywaniem zysków i strat... Związane jest to z działaniem doboru naturalnego, dostosowującego zwierzę do warunków środowiska i kształtującego jego mechanizmy decyzyjne.

Justyna KUBACKA

Współpraca: Paweł PORĘBA, Anna LORENC

Szpak (*Sturnus vulgaris*) ma długość 21 cm, z czego 2,5 przypada na dziób, a 6,5 na ogon, waży do 80 g. Lata z prędkością do 74 km/h.



Fot. T. Wojszcz

Chętnie naśladuje wszelkie zasłyszane dźwięki. Gniazduje w zadrzewieniach śródpolnych i parkach. Powraca do nas już w końcu lutego, a w końcu kwietnia samica składa 4 do 6 zielonkawo-niebieskich jaj, wysiadywanych wspólnie z samcem. Młode wykluwają się po 14 dniach i mniej więcej tyle czasu są karmione w gnieździe. Po jego opuszczeniu umieją już dobrze latać. Wiosną szpaki jedzą głównie owady, natomiast latem żywią się owocami. We wrześniu rozpoczynają gromadną podróż na zachód. Jednak w ostatnim półwieczu szpaki coraz częściej zostają z nami na zimę, spędzając ją głównie w większych miastach na zachodzie kraju.