



SPIS TREŚCI NUMERU 1 (368)

A jednak może być trójkąt!
Aleksander Matuszok

Oddziaływania elementarne
i LHC

Zygmunt Ajduk

Stefan Pokorski

Krzysztof Turzyński

Symetria
i prawdopodobieństwo

Krzysztof Oleszkiewicz

Piraci

Piotr Chrzęstowski

Zadania

Mała Delta:

Jeszcze o kwadratach
i nożyczkach

Teoria stabilności w sensie
Lapunowa i globalne atraktory

Tomasz Dłotko

Aktualności

Klub 44

Regulamin Konkursu
Uczniowskich Prac
z Matematyki

Patrz w niebo

Styczeń

Kącik biologiczny

str. 1

str. 2

str. 4

str. 6

str. 7

str. 8

str.10

str.12

str.13

str.15

str.16

str.16

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Armen Edigarian, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Ryszard J. Pawlak, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwika, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwika Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na II kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Wypełnianie przestrzeni

A jednak może być trójkąt!

Aleksander MATUSZOK

Może to nieładnie polemizować z tezami postawionymi w artykule opublikowanym w ramach *Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki*, jednak (z tego, co wiem) jego autor już dawno temu obronił pracę doktorską z matematyki, zatem – czemu nie?

W artykule poświęconym izometriom (*Izometrie przestrzeni metrycznych*, *Delta* 3/1988) Andrzej Żuk stwierdza na końcu:

Dziwactwem tego artykułu były kwadratowe okręgi – zapewne Czytelnik uwierzy (a może i sprawdzi), że istnieją metryki, w których okręgi są sześciokątami, ale, o dziwo, nie istnieje metryka, w której okręgi są trójkątami równobocznymi.

W odpowiedzi na to sformułowanie przedstawiam następujący pomysł. Pokazuje on, że istnieje metryka, w której przynajmniej jeden okrąg jest euklidesowym trójkątem, który – jeśli ktoś sobie tego życzy – może być równoboczny.

Co więcej, dla dowolnego $n > 2$ istnieją również metryki, w których przynajmniej jeden okrąg może być n -kątem, na życzenie foremnym.

Weźmy pod uwagę trzy półproste a, b, c o wspólnym początku O , dzielące płaszczyznę na kąty wypukłe A, B, C (mniejsze od kąta półpełnego), jak na rysunku 1. Nie będę podawał formalnej definicji wyznaczonej przez tę figurę metryki – jak sądzę, przykładowe wyjaśnienie wystarczy (i każdy z Czytelników będzie je umiał w razie potrzeby uściślić).

Odległość dwóch punktów X i Y leżących w części $A \cup a$ w przypadku, gdy przez te punkty przechodzi prosta równoległa do c , jest po prostu odległością euklidesową XY , a w przeciwnym przypadku jest równa

$$XX' + X'Y' + Y'Y,$$

gdzie X' (Y') jest rzutem X (Y) na a w kierunku c ; gdy punkty leżą w różnych kątach, np. w A i B , to ich odległością jest

$$XX' + X'O + OY' + Y'Y$$

– tym razem Y' oznacza rzut Y na b w kierunku a (rys. 2).

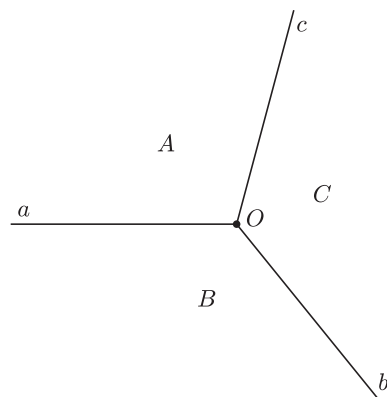
Sprawdzenie, że to rzeczywiście odległość, czyli że

- ▷ odległość dwóch punktów jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy punkty te pokrywają się;
- ▷ odległość punktów nie zależy od ich kolejności;
- ▷ odległość P i Q nie przekracza sumy odległości P i R oraz R i Q , dla dowolnych punktów P, Q, R ;

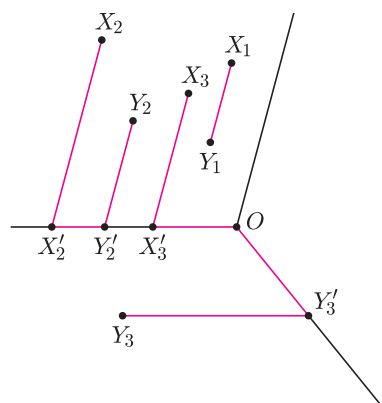
nie sprawia większego kłopotu, choć w przypadku ostatniego warunku rozpatrzyć trzeba cztery możliwości (wszystkie w jednym kącie, pierwszy i drugi w jednym, a trzeci w innym, pierwszy i trzeci w jednym, a drugi w innym, wreszcie każdy w innym) – pozostawię to Czytelnikom.

A teraz trójkątny okrąg. Odkładamy na każdej z półprostych a, b, c od punktu O ten sam odcinek. Niech ich drugimi końcami będą K, L, M . Euklidesowy trójkąt KLM jest okręgiem o środku O , co doskonale widać na rysunku 3 (trójkąt $XX'K$ jest równoramienny). Obierając półproste a, b, c tak, aby każdy z kątów A, B, C miał 120° , otrzymujemy oczywiście trójkąt równoboczny.

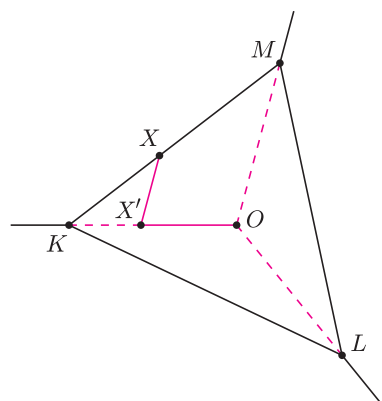
Jeżeli z punktu O będzie wychodziło n różnych półprostych, dzielących płaszczyznę na kąty wypukłe, to analogicznie zdefiniowana metryka da nam okrąg o środku w punkcie O będący n -kątem (rys. 4). Proponuję tę nową metrykę nazwać *metryką n -źródło*.



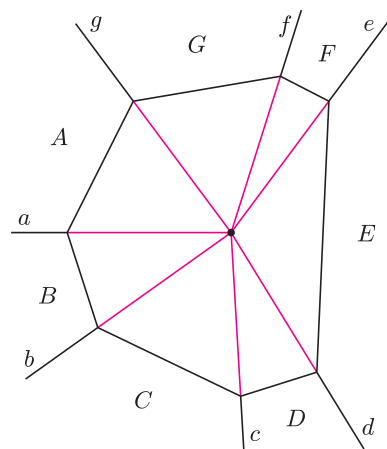
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. $OK = OL = OM = OX' + X'K$.



Rys. 4 Okrąg siedmiokątny.

Oddziaływania elementarne i LHC

Zygmunt AJDUK, Stefan POKORSKI, Krzysztof TURZYŃSKI

Badanie struktury materii i rządzących nią praw podstawowych należało zawsze do głównych zadań fizyki. U podstaw wszystkich znanych dotychczas właściwości otaczającej nas materii ziemskiej leżą cztery typy oddziaływań: grawitacyjne, elektromagnetyczne, silne i słabe. Wiemy obecnie, że podstawowymi składnikami materii są kwarki i leptoni. Oddziaływania elektromagnetyczne są odpowiedzialne za budowę atomów i oddziaływania między nimi – od przemian chemicznych w komórkach żywych organizmów do oddziaływań płyt tektonicznych. Cząstki oddziałują elektromagnetycznie dzięki wymianie fotonów. Oddziaływania silne, przenoszone przez gluony, są z kolei odpowiedzialne za wiązanie się kwarków w bariony, czyli m.in. protony i neutrony, a tych z kolei w jądra atomowe. Oddziaływania słabe przejawiają się m.in. w jądrowym rozpadzie beta pierwiastków promieniotwórczych oraz rozpadach leptonów, a przenoszą je cząstki W^+ , W^- i Z^0 .

Model Standardowy oddziaływań elementarnych jest kwantową teorią pola i składa się z chromodynamiki kwantowej, czyli teorii oddziaływań silnych, oraz ze zunifikowanej teorii oddziaływań elektromagnetycznych i słabych (w skrócie, elektroslabych). W kwantowej teorii pola każda cząstka jest kwantem pewnego pola fizycznego. Kwantowa teoria pola nie tylko jest więc językiem matematycznego opisu oddziaływań elementarnych, ale proponuje pewien obraz fizyczny struktury materii na bardzo małych odległościach, w którym znika podział na cząstki i pola przenoszące oddziaływania między cząstkami. Podobnie jak foton, który jest kwantem pola elektromagnetycznego, elektron jest kwantem pola elektronowego, kwark – pola kwarkowego itd. Oddziaływania między cząstkami są oddziaływaniami rozchodzących się w czasoprzestrzeni pól, których te cząstki są kwantami.

Każdy stabilny układ fizyczny ma swój stan podstawowy będący stanem o najniższej energii. W fizyce oddziaływań elementarnych zwany jest on próżnią. Jest to taki stan układu pól, w którym na jednostkę objętości przypada najmniejsza ilość energii. Często w stanie próżni energia kinetyczna i potencjalna wszystkich pól jest równa zeru, ale niekoniecznie musi tak być. W niektórych sytuacjach spotykanych w fizyce energia kinetyczna wszystkich pól w stanie próżni jest równa zeru, ale niektóre pola mają niezerową energię potencjalną. Nie jest to zaskakujące, gdyż prostych przykładów stanu podstawowego o niezerowej energii potencjalnej dostarcza nawet powszechnie znana fizyka. Stanem podstawowym wahadła zawieszono na nici w polu ziemskiego przyciągania grawitacyjnego jest jego położenie równowagi (wahadło w spoczynku). W tym stanie mamy różną od zera energię potencjalną wahadła

w polu grawitacyjnym, ale energia ta nie zamienia się w energię kinetyczną (wahadło nie spada), gdyż siła przyciągania grawitacyjnego jest równoważona przez napięcie nici. Dopiero wychylenie wahadła ze stanu podstawowego, czyli położenia równowagi, powoduje jego ruch (drżenie), o którego okresie decyduje różnica energii potencjalnych wahadła wychylonego i wahadła w stanie podstawowym. Także w fizyce oddziaływań elementarnych typowym problemem dynamicznym jest badanie ruchu (drgań) układu fizycznego wokół stanu próżni, tj. badanie stanów wzbudzonych niektórych pól. Wyjątkiem są oddziaływania grawitacyjne, które decydują o ewolucji Wszechświata. Cała energia zawarta we Wszechświecie wpływa na jego ewolucję, w szczególności, bezwzględna energia stanu podstawowego układu pól (energia próżni) musi być uwzględniona w bilansie energii Wszechświata.

W fizyce oddziaływań elektroslabych energia potencjalna pól w stanie próżni nie jest równa zeru. W Modelu Standardowym jedno z pól oddziałujących słabo, pole Higgsa, ma w próżni różną od zera energię potencjalną, co oznacza, że próżnia nie jest pusta. Można ją sobie wyobrazić jako zbiornik nieskończonej liczby cząstek o masach i pędach równych zeru, które, oddziałując z cząstkami W^+ , W^- i Z^0 oraz z kwarkami i leptonami, spowalniają ich ruch, sprawiając, że cząstki te zachowują się jak cząstki masywne. Konsekwencją takich właściwości próżni jest istnienie cząstki o spinie 0, zwanej cząstką Higgsa, która pozostaje jedyną nieodkrytą jeszcze doświadczalnie cząstką przewidywaną przez Model Standardowy. Teoria opisuje z bardzo dużą dokładnością wszystkie badane doświadczalnie procesy elementarne, w których energie oddziałujących cząstek nie przekraczają 10^{11} elektronowoltów i jest obecnie pod tym względem najdoskonalszą teorią fizyczną.

1 elektronowolt (eV) to energia, o jaką zmienia się całkowita energia cząstki o ładunku równym ładunkowi elektronu przy przejściu przez różnicę potencjałów elektrostatycznych 1 wolta. Przykładowo, energia, jaką trzeba dostarczyć, by zjonizować atom wodoru, wynosi 13,6 eV. Korzystając ze wzoru $E = mc^2$, można także wyrażać masę cząstek w eV/c^2 , np. masa elektronu to $511000 eV/c^2$.

Pomimo odniesienia spektakularnego sukcesu Model Standardowy pozostawia bez odpowiedzi wiele pytań. Po pierwsze, nie wyjaśnia, dlaczego mierzone wartości masy bozonów W^\pm i Z^0 są takie, a nie inne, gdyż skala masowa jest wolnym parametrem tej teorii. Po drugie, dość tajemnicze wydaje się istnienie trzech rodzin fermionów (zarówno kwarków, jak i leptonów), różniących się tylko masą, lecz identycznych z punktu widzenia oddziaływań. Po trzecie, z konstrukcji Modelu Standardowego nie wynika, w jakim kierunku należy dalej uogólniać tę teorię, aby stworzyć wspólny opis oddziaływań silnych i elektroslabych lub, bardziej ambitnie, by podać jednolity opis wszystkich czterech znanych oddziaływań. Zasadniczą trudność teoretyczną

przy próbach takiego uogólnienia stanowi ogromna rozpiętość (hierarchia) między masami bozonów W^\pm i Z^0 a następną znaną skalą masy wyznaczoną przez oddziaływania grawitacyjne. Jest nią masa Plancka,

$$M_P = \sqrt{\hbar c/G_N} \sim 10^{27} \text{ eV}/c^2.$$

$G_N \approx 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ jest stałą Newtona, czyli stałą przyrody występującą w prawie powszechnego ciężenia wyrażającym siłę F oddziaływań grawitacyjnych między dwoma ciałami o masach m i M znajdujących się w odległości r od siebie: $F_N = \frac{G_N M m}{r^2}$. Stała Plancka $\hbar \approx 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ pojawia się w opisie zjawisk kwantowych. $M_P = \sqrt{\hbar c/G_N}$ jest kombinacją stałych przyrody, której jednostką jest kilogram, czyli jednostka masy.

Biorąc pod uwagę naturę występujących w tym wzorze współczynników, można oczekiwać, że przy energiach $E_P = M_P c^2 \sim 10^{27} \text{ eV}$ ujawni się kwantowa natura oddziaływań grawitacyjnych i siła tych oddziaływań będzie porównywalna z siłą pozostałych oddziaływań elementarnych, podobnie jak przy energiach $E \approx M_{W^\pm, Z^0} c^2$ oddziaływania słabe dorównują siłą oddziaływaniom elektromagnetycznym. Hierarchia mas $M_P/M_{W^\pm, Z^0} \approx 10^{16}$ jest zaskakująca w świetle dotychczasowych odkryć. Przy przejściu od fizyki atomowej poprzez fizykę jądrową do oddziaływań elektrosłabych pojawiają się nowe, coraz większe skale fizyczne, ale następuje to w sposób stopniowy, a nie hierarchiczny, tzn. skale te nie różnią się o tyle rzędów wielkości. Spodziewamy się więc istnienia głębszej teorii, która rozwiąże problem hierarchii skal i zarazem udzieli odpowiedzi na postawione wyżej pytania. Teoria taka przewidywać będzie istnienie nowych cząstek i nowych oddziaływań na odległościach mniejszych niż 10^{-18} m . Zatem w teorii takiej występować będą skale masy większe od $10^{11} \text{ eV}/c^2$. Nowe cząstki o charakterystycznej skali masowej $10^{12} - 10^{13} \text{ eV}/c^2$ będą mogły być odkryte w akceleratorze LHC budowanym obecnie w CERN-ie pod Genewą (patrz ostatnia strona okładki). Istnienie takiej skali fizycznej, nieco tylko wyższej od skali elektrosłabej, pozwoliłoby uniknąć problemu hierarchii i dlatego jest bardzo prawdopodobne. Warto jednak pamiętać, że w przyrodzie może istnieć nie jedna, lecz kilka nowych skal fizycznych niższych od skali Plancka, których uwzględnienie będzie konieczne przy budowaniu głębszej teorii. Niewykluczone, że jedna z tych skal została niedawno odkryta dzięki doświadczalnemu stwierdzeniu, że neutrino (oznaczane przez fizyków jako ν) mają bardzo małe masy m_ν , których wielkość można elegancko wyjaśnić, zakładając, iż są one wynikiem oddziaływań neutrino z bardzo ciężkimi nowymi cząstkami N , zwanymi *ciężkimi partnerami neutrino*, o masie $M_N \sim 10^{23} \text{ eV}/c^2$. Masy neutrino $m_\nu \leq 1 \text{ eV}$ są wówczas w naturalny sposób rzędu $m_\nu \sim M_{W,Z}^2/M_N$. Mechanizm taki nazywa się mechanizmem huśtawki. Gdyby natomiast zaobserwowano rozpad protonu, oznaczałoby to odkrycie *skali wielkiej unifikacji* oddziaływań silnych i elektrosłabych.

Próby rozwiązania problemu hierarchii skal stymulowały badania teoretyczne przez ostatnich kilkanaście lat. Problem ten wiąże się bowiem z problemem wyznaczenia skali elektrosłabej odpowiadającej masom cząstek W^\pm i Z^0 z bardziej podstawowych założeń, a więc z pełniejszym zrozumieniem mechanizmu decydującego o szczególnych, opisanych wcześniej, właściwościach stanu próżni oddziaływań elektrosłabych (fizycy nazywają ten mechanizm spontanicznym naruszeniem symetrii). Najbardziej konkretnymi propozycjami teoretycznymi uogólniającymi Model Standardowy są:

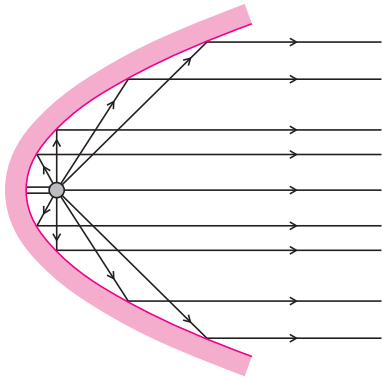
- 1) dodatkowa symetria przyrody, zwana *supersymetrią*, przyporządkowująca każdej znanej cząstce elementarnej partnera o identycznych właściwościach z wyjątkiem spinu – partnerami kwarków i leptonów, które mają spin $1/2$, byłyby więc w tej teorii cząstki bezspinowe, natomiast partnerami kwantów pola o spinie 1 inne cząstki o spinie $1/2$; supersymetria nie byłaby jednak symetrią dokładną – cząstki będące partnerami znanych cząstek powinny mieć masy około $10^{12} \text{ eV}/c^2$; byłyby to właśnie wspomniana wyżej nowa skala masowa rozwiązująca problem hierarchii;
- 2) co najmniej jeden *dodatkowy wymiar przestrzenny* zawinięty w okrąg o bardzo małym promieniu R – wtedy skala oddziaływań elektrosłabych byłaby wyznaczona przez skalę Plancka i promień R ;
- 3) *dekonstrukcja wymiarów*, czyli istnienie dodatkowych symetrii niejako imitujących oddziaływania w modelu z dodatkowymi wymiarami przestrzennymi – takie symetrie musiałyby być spontanicznie naruszone, a skalę oddziaływań elektrosłabych można by wyznaczyć jako funkcję skali spontanicznego naruszenia tych wyższych symetrii.

Odkrycie cząstki Higgsa w LHC będzie nie tylko jeszcze jednym potwierdzeniem poprawności Modelu Standardowego, ale także pomostem do bardziej fundamentalnej teorii. Właściwości cząstki Higgsa (lub jej brak), jej masa i charakter oddziaływań z kwarkami i leptonami, będą podstawowymi wskazówkami co do wyboru jednej z powyższych koncepcji teoretycznych. Np. teorie supersymetryczne przewidują istnienie lekkiej cząstki Higgsa, niewiele cięższej od cząstki Z^0 , podczas gdy z modeli opartych na istnieniu dodatkowych wymiarów wynika, że cząstka Higgsa jest kilkakrotnie cięższa od cząstki Z^0 . Ale nie tylko własności cząstki Higgsa pomogą wybrać spośród różnych koncepcji teoretycznych tę poprawną. Choć wszystkie one opierają się na istnieniu nowej skali, a zatem przewidują istnienie nowych cząstek o masach około $10^{12} \text{ eV}/c^2$, to ich przewidywania dotyczące rodzaju i właściwości tych cząstek są zupełnie różne. Przewidywania te będzie można sprawdzić w doświadczeniach, które będą przeprowadzane w LHC.



Rozwiązanie zadania F 635.

Całkowita moc emitowanego przez gorące ciało promieniowania elektromagnetycznego wynosi, z prawa Stefana-Boltzmannia, $P = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2$.



Geometria układu (rysunek) powoduje, że praktycznie całość promieniowania emitowana jest w kierunku równoległym do osi zwierciadła. Dla światła spełniona jest relacja między energią a pędem w postaci $E = pc$. Promieniowanie wyemitowane w czasie δt niesie więc ze sobą pęd

$$p = \frac{4\pi r^2}{c} \sigma T^4 \delta t.$$

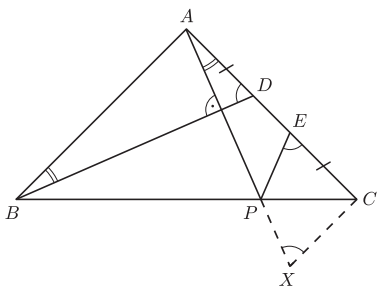
Oznacza to, że siła ciągu, czyli pęd unoszony przez promieniowanie w jednostce czasu, wynosi

$$F = \frac{4\pi r^2}{c} \sigma T^4.$$



Rozwiązanie zadania M 1084.

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej przechodzącej przez punkt C i równoległej do prostej AB z prostą AP .



Z równości

$$\sphericalangle DBA = 90^\circ - \sphericalangle BAP = \sphericalangle XAC$$

oraz

$$AB = AC$$

wynika, że trójkąty prostokątne DBA i XAC są przystające. Zatem $CE = AD = CX$, skąd wynika, że trójkąty CPE i CPX są przystające. Stąd otrzymujemy

$$\sphericalangle PEC = \sphericalangle PCX = \sphericalangle BDA.$$

Symetria i prawdopodobieństwo

Krzysztof OLESZKIEWICZ

Pojęcie symetrii przydaje się w rachunku prawdopodobieństwa. Zaczniemy od najprostszego przykładu – tasujemy talię 52 kart do gry, a następnie odkrywamy kolejno karty z wierzchu talii i każdą z nich po obejrzeniu odkładamy na spód talii. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że następna karta po odkryciu asa pik będzie królem kier? Proste rozwiązanie polega na zauważeniu, że takie samo jest prawdopodobieństwo tego, iż owa karta będzie np. damą karo lub dowolną inną z 51 kart w talii różnych od asa pik. Mamy więc 51 jednakowych prawdopodobieństw, które w sumie dają 1, a zatem każde z nich jest równe $1/51$, w szczególności szukane prawdopodobieństwo tego, iż następna karta będzie królem kier.

Inny prosty przykład dotyczy gry w orła i reszkę. Załóżmy, że rzucamy 15 razy symetryczną monetą.

Matematycy przewrotnie nazywają monetę symetryczną, jeśli zarówno orzeł, jak i reszka wypadają na niej z prawdopodobieństwem $1/2$, a nie wtedy, gdy ma ona oś symetrii, a więc np. orła po obu stronach...

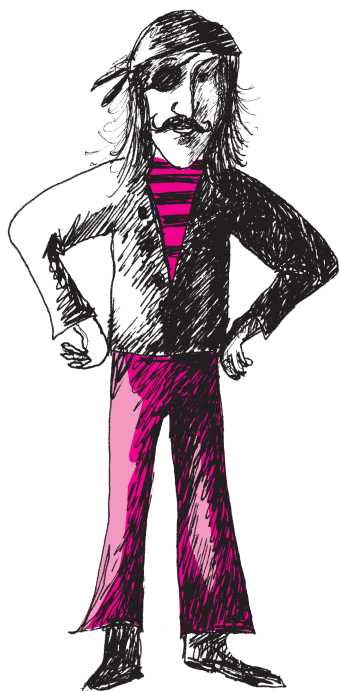
Za każdym razem, gdy wypadnie orzeł, zyskujemy 1 zł, a gdy wypadnie reszka, tracimy 1 zł. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, iż gra będzie dla nas korzystna, tzn. wśród 15 wykonanych rzutów będzie więcej orłów niż reszek. Zakładamy, że zaczynamy mając 15 zł, więc nie grozi nam bankructwo w trakcie gry. Łatwo zauważyć, że wszystkie możliwe wyniki gry (tzn. piętnastoelementowe ciągi orłów i reszek) można połączyć w pary, w których jeden ciąg otrzymamy przez zastąpienie orłów w drugim ciągu reszkami, a reszek – orłami. Na przykład ciągi ORRORROORORORRR i ROOROORROROROROO będą tworzyć taką parę. W ten sposób przyporządkowaliśmy każdemu zdarzeniu elementarnemu oznaczającemu zwycięstwo zdarzenie elementarne oznaczające przegraną, a przy tym przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne („jeden do jednego”) i połączone w pary zdarzenia elementarne mają jednakowe prawdopodobieństwa, równe $1/2^{15}$. Zatem suma prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych oznaczających zwycięstwo jest równa sumie prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych oznaczających przegraną, czyli prawdopodobieństwo zwycięstwa jest równe prawdopodobieństwu przegraney, a że w sumie prawdopodobieństwa te muszą dawać 1 (15 jest liczbą nieparzystą, toteż remis nie jest możliwy), więc każde z nich jest równe $1/2$, w szczególności szukane prawdopodobieństwo zwycięstwa.

Powyższy przykład może wydawać się zbyt prosty. Rozważmy więc zmodyfikowaną wersję tego problemu – gramy na tych samych zasadach, ale tym razem zaczynamy grę, mając tylko 12 zł i jeśli podczas gry nasz kapitał stopnieje do zera, bankrutujemy. Z jakim prawdopodobieństwem unikniemy bankructwa w ciągu 15 rzutów monetą? Umówmy się, że w przypadku bankructwa i tak wykonamy brakujące rzuty. Być może krupier prowadzący grę jest wspaniałomyślny i zgodzi się uwzględnić owe rzuty, niejako przejściowo nas kredytując, jeśli dzięki temu na końcu gry mielibyśmy znów dodatni kapitał. Mamy więc trzy wzajemnie się wykluczające zdarzenia losowe:

- A – nie zbankrutowaliśmy,
- B – zbankrutowaliśmy, ale wspaniałomyślność krupiera może nam pomóc,
- C – zbankrutowaliśmy i nawet przejściowe kredytowanie nie pomoże.

Oczywiście $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. Wykażemy teraz, że $P(B) = P(C)$. W tym celu połączmy możliwe wyniki gry (tzn. piętnastoelementowe ciągi orłów i reszek) odpowiadające zdarzeniom B i C w pary. Zrobimy to w następujący sposób – jeśli jakiś ciąg wyników oznacza bankructwo w pewnym momencie gry, to wszystkie reszki występujące po tym momencie zamieniamy na orły, a orły – na reszki. Tak utworzony ciąg łączymy w parę z ciągiem wyjściowym.

Wspaniałomyślny Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne, czyli że każde zdarzenie elementarne z B połączone jest w parę z dokładnie jednym zdarzeniem elementarnym z C i *vice versa*.



Na przykład ciąg RRRRRRRRRRRR-OOR połączymy w parę z ciągiem RRRRRRRRRRRR-RRO. W ten sposób ustalamy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między zdarzeniami elementarnymi składającymi się na B i zdarzeniami elementarnymi składającymi się na C . Istotnie, owa zamiana spowoduje zmianę znaku w końcowym rezultacie gry (przy założeniu, że krupier okaże się wspaniałomyślny), a ponieważ zaczynamy grę mając 12 zł, końcowy rezultat z pewnością będzie liczbą nieparzystą (bo 15 jest liczbą nieparzystą, a parzystość naszego kapitału zmienia się w każdej turze gry, niezależnie od tego, co wypadnie), a więc nie będzie zerem. Zauważmy teraz, że prawdopodobieństwo zdarzenia C łatwo obliczyć:

$$P(C) = \left(\binom{15}{15} + \binom{15}{14} \right) / 2^{15} = (1 + 15) / 2^{15} = 1 / 2048,$$

bo zajście zdarzenia C równoważne jest temu, iż wszystkie rzuty albo wszystkie oprócz jednego dały jako wynik reszkę, a temu odpowiada dokładnie 16 zdarzeń elementarnych:

RRRRRRRRRRRRRRR, ORRRRRRRRRRRRRR, RORRRRRRRRRRRR, ... , RRRRRRRRRRRRRROR, RRRRRRRRRRRRRRO,

z których każde ma prawdopodobieństwo $1/2^{15}$. Jeśli w dokładnie n rzutach wypadną reszki, to grę (kredytowaną) zakończymy z kapitałem

$$12 + (15 - n) - n = 27 - 2n \text{ zł},$$

a $27 - 2n$ będzie liczbą dodatnią tylko wtedy, gdy $n \leq 13$. Skoro $P(C) = 1/2048$, to i $P(B) = 1/2048$, a zatem

$$P(A) = 1 - P(B) - P(C) = 1023/1024 \approx 99,9\%.$$

Z kwotą 12 zł możemy więc siadać do 15 tur gry w orła i reszkę, nie obawiając się zbytnio bankructwa, nawet jeśli nie jesteśmy pewni wspaniałomyślności krupiera.

Naszkicowane rozumowanie nosi nazwę **zasady odbicia** i ma ważne zastosowania w teorii prawdopodobieństwa.

Nawet w pozornie niesymetrycznej sytuacji można odnaleźć motywy oparte na symetrii. Dobrze ilustruje to następujące zadanie.

W probówce znajduje się dziesięć bakterii białych i dwadzieścia bakterii czarnych. Co minutę jedna z bakterii dzieli się na dwie o takim samym jak ona kolorze, przy czym wszystkie bakterie znajdujące się wówczas w probówce mają jednakowe szanse na podział. Po godzinie w naczyniu będzie 90 bakterii. Wylosujmy jedną z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie ona biała?

Docięliwy Czytelnik może zastanowić się, jaka przestrzeń probabilistyczna odpowiada sytuacji opisanej w tym zadaniu i jak formalnie opisać jej symetrię wykorzystaną w rozwiązaniu. Nie jest to całkiem łatwe.

Załóżmy, że każda bakteria jest w nieco innym odcieniu (bieli lub czerni) i podczas podziału odcień koloru jest zachowywany. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana przez nas bakteria ma dany odcień, wynosi $\frac{1}{30}$ (wszystkie odcienie są „równouprawnione”). Ponieważ 10 spośród odcieni jest białych, szansa, iż wylosujemy białą bakterię, jest równa $\frac{1}{3}$.

Warto przypomnieć jeszcze jeden przykład świadczący o roli symetrii w rachunku prawdopodobieństwa. Maxwell, badając rozkład wektora prędkości cząsteczek gazu, zauważył, że rozkład ten powinien mieć symetrię obrotową (tzn. nie powinno go zmieniać obrócenie układu współrzędnych), a współrzędne tego wektora powinny być niezależnymi zmiennymi losowymi. Tu kończą się założenia wywodzące się z fizyki, a do akcji wkracza matematyka – okazuje się, że wektor losowy, spełniający powyższe dwa warunki, musi mieć rozkład gaussowski. Wynik ten, uzyskany na drodze czysto matematycznego rozumowania, podobno całkiem dobrze zgadza się z danymi doświadczalnymi.



Rozwiązanie zadania F 636.

Niech $R_z = 6400$ km oznacza promień Ziemi, $d = 1,5 \cdot 10^8$ km – odległość Ziemia-Słońce. Do Ziemi dociera z całego wypromieniowywanego przez Słońce promieniowania część określona przez stosunek

$$\frac{\pi R_z^2}{4\pi d^2},$$

więc pochłaniana w jednostce czasu energia to

$$P = L_s \frac{R_z^2}{4d^2}.$$

W pobliżu Ziemi promienie Słońca są praktycznie zupełnie równoległe, więc możemy przyjąć, że przynoszą w jednostce czasu pęd

$$F = \frac{L_s}{c} \frac{R_z^2}{4d^2}.$$

Po wstawieniu danych liczbowych dostajemy $F = 6,1 \cdot 10^8$ N, co jest bardzo małą wielkością w porównaniu z siłą przyciągania grawitacyjnego Ziemi przez Słońce.

Piraci

Piotr CHRZĄSTOWSKI

Piraci mają łup w postaci 100 dukatów i muszą go podzielić. Postanowili urządzić podział następująco. Najpierw uszeregowali wszystkich od najsilniejszego do najsłabszego za pomocą turnieju „na rękę”. Następnie ustalili takie reguły. Najsilniejszy z nich proponuje metodę podziału i określa, kto ma dostać ile dukatów. Propozycja ta jest głosowana i jeśli uzyska co najmniej 50%, staje się ostateczna. Jeśli natomiast większość będzie przeciwko tej propozycji, to pozostali piraci wyrzucają proponenta za burtę do wody pełnej rekinów, a do głosu dochodzi najsilniejszy z pozostałych, który zgłasza kolejną propozycję podziału. Czynności te powtarza się dopóty, dopóki propozycja aktualnie najsilniejszego pirata nie zostanie zaakceptowana.

Piraci działają racjonalnie. Przede wszystkim będą zgłaszać propozycje, które nie spowodują ich kąpieli pośród rekinów. Po drugie, w ramach wszystkich propozycji bezpiecznych dla ich życia będą tak działać, aby zmaksymalizować swój zysk. Po trzecie w końcu, piraci są złośliwi i jeśli mają przy głosowaniu dwie równoważne z ich punktu widzenia decyzje, to ze względu na nabrzmiałe zadry będą głosować przeciwko proponentowi. Oczywiście piraci są rozsądnie myślącymi ludźmi i nie robią błędów logicznych, jeśli chodzi o życie lub pieniądze.

Spróbujmy znaleźć optymalne strategie dla proponentów, przy założeniu że mamy n piratów. Dla $n = 1$ problem się trywializuje. Jedyne pirat bierze wszystko i głosuje za tą propozycją. Podobnie jest dla $n = 2$. Silniejszy z dwóch piratów decyduje, że bierze całe 100 dukatów, a ten słabszy nie jest w stanie go przegłosować. Przy $n = 3$ najsilniejszy pirat (nazwijmy go Trójką) nie może wziąć całości, bo Dwójka na pewno zagłosuje przeciwko – przecież gdy Trójką polegnie, wówczas Dwójka zgarnie za chwilę 100 dukatów. Jedyne niby jest wszystko jedno – tak czy siak nie dostanie nic – ale zgodnie z regułą złośliwości zagłosuje przeciwko, bo przynajmniej pozbędzie się silnego oponenta. Zatem Trójką musi przekupić jednego z pozostałych. Dwójki przekupić nie sposób, ale Jedynek wystarczy zbyć jednym dukatem, aby zyskać w nim sojusznika. Zatem Trójką powinien zachować sobie 99 dukatów i dać Jedynekę jednego dukata.

Z Czwórką jest podobnie. Powinien zyskać jednego sojusznika – potrzebuje dwóch głosów włącznie z własnym. Wystarczy więc przekupić Dwójkę, który by dostał figę z makiem, gdyby do głosu doszedł Trójką. Zatem optymalna strategia dla Czwórki to wziąć sobie 99 dukatów, a jednego dukata odpalić Dwójce, który choć zgrzytając zębami, ale zagłosuje za tą propozycją, zapewniając Czwórcę zwycięskie 50%. (Jedynekę dukat od Czwórki nie interesuje, bo i tak dostałby go od Trójki.)

Piątka musi mieć dwóch sojuszników. Widać, że wystarczy (i konieczne jest) przekupić minimalnym kosztem Jedynekę i Trójkę. Daje im zatem po jednym dukacie, a sobie pozostawia 98. Szóstka robi podobnie, tyle że obdarowuje Dwójkę i Czwórkę, bo Jedyneką i Trójką woła dostać dukata od Piątki i będą głosować przeciwko, nawet gdyby im zaproponował po dukacie. Piątka będzie głosował przeciwko każdej propozycji poniżej 98 dukatów. Zatem za pomocą dwóch dukatów Szóstka może się tylko w ten sposób obronić.

Wyłania się zatem prosty schemat. Jeżeli najsilniejszy pirat ma numer parzysty, to powinien dać po jednym dukacie wszystkim parzystym mniejszym od niego, a jeśli ma nieparzysty, to należy rozdać po jednym dukacie mniejszym nieparzystym, a sobie wziąć resztę.

Metoda ta działa, póki starczy dukatów. Co będzie jednak, gdy zbliżymy się do 200? Pirat 200 jeszcze coś zarobi, bo rozda 99 dukatów (po jednym) piratom o numerach 2, 4, 6, ..., 198, a sobie weźmie ostatniego. Pirat 201 już nie zarobi, ale przeżyje: wystarczy, jeśli obdaruje po dukacie piratów o numerach 1, 3, 5, ..., 199 – jest ich stu, a sobie nic nie zostawi. Każdy inny manewr niechybnie kończy się kąpielą. Tu co prawda 201 nie zarobi, ale żyć będzie, a to najważniejsze. Oczywiście nieparzyści będą głosować za, bo wiedzą, że jeśli do głosu dorwie się pirat 200, to nie mają na co liczyć. A ich głosy plus głos 201 dają wymarzoną przewagę. Pirat 202 analogicznie przeżywa, nic nie biorąc sobie i obdarowując mniejszych parzystych, których jest dokładnie 100.

Co z piratem 203? Nieszczęśnik nie ma szans. Potrzebuje 102 głosów. Poza sobą więc musi zjednać 101 zwolenników, a wszak parzyści, których jest 101, nie będą go popierali; zgodnie z regułą złośliwości woła dostać swoją dolę od 202. Nie będzie go też popierał pirat 201 – on i tak nie ma szans na choćby jednego dukata, a wszak może koledze zaszkodzić... Zatem murowane 102 głosy pirat 203 ma przeciwko sobie.

Na pierwszy rzut oka wygląda na to, że od tej pory wszyscy piraci o numerach większych nie będą mieli szans przeżycia. Potrzebują przecież ponad stu zwolenników, a nie mają tylu dukatów, żeby ich przekupywać. Że tak nie jest, można się przekonać już przy piracie 204. Potrzebuje 102 głosów. I uzyska je! Jeden własny, 100 przekupionych oraz głos 203! Przecież dla 203 jedyną szansą na przeżycie jest poprzez kogoś silniejszego: on nie może sobie pozwolić na to, żeby samemu decydować, bo polegnie! Kogo zatem ma przekupić 204? Oczywiście wszystkich nieparzystych 1, 3, 5, ..., 199. Oni wszak wiedzą, że jeśli nie poprą tej decyzji, to polegnie najpierw 204, potem 203, a 202 rozda po dukacie parzystym i na tym się cała zabawa skończy.

Co dalej? Pirat 205 potrzebuje 103 głosów. Tym razem nie może liczyć ani na 203, ani na 204, którzy czują się

już bezpiecznie. Nie ma więc biedak szans. Podobnie pirat 206 może liczyć co najwyżej na 102 głosy: stu przekupionych, 205 i swój. Pirat 207 ma co prawda dwóch desperatów: 205 i 206, ale wraz z własnym głosem i stoma cieniasami nie uzyska wymaganych 104 głosów. Dopiero pirat 208, mając na uwadze głosy 205, 206, 207 i swój plus umiejętnie przekupione płatki, może się czuć bezpiecznie. Oczywiście nic nie zarobi, bo 100 dukatów będzie musiał rozdać 2, 4, 6, ..., 200, ale uzyska wymarzone 50%, czyli 104 głosy.

Dla 209 sytuacja znów wygląda beznadziejnie. Ani 203, ani 204, ani żaden z 205, 206, 207, 208 nie ma powodu, żeby go poprzeć – z chwilą gdy problem sprowadzi się do 208, wszyscy oni spokojnie przeżywają, więc kolegi 209 należy się pozbyć. Od tej pory do następnego szczęśliwego, który przeżyje, 209 będzie głosował za każdą propozycją. Podobnie zresztą jak 210, 211, 212, 213, 214 i 215 – każdemu z nich będzie

brakowało przynajmniej jednego głosu wśród słabszych od niego desperatów. Dopiero pirat 216 ma szansę. Potrzebnych mu 108 głosów dostarczy stu nieparzystych 1, 3, 5, ..., 199 plus siedmiu desperatów 209, ..., 215 i on sam. Zauważmy, że nierozsądne byłoby rozdanie po dukacie parzystym, którzy w tej sytuacji głosowaliby przeciwko – i tak swoją dolę dostaną od 208.

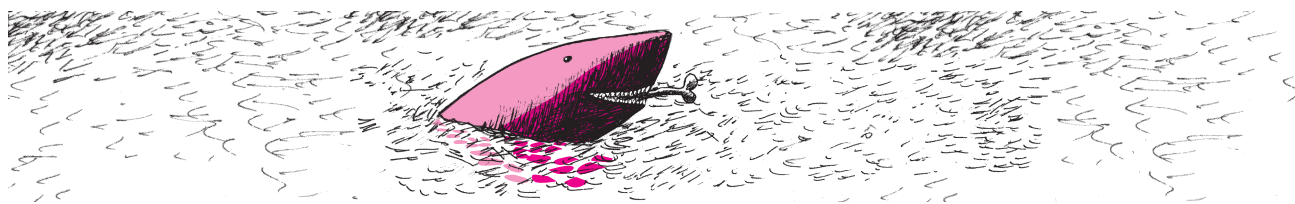
Mamy już ogólny schemat: dla $n > 200$ przeżywają tylko piraci o numerach $n = 200 + 2^k$, gdzie $k \geq 0$. Każdy taki pirat powinien rozdać sto dukatów stu słabszym o identycznej parzystości: dla k parzystego nieparzystym, 1, 3, 5, ..., 199, a dla k nieparzystego parzystym 2, 4, 6, ..., 200.

Jakie morały płyną z tej historii?

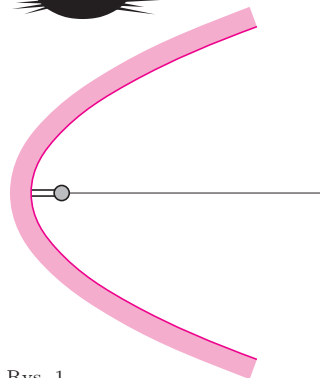
Po pierwsze: nie zawsze oplaca się być najlepszym.

Po drugie: ludzie zdesperowani bywają cenni.

Po trzecie: ciężki i niebezpieczny jest chleb pirata!



Zadania *Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI*



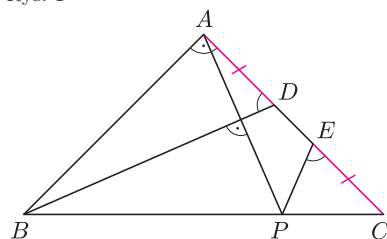
Rys. 1

F 635. Fotonowy silnik odrzutowy składa się z małego, kulistego ciała o temperaturze T i promieniu r umieszczonego w ognisku paraboloidalnego zwierciadła (rys. 1). Obliczyć siłę ciągu tego silnika.

Rozwiązanie na str. 4

F 636. Obliczyć całkowitą siłę, jaką promieniowanie elektromagnetyczne emitowane przez Słońce działa na Ziemię, zakładając, że jest ono przez nią pochłaniane w całości. Przyjąć całkowitą moc promieniowania Słońca $L_s = 4 \cdot 10^{26}$ W.

Rozwiązanie na str. 5

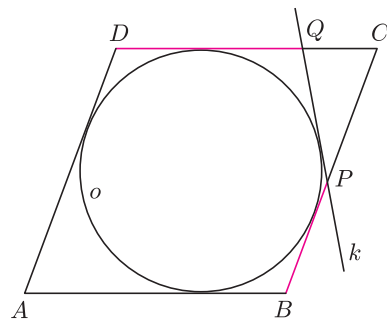


Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

M 1084. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle A = 90^\circ$ oraz $AB = AC$ (rys. 2). Punkty D i E leżą na boku AC , przy czym $AD = CE$. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej BD przecina bok BC w punkcie P . Wykazać, że $\sphericalangle PEC = \sphericalangle BDA$.

Rozwiązanie na str. 4



Rys. 3

M 1085. Dane są liczby całkowite a_1, a_2, \dots, a_7 . Liczby b_1, b_2, \dots, b_7 to liczby a_1, a_2, \dots, a_7 , lecz ustawione w innej, przypadkowej kolejności. Dowieść, że liczba

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$$

jest parzysta.

Rozwiązanie na str. 11

M 1086. Okrąg o jest wpisany w romb $ABCD$. Prosta k , styczna do okręgu o , przecina odcinki BC i CD odpowiednio w punktach P i Q (rys. 3). Wykazać, że wartość iloczynu $BP \cdot DQ$ nie zależy od wyboru stycznej k .

Rozwiązanie na str. 16

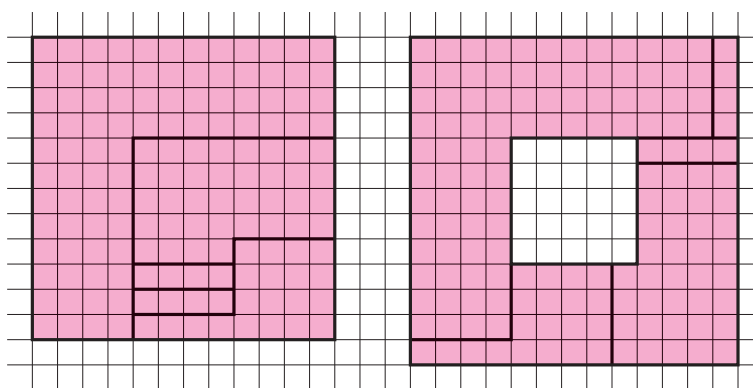


mała delta

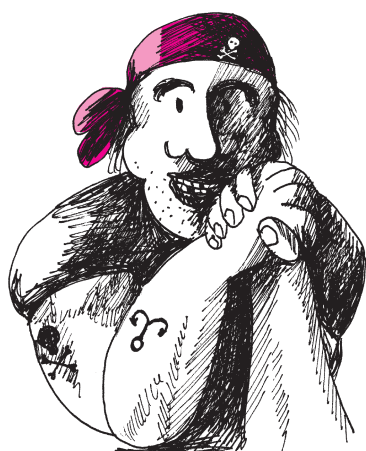
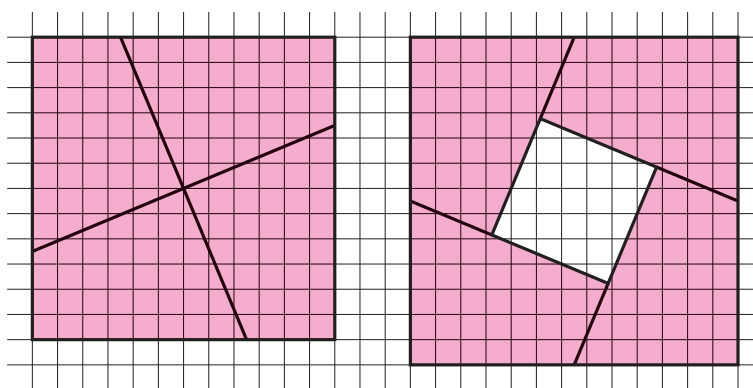
Jeszcze o kwadratach i nożyczkach

W *Delcie* 12/2004 proponowałem, aby tak podzielić kwadrat o boku 12, by z uzyskanych części **ułożyć** kwadrat o boku 13 z wyciętym **w środku** kwadratem o boku 5. Przytoczyłem też opinię, że – podobno – części tych może być cztery, choć sam umiałem przeprowadzić podział, o jakim mowa, na sześć takich części (co prawda na kilka sposobów).

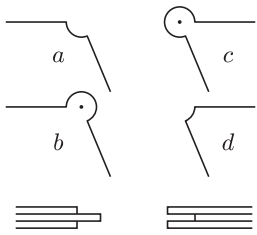
A potem przyjrzałem się temu zadaniu dokładniej i zobaczyłem, że sformułowanie dopuszcza kilka różnych interpretacji. Po pierwsze, czy słowo **ułożyć** pozwala odwracać części na lewą stronę? Jeśli by tak było, to znam podział na 5 części.



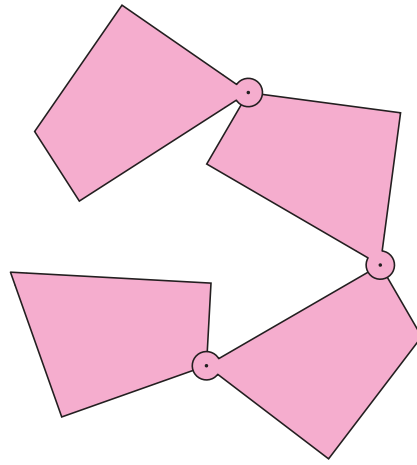
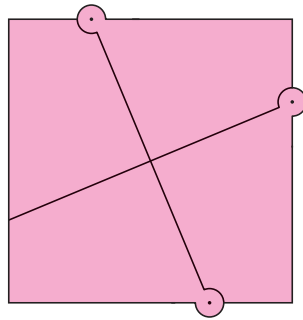
Po drugie, czy warunek, że kwadrat o boku 5 wycinamy **w środku**, zawiera żądanie, aby wycinany kwadrat miał nie tylko ten sam środek, co ten, z którego go wycinamy, czy też jeszcze ich boki mają być równoległe? Jeśli równoległości być nie musi, to podział na cztery części jest możliwy.



Można to nawet zrealizować w postaci zabawki, wykonując kwadrat np. ze sklejki i wyposażając go w trzy zawiaski, np. tak, jak na rysunku z prawej. Aby otrzymać akurat rozwiązanie naszego zadania, trzeba boki kwadratu 12×12 podzielić w stosunku $7 : 17$ (czemu?).



Zawiaski można zrobić w ten sposób, że przy kącie rozwartym ułożymy warstwy aba , natomiast przy ostrym cdc , i połączymy pionowym drucikiem przez zaznaczony punkt.



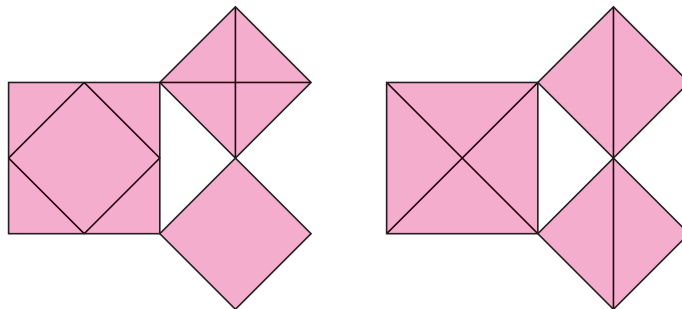
Bo warto zauważyć, że jeśli dowolnie przetniemy kwadrat dwiema prostokątnymi przechodzącymi przez jego środek, to z otrzymanych czterech części zawsze da się ułożyć (i to tak „zawiaskowo”) kwadrat z kwadratowym otworem (no, ewentualnie bez otworu).

W tym momencie orientujemy się, że problem dawno już nie dotyczy kratkowanego papieru ani trójek pitagorejskich. Rozwiązaliśmy zadanie polegające na rozkładzie kwadratu na dwa kwadraty, co dokładniej można opisać tak.

Dane są takie dwie liczby a i b , że $a > b > 0$. Podzielić kwadrat o boku a na pięć wielokątnych części, z których da się ułożyć dwa kwadraty: jeden o boku b , drugi o boku $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Rzeczywiście rozwiązaliśmy, bo z poprzedniego obrazka widać, że stosowne części to – w przypadku, gdy $b > c$ – kwadrat o boku c i cztery jednakowe czworokąty, których boki mają kolejno długości $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{b-c}{2}$ i kąty proste między pierwszym i drugim oraz trzecim i czwartym bokiem. Jeśli ktoś nie wierzy, niech szczegółowo to przeliczy. W przypadku gdy $b < c$, trzeba zamienić miejscami b i c , czyli wziąć kwadrat o boku b itd.

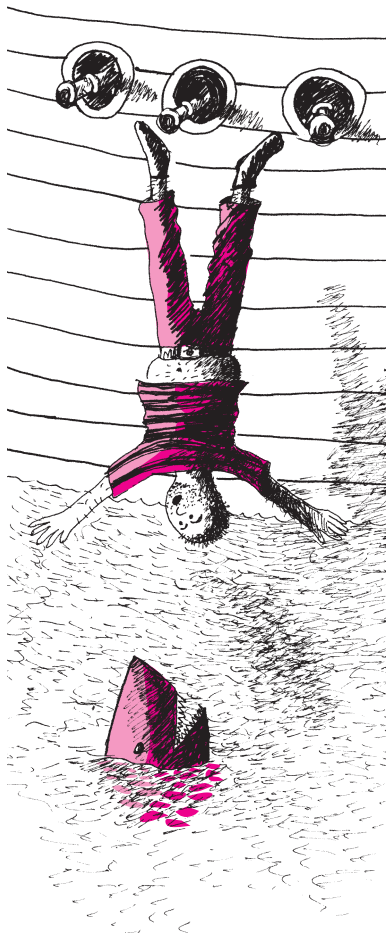
W pominiętym przypadku $b = c$ otrzymamy kwadrat i cztery trójkąty. Widać jednak, że tutaj można dokonać podziału również na cztery tylko części.



Powstaje, oczywiście, pytanie, czy przypadkiem (zmieniając sposób dzielenia na wielokąty) nie da się, dla dowolnych a i b , podzielić kwadratu o boku a na cztery wielokąty, z których da się ułożyć kwadraty o boku b i c .

Nie znam odpowiedzi na to pytanie, choć znam wybitnych matematyków, którzy wierzą, że odpowiedź jest negatywna (czyli istnieją liczby a i b , dla których nie można przeprowadzić żądanego podziału na cztery części). Wierzą do tego stopnia, iż są pewni, że taki dowód gdzieś został opublikowany. Póki się jednak nie odnajdzie – może Czytelnicy *Delty* pomogą?

Marek KORDOS



Teoria stabilności w sensie Lapunowa i globalne atraktory

Tomasz DŁOTKO

Jednym z głównych narzędzi służących do matematycznego opisu otaczającego nas świata są równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe. W prostszych z nich, równaniach zwyczajnych, występuje pochodna szukanej funkcji x zmiennej rzeczywistej t (mającej najczęściej interpretację czasu). Ponieważ pochodna $x'(t)$ opisuje wzrost bądź malenie funkcji x w chwili t , możemy uważać, że takie równania opisują *zmiennosc* bądź *ewolucję* wielkości x w czasie. Często zamiast jednego równania różniczkowego zwyczajnego badamy cały układ takich powiązanych ze sobą równań. Przykładem może tu być dobrze znany z fizyki *układ równań ruchu Newtona* opisujący siłę \mathbf{F} działającą na ciało:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \mathbf{x}''(t),$$

zapisany dla składowych wektora położenia $\mathbf{x}(t)$. We wzorze powyżej m jest masą ciała, $\mathbf{a}(t)$ przyspieszeniem, zaś $\mathbf{x}(t)$ położeniem ciała w chwili t . Symbol $\mathbf{x}''(t)$ oznacza drugą pochodną położenia względem czasu, czyli wektor przyspieszenia.

Ponieważ nie każde równanie różniczkowe zwyczajne (a tym bardziej układ takich równań bądź równanie różniczkowe cząstkowe) potrafimy jawnie rozwiązać (podać wzór analityczny na rozwiązanie x), matematycy zajmujący się badaniem tych równań stawiają zazwyczaj trzy podstawowe pytania, na które starają się odpowiedzieć:

1. Czy badane równanie ma rozwiązanie o określonych własnościach (np. ograniczone, różniczkowalne)? – *istnienie rozwiązania*.
2. Czy takie istniejące rozwiązanie (spełniające ew. pewne dodatkowe warunki) jest tylko jedno czy też może ich być więcej? – *jednoznaczność rozwiązania*.
3. Jakie dodatkowe własności ma rozwiązanie (np. czy będzie określone dla wszystkich czasów $t \geq 0$, czy może w pewnej chwili $t > 0$ przestaje istnieć)? Jeśli rozwiązanie istnieje dla wszystkich czasów $t \geq 0$, to czy potrafimy opisać sposób jego zachowania po bardzo długim czasie? – *zachowanie asymptotyczne*.

Pomyślmy tu o trzech przykładach równań różniczkowych zwyczajnych, przy czym każde z tych równań rozpatrujemy z dodatkowym warunkiem (*warunkiem Cauchy'ego*) zadającym wartość rozwiązania w chwili $t = 0$:

$$\text{a) } \begin{cases} x'(t) = x^2(t), \\ x(0) = a > 0, \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y'(t) = \sin t, \\ y(0) = b, \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} z'(t) = -z(t), \\ z(0) = c. \end{cases}$$

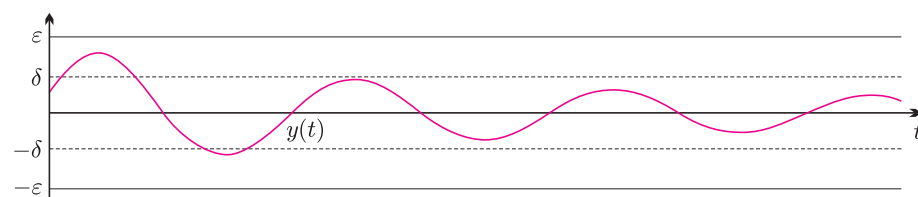
Łatwo przekonamy się, że rozwiązania tych równań dane są wzorami:

$$\text{a) } x(t) = \frac{1}{(1/a) - t}, \quad \text{b) } y(t) = -\cos t + b + 1, \quad \text{c) } z(t) = c e^{-t}.$$

Możemy zauważyć, że rozwiązanie x jest dobrze określone dla czasów $t \geq 0$ bliskich zera, lecz w chwili $t = 1/a$ przestaje istnieć. Rozwiązania y i z istnieją natomiast dla wszystkich $t \geq 0$. Można więc mówić o ich *zachowaniu asymptotycznym*, gdy czas t dąży do nieskończoności. Rozwiązanie y oscyluje okresowo, natomiast rozwiązanie z dąży do 0, gdy czas t dąży do nieskończoności. Rozwiązanie z ilustruje sposób zachowania, który nawiązując do nazwiska prekursora badania asymptotyki rozwiązań, określamy mianem *asymptotycznej stabilności w sensie Lapunowa* (matematyk rosyjski A.M. Lapunow badał to pojęcie już w 1892 roku). Uściślając naszą intuicję, powiemy, że rozwiązanie zerowe $y(t) \equiv 0$ równania różniczkowego zwyczajnego $y'(t) = f(t, y(t))$, jest *asymptotycznie stabilne*, jeżeli:

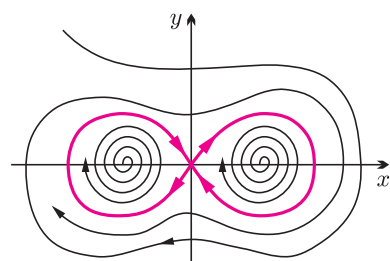
1. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że rozwiązania odpowiadające warunkom początkowym spełniającym nierówność $|y(0)| < \delta$ istnieją dla wszystkich czasów $t \geq 0$ i spełniają oszacowanie $|y(t)| < \varepsilon$.
2. Rozwiązania dążą do zera, gdy czas t dąży do nieskończoności.

Definicję tę ilustruje następujący rysunek.



Jeśli badane równanie nie ma rozwiązania zerowego, ale pewne jego rozwiązanie x istnieje dla wszystkich czasów $t \geq 0$, można badać stabilność asymptotyczną rozwiązania x , sprowadzając tę bardziej złożoną sytuację do opisanego powyżej przypadku asymptotycznej stabilności rozwiązania zerowego, rozpatrując różnicę $y - x$, gdzie y jest innym rozwiązaniem badanego równania.

Idea stabilności asymptotycznej jest ważna z praktycznego punktu widzenia. Otóż, jeżeli równanie różniczkowe opisuje pewien proces fizyczny i rozwiązanie x tego równania jest asymptotycznie stabilne, to możemy uważać, że po dostatecznie długim czasie zaobserwujemy praktycznie tylko wartości rozwiązań bardzo bliskie wartościom $x(t)$, niezależnie od tego, z jakiego warunku początkowego zaczerpniętego ze zbioru ograniczonego ten proces startował.



Kolorowa linia zamknięta jest właśnie zbiorem przyciągającym rozwiązania.

Szybki rozwój teoria stabilności rozwiązań równań różniczkowych przeżywała w drugiej połowie XX wieku. Trzeba tu wspomnieć nazwiska takich matematyków jak N.N. Krasowski, J.P. LaSalle, S. Lefschetz czy S. Yoshizawa. Pewnym niedostatkim tej teorii jest jednak fakt, że zbiory, do których „przybliżają się” rozwiązania równań różniczkowych po długim czasie, są często bardziej złożone niż pojedynczy punkt (zerowe rozwiązanie równania). Popatrzmy na rysunek obok przedstawiający kształt *zbioru przyciągającego* dla prostego układu dwu równań różniczkowych na płaszczyźnie.

Zilustrowany powyżej przykład jest nadal znacznie prostszy od tych, które są typowe w teorii równań różniczkowych cząstkowych. W każdej chwili t rozwiązanie takiego równania $u(t, \mathbf{x})$ jest *funkcją* zmiennej wektorowej \mathbf{x} . Zbiory, które *przyciągają* rozwiązania równań cząstkowych, leżą w przestrzeni funkcji i mają często bardzo złożoną strukturę. W ostatnich dwudziestu latach prowadzono intensywne badania *układów dyssypatywnych*, tzn. takich układów fizycznych, w których z upływem czasu następuje zanikanie bądź *rozpraszanie energii* (np. na skutek tarcia). Przykładem może tu być, opisujące przepływ cieczy nieściśliwej, *równanie Naviera–Stokesa* czy tzw. układy *reakcyjno-dyfuzyjne* modelujące procesy biologiczne. Dla równań różniczkowych opisujących układy dyssypatywne wprowadzono pojęcie *globalnego atraktora*. Jest to podzbiór przestrzeni, w której zmieniają się rozwiązania (*przestrzeni fazowej*), którego obraz, jako całości, nie zmienia się w czasie (*zbiór niezmienniczy*), zbiór ten jest *zwarty* oraz przyciąga orbity wszystkich ograniczonych podzbiorów przestrzeni fazowej.

Badając równanie różniczkowe opisujące układ dyssypatywny, możemy uważać, że jeżeli rozpatrzmy warunki początkowe należące do dowolnego ograniczonego zbioru B przestrzeni fazowej, to po skończonym czasie odpowiadające im rozwiązania znajdują się w dowolnie małym otoczeniu atraktora. Globalny atraktor, a raczej jego dowolnie małe otoczenie, jest więc tym zbiorem, do którego każde rozwiązanie wpada po dostatecznie długim czasie i pozostaje w jego obrębie już na zawsze. Często globalne atraktory są zbiorami mającymi *skończony wymiar topologiczny* (tzn. można je utożsamiać lokalnie z otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n). Jednak kształt atraktorów wiążących się z fizycznymi układami dyssypatywnymi jest często bardzo złożony, a same atraktory są *fraktalami*. Ewolucja w czasie obrazu ograniczonego podzioru B przestrzeni fazowej może wyglądać następująco.

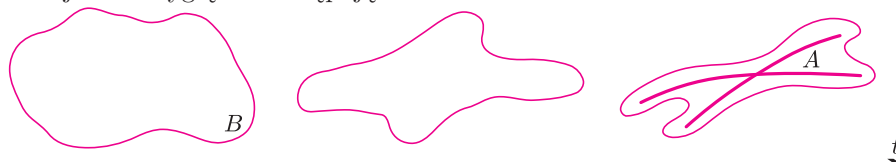


Rozwiązanie zadania M 1085.
Gdyby iloczyn

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$$

był liczbą nieparzystą, to każdy czynnik tego iloczynu byłby także liczbą nieparzystą. Wtedy suma tych czynników byłaby również liczbą nieparzystą. To jednak jest niemożliwe, gdyż

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_7 - b_7) = 0.$$



Po dostatecznie długim czasie rozwiązania rozpoczynające się w zbiorze B wchodzą do otoczenia globalnego atraktora A .

Do najbardziej znanych współczesnych matematyków badających teorię globalnych atraktorów należą: Jack K. Hale (USA), Roger Temam (Francja), A.V. Babin i M.I. Vishik (Rosja). Do dnia dzisiejszego powstają w ramach tej teorii nowe ciekawe rezultaty.

Puls a rozmiar na nowo

Czy biorąc ssaka za łapkę, można określić jego wielkość? Raczej tak. Mała łapka – mały ssak, duża łapka – duży ssak. To jednak nie jedyna metoda. Jeżeli łapka nadal jest częścią danego ssaka i to w dodatku żywego, można określić jego rozmiary, mierząc puls. Im dłuższy okres między uderzeniami serca, tym większa masa zwierzęcia.

Powyższa metoda może wydawać się niepraktyczna. Są jednak sytuacje, w których nie ma innej. Przykładów należy jednak szukać nie w zoologii, lecz w astronomii.

Nie jest tajemnicą dla Czytelników *Delty*, że podstawowym problemem astronomii jest pomiar odległości. Co by astronom nie robił, potyka się o brak niezawodnej miarki. Wynaleziono wiele bardzo sprytnych metod, którym poświęciliśmy kiedyś cały numer *Delty* (10/2001). Praktycznie wszystkie sposoby mierzenia odległości we Wszechświecie opierają się na obiektach, których absolutna jasność jest lepiej lub gorzej znana. Im lepiej, tym lepszymi tzw. świecami standardowymi są te obiekty. Na podstawie ich jasności obserwowanej można określić odległość do nich.

Im dalej sięgamy w Kosmos, tym jaśniejsze muszą być świece. Ale żeby mieć możliwość pomiaru bezwzględny, trzeba taką linijkę wyskalować. Miarki te skaluje się jedna od drugiej. W końcu jednak trzeba którąś miarkę wycechować mniej lub bardziej bezpośrednio. Niedokładność takiej procedury przenosi się w oczywisty sposób na pozostałe linijki.

Historycznie pierwszą pozagalaktyczną miarką jest nadal niezwykle cenny związek między jasnością absolutną cefeid a ich okresem zmienności. Został on odkryty w 1912 roku przez Henriettę Leavitt, która zajmowała się obserwacją gwiazd zmiennych. Zauważyła, że logarytm okresu zmienności jest proporcjonalny do jasności obserwowanej cefeid należących do Małego Obłoku Magellana. Przyjmując, że wszystkie gwiazdy w tej satelitarnej galaktyce Drogi Mlecznej są mniej więcej w tej samej odległości (co wtedy wydawało się uzasadnione, a obecnie jest oczywiste), uczona uzyskała zależność jasności absolutnej od okresu zmienności. Wynika stąd zależność odległości (mierzonej w jednostkach odległości do Małego Obłoku Magellana) od stosunku jasności obserwowanej do logarytmu okresu zmienności.

Właśnie dzięki pomocy relacji odkrytej przez Henriettę udało się przekonać społeczność astronomów o pozagalaktyczności galaktyk, a Edwin Hubble mógł odkryć prawo ich ucieczki.

Współcześnie potrzebne jest bardziej dokładne wyskalowanie cefeidowej miarki. Pomysł na prawie bezpośredni pomiar odległości cefeid pochodzi od Waltera Baadego i Adriaana Wesselinka i jest znany od połowy XX wieku. Ta klasyczna metoda opiera się na porównaniu zmiany kątowych rozmiarów gwiazdy z rzeczywistymi zmianami jej rozmiarów wyznaczonymi na podstawie szybkości rośnięcia. Tempo rośnięcia jest określane bezpośrednio, na podstawie pomiarów spektroskopowych. Natomiast zmiana rozmiarów kątowych wyznaczana jest na podstawie zmian jasności za pośrednictwem modelu atmosfery cefeid.

Żeby metodę Baadego i Wesselinka uczynić naprawdę bezpośrednią, należy zmierzyć zmianę rozmiarów kątowych bez odwoływania się do rozważań modelowych. Tylko to nie jest takie proste, gdyż kątowe rozmiary nawet najbliższych cefeid nie przekraczają trzech tysięcznych sekundy łuku. W dodatku chodzi nie o same rozmiary, tylko o ich zmianę. To jakby z Księżycą próbować sprawdzać, czy wyrzucony na brzeg oceanu wieloryb jeszcze oddycha.

Pomiarów z taką rozdzielczością kątową nie można przeprowadzić nawet za pomocą największych teleskopów optycznych. Trzeba odwołać się do metod interferometrycznych. Obserwując interferencję światła zbieranego przez dwa teleskopy, można uzyskać rozróżnienie szczegółów tak dokładne, jak za pomocą teleskopu o rozmiarach porównywalnych do odległości między teleskopami. Wymaga to jednak niezwykle precyzyjnego systemu teleskopów połączonych optycznie i to w sposób umożliwiający zmianę odległości optycznych, bo dopiero wtedy można takiego systemu użyć do obserwacji dowolnie położonej gwiazdy, której obserwacja jest możliwa przez oba teleskopy.

Unikalnym pod tym względem urządzeniem jest VLTI [1], czyli Bardzo Wielki Interferometr Teleskopowy (chodzi oczywiście o teleskopy astronomiczne, a nie o elementy zawieszania samochodów) umieszczony w Paranal Observatory należącym do ESO i zlokalizowanym na szczycie Cerro (góry) Paranal na pustyni Atacama w północnym Chile. W skład układu wchodzi cztery osmiometrowe (8,2 m) teleskopy i kilka pomocniczych teleskopów dwumetrowych (1,8 m).

Jakiś czas temu francusko-szwajcarski zespół astronomów rozpoczął program mający na celu zmierzenie odległości do wielu cefeid przy wykorzystaniu VLTI. Pod koniec października organizacja ESO powiadomiła [2] o opublikowaniu wstępnych rezultatów. Interferometrycznie zmierzono 69 średnic gwiazd, wykorzystując ponad 100 godzin obserwacji rozłożonych na 68 nocy. Używane były trzy rozstawy teleskopów (teleskopy pomocnicze i trzydziestopięciocentymetrowe teleskopy testowe można przesunąć): 60 m, 102,5 m oraz 140 m. Pomiar dotyczyły siedmiu cefeid widzialnych na południowym niebie: X i W Strzelca, η Orła, β Złotej Ryby, ζ Bliźniąt, Y Wężownika i L Kilu. Ich okresy wynoszą od 7 do 35,5 dnia, co stanowi przedział wystarczająco szeroki do przeprowadzenia kalibracji relacji okres-światłość.

Okazało się, że ta nowa metoda kalibracji daje wyniki zgodne z kalibracją przeprowadzoną na podstawie stosunkowo mało dokładnych pomiarów odległości wielu cefeid wykonanych za pomocą satelity Hipparcos.

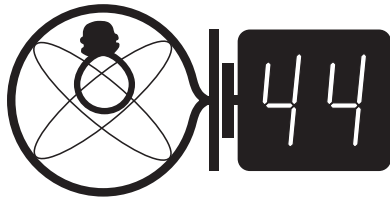
Więcej informacji można znaleźć w internetowej wersji tego artykułu [3].

Piotr ZALEWSKI

[1] <http://www.eso.org/projects/vlti/>

[2] *Measuring Cosmic Distances with Stellar Heart Beats – VLTI Watches the Changing Size of Bright Southern Cepheids* ESO Press Release 25/04 29 października 2004 roku

[3] www.mimuw.edu.pl/delta/af/0501



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 III 2005

Zadania z fizyki nr 390, 391

Redaguje Jerzy B. BROJAN

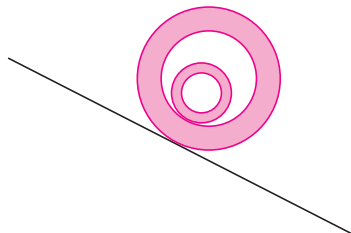
390. Z równi pochyłej o kącie nachylenia α stacza się kula o masie M zawierająca współśrodkowe kuliste wydrążenie, przy czym stosunek wewnętrznego promienia do zewnętrznego (oznaczonego R) jest równy k , a poza wydrążeniem rozkład masy jest jednorodny. Wewnątrz kuli toczy się podobnie wydrążona kulka o masie m , zewnętrznym promieniu r i tej samej wartości k . Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby środki kul i punkt zetknięcia większej z równią leżały stale na tej samej prostej (rys. 1)?

391. Jak długo mogłoby świecić Słońce z niezmienną mocą, gdyby czerpało wypromieniowaną energię:

- ze spalania węgla (załóżmy, że Słońce składa się z węgla i tlenu),
- z grawitacyjnego zapadania się (załóżmy, że Słońce zmniejszyło swój promień o 10%)?

Niezbędne dane należy wziąć z tablic. Wystarczy przybliżona ocena wyniku.

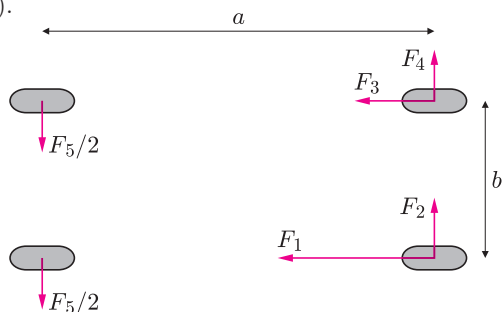
Rys. 1



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2004

382. Odległość między osiami przednich i tylnych kół samochodu jest równa 1,9 m, a odległość lewych kół od prawych – 1,5 m. Samochód ma napęd na 2 tylne koła, przy czym opona na jednym z tych dwóch kół jest „lysa” – współczynnik tarcia tego koła o podłoże jest równy 0,2, a dla pozostałych kół wynosi 0,8. Z jakim maksymalnym przyspieszeniem może ten samochód ruszyć po linii prostej bez poślizgu, jeśli wszystkie koła są wtedy jednakowo obciążone?

382. Zauważmy najpierw, że siła wywierana przez podłoże na tylne opony nie może być skierowana wprost do przodu i jednocześnie osiągać wartości maksymalnych wynikających z wartości współczynników tarcia, gdyż wtedy nastąpiłby obrót lub boczny poślizg samochodu. Załóżmy więc, że siła działająca na „dobrą” oponę ma pewną składową podłużną F_1 oraz poprzeczną F_2 , dla „złej” opony składowe te oznaczmy jako F_3 i F_4 , natomiast siła F_5 działająca na przednie opony może być skierowana tylko poprzecznie do kierunku jazdy (rys. 2; symbol F_5 oznacza obie te siły łącznie).



Rys. 2

Spełnione są związki

- $F_2 + F_4 = F_5$ (brak przesunięcia bocznego)

Przypominamy treść zadań:

383. Do małego, izotropowego źródła światła Z przysunięto zestaw dwóch zwierciadeł płaskich. Ile razy zwierciadła zwiększają natężenie oświetlenia odległego ekranu, jeśli kąt α między nimi jest równy: a) 91° , b) 90° , c) 89° ? Rozważyc tylko część ekranu najbliższą źródłu i przyjąć, że prosta przechodząca przez wierzchołek kąta i źródło jest prostopadła do ekranu.

- $2aF_5 = b(F_1 - F_3)$ (brak obrotu)
- $\sqrt{F_1^2 + F_2^2} \leq \mu_1 P$,
 $\sqrt{F_3^2 + F_4^2} \leq \mu_2 P$ (brak poślizgu tylnych opon)

gdzie P jest siłą nacisku na każdą z opon, a μ_1 i μ_2 są odpowiednimi współczynnikami tarcia. W granicznym przypadku maksymalnego możliwego przyspieszenia obie nierówności przechodzą w równości, co jednak pozostawia liczbę niewiadomych o 1 większą od liczby równań, czyli pozostaje jeden swobodny parametr. Zakładając, że układ napędowy sterowany jest przez odpowiednio zaprogramowany komputer (chodzi o odpowiednie dopasowanie F_1 i F_3), możemy przyjąć, iż suma $F_1 + F_3$ traktowana jako funkcja tego parametru osiąga wartość maksymalną. Analiza numeryczna wykazuje, że przy przyjętych danych liczbowych maksimum $F_1 + F_3$ wynosi $0,973 \cdot P$, a poszczególne siły osiągają wtedy wartości $F_1 = 0,777 \cdot P$, $F_2 = 0,189 \cdot P$, $F_3 = 0,196 \cdot P$, $F_4 = 0,040 \cdot P$, $F_5 = 0,229 \cdot P$. Masa samochodu jest równa $4P/g$, zatem szukane maksymalne przyspieszenie wynosi

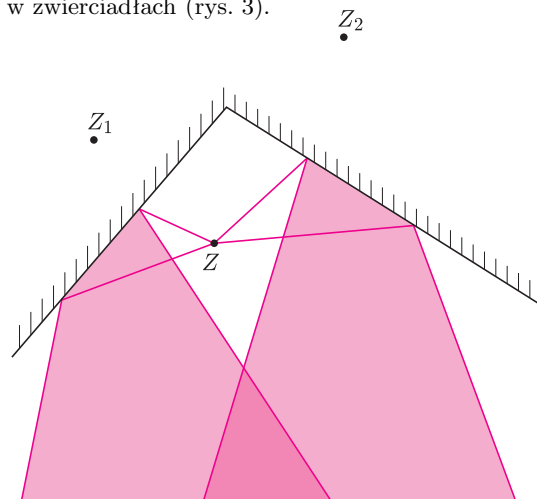
$$(0,973/4) \cdot g = 0,243 \cdot g = 2,39 \text{ m/s}^2.$$

Zauważmy, że „brutalne” podstawienie

$$F_1 = \mu_1 P, \quad F_3 = \mu_2 P$$

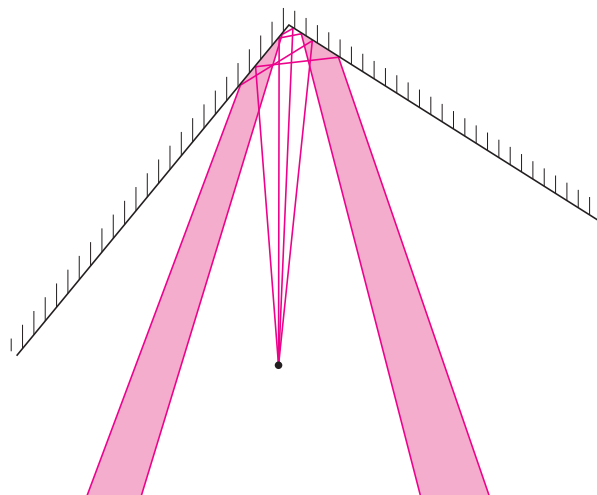
dałoby wynik $0,25 \cdot g$, czyli o niecałe 3% za duży.

383. W przypadku a) natężenie oświetlenia ekranu zwiększy się trzykrotnie, gdyż na ekran padają dodatkowo wiązki odbite od każdego ze zwierciadeł, wybiegające pozornie z punktów Z_1 i Z_2 , będących obrazami źródła Z w zwierciadłach (rys. 3).



Rys. 3

Promienie odbite dwukrotnie utworzą w tym przypadku dwie wiązki lekko rozbieżne, z których żadna nie oświetli najbliższej części ekranu (rys. 4).

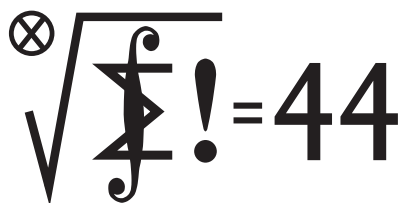


Rys. 4

W przypadku b) wzmocnienie będzie czterokrotne, gdyż te dwie wiązki „zatkną się” ze sobą, tak jakby ekran oświetlało także źródło Z_3 , położone w czwartym wierzchołku prostokąta $ZZ_1Z_2Z_3$.

W przypadku c) wiązki dwukrotnie odbite nałożą się na siebie, czyli na część ekranu najbliższą źródła padnie 5 wiązek.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 III 2005

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

481 ($WT = 2,01$) i **482** ($WT = 1,24$)

z numeru 5/2004

Józef Siwy	– Łaziska Górne	43,54
Witold Bednarek	– Łódź	43,23
Zbigniew		
Sewartowski	– Wieliczka	41,52
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	36,88
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	33,74

485. Niech $f(n)$ będzie maksymalną liczbą krawędzi grafu n -wierzchołkowego bez 4-cykułu. Mamy obliczyć $f(10)$.

Łatwo sprawdzić, że $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, $f(5) = 6$; ostatnia z tych równości jest osiągnięta tylko w grafie o pięciu wierzchołkach a, b, c, d, e i sześciu krawędziach ab, cd, ae, be, ce, de .

Weźmy dowolny 10-wierzchołkowy graf G bez 4-cykułu, mający q krawędzi. Niech v_0 będzie wierzchołkiem maksymalnego stopnia, tj. o maksymalnej liczbie wychodzących z niego krawędzi; oznaczmy tę liczbę przez r . Jest jasne, że $q \leq \frac{1}{2} \cdot 10r = 5r$.

Zadania z matematyki nr 493, 494

Redaguje Marcin E. KUCZMA

493. Każda krawędź wielościanu wypukłego (o wszystkich kątach dwuściennych mniejszych od 180°) została pomalowana jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje wierzchołek A oraz płaszczyzna, przechodząca przez A i niezawierająca innych wierzchołków wielościanu, o tej własności, że po każdej jej stronie wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka A mają jednakowy kolor.

494. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{\sqrt{13} - 1}{6\sqrt{13}} \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right)^n$. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lfloor a_n \rfloor)$.

Zadanie 494 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2004

Przypominamy treść zadań:

485. Obliczyć maksymalną liczbę krawędzi, jaką może mieć graf o 10 wierzchołkach, niezawierający czteroelementowego cyklu.

486. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - |\sphericalangle BDC|$. Udowodnić, że na krawędzi BC istnieje dokładnie jeden punkt P , dla którego zachodzi równość

$$\frac{|AP|}{|BD| \cdot |CD|} + \frac{|DP|}{|BD| \cdot |CD|} = \frac{|AB|}{|BC| \cdot |BD|} + \frac{|AC|}{|BC| \cdot |CD|}.$$

Niech X będzie zbiorem r wierzchołków połączonych krawędziami z v_0 i niech Y będzie zbiorem pozostałych $9-r$ wierzchołków (różnych od v_0). Tak więc $q = r + x + y + z$, gdzie

r = liczba krawędzi łączących v_0 z X ,
 x = liczba krawędzi łączących punkty zbioru X ,
 y = liczba krawędzi łączących punkty zbioru Y ,
 z = liczba krawędzi łączących X z Y .

Aby nie pojawił się 4-cykl, krawędzie łączące punkty zbioru X muszą być rozłączne, a z każdego punktu zbioru Y może wychodzić co najwyżej jedna krawędź do zbioru X .

Zatem $x \leq \lfloor r/2 \rfloor$, $z \leq 9 - r$, i oczywiście $y \leq f(9-r)$; stąd

$$q \leq r + \lfloor r/2 \rfloor + f(9-r) + 9 - r.$$

Gdy $r \geq 5$, liczba po prawej stronie jest nie większa niż 15.

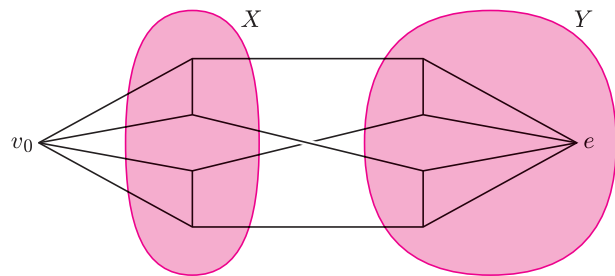
Dla $r = 4$ wynosi ona 17. Dla $r \leq 3$ mamy wcześniejszą nierówność $q \leq 5r \leq 15$.

Zajmijmy się przypadkiem, gdy $r = 4$. Czy jest możliwe uzyskanie równości $q = 17$? Oszacowania dla y oraz z musiałyby być równościami:

$$y = f(9-r) = f(5) = 6, \quad z = 9 - r = 5.$$

Zbiór Y (wraz z krawędziami łączącymi pary jego punktów) musiałby być wspomnianym na początku jedynym grafem pięciowierzchołkowym, realizującym równość $f(5) = 6$. Ma on wierzchołek e stopnia 4. Skoro zaś $r = 4$ jest maksymalnym stopniem wierzchołka w G , znaczy to, że z punktu e nie może wychodzić już żadna krawędź do punktów zbioru X . Każdy z pozostałych czterech punktów zbioru Y wysyła co najwyżej jedną krawędź do zbioru X , i mamy sprzeczność z równością $z = 5$.

To pokazuje, że $q < 17$. Równość $q = 16$ da się uzyskać; przykład (przedstawiony na rysunku 1) nietrudno znaleźć, analizując poprzednie rozumowanie i zastępując postulowany układ równości $y = 6$, $z = 5$ przez $y = 6$, $z = 4$. Stąd odpowiedź: $f(10) = 16$.



Rys. 1

486. Kładziemy ścianę BCD na płaszczyznę ABC (rys. 2); to znaczy, budujemy w tej płaszczyźnie (na zewnątrz trójkąta ABC) trójkąt BCD' przystający do BCD ($|BD'| = |BD|$, $|CD'| = |CD|$). Z równości

$$|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - |\sphericalangle BD'C|$$

wynika, że czworokąt $CABD'$ ma okrąg opisany. Zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza,

$$|BC| \cdot |AD'| = |AB| \cdot |CD'| + |AC| \cdot |BD'|,$$

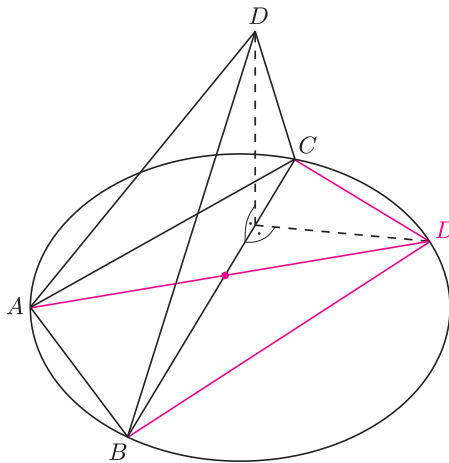
czyli

$$\frac{|AD'|}{|BD'| \cdot |CD'|} = \frac{|AB|}{|BC| \cdot |BD'|} + \frac{|AC|}{|BC| \cdot |CD'|}.$$

Teza zadania sprowadza się do wykazania, że na odcinku BC istnieje dokładnie jeden punkt P , dla którego zachodzi równość

$$|AD'| = |AP| + |PD'|;$$

a to oczywiście – jest to punkt przecięcia odcinków BC i AD' .



Rys. 2

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.

3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.

4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje:

- adres prywatny autora,
- klasa, nazwa i adres szkoły;
- imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.

5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.

6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.

8. Finałiści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.

9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.

10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu.

11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.

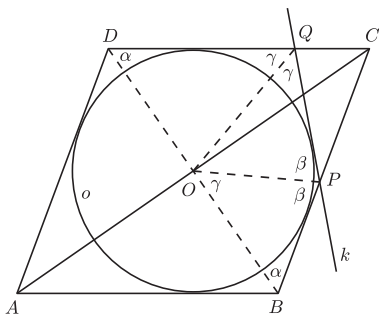
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.

13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Patrz w niebo



Rozwiązanie zadania M 1086.
Niech O będzie środkiem okręgu o .



Oznaczmy ponadto:

$$\alpha = \sphericalangle DBP = \sphericalangle BDQ,$$

$$\beta = \sphericalangle QPO = \sphericalangle BPO,$$

$$\gamma = \sphericalangle DQO = \sphericalangle PQO.$$

Wówczas $\alpha + 2\beta + 2\gamma + \alpha = 360^\circ$,
skąd uzyskujemy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Zatem $\sphericalangle BOP = \gamma$, skąd wynika, że
trójkąty BOP i DQO są podobne. Stąd
uzyskujemy

$$\frac{DQ}{BO} = \frac{DO}{BP},$$

czyli $BP \cdot DQ = BO \cdot DO$. Ostatni
iloczyn nie zależy od wyboru prostej k ,
co kończy rozwiązanie zadania.

O gwiazdach neutronowych grających rolę superdokładnych zegarów czytaliśmy wielokrotnie. Ich impulsy mogą pochodzić z ośrodka otaczającego gwiazdę (z mgławicy lub dysku akrecyjnego). Powoduje to pole magnetyczne gwiazdy obracające się wraz z nią i omiatające mgławicę – jest to wtedy tzw. pulsar, najczęściej radiowy. Częstość pulsów, czyli częstość obrotów gwiazdy, jest prawie stała z wysoką dokładnością, a owo „prawie” bierze się stąd, że gwiazda bardzo powoli traci jednak energię i zwalnia obroty, albo – gdy ma inny obiekt za towarzysza – okresowo zbliża się i oddala od obserwatora, wskutek czego impulsy odbierane są na zmianę zgęszczone i rozrzedzone w czasie. Takim towarzyszem może być nawet planeta – stąd odkrycie Wolszczana.

Może być jednak jeszcze inaczej. Gdy gwiazda neutronowa ma za towarzysza inną gwiazdę, może przez pewien czas „żyć” się jej materią. Strumień materii (praktycznie wodór) przepływający na gwiazdę neutronową jest kanalizowany przez jej pole magnetyczne i materia osiada w pobliżu magnetycznych biegunów gwiazdy neutronowej. Tam ulega stopniowo zgęszczaniu, a ponieważ nieustannie jest podgrzewana od spodu, dochodzi w końcu do lokalnego wybuchu termojądrowego. Gdy gwiazda obraca się dostatecznie szybko (a mogą to być setki obrotów na sekundę), wybuch – trwający wiele sekund – będzie widoczny przez wiele obrotów gwiazdy. Inaczej mówiąc, przez czas eksplozji gwiazda będzie migotać z częstością obrotów. Takie zjawisko zaobserwowano kilka lat temu w zakresie rentgenowskim u gwiazdy podwójnej SAXJ1808.4-3658 (położonej na granicy Strzelca i Korony Południowej) obracającej się 401 razy na sekundę. Ale zauważono też coś jeszcze. Mianowicie dzięki możliwości bardzo dokładnego mierzenia częstości błysków stwierdzono, że w trakcie wybuchu częstość ta odrobinę zmalała. Jedynym wytłumaczeniem jest uznać, że gwiazda (o promieniu kilkunastu kilometrów) rozdziła się (oczywiście niekoniecznie w całości) o 20–30 m. Badacze przewidują, że obserwowanie takich właściwie sejsmologicznych zjawisk przyczyni się do rozwoju teorii budowy wewnętrznej gwiazd neutronowych.

Tomasz KWAST



Styczeń

Pod naciskiem tzw. opinii publicznej zostałem zobligowany do publikowania na łamach *Delty* informacji o spodziewanych rojach meteorów. Usprawiedliwieniem, dlaczego nie robiłem tego dotąd, jest właśnie słowo „spodziewanych”. Rój meteorów to na ogół wielka ilość drobnych bryłek kamiennych pochodzących z rozsypania się komety. Bryłki te (ciała meteorowe lub meteoroidy) poruszają się w przybliżeniu po torze ich macierzystej komety, jeżeli więc była to kometa okresowa, której tor przecina się z orbitą Ziemi, to można obliczyć, kiedy (w sensie daty) Ziemia znajdzie się w tym punkcie przecięcia. Wcale nie jest jednak powiedziane, że tam też muszą akurat znaleźć się ciała meteorowe. Nie wiadomo bowiem, kiedy nastąpił rozpad komety, czy ciała meteorowe rozproszyły się wzdłuż całej jej orbity – najprawdopodobniej nie, zatem nie wiadomo, gdzie są zgęszczenia roju, w dodatku orbity cząstek podlegają niemożliwym do zmierzenia perturbacjom itd. Wszystko to sprawia, że przewidywalność zjawiska meteorów jest bardzo zła. Wiadomo, że pewne roje rzeczywiście powtarzają się co roku, ale przewidywane ich natężenia zazwyczaj ogromnie odbiegają od obserwowanych – zwykle

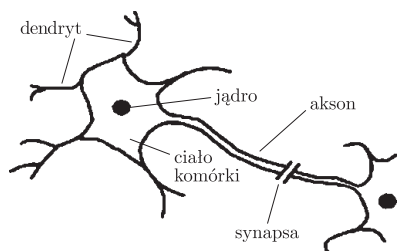
widzi się znacznie mniej błysków na niebie, niż przewiduje „teoria”. Ale spróbujmy.

W styczniu ma prawo być widoczny rój kwadrantydów, czyli promieniujący z obszaru nieba kiedyś uznanego za gwiazdozbiór Kwadrantu – teraz jest to część Wolarza. Maksimum przypada 2–4 I, a przewidywane natężenie wynosi 30 błysków na godzinę – oczywiście średnio. Takie natężenie uważane jest już za spore. Wenus może być widoczna przed wschodem Słońca, ale jest już blisko niego w Strzelcu. Mars jest w Wężowniku i wschodzi pod koniec nocy. Jowisz jest w Pannie, wschodzi więc około północy. W styczniu dwukrotnie zakryje go Księżyc: 4 I (zakrycie widoczne w Afryce i na południowej półkuli) i 31 I (widoczne na Pacyfiku) – czyli w Polsce zobaczymy tylko zbliżenia. Saturn jest w Bliźniętach, dzięki czemu widać go przez całą noc; 13 I ma opozycję, czyli znajduje się w przeciwnej stronie nieba niż Słońce. Now Księżyca wypada 10 I, a pełnia 25 I. Oprócz Jowisza Księżyc zakryje 7 I jeszcze Antaresa, najjaśniejszą gwiazdę Skorpiona, ale zjawisko będzie widoczne w Kanadzie i na Alasce.

T. K.

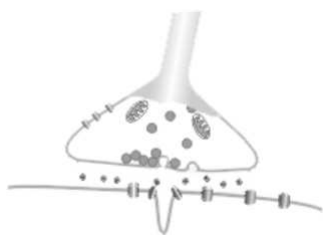
Jak działa neuron?

W poprzednich numerach pisaliśmy, jak informację mogą przetwarzać pojedyncze cząsteczki chemiczne (białka) czy ich zespoły (systemy regulacji genów). Przyszedł czas omówić całe komórki. Które komórki bardziej się nadają do omówienia tych kwestii od komórek nerwowych? Cóż, w istocie ich działanie to zaledwie najprostszy przykład przetwarzania informacji przez komórki. Ciało neuronu tworzy wiele wypustek, z których jedna, przesyłająca sygnał, nazywana jest aksonem, pozostałe zaś, odbierające sygnały, dendrytami.



Neuron

Komórka jest otoczona błoną, która jest dobrym izolatorem elektrycznym. Neuron aktywnie utrzymuje różnicę potencjałów pomiędzy swoim środkiem a powierzchnią – po prostu stale wypompowuje kationy sodu na zewnątrz. Co prawda, w ich miejsce dość swobodnie napływają kationy potasowe, jednak nie mogą w pełni zrównoważyć potencjału powstałego w wyniku wypompowywania jonów sodowych, bowiem ich napływ ogranicza powstająca różnica ich stężeń pomiędzy wnętrzem komórki a jej otoczeniem, czyli nierównowaga osmotyczna. Błona komórkowa jest więc w istocie izolatorem miniaturowego kondensatora. Różnica potencjałów na błonie zależy od subtelnej równowagi pomiędzy stężeniem kationów sodowych, których wewnątrz komórki jest mało, a kationów potasowych, których jest tam nadmiar w stosunku do otoczenia. Aniony zazwyczaj niemal nie przenikają przez błonę. Komórka nerwowa odbiera sygnały od innych komórek nerwowych w miejscach zwanych synapsami. Są to niewielkie obszary, w których błony dwóch sąsiadujących ze sobą komórek są blisko siebie.

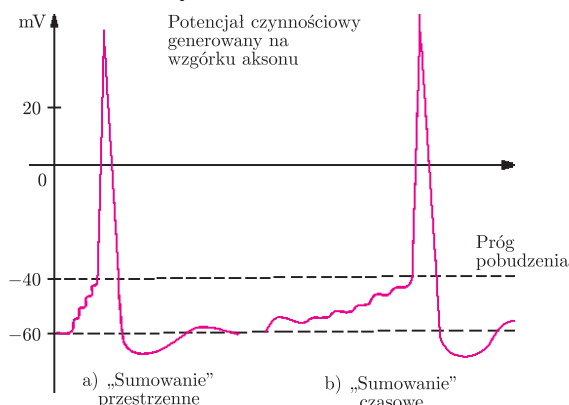


Synapsa

Komórka, żeby przekazać sygnał, wydziela pomiędzy błony porcje zawierające np. po kilka tysięcy cząsteczek substancji chemicznych – neurotransmiterów. Cząsteczki te dyfundują poprzez szczelinę synaptyczną w czasie około 2 ms i łączą się z białkami zakotwiczonymi w błonie komórki docelowej. W najprostszym przypadku białka te są tzw. kanałami jonowymi, które po aktywacji przez neurotransmiter wybiórczo przepuszczają jony sodu do wnętrza komórki.

Powoduje to zmniejszenie różnicy potencjałów pomiędzy wewnętrzną a zewnętrzną stroną błony neuronu.

Aktywacja jednej synapsy powoduje tylko nieznaczną zmianę potencjału błonowego, ale działanie wielu synaps się sumuje. Gdy osiągnie pewną wartość progową, otwierają się zależne od napięcia kanały sodowe, które przepuszczają te jony do wnętrza komórki, czyli wzmacniają aktywację. Powoduje to otwieranie kolejnych, coraz dalej położonych kanałów sodowych. W efekcie pojawia się fala zaniku różnicy potencjałów i fala otwierających się kanałów sodowych przesuująca się po błonie komórkowej od miejsca aktywacji do końca komórki, którym najczęściej jest akson. Kanały sodowe po krótkotrwałym otwarciu, zainicjowanym spadkiem różnicy potencjałów na błonie – zamykają się i przez kilka ms stają się niewrażliwe na pobudzenie. Z pewnym opóźnieniem otwierają się kanały potasowe, które przepuszczają jony na zewnątrz komórki. Dzięki nim dochodzi do odbudowania spoczynkowego potencjału w czasie rzędu 1 ms. Ponieważ kanały sodowe są niewrażliwe na pobudzenie jeszcze przez jakiś czas, sygnał nerwowy może rozchodzić się tylko w jednym kierunku od miejsca pobudzenia na zewnątrz.



Wykres potencjału czynnościowego

Gdy fala pobudzenia (tzw. potencjał czynnościowy) dojdzie do synaps znajdujących się w aksonie, powoduje wyrzucanie zawartości pęcherzyków z neurotransmiterem do szczeliny synaptycznej, czyli przekazanie sygnału do następnego neuronu. Inny rodzaj kanałów jonowych otwieranych po związaniu cząsteczki neurotransmitera (np. kwasu gamma amino masłowego – GABA) otwiera się dla anionów chlorkowych, które buforują zmiany potencjału wywołane otwieraniem się kanałów sodowych i zapobiegają powstawaniu pobudzenia. Tak więc są też receptory hamujące aktywność neuronu. Cóż może więc pojedynczy neuron? Może sumować pobudzenia przychodzące od innych neuronów i pobudzać następne. Może hamować inne neurony. Dzięki temu z kilku komórek nerwowych można zbudować każdą bramkę logiczną. Na przykład neuron, który łatwo ulega pobudzeniu przez jeden neuron wejściowy, może realizować funkcję OR. Taki, który wymaga pobudzenia przez dwa neurony wejściowe – będzie realizował funkcję AND. Aby zrealizować funkcję XOR, potrzebnych jest już kilka neuronów: neuron hamujący realizujący funkcję AND oraz neuron pobudzający realizujący funkcję OR. Czyli mamy wszystko co potrzeba, aby wykonywać wszystkie operacje, które realizują bramki logiczne. Czy to wszystko, co potrafią komórki? Skądże! Ale o tym następnym razem...

Anna LORENC, Jarek BRYK