

SPIS TREŚCI NUMERU 12 (367)

Gwiazda Betlejemską
Jadwiga Donatowicz

Arytmetyka supełków
Agnieszka Janiak-Osajca
Zdzisław Pogoda

Twierdzenie Napoleona
 – uogólnienie
Joanna Jaszewska

Zadania

Duża Mała Delta:

Oczywiste?

Kardioida jest wszystkim
 – proszę spojrzeć

Co dały zaćmienia Słońca?

Słupy na niebie

Z nożyczkami na Pitagorasa

Równanie Pitagorasa

Aktualności

Czy łatwiej uciec
 przed słońcem, czy
 przed nieskończonością?
Jacek Jasiak

XXVI Konkurs Uczniowskich
 Prac z Matematyki

XXI Ogólnopolski Sejmik
 Matematyków

Klub 44

Patrz w niebo

Grudzień

Kącik biologiczny

str. 1

str. 3

str. 7

str. 8

str. 9

str.10

str.14

str.14

str.15

str.16

str.16

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na II kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

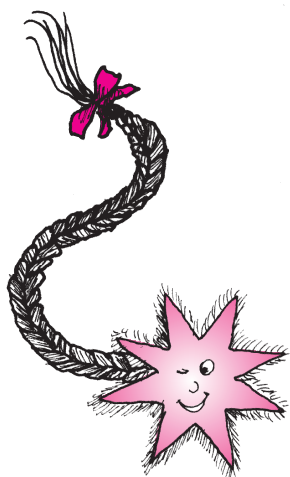
Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Trudne jest życie pirata

Gwiazda Betlejemka

Jadwiga DONATOWICZ



I znów niedługo będziemy świętować – być może najpiękniejsze święto roku: Boże Narodzenie, narodzenie Chrystusa. W ewangelii według świętego Mateusza jest mowa o „gwieździe”, która mędrcom ze wschodu wskazywała drogę do Betlejem. Chyba rzadko myśli się, jakie astronomiczne zjawisko związane było z tym przekazem w ewangelii. Czy gwiazda ta istniała naprawdę? Czy rzeczywiście pełniła przypisywaną jej funkcję drogowskazu? A może po prostu wszystko to jest jedynie pobożną legendą?

W czasie moich studiów astronomii w Wiedniu miałam szczęście poznać prof. Konradina Ferrari d’Ochieppo z Innsbrucku, astronoma, który znaczną część swojego życia poświęcił badaniom archeo-astronomicznym dotyczącym „Gwiazdy Betlejemskiej”. Swoimi pracami przyczynił się do rozszyfrowania babilońskich glinianych tabliczek kalendarzowych i obliczeniowych z zapiskami w piśmie klinowym, jak też do ich astronomicznej interpretacji. Poniżej staram się streścić tok rozważań prof. d’Ochieppo przedstawiony znacznie szerzej w napisanej przez niego książce: „*Der Stern der Weisen*” – *Geschichte oder Legende?* („*Gwiazda Mędrców*” – *historia czy legenda?*). Choć gwiazdy dla astronomów stanowią przede wszystkim przedmiot badań, to z pewnością zrozumiałe będzie, że zadali sobie pytanie, czy dla Gwiazdy Betlejemskiej – poza jej znaczeniem religijnym – istnieje również naturalne wyjaśnienie, czyli po prostu – co to było?

Pierwszy krok w kierunku obiektywnej interpretacji musi polegać na ustaleniu, w jakim czasie należałoby poszukiwać na niebie tak rzucającego się w oczy zjawiska. Konwencję zliczania lat od daty narodzin Chrystusa wprowadził w roku 525 (czyli 1278 od założenia Rzymu) uczony mnich Dionisius Exiguus. Przy tej okazji – niestety – popełnił błąd, mianowicie datę urodzin Chrystusa określił na 7 lat za późno. W zasadzie powinniśmy więc do naszego systemu kalendarzowego dodać 7 lat, przez co np. mistyczny krok w trzecie tysiąclecie mielibyśmy właściwie od ponad 10 lat już za sobą. Dla astronomicznych rozważań oznacza to konkretnie, że poszukiwane wydarzenie miało miejsce w 7 r. przed naszą erą.

Ruchy ciał niebieskich są obecnie tak dobrze znane, że nie jest żadnym problemem odtworzyć ich pozycje, sięgając nawet do kilku tysięcy lat wstecz. Mimo to zawsze bardzo pomocne jest istnienie autentycznych przekazów z danego okresu. We wspomnianej ewangelii według św. Mateusza mowa jest o „magach ze wschodu”. Jedynym w owym czasie znaczącym centrum „gwiazdoznawstwa” na wschód od Palestyny był Babilon. Co do „magów”, to chodziło najprawdopodobniej o uczonych kapłanów świątynnych z Babilonu, którym ruchy gwiazd, a szczególnie „gwiazd wędrownych”, czyli planet, dobrze były znane.

I rzeczywiście, istnieje znaczna liczba zapisków w piśmie klinowym na tabliczkach glinianych z tego okresu, umożliwiających wgląd w późnobabilońską astronomię. Należy jednak przy tym uwzględnić, że ówczesni znawcy nieba nie byli naukowcami we współczesnym tego słowa znaczeniu. Tamtejszy świat nacechowany był bardziej mistyczno-magicznym postrzeganiem rzeczywistości. Gwiazdy były bóstwami i demonami zarazem,

a ich bieg obserwowano nie dlatego, by zgłębić prawa rządzące ich ruchem, ale by móc przewidzieć ich wpływ na człowieka. Szczególne znaczenie ma tutaj hierarchia, którą przypisywano planetom – bogom. Na pierwszym miejscu królował Jowisz. Jego białe-srebrne światło i majestatyczna pozorna wędrówka po niebieskim zodiaku w 12-letnim cyklu nadały mu dominującą pozycję na nieboskłonie. Późnobabilońscy „gwiazdoznawcy” czcili w nim Marduka – ich najwyższe bóstwo. Gliniane tabliczki przekazują zapis o niezwykle rzadkim, potrójnym spotkaniu Jowisza i Saturna, i to właśnie w roku 7 (według dzisiejszego kalendarza) przed narodzeniem Chrystusa. Jest to właśnie dokładnie poszukiwany przez nas okres.

Jakie astrologiczne znaczenie przypisywane było Saturnowi? Saturn uważany był za planetę narodu żydowskiego, co również wynika z przekazu w słynnych zwojach pism znalezionych w Qumran. Poza – typowym wówczas – przyporządkowaniem planet narodom znaki zodiaku znajdowały swoje odpowiedniki w poszczególnych krajach. I tak np. Ryby stanowiły symbol Palestyny.

Spróbujmy podsumować. Potrójne spotkanie Jowisza z Saturnem (tzw. wielka koniunkcja) było absolutnie rzadkim i o wyjątkowo dużym znaczeniu wydarzeniem dla – mistycyzmem i magią naznaczonego – ówczesnego sposobu myślenia. Do tego dochodzi fakt, że Jowisz, najwyższe bóstwo Babilonu, spotyka Saturna, kosmicznego przedstawiciela narodu żydowskiego, i to akurat w znaku Ryb, będącym symbolem Palestyny. Jest wysoce prawdopodobne, że takie zjawisko mogło być interpretowane jako wskazówka narodzin króla żydowskiego w Jerozolimie. I faktycznie. Konstelacja ta była tak rzadka i dla magów tak przekonująca,

że udali się w daleką, pełną trudów drogę, aby nowo narodzonemu Królowi złożyć należny pokłon.

Okoliczność, że owe orientalne odwiedziny wywołały u Heroda niemałe zdziwienie – jako że nikt o nowo narodzonym królu ani też o „gwieździe” nic nie wiedział – stanowi również swego rodzaju poszlakę, że nie mogło tu chodzić o kometę, której rzucające się w oczy pojawienie, z typowym warkoczem, nie uszłoby jego uwagi. Przede wszystkim jednak komety zawsze traktowane były jako zwiastuny nieszczęścia. Nigdy więc nie mogły być zapowiedzią radosnego wydarzenia, jakim niewątpliwie były narodziny króla! Podobnie i magowie nie byli prostymi ludźmi, którzy – przestraszeni nagłym zjawiskiem na niebie, jakim są komety – gnali do Judei, by szukać zaraz nowo narodzonego króla-zbawiciela. Nie. Byli raczej wszechstronnie wykształconymi, poważnymi poszukiwaczami prawdy, wierzącymi, że poznali pewne zależności między boskimi znakami na niebie a wydarzeniami na Ziemi.

Jeśli chodzi o czas widoczności wielkiej koniunkcji Jowisza i Saturna, to w zapiskach babilońskich odnajdujemy całkiem precyzyjne informacje: podczas gdy Jowisz po okresie swojej niewidoczności spowodowanej bliskością Słońca, 15 marca (7 r. przed Chr.) pojawił się ponownie na porannym niebie (tzw. wczesny wschód), przyszło słabszemu co do jasności Saturnowi poczekać na podobne warunki aż do 4 kwietnia tegoż roku. (W źródłach oryginalnych daty te podane są naturalnie w terminologii i w systemie kalendarza babilońskiego.) W czasie pierwszej widoczności na porannym niebie obie planety dzieliło kilka dobrych stopni. Odległość ta jednak zmniejszała się szybko i z początkiem pętli opozycyjnej, zakreślanej na niebie przez Jowisza, wynosiła już tylko około 2°.

W tabliczkach kalendarzowych szczególnie zaznaczona jest pora tuż przed właściwym położeniem opozycyjnym, kiedy to 15 września (7 r. przed Chr.) obie planety równocześnie weszły na wieczornym niebie (tzw. wschód wieczorny), będąc oddalonymi od siebie zaledwie o 1°. Odległość ta zmniejszyła się następnie aż do kilku zaledwie sekund. Najprawdopodobniej w tym właśnie czasie magowie rozpoczęli swoją podróż, gdyż teraz ta niezwykła konstelacja widoczna była przez całą noc. Według tego można szacować, że ich przybycie do Jerozolimy mogło mieć miejsce w dwa miesiące później, a więc gdzieś około połowy listopada. Kiedy więc magowie zawitali do Heroda, ten wypytał uczonych w piśmie i kapłanów, gdzie ów rzekomy Król Żydów miał się narodzić. To od niego dopiero dowiedzieli się, że to „w Betlejem stać się miało”. Jeszcze tego samego wieczoru opuścili Jerozolimę i udali się w drogę do miasteczka położonego niecałe 10 km na południe. Wkrótce po zachodzie Słońca ujrzeli Jowisza i Saturna, ich „gwiazdę”, niecałe 50° nad horyzontem, niemal dokładnie w kierunku drogi, którą podróżowali. Wydawało się, że gwiazda pokazywała im drogę. Co więcej, wrażenie to przypuszczalnie wzmocnił widok światła zodiakalnego. Jest to poświata

rozciągająca się wzdłuż ekliptyki, będąca efektem rozpraszania światła słonecznego przez pył międzyplanetarny skupiony właśnie w płaszczyźnie ekliptyki. Owego wieczoru „podwójna gwiazda” ukazała się na szczycie słupa światła zodiakalnego, czyli praktycznie nad celem podróży magów. Ponieważ światło zodiakalne można dostrzec tylko pod nieobecność jasnego Księżyca, data przybycia magów do Betlejem daje się ustalić na okolice 12 listopada.

Pozorna sprzeczność polegająca na tym, że mowa jest o dwu gwiazdach (właściwie planetach), podczas gdy w przekazie św. Mateusza wymieniona jest tylko jedna, daje się uzasadnić następująco. Pomijając fakt, że dwa bardzo blisko (na linii widzenia) położone ciała niebieskie stwarzać mogą optycznie efekt jednego obiektu, wymienić należy istotny w tym kontekście dokument historyczny, datujący się na początek IV stulecia (najwyraźniej odpis znacznie starszego dokumentu, zagubionego oryginału), znany pod nazwą *Papyrus – Codex Bodmer V*, który to zwątpienie usuwa. W greckim tekście tego papirusu można przeczytać: „... ujrzeli gwiazdy i podążyli za nimi...”. Mamy tutaj nawet dwukrotny przekaz liczby mnogiej.

Jak więc doszło do tego, że w naszej „ikonografii żłóbkowej” zagnieździła się kometa? Najbardziej znana spośród komet – kometa Halleya, której trajektoria i okres obiegu są dobrze znane i wystarczająco udokumentowane, gwiazdą betlejemską być nie mogła, ponieważ w tym czasie – pominąwszy już jej negatywne astrologiczne znaczenie – nie była widoczna. Twórcą żłóbkowej komety jest nikt inny jak słynny malarz Giotto di Bondone, który w jednym z fresków padewskiej kaplicy Capella degli Scroveni al Arena uwiecznił temat narodzin Chrystusa z kometa jako gwiazdą betlejemską. W roku 1301 Giotto jednak rzeczywiście obserwował pojawienie się znacznej komety i będąc pod wpływem tego zjawiska przeniósł je na wspomniany fresk. Obliczenia jednak potwierdziły, że była to słynna kometa Halleya. Oczywiście wówczas nie nosiła jeszcze tej nazwy. Edmund Halley obliczył jej orbitę dopiero w 1695 r., co z kolei przyczyniło się do późniejszego nadania jego imienia tej komecie.

W ten jednak sposób komety pozostały w naszych malowniczych żłóbkach i szopkach, czyniąc – z estetycznego punktu widzenia – wrażenie bardziej atrakcyjne, aniżeli jakaś koniunkcja planet. Jednak – w swej nadzwyczajnej konstelacji – ta ostatnia właśnie stała się dla ówczesnych „gwiazdoznawców” powodem wystarczającym, aby udać się na poszukiwanie nowo narodzonego króla. Kometa by tego spowodować nie mogła. Dlatego – kończąc – pozostaje jeszcze tylko zastanowić się, czy nauka wreszcie znalazła naturalne wyjaśnienie tamtego zjawiska i czy magowie – z dzisiejszego punktu widzenia – dzięki splotowi szczęśliwych przypadków odnaleźli drogę do Betlejem, czy też o wiele bardziej było to boskie zrządzenie, które wskazało im drogę do Mesjasza. A może po prostu nie ma tu sprzeczności?...

Arytmetyka supłków

Agnieszka JANIĄK-OSAJCA

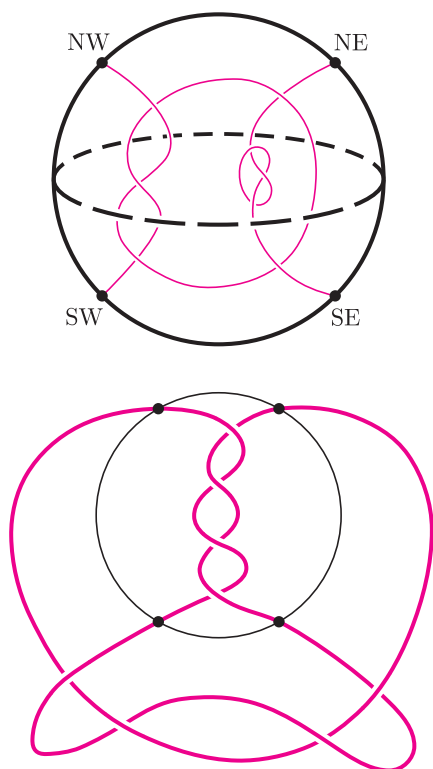
Zdzisław POGODA

W potocznym rozumieniu słowa „węzeł” i „supł” są synonimami i kojarzą się z zaplątanym sznurkiem.

W matematyce oba pojęcia są blisko ze sobą związane, jednak nie są identyczne. Spróbujmy bliżej przyjrzeć się supłom, tym bardziej że niektóre z nich mają ciekawą interpretację oraz zaskakujące zastosowania.

Przypomnijmy najpierw, że węzeł to homeomorficzny obraz okręgu w przestrzeni. Węzły otrzymujemy więc poprzez umieszczenie okręgu w przestrzeni na różne sposoby. Używając interpretacji sznurkowej: węzeł powstaje, gdy kawałek sznurka zapleciemy w dowolny sposób, a następnie skleimy jego końce. Kilka węzłów tworzy **splot**, a poszczególne węzły nazywane są jego **ogniwami**. Sam węzeł zatem jest szczególnym przypadkiem splotu.

Supł natomiast można przedstawić jako dwa zaplecione kawałki sznurka. Umieszcza się je zazwyczaj w sferze tak, że końce leżą na jednym z wielkich okręgów na powierzchni sfery. Końce te oznaczają się jak w kompasie NE, SE, SW, NW.

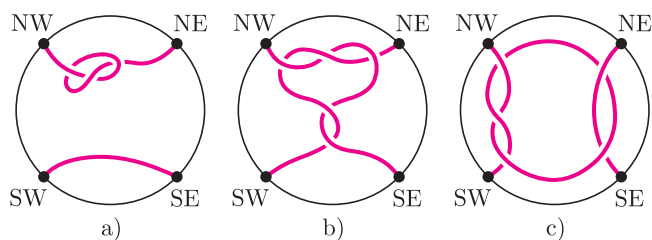


Rys. 1. Przedstawienie supła w sferze i w węźle.

Supły można traktować jak cegiełki, z których buduje się węzły. Dlatego znajomość własności supłów może być pomocna przy studiowaniu węzłów. Pomysł badania supłów pochodzi od Johna Conwaya. Podał on ciekawy sposób charakterystyki pewnej rodziny supłów nazywanych supłami wymiernymi.

Generalnie wyróżniamy trzy rodziny supłów:

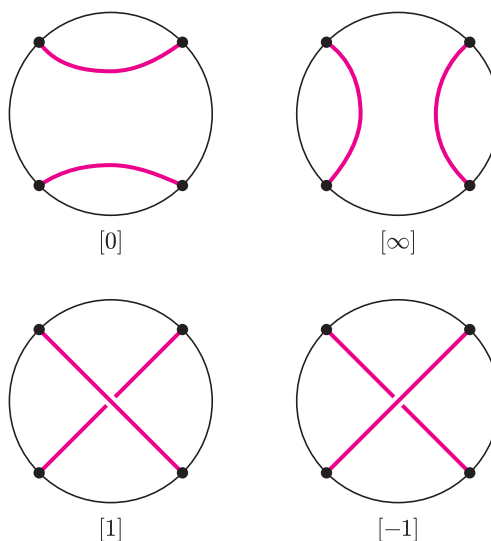
- **lokalnie zawężone** – gdy przynajmniej jeden ze sznurków jest lokalnie zawężony (rys. a),
- **supły wymierne** powstałe przez skończoną liczbę skręceń dwóch sąsiednich końców (rys. b) oraz
- pozostałe, nazywane czasem **prostymi** (rys. c).



Kiedy dwa supły uznajemy za identyczne? Ogólniej, dwa sploty uznajemy za identyczne albo równoważne, gdy jeden z drugiego można otrzymać za pomocą odpowiednich deformacji okręgów w przestrzeni, bez ich rozrywania i sklejanego. Należy tak rozplatać sznurki, żeby z jednego splotu (węzła) otrzymać drugi. Podobnie definiujemy równoważność supłów, zakładamy tylko dodatkowo, że nie wolno ruszać końców.

Jednym z najważniejszych problemów w teorii węzłów jest ich klasyfikacja. Istnieje wiele wymyślnych i skomplikowanych sposobów pozwalających badać węzły oraz sploty i stwierdzić, czy są równoważne, czy też nie. Zamiast badać same węzły i sploty, rozważa się ich diagramy, czyli odpowiednio regularne rzuty na płaszczyznę. Równoważność węzłów można zastąpić równoważnością ich diagramów. Analogicznie, w przypadku supłów wygodniej jest rozważać ich diagramy – tu rzutujemy na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny okręgu wielkiego, na którym umieszczone są końce supła.

Najprostsze są następujące supły, które będziemy oznaczać odpowiednio $[0]$, $[\infty]$, $[1]$ i $[-1]$. Pierwsze dwa z nich to tzw. supły trywialne.

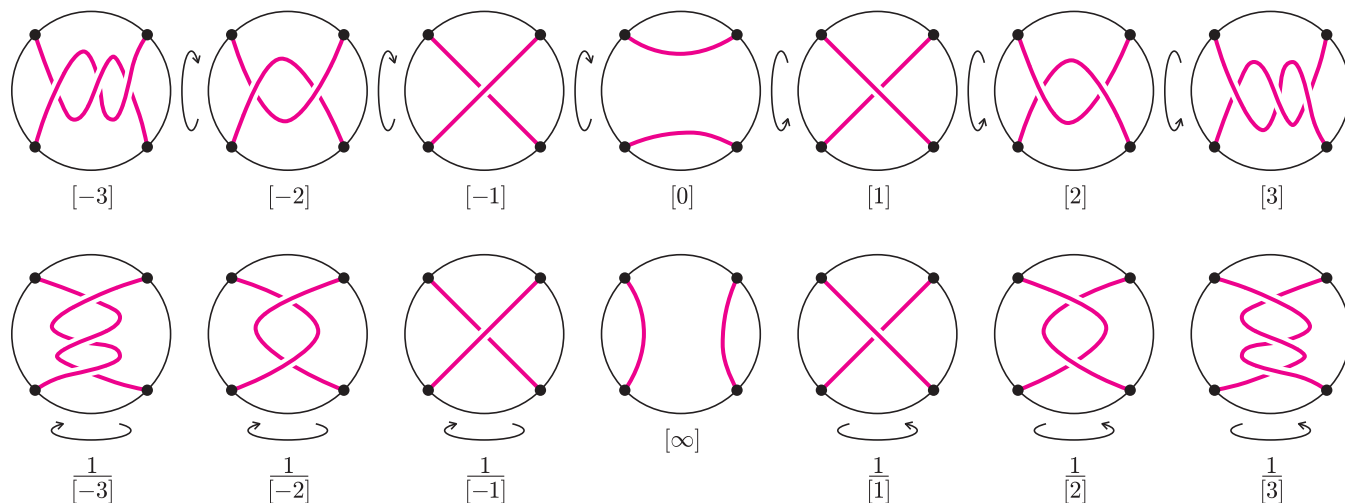


Rys. 3. Supły wyróżnione.

Supł oznaczony symbolem $[1]$ (skrzyżowanie typu „most”) powstaje z supła $[0]$ przez dodatni (tj. prawoskrętny) obrót o 180 stopni końców NE i SE, a supł $[-1]$ (skrzyżowanie typu „tunel”) przez obrót w przeciwnym kierunku. I ogólniej: supł $[n]$, gdzie n jest liczbą całkowitą, otrzymamy przez n -krotny odpowiedni obrót końców NE i SE. Są to supły wymierne skrócone tylko w poziomie.

Obracając n -krotnie końce SE i SW supła $[\infty]$, dostaniemy supł wymierny skrócony tylko w pionie, który będziemy oznaczać $\frac{1}{[n]}$ albo $[n]^{-1}$.

Supły $[n]$ i $[n]^{-1}$ nazwiemy **elementarnymi**, w szczególności supły wymierne $[n]$ nazywane są często **supłami całkowitymi**.

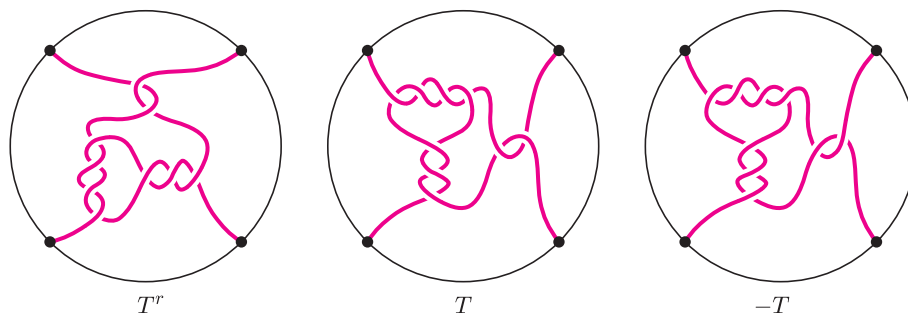


Rys. 4. Powstawanie supłów typu $[n]$ i $[n]^{-1}$.

Opiszemy teraz kilka operacji na supłach (dokładniej na ich diagramach), które są przydatne przy ich klasyfikacji.

Jeśli T jest supłem, to jego lustrzany obraz $-T$ powstaje z T przez zastąpienie skrzyżowań typu „most” skrzyżowaniami typu „tunel”. Symbolem T^r oznaczmy supł powstały z T przez jego obrót o 90 stopni przeciwie do wskazówek zegara.

Nawiązując konsekwentnie do oznaczeń supłów elementarnych, supł odwrotny do T definiujemy za pomocą zależności $\frac{1}{T} = T^{-1} = -T^r$. Widzimy, że supły $[n]$ i $\frac{1}{[n]}$ są wzajemnie odwrotne. Uzasadnienie mają w tej konwencji oznaczenia $[\infty] = [0]^{-1}$ i $[\infty]^{-1} = [0]$.



Rys. 5. Lustrzany obraz i obrót supła.



Rozwiązanie zadania M 1081.
Załóżmy, że liczby 2^{2004} oraz 5^{2004} mają odpowiednio a oraz b cyfr w układzie dziesiętnym. Szukamy wartości wyrażenia $a + b$. Mamy:

$$10^{a-1} < 2^{2004} < 10^a,$$

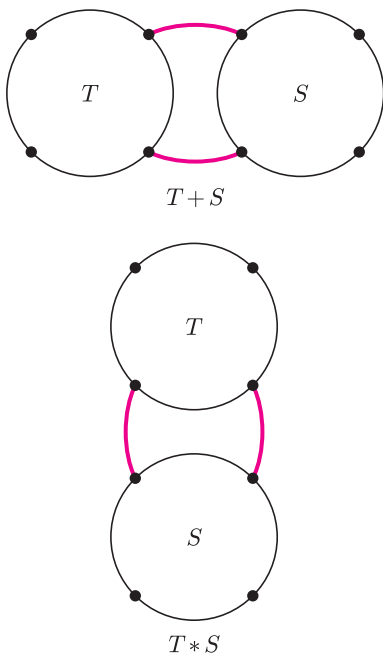
$$10^{b-1} < 5^{2004} < 10^b.$$

Mnożąc stronami uzyskane nierówności, otrzymujemy

$$10^{a+b-2} < 10^{2004} < 10^{a+b},$$

skąd $2004 = a + b - 1$. A zatem $a + b = 2005$.

Supły możemy dodawać i mnożyć. Suma $T + S$ powstaje z supłów T i S przez połączenie końców NE i SE supła T odpowiednio z końcami NW i SW supła S . Natomiast iloczyn $T * S$ tworzymy przez połączenie końców SW i SE supła T z końcami odpowiednio NW i NE supła S .



Rys. 6. Suma i iloczyn supłów.

Supły możemy też obracać w ten sposób, że koniec NE przejdzie na SE, a NW na SW – jest to taki poziomy „przewrót” – albo tak, że NW przejdzie na NE oraz SW na SE – tym razem „przewrót” w pionie. Natychmiast widać, że supły elementarne nie zmieniają się przy takich przekształceniach. Nieco trudniej natomiast dowodzi się (wykorzystując indukcję), że za pomocą „przewrotów” dowolny supł wymierny przekształcany jest na supł równoważny. Dzięki temu supły wymierne T i T^{-1} są równoważne i, żeby otrzymać z T supł T^{-1} , możemy obracać $-T$ zgodnie ze wskazówkami zegara lub przeciwnie.

Wykorzystując opisane operacje, można udowodnić, że każdy supł wymierny da się skonstruować za pomocą skręceń wykonywanych tylko na końcach z prawej strony (NE, SE) na przemian ze skręceniami na końcach dolnych (SW, SE) – w samej definicji nie wyróżnia się, które końce i w jakiej kolejności należy skręcać. Takie przedstawienie supła wymiernego nazywamy jego **postacią standardową** (formą) **standardową**.

Każdy supł wymierny w postaci standardowej może być więc otrzymany z supła $[0]$ lub $[\infty]$ za pomocą odpowiedniego ciągu dodawań supłów $[1]$ lub $[-1]$ i mnożeń przez te supły.

Zauważmy, że prawdziwa jest zależność:

Jeśli T jest supłem wymiernym, to

$$(1) \quad T * \frac{1}{[n]} = \frac{1}{[n] + \frac{1}{T}}.$$

Wynika to ze spostrzeżenia, że obrót o 90° supła

$$T * \frac{1}{[n]}$$

prowadzi do supła

$$-[n] - \frac{1}{T},$$

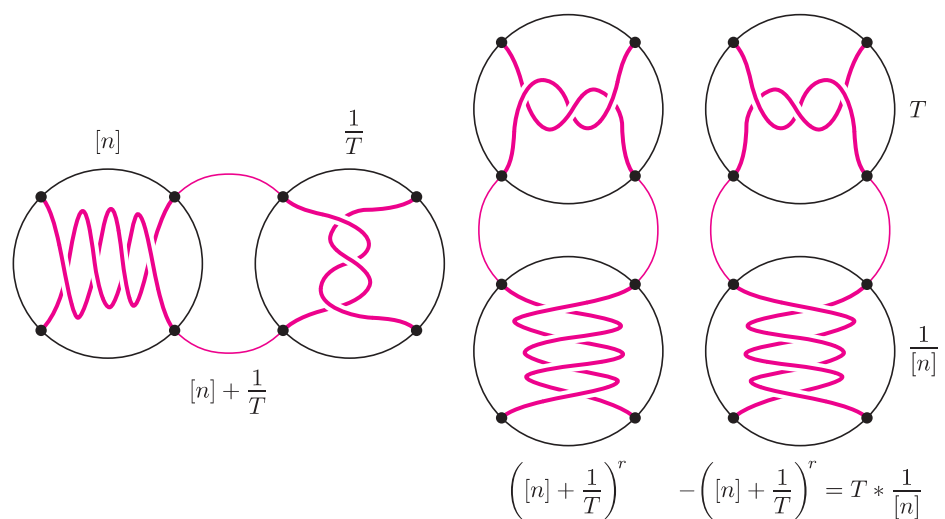
czyli

$$\left(T * \frac{1}{[n]}\right)^r = -[n] - \frac{1}{T},$$

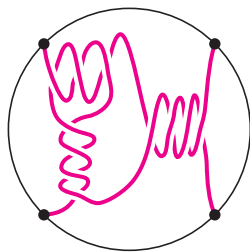
a stąd i z definicji supła odwrotnego

$$\left(T * \frac{1}{[n]}\right)^{-1} = [n] + \frac{1}{T}$$

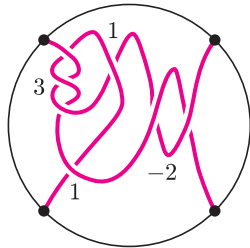
(pamiętajmy o „przewrotach”). Jeśli teraz zastosujemy jeszcze raz operację odwracania, to dostaniemy poszukiwaną zależność.



Rys. 7. Ilustracja uzasadnienia wzoru (1).

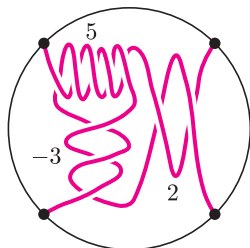


$$[3] * \frac{1}{[4]} + [-4]$$

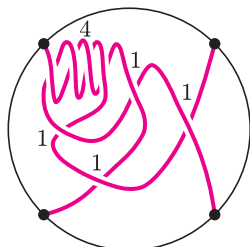


$$[[-2], [1], [1], [3]]$$

Rys. 8. Przykłady.



$$\frac{23}{14} = 2 + \frac{1}{-3 + \frac{1}{5}}$$



$$\frac{23}{14} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

Rys. 9. Supły wymierne równoważne.

Pozwala to konstruować supły wymierne za pomocą ciągu dodawań supłów elementarnych i operacji odwracania. Więcej, każdy supły wymierne można sprowadzić do postaci standardowej wyglądającej następująco:

$$(*) \quad [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}}$$

gdzie $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Krócej piszemy

$$[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]].$$

W szczególności supły

$$[k] * \frac{1}{[m]} + [n]$$

przyjmuje postać

$$[n] + \frac{1}{[m] + \frac{1}{[k]}}$$

Naturalne więc wydaje się przypisanie supłowi wymiernemu T , który ma postać formalnego ułamka łańcuchowego, arytmetycznego ułamka łańcuchowego zbudowanego z odpowiednich liczb skrećeń. Supłowi postaci $(*)$ przyporządkowujemy zatem ułamek łańcuchowy

$$(**) \quad a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$$

Nazywamy go ułamkiem danego supła wymiernego T i oznaczamy $F(T)$. Ułamek $(**)$ zapisujemy w skrócie

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p}{q},$$

gdzie p i q są względnie pierwsze.

Prawdziwe są następujące zależności:

$$\begin{aligned} F(T + [\pm 1]) &= F(T) \pm 1, \\ F\left(\frac{1}{T}\right) &= \frac{1}{F(T)}, \\ F(-T) &= -F(T). \end{aligned}$$

Proponujemy, żeby Czytelnik spróbował uzasadnić te wzory.

Niestety, supły T nie wyznaczają jednoznacznie liczb a_1, a_2, \dots, a_n . Supły równoważne mogą być reprezentowane przez różne ciągi liczb. Różne ciągi mogą jednak generować te same ułamki i prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Dwa supły wymierne T i T' są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne ułamki, czyli gdy $F(T) = F(T')$.*

Dowód twierdzenia polega na przedstawieniu supłów w postaci ułamków łańcuchowych, wykorzystaniu arytmetycznych własności samych ułamków oraz hipotezy (udowodnionej w 1993 roku), nazywanej hipotezą Taita, wiążącej równoważność węzłów (i supłów) z pewnymi prostymi operacjami niezmiennymi postaci ułamkowej supłów.

Tak więc supły wymierne mogą być jednoznacznie opisane przez liczby wymierne (rozszerzone o dodatkowy element ∞). Supły te ze względu na swą prostotę opisu (a także klasyfikacji) chętnie są wykorzystywane do modelowania różnych sytuacji w matematyce i w innych dziedzinach. W teorii węzłów są ściśle związane z tak zwanymi węzłami z dwoma mostami, a w biologii molekularnej służą do opisu pewnych ważnych zjawisk dotyczących mechanizmów rekombinacji DNA. Są to jednak tematy na inne opowiadania.

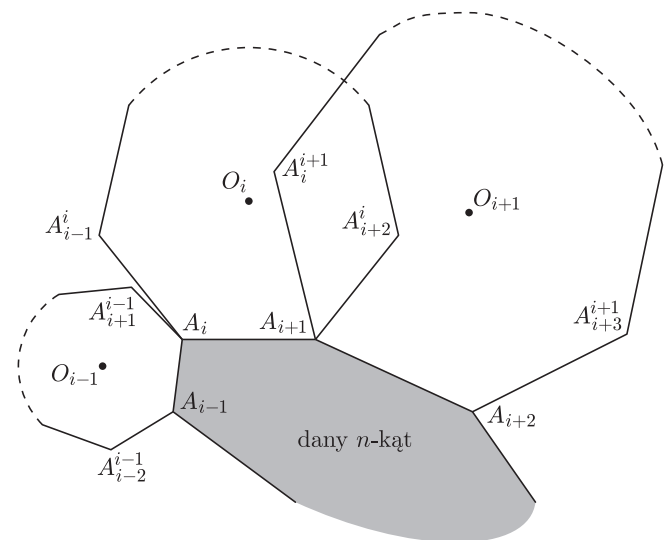
W *Delcie* nr 361 (z czerwca 2004 r.), w artykule *Twierdzenie Napoleona*, sformułowano bez dowodu następujące uogólnienie tytułowego faktu.

Twierdzenie. Środki n -kątów foremnych zbudowanych na kolejnych bokach pewnego n -kąta W (wszystkie do wewnątrz lub wszystkie na zewnątrz) są kolejnymi wierzchołkami n -kąta foremnego wtedy i tylko wtedy, gdy n -kąt W jest afinicznie foremny.

Przekształcenia afinicznie zachowują proste, równoległość i stosunki długości odcinków równoległych. Wielokąt *afinicznie foremny* to taki, który jest obrazem wielokąta foremnego w jakimś przekształceniu afinicznym.

Oto **geometryczny dowód** (wersja zewnętrzna, w wersji wewnętrznej i dla wielokątów zdegenerowanych dowód jest analogiczny).

Udowodnimy najpierw implikację w jedną stronę. Niech dany będzie n -kąt afinicznie foremny o wierzchołkach $A_1 A_2 \dots A_n$. Na każdym boku $A_i A_{i+1}$ budujemy n -kąt foremny o środku O_i i wierzchołkach $A_1^i A_2^i \dots A_{i-1}^i A_i A_{i+1} A_{i+2}^i \dots A_n^i$ (wszystkie indeksy zapisujemy zawsze modulo n). Wykażemy, że tak zbudowany n -kąt $O_1 \dots O_n$ jest foremny.



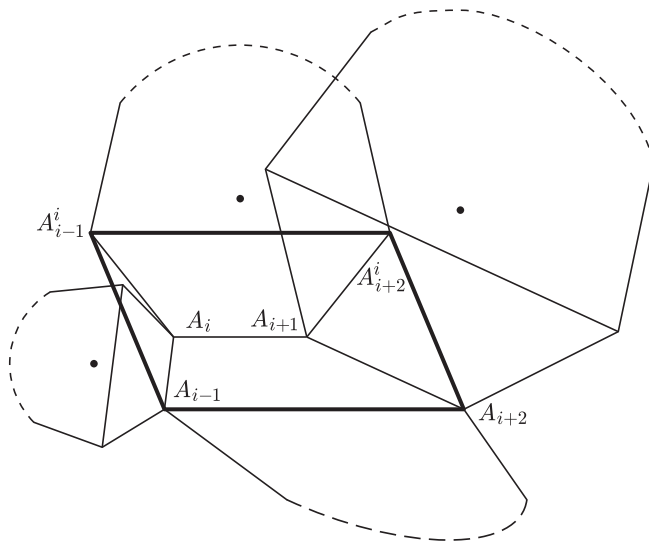
Rys. 1

Oznaczmy przez k stosunek długości boku n -kąta foremnego do długości najbliższej równoległej do niego przekątnej (w przypadku $n = 4$ przyjmujemy za tę „przekątną” przeciwległy bok, dla $n = 3$ stałą k nie definiujemy).

Z przypominanych na początku własności przekształceń afinicznych wynika, że w naszym n -kącie dla dowolnego i bok $A_i A_{i+1}$ jest równoległy do odcinka $A_{i-1} A_{i+2}$ oraz zachodzi

$$\frac{|A_i A_{i+1}|}{|A_{i-1} A_{i+2}|} = k.$$

Stąd dla każdego i czworokąt $A_{i-1} A_{i+2} A_{i+2}^i A_{i-1}^i$ jest równoległobokiem (dla $n = 3$ równoległobok ten jest zdegenerowany do odcinka, bo $i - 1 = i + 2 \pmod{3}$).

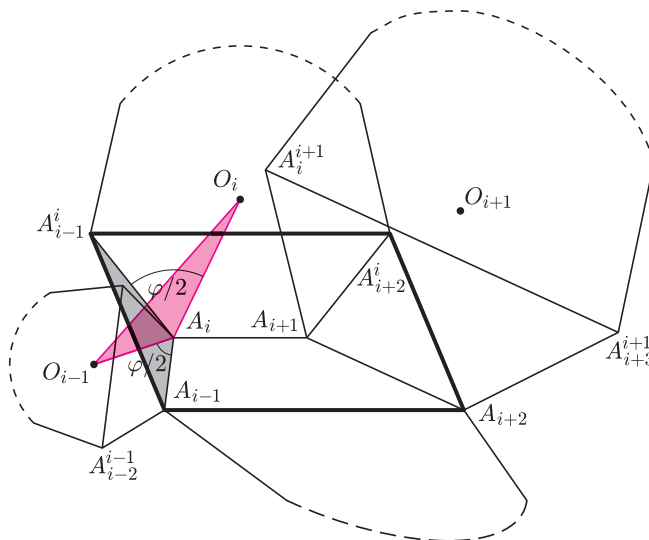


Rys. 2

Aby wykazać, że n -kąt $O_1 O_2 \dots O_n$ jest foremny, wystarczy udowodnić, że dla dowolnego i odcinki $O_{i-1} O_i$ i $O_i O_{i+1}$ są równej długości oraz tworzą odpowiedni kąt φ (gdzie $\varphi = \frac{n-2}{n}\pi$ jest kątem wewnętrznym n -kąta foremnego).

Przekształcamy trójkąt $A_i A_{i-1} A_{i-1}^i$ na trójkąt $A_i O_{i-1} O_i$ „kręcąc i zmieniając rozmiar” w następujący sposób:

1. obracamy wokół punktu A_i o kąt $\frac{\varphi}{2}$, przy sytuacji jak na rys. 3 – zegarowo,
2. stosujemy jednokładność o środku w punkcie A_i i o skali l równej stosunkowi długości odcinka łączącego wierzchołek ze środkiem n -kąta foremnego do długości jego boku.



Rys. 3

Obrazem odcinka $A_{i-1} A_{i-1}^i$ jest wtedy odcinek $O_{i-1} O_i$.

Analogicznie przekształcamy trójkąt $A_{i+1} A_{i+2} A_{i+2}^i$ na trójkąt $A_{i+1} O_{i+1} O_i$, obracając wokół punktu A_{i+1}

o ten sam kąt, ale w przeciwnym kierunku oraz stosując jednokładność o środku w punkcie A_{i+1} i o tej samej skali l . Obrazem odcinka $A_{i+2}A_{i+2}^i$ jest odcinek $O_{i+1}O_i$.

Przypomnijmy, że czworokąt $A_{i-1}A_{i+2}A_{i+2}^iA_{i-1}^i$ jest równoległobokiem, czyli odcinki $A_{i-1}A_{i-1}^i$ i $A_{i+2}A_{i+2}^i$ są równej długości i równoległe. Wiemy, że ich obrazami przy obrotach o kąty $\frac{\varphi}{2}$ w przeciwnych kierunkach, złożonych z zastosowaniem jednokładności o tej samej skali, są odcinki $O_{i-1}O_i$ oraz $O_{i+1}O_i$. Wobec tego $|O_{i-1}O_i| = |O_{i+1}O_i|$ oraz odpowiedni kąt między tymi odcinkami jest równy $2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi$. Są one zatem kolejnymi bokami n -kąta foremnego. To właśnie chcieliśmy wykazać.

Udowodnimy teraz implikację w drugą stronę.

Założmy, że na bokach pewnego n -kąta zbudowano na zewnątrz n -kąty foremne, których kolejne środki tworzą n -kąć foremny. Wtedy, odwracając rozumowanie

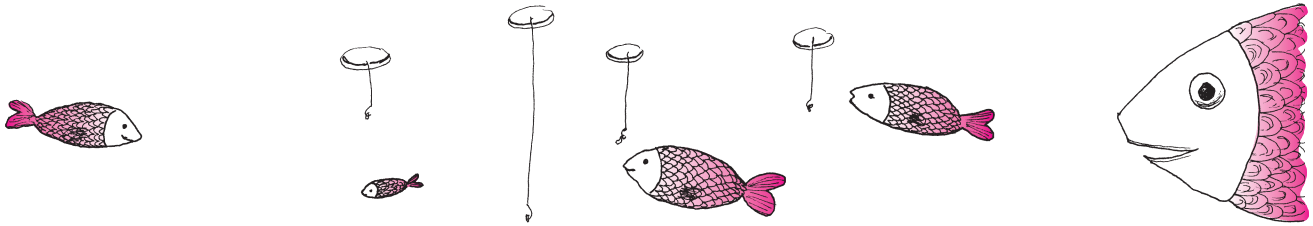
z powyższego dowodu, otrzymujemy wniosek, że dla każdego i odcinki A_iA_{i+1} i $A_{i-1}A_{i+2}$ są równoległe oraz

$$\frac{|A_iA_{i+1}|}{|A_{i-1}A_{i+2}|} = k.$$

Weźmy przekształcenie afiniczne przeprowadzające wierzchołki A_1, A_2, A_3 naszego n -kąta na kolejne wierzchołki pewnego n -kąta foremnego W .

Dla dowolnych dwóch trójkątów istnieje przekształcenie afiniczne przeprowadzające jeden z nich na drugi.

To przekształcenie ma miłą własność: obrazem punktu A_4 jest „następny” wierzchołek n -kąta W (bo obrazem odcinka A_1A_4 jest odcinek równoległy do A_2A_3 i o odpowiedniej długości). Podobnie obrazami punktów A_5, \dots, A_n są kolejne wierzchołki n -kąta foremnego W , zatem wyjściowy n -kąć jest z nim afinicznie równoważny. To kończy dowód drugiej implikacji i całego twierdzenia.



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

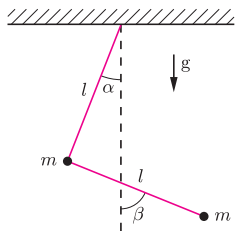
M 1081. Liczby 2^{2004} oraz 5^{2004} zapisano w układzie dziesiętnym, jedna za drugą, otrzymując jedną liczbę. Z ilu cyfr składa się powstała liczba?
Rozwiązanie na str. 4

M 1082. (Erdős) Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , którego najdłuższy bok ma długość d . Proste AP, BP, CP przecinają odpowiednio boki BC, CA, AB w punktach D, E, F (rys. 1). Wykazać, że $PD + PE + PF < d$.
Rozwiązanie na str. 13

M 1083. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej n największy wspólny dzielnik liczb $n^2 + 1$ oraz $(n + 1)^2 + 1$ jest równy 1 lub 5.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

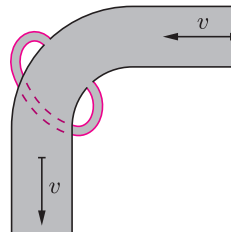
F 633. Dwie kulki o masie m umocowane są na nieważkiej i nierozciągliwej nitce.



Rys. 2

Układ wprowadzamy w ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową jak na rysunku. Dany jest kąt α , prędkość kątowa ω i długość l . Obliczyć kąt β .
Rozwiązanie na str. 16

F 634. Rura o przekroju kołowym zakręca pod kątem prostym.



Rys. 3

Przez rurę puszczamy wodę z dużą prędkością. Jednocześnie w miejscu zagięcia łączymy małą rurką wewnętrzną i zewnętrzną ścianę rury (rys. 3). Czy woda będzie (sama) płynąć przez rurkę? Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 12

Nagroda za kolorową swobodę asymptotyczną

Każdy człowiek jest asymptotycznie wolny. W każdej sytuacji może odnaleźć najlepsze wyjście. . . i właśnie je wybrać. Jedno i drugie jest bardzo trudne, często tylko teoretycznie możliwe. Tych, którzy asymptotycznie zbliżają się do ideału, zwykle się nazywać świętymi.

Przeciwieństwem tak rozumianej świętości jest poddanie się własnym słabościom, uwięzienie we własnych ograniczeniach.

Powyższa trywialna prawda ma zadziwiającą analogię w świecie oddziaływań fundamentalnych. Za jej odkrycie uważa się dwie prace [1, 2] opublikowane obok siebie w *Physical Review Letters*. Autorzy: David J. Gross, H. David Politzer i Frank Wilczek właśnie wybierają się, żeby odebrać tegoroczną Nagrodę Nobla z Fizyki.

Prace te zostały opublikowane w 1973 roku, gdy Politzer i Wilczek byli jeszcze studentami. Zapoczątkowały rozwój tzw. chromodynamiki kwantowej, która stanowi jeden z trzech filarów teorii oddziaływań fundamentalnych.

Chromodynamika kwantowa jest teorią oddziaływań silnych, które są odpowiedzialne za wiązanie nukleonów w jądrze atomowym. Teorii tych oddziaływań poszukiwano od lat trzydziestych XX wieku. Już wtedy Hideki Yukawa zauważył, że krótki zasięg sił jądrowych można wytłumaczyć, jeżeli przyjmie się, iż nośnikiem tych sił jest cząstka o masie około 15% masy nukleonów. W tym samym czasie rozwinięta została elektrodynamiczna kwantowa, która pozwalała na obliczenia z niespotykaną wcześniej dokładnością. W dodatku obliczenia te zgadzały się z obserwacjami. Elektrodynamiczna jest teorią z cechowaniem. Ten, nic niespecjalistom niemówiący termin, oznacza, że oddziaływanie w tej teorii „samo” pojawia się, jeżeli zapostuluje się swobodę wyboru fazy potencjału w każdym punkcie przestrzeni z osobna. Dopuszczenie takiej swobody powoduje, że do równań opisujących nieoddziałujące cząstki należy dopisać człony, które można zinterpretować jako opis przenoszących oddziaływanie fotonów. W teorii takiej pojawiają się jednak nieskończoności (patrz artykuł *Czy łatwiej uciec przed słońcem, czy przed nieskończonością?* w tym numerze). Okazuje się jednak, że te nieskończoności można systematycznie ukryć za pomocą procedury przeddefiniowania parametrów, nazywanej renormalizacją. Otrzymuje się przepis na prowadzenie rachunków, które zgadzają się z doświadczeniem do jednej miliardowej!

Sukces elektrodynamicznej kwantowej spowodował poszukiwanie podobnej teorii oddziaływań silnych. Wydawało się jednak, że taka teoria nie może być renormalizowalna, czyli nie można za jej pomocą prowadzić precyzyjnych rachunków. Po co komu taka teoria? Powody trudności były dwa. Wyniki doświadczeń wskazywały, że grupa cechowania dla oddziaływań silnych musi być bardziej skomplikowana, związana z istnieniem dwóch rodzajów ładunku. Taką grupą jest SU(2), ale jest ona grupą nieprzemianną. Drugą trudnością było przewidywanie istnienia nieobserwowanej bezmasowej cząstki, która powinna być nośnikiem takiego oddziaływania. W latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku okazało się, że wyjaśnienie obserwowanej wtedy

mnożości cząstek oddziałujących silnie wymagałoby rozszerzenia grupy cechowania do SU(3), czyli zapostulowania istnienia trzech rodzajów ładunków.

Zamiast teorii z cechowaniem, która mogłaby opisywać oddziaływania silne, pojawił się w latach sześćdziesiątych pomysł, że obserwowane cząstki oddziałujące silnie nie są fundamentalne, tylko składają się z kwarków, a obserwowana, przybliżona symetria SU(3) jest związana właśnie z istnieniem trzech rodzajów kwarków.

Tegoroczni nobliści udowodnili jednak, że można opisać oddziaływania silne za pomocą teorii z cechowaniem, o ile przyjmie się, że SU(3) jest grupą cechowania, ale nie ma nic wspólnego z istnieniem trzech rodzajów kwarków. Zapropowali zupełnie nowe i to od razu trzy ładunki. Dzięki temu, że nośniki oddziaływania są same obdarzone ładunkami, czyli oddziałują ze sobą, w teorii tej pojawia się asymptotyczna swoboda. W elektrodynamicznej kwantowej chmura cząstek wirtualnych ekranuje ładunek. Dlatego, efektywnie, ładunek rośnie wraz ze zmniejszaniem się odległości. W teorii oddziaływań silnych przeciwnie, siła oddziaływania bierze się właśnie z chmury samooddziałujących cząstek, a w miarę zmniejszania odległości siła oddziaływania maleje. Nowe ładunki zostały nazwane „kolorami”, ponieważ obserwowane na swobodzie mogą być tylko układy „białe” złożone z trzech różnych kolorów (lub koloru i antykoloru). Występowanie kwarków w trzech kolorach zostało potwierdzone już na początku lat siedemdziesiątych. Prawdopodobieństwo wyprodukowania pary kwark-antkwark trzeba było właśnie pomnożyć przez trzy, żeby otrzymać zgodność z doświadczeniem. Dodatkowym potwierdzeniem było odkrycie po roku czwartego kwarku (tylko przy parzystej liczbie kwarków teoria jest spójna) i w końcu zaobserwowanie przypadków potwierdzających realne istnienie bezmasowych nośników sił kolorowych.

Jak zwykle nasuwa się pytanie, dlaczego tegoroczni laureaci musieli czekać prawie ćwierć wieku, skoro ich teoria znalazła natychmiastowe potwierdzenie?

Chyba winna jest matematyka. Chromodynamika kwantowa przewiduje nie tylko asymptotyczną swobodę na bardzo małych odległościach, równoważnie – przy bardzo dużych energiach, ale również uwięzienie kwarków. Niestety, uwięzienia nie udało się dotąd wykazać w sposób ścisły.

Moim zdaniem tegoroczna decyzja Komitetu Noblowskiego była spowodowana niedawnymi obserwacjami układów więcej niż trzech kwarków z jednej strony i swoistym remanentem z drugiej. Zbliży się przecież nowa era w doświadczalnej fizyce oddziaływań fundamentalnych. Właśnie o tym będzie można przeczytać w styczniowym numerze *Delty*.

Piotr ZALEWSKI

[1] D.J. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Letters **30**(1973)1343

[2] H.D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions*, Phys. Rev. Letters **30**(1973)1346



Czy łatwiej uciec przed słoniem, czy przed nieskończonością?

Jacek JASIAK

W fizyce przyzwyczailiśmy się, że często w podobny sposób możemy opisać bardzo różne zjawiska, np. ruch wahadła i przepływ prądu w obwodzie składającym się z cewki i kondensatora. Celem tego artykułu jest pokazanie, w jaki sposób można powiązać ze sobą bardzo różne zjawiska, stosując metodę, którą roboczo można nazwać: „powiększanie i zmniejszanie”.

Powiększanie i zmniejszanie

W filmie pt. „Kochanie, powiększyłem dzieciaka” genialny wynalazca skonstruował urządzenie mogące powiększać i zmniejszać przedmioty. Treścią filmu są kłopoty, jakie się pojawiają w związku z przypadkowym, kilkudziesięciokrotnym powiększeniem dziecka. Chciałbym tu przestrzec wszystkich przed powiększaniem w ten sposób swoich dzieci – mogą pojawić się zupełnie inne problemy, niż te pokazane w filmie. Jeśli założymy, że mięśnie i kości powiększonego dziecka nie różnią się znacząco od zwykłych mięśni i kości, a przez L oznaczmy wzrost dziecka, to stwierdzimy, że:

- siła ręki jest proporcjonalna do jej pola przekroju poprzecznego, czyli do L^2 .
- ciężar ręki jest proporcjonalny do jej objętości, a więc do L^3 .

Zatem stosunek siły ręki do jej ciężaru jest proporcjonalny do $\frac{1}{L}$ – oznacza to, że nasze powiększone dziecko może nie być w stanie wykonać żadnego ruchu, a być może nawet załamia się pod nim jego kości!

Przykład z powiększaniem dziecka jest może bardzo odległy od realiów, ale taką samą analizę możemy przeprowadzić np. w przypadku mostów: nie powinniśmy w taki sam sposób budować kładki przez strumyk i mostu przez dużą rzekę, a fakt, że kartonowy model budynku może być bardzo trwały, nie oznacza, iż w taki sam sposób powinniśmy budować prawdziwe budynki.

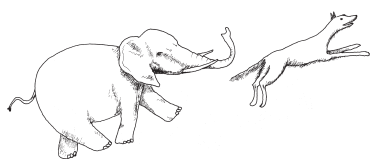
Jest wiele przykładów otrzymywania ciekawych i często nieoczekiwanych rezultatów na podstawie analizy zależności od rozmiarów (dalej będziemy mówili – zależności od skali). Oto dwa przykładowe problemy:

- Jak zależy szybkość wbiegania zwierzęcia pod górę od jego rozmiarów?
Tu wynik jest nieoczekiwany: im mniejsze zwierzę, tym łatwiej mu wbiegać. Choć może nie jest to aż tak zaskakujące, jeśli pamięta się o psach wbiegających z werwą na górkę i jednocześnie ich właścicielach, mających wielkie problemy z wejściem na nią. W każdym razie, jeśli kiedyś będzie nas gonił słoń, to pamiętajmy, żeby uciekać pod górę!
- Jak zależy wysokość skoku zwierzęcia od jego rozmiarów?
Tu wynik też wydaje się dziwny – po prostu nie zależy! Inaczej mówiąc: pchła, pies, człowiek i koń mają w skoku wżwyż takie same szanse! Dlaczego zatem skoczkowie wżwyż są wysocy, a jeszcze wżwyż są koszykarze? Po prostu wżwyż ma wżwyż środek ciężkości i wżwyż dosięga bez podskakiwania.

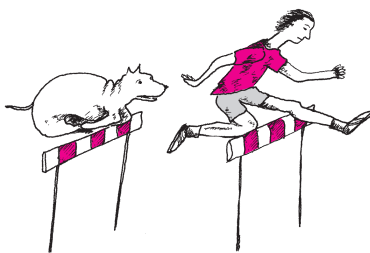
Oczywiście, powinniśmy zdawać sobie sprawę z wielkich uproszczeń w analizie rozważanych zagadnień: przecież pies nie jest po prostu zmniejszonym człowiekiem, a już na pewno nie można tego powiedzieć o pchle. Zresztą w przypadku pchły przegapiliśmy bardzo ważny problem, z jakim ma ona do czynienia przy skakaniu: podczas gdy dla nas opór powietrza nie ma żadnego wpływu na wysokość skoku, dla niej jest on wielkim problemem!

Te przykłady pokazują, że bardzo ogólne rozważania dotyczące zależności od skali może nas doprowadzić do ciekawych wniosków. W szczególności opis zagadnienia może znacznie się uprościć, jeżeli potrafimy go sformułować tak, aby od skali nie zależał.

Nie można bezkarnie powiększać dzieci!



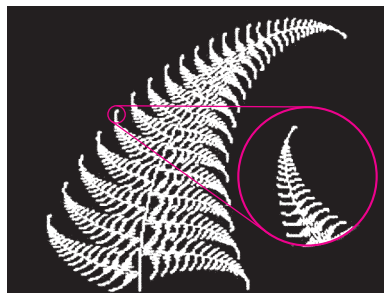
Przed słoniem należy uciekać pod górę!



Wielkość stworzenia nie ma wpływu na wysokość skoku.

Skalowanie – niezależność od skali

Najprostszym przykładem jest tu czysta, gładka kartka papieru. Gdy patrzymy na nią z różnej odległości, to ma ona dla nas różne rozmiary. Jeśli jednak zaczniemy się jej przypatrywać z bardzo bliska (wyobraźmy sobie, że jesteśmy naszą znajomą pchłą siedzącą sobie na tej kartce), to to, czy jest to kartka rozmiaru A4, A3, czy jeszcze większa, nie będzie miało dla nas żadnego znaczenia! Oczywiście pod warunkiem, że nie będziemy tak blisko niej, żeby zobaczyć jej nierówności, czy może nawet atomy, z których jest zbudowana. Inaczej mówiąc, jest pewien zakres „powiększeń”, w którym kartka papieru jest dla nas nieskończoną płaszczyzną, a powiększona lub zmniejszona płaszczyzna (podobnie jak prosta) pozostaje sobą.



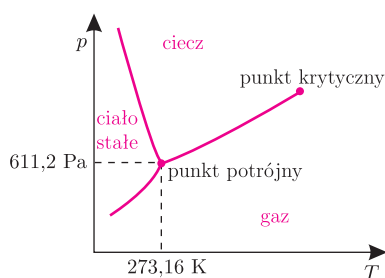
Niezależność od skali oznacza, że powiększony fragment wygląda tak jak całość.

Ten przykład wydaje się nieciekawym i bez znaczenia praktycznego, ale... Na przykład wydarzyło się wiele wypadków wodnosamolotów (hydroplanów) lądujących na morzu – po prostu pilot nad spokojnym morzem ma bardzo duże problemy ze wzrokową oceną wysokości, na jakiej się znajduje.

Bardzo ciekawymi obiektami, „pozostającymi sobą” przy powiększaniu, są fraktale: są one tak skonstruowane, że ich fragment jest zmniejszeniem całości. Oczywiście, dotyczy to tylko idealnych, czysto matematycznych obiektów – mały fragment narysowanego fraktala jest już tylko małą plamką, a nie pomniejszeniem całości.

Punkt krytyczny i grupa renormalizacyjna

Wszystkie dotychczas rozważane zagadnienia wydają się stosunkowo proste. Teraz jednak przejdziemy do dużo trudniejszego problemu, związanego z... parowaniem wody. Nie każdy zdaje sobie sprawę z tego, że między parą a cieczą nie ma „istotnych” różnic (ale już między wodą a lodem są). Jak to nie ma: przecież para jest lekka, a ciecz ciężka (ma gęstość około tysiąca razy większą niż para)? No dobrze, ale jeśli rozpatrzmy parę sprężoną tysiąc razy i ciecz pod ciśnieniem 1000 atmosfer, to może już nie być różnicy gęstości (ciecz jest praktycznie nieściśliwa). Jak, nawet w takiej sytuacji, odróżnić ciecz od pary? Najprostsza odpowiedź jest taka: para to jest to, co powstaje (jak sama nazwa na to wskazuje) przy parowaniu cieczy. A parowanie to taki proces, w którym musimy dostarczać ciepło, a temperatura się nie zmienia (po zgaszeniu gazu woda w czajniku niemal natychmiast przestaje wrzeć). Inaczej mówiąc, nawet jeśli nie wiemy, co jest cieczą, a co jest parą, to możemy doprowadzić do sytuacji, w której w tej samej temperaturze mamy jednocześnie i ciecz, i parę, czyli dwie różne fazy tej samej substancji.

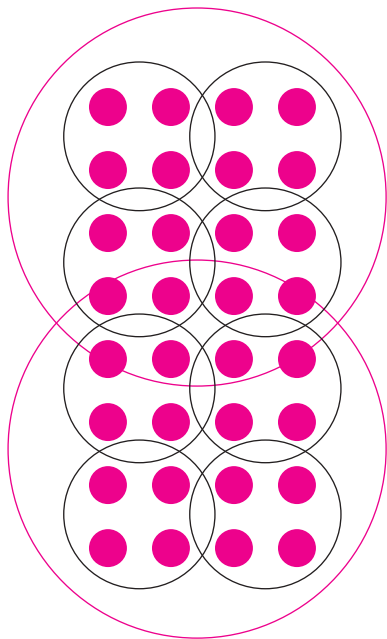


Wykres fazowy dla wody.

Okazuje się jednak, że w odpowiednio dużej temperaturze nie możemy mieć jednocześnie i cieczy, i pary, a właściwie ciecz i para jest tym samym (mamy tylko jedną fazę). Oznacza to, że zamiast odparowywać wodę możemy zrobić tak: zwiększamy odpowiednio jej ciśnienie, podgrzewamy, potem zmniejszamy ciśnienie do początkowego, a następnie obniżamy temperaturę. W efekcie, pokonując nieco okrężną drogę, otrzymamy parę, mimo iż na żadnym etapie tego procesu nie było parowania (warto podkreślić, że takiej sztuczki nie możemy zrobić, aby z wody otrzymać lód – tu zawsze pojawi się sytuacja, w której zamrażamy wodę).

Najwyższą temperaturę i odpowiadające jej ciśnienie, przy których jeszcze mogą współistnieć ze sobą ciecz i para, nazywamy **punktem krytycznym**.

I tu wracamy do głównego nurtu tej opowieści. Okazuje się, że wiele własności substancji w pobliżu punktu krytycznego nie zależy od skali. Na przykład, jeśli odpowiednio sprytnie zrobimy zdjęcie naszej substancji, to otrzymamy niemal taki sam obraz niezależnie od powiększenia (oczywiście w pewnym zakresie powiększeń). No, ale co może być widać na takim zdjęciu? Ciemniejsze fragmenty odpowiadające miejscom, gdzie nasza substancja jest nieco gęstsza, i jaśniejsze odpowiadające miejscom, gdzie jest rzadsza. Skąd się biorą takie różnice w gęstości? Są one po prostu wynikiem przypadkowego ruchu



Graficzna reprezentacja procedury tworzenia „nowych atomów” opisanej w tekście.

i przypadkowego skupiania się cząstek. W punkcie krytycznym wielkość i ilość ciemniejszych plam (oczywiście średnio) nie będzie zależna od skali (czyli powiększenia naszego zdjęcia).

To, co się dzieje w okolicy punktu krytycznego, czyli tzw. zjawiska krytyczne, interesowało fizyków od bardzo dawna, jednak przez długi czas teoretyczne modele w tej dziedzinie były nieudane. Dopiero zastosowanie rozumowania opartego na badaniu zależności od skali przyniosły tu znaczący postęp. Idea takich modeli jest następująca.

Wyobraźmy sobie substancję jako układ atomów połączonych sprężynkami. Sprężynki mogą łączyć nie tylko najbliższe atomy, ale i dalsze, np. pierwszy z piątym, drugi z szóstym itp. (ściślej mówiąc, zamiast o sprężynkach powinniśmy mówić o „sprężeniach” między atomami). Teraz zrobmy pierwszy (choć może na pierwszy rzut oka absurdalny) krok: utwórzmy zespoły atomów składające się z (na przykład) czterech najbliższych sąsiadów i każdy taki zespół potraktujmy jako nowego rodzaju atom. Inaczej mówiąc, zapomnijmy o tym, co jest wewnątrz naszego zespołu (nowego rodzaju atomu) i patrzmy jedynie na to, jak takie zespoły oddziałują ze sobą. W rzeczywistości jeden zespół łączy się z drugim za pomocą wielu sprężynek (wychodzących z atomów będących składnikami takiego zespołu), a my je wszystkie zastępujemy jedną, odpowiednio dobraną. Po wykonaniu tego kroku mamy sytuację bardzo podobną do wyjściowej: znowu mamy atomy (choć nie są to już prawdziwe atomy) połączone sprężynkami. Teraz możemy zrobić następny krok: nowe „atomy” łączyjemy w zespoły, które znowu nazywamy atomami i wprowadzamy nowe sprężynki łączące nowe atomy. Taką procedurę możemy powtarzać wielokrotnie. Podstawowym problemem przy tym podejściu jest tłumaczenie własności „starych” sprężynek na własności „nowych”. Oczekujemy, że w pobliżu punktu krytycznego, ze względu na niezależność „wyglądu” substancji od skali, takie tłumaczenie jest takie samo w pierwszym kroku, jak i w pięćdziesiątym. A to już pozwala napisać równania, z których można wiele się dowiedzieć o badanej substancji.

Oczywiście, zastosowanie w praktyce opisanej procedury, zwanej **metodą grupy renormalizacyjnej**, jest bardzo trudne: aby móc cokolwiek obliczyć, trzeba dokonać wielu przybliżeń, pojawiają się dodatkowe problemy. Jednak w ten sposób fizycy potrafili obliczyć to, co było dla nich nie do obliczenia innymi sposobami!

Fizyka cząstek elementarnych

Przejdźmy teraz do następnego przykładu – opisu oddziaływań między cząstkami elementarnymi.

Wszelkie zjawiska elektromagnetyczne – rozchodzenia się fal radiowych, odpychanie lub przyciąganie ładunków – można wyjaśnić, wychodząc od elementarnego procesu oddziaływania naładowanej cząstki (np. elektronu) z fotonem. To, jaką „szansę” na pochłonięcie lub wysłanie fotonu ma elektron, jest określone przez pewną stałą, zwaną stałą sprzężenia elektromagnetycznego (oznaczamy ją literą α i jest ona w przybliżeniu równa $1/137$). Ta stała jest bezwymiarowa, co sugeruje niezależność wartości sprzężenia elektromagnetycznego od skali, okazuje się jednak, że rzeczywistość jest bardziej skomplikowana.

To skomplikowanie związane jest z nieskończonościami, jakie pojawiają się w teoriach opisujących podstawowe oddziaływania.

Zacznijmy od prostego przykładu: jeśli elektron potraktujemy jako naładowaną kulkę o promieniu r_{\min} , to jego energia elektromagnetyczna jest proporcjonalna do $1/r_{\min}$. Jeśli elektron jest cząstką fundamentalną, nieskładającą się z innych cząstek (na razie nie mamy podstaw, by myśleć inaczej), to jego promień powinien być równy 0, a to wiąże się z nieskończoną energią elektromagnetyczną.



Rozwiązanie zadania F 634.

W miejscu, gdzie rura skręca, między zewnętrzną a wewnętrzną ścianą rurki musi występować różnica ciśnień. Jest tak dlatego, że woda przepływając przez zakręt, musi zmienić swój pęd. Potrzebna jest do tego siła wynikająca z tego, że ciśnienie rośnie wzdłuż przekroju rurki. Oznacza to, że między obydwojma końcami rurki występuje różnica ciśnień, i to tym większa, im szybszy przepływ wody przez rurę. Ta różnica ciśnień powoduje przepychanie wody przez rurkę.



Rozwiązanie zadania M 1082.

Mamy

$$\frac{P_{\Delta BPC}}{P_{\Delta BAC}} = \frac{PD}{AD}$$

i analogicznie

$$\frac{P_{\Delta CPA}}{P_{\Delta CBP}} = \frac{PE}{BE}, \quad \frac{P_{\Delta APB}}{P_{\Delta ACB}} = \frac{PF}{CF}$$

Zatem

$$1 = \frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} > \frac{PD + PE + PF}{d}$$

co, po pomnożeniu stronami przez d , daje tezę.

Powyższy wynik opiera się na obliczeniach klasycznych. Uwzględnienie mechaniki kwantowej (a właściwie kwantowej teorii pola) zmienia obraz. Można powiedzieć, że mechanika kwantowa zmusza nas do włączenia procesu pomiaru do opisu badanego zjawiska. Badając coraz mniejsze odległości, „zmuszeni” jesteśmy używać „sond”, fotonów o coraz mniejszych długościach fali. Im mniejsza długość fali, tym większa energia fotonu i tym większe prawdopodobieństwo, że foton zamieni się w wirtualną parę elektron-pozyton. Te cząstki z kolei mogą wyświecać wirtualne fotony i tak odsłania się przed nami pewna samopodobna struktura.

To jednak jeszcze nie rozwiązuje naszego problemu. Choć dla małych r_{\min} wartość energii elektromagnetycznej elektronu jest dużo mniejsza niż w przypadku klasycznym, to nadal staje się ona nieskończona, gdy r_{\min} staje się równe 0.

Teraz jednak możemy zastosować tę samą metodę co w przypadku rozpatrywania punktu krytycznego, czyli **renormalizację**. Jej idea jest wyjaśniona na poniższym przykładzie.

- Przed renormalizacją sekretarka zarabia 3000 zł pensji podstawowej i to są jej wszystkie przychody.
- Po renormalizacji dyrekcja postanowiła osobno wycenić podstawowe czynności sekretarki i prace dodatkowe (np. podawanie kawy). Od tej pory sekretarka zarabia 2000 zł pensji podstawowej, zwanej „gołą pensją”, i 1000 zł dodatku.

Co ma jednak zrobić dyrektor, dla którego to właśnie dodatkowe czynności sekretarki mają największą, wręcz nieocenioną (nieskończoną?) wartość? Wystarczy, że wyceni tak podstawowe czynności sekretarki, żeby w sumie, „na rękę”, sekretarka dostawała nadal 3000 zł, nie przejmując się, że w tym przypadku „goła” pensja będzie dużą liczbą ujemną.

Jeśli wrócimy do przykładu z elektronem, to powyższa procedura sprowadzi się do następującego rozumowania. Przyjmujemy, że promień elektronu wynosi r_{\min} . Obliczymy, ile wynosi energia elektromagnetyczna elektronu przy takim promieniu, a potem dobieramy tak energię spoczynkową „gołego” elektronu (tzn. elektronu bez otaczającego go pola elektrycznego), żeby w sumie wyszło to, co mierzymy w doświadczeniu.

W naturalny sposób pojawia się tu pytanie: skoro po całej tej procedurze otrzymaliśmy to, co mieliśmy na początku (bo zmierzaliśmy w doświadczeniu), to może nie warto było jej w ogóle przeprowadzać? Żeby się przekonać, że jednak było warto, rozważmy następującą sytuację.

Jaś bardzo lubił grać w pewną grę na swoim starym komputerze, wyposażonym w system operacyjny MS DOS. Na gwiazdkę Jaś dostał nowy komputer, wyposażony w system operacyjny Windows XXXL, więc wyrzucił swój stary komputer. Niestety, wkrótce okazało się, że stara, ulubiona gra nie działa na nowym komputerze. Znalazła się na to rada – wystarczyło zakupić specjalny emulator, dzięki któremu gra już działała, niestety bardzo wolno. I na to znalazła się rada – wystarczyło dokupić nieco pamięci operacyjnej, wymienić procesor na szybszy i już można było grać na nowym komputerze tak jak na starym. Czy warto było zatem wymieniać stary komputer na nowy? Oczywiście, gdyby Jaś miał grać tylko w tę starą grę, to nie byłoby warto. Ale na nowym komputerze działają też inne, jeszcze wspanialsze gry, które na pewno nie działałyby na starym!

Podobna sytuacja występuje przy obliczeniach w fizyce cząstek elementarnych – wprawdzie dobieramy tak nasze parametry, żeby pewne obliczone wielkości miały zadaną z góry wartość, ale możemy też obliczać zupełnie inne rzeczy.

A co z tytułowym pytaniem? Co prawda, nie znaleźliśmy na nie odpowiedzi, ale już wiemy, że przy opracowywaniu sposobów radzenia sobie ze słońcem i nieskończonością możemy używać podobnych metod.



Protokół posiedzenia Jury XXVI Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

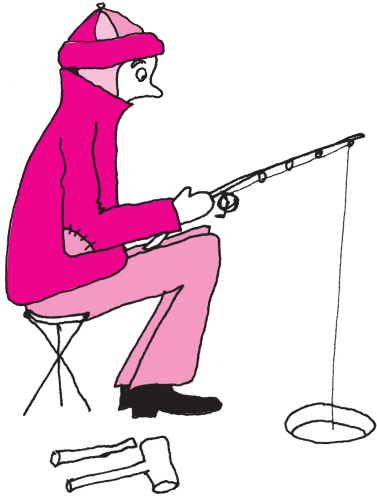
Redakcja „Delfy” serdecznie dziękuje firmie Gambit za ufundowanie nagród w postaci pakietów „Mathematica” dla zwycięzcy Konkursu i jego opiekuna.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki zostanie wydrukowany w numerze styczniowym *Delfy*.

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Piotr Grzeszczuk, Marek Kordos, Witold Sadowski, na posiedzeniu w dniu 9 września 2004 roku w Białymstoku, po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do Finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść pracy i sposób jej prezentacji, postanowiło:

- 1) przyznać złoty medal, nagrodę pieniężną 900 zł oraz pakiet „Mathematica for Students” firmy Wolfram Research Inc. Marcinowi Piterze z LO im. Jana III Sobieskiego w Krakowie za pracę pt. „Niezmienniki w geometrii”;
- 2) przyznać srebrny medal i nagrodę pieniężną 800 zł Agnieszce Kałużnej z Gimnazjum nr 1 w Olkuszu za pracę „Uogólnienie twierdzenia Stewarta na czworościan”;
- 3) przyznać brązowy medal i nagrodę pieniężną 400 zł Lechowi Stawikowskiemu z III LO im Adama Mickiewicza we Wrocławiu za pracę „Ciągi jednomonotoniczne, funkcje supermodularne i nierówności”;
- 4) przyznać wyróżnienie i nagrodę pieniężną 300 zł Arkadiuszowi Męclowi z I LO im. Stanisława Duboisa w Koszalinie za pracę „Zbiory fraktalne”;
- 5) przyznać nagrodę pieniężną 200 zł oraz pakiet „Mathematica Teacher Edition” mgr. Jackowi Dymelowi – opiekunowi zdobywcy złotego medalu;
- 6) przyznać nagrody pieniężne 200 zł Piotrowi Sulichowi i mgr. Pawłowi Rudeckiemu – opiekunom laureatów.

–/ podpisy Jury



Wyniki XXI edycji Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych (wraz z bibliografią) przez Jury lub tematu własnego oraz, w przypadku zakwalifikowania się do finału, krótkim zreferowaniu publicznie tego opracowania.

Konkursy organizuje Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach przy współudziale Uniwersytetu Śląskiego.

W roku 2004 na konkurs wpłynęło 149 prac, z których do finału zakwalifikowano 22, a 27 nagrodzono listami gratulacyjnymi.

Jury w składzie: dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, mgr Tomasz Bielaczyc, mgr Włodzimierz Fechner, dr Maria Górniołek, dr Józef Kalinowski, dr Michał Machura, mgr Katarzyna Osiak, mgr Barbara Przebieracz, mgr Anna Maria Szczerba-Zubek, Żywilla Wcisło na posiedzeniu w dniu 23 maja 2004 roku postanowiło przyznać

I miejsce

Pawłowi Zaczkowskiemu z V LO w Krakowie za pracę *Wielomiany komutujące, Czebyszewa i określone rekurencyjnie*.

II miejsce

Tomaszowi Warszawskiemu z V LO w Krakowie za pracę *Triangulacje, czyli sprytne podziały*.

III miejsce

Michałowi Zajdzie z Pracowni Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach za pracę *Średnie*.

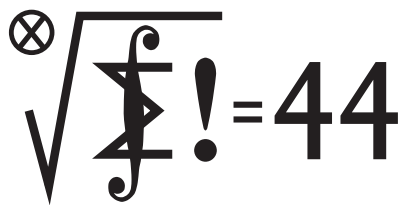
oraz wyróżnienie

Monice Rudeckiej z Gimnazjum Nr 11 w Koszalinie za pracę *Kolorowa matematyka*.

Wyniki głosowania publiczności na najlepszy referat:

nauczyciele wybrali Katarzynę Gizicką z I LO w Zakopanem (praca *Teoria gier*); uczniowie wybrali Szymona Acedańskiego z VIII LO w Katowicach (*Obrazowanie 3D nie tylko dla orłów*).

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
28 II 2005

UWAGA!

**ZMIANA ADRESU
DO KORESPONDENCJI!**

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
479 ($WT = 1,79$) i **480** ($WT = 1,95$)
z numeru 4/2004

Janusz Olszewski – Suwałki	45,91
Michał Kieza – Warszawa	45,78
Józef Siwy – Łaziska Górne	43,54
Witold Bednarek – Łódź	41,99
Zbigniew Sewartowski – Wieliczka	41,52
Bartłomiej Dydą – Wrocław	36,88

Rutyna i młodość: „dwukrotnie Weteran” Janusz Olszewski zalicza „44” po raz siódmy! a Michał Kieza, maturzysta – po raz pierwszy i zostaje dziewięćdziesiątym dziewiątym członkiem Klubu 44 M. Kto będzie setnym??

Zadania z matematyki nr 491, 492

Redaguje Marcin E. KUCZMA

491. Wyznaczyć wszystkie wyrazy ciągu

$$a_n = n^2 + 44n + 99 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

które są kwadratami liczb całkowitych.

492. Liczby dodatnie $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ spełniają warunki:

$$a + b + c = \alpha + \beta + \gamma,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 > \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3.$$

Czy z tych założeń wynika, że

$$a^n + b^n + c^n > \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

dla każdej liczby naturalnej $n > 3$?

Zadanie 492 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
28 II 2005

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

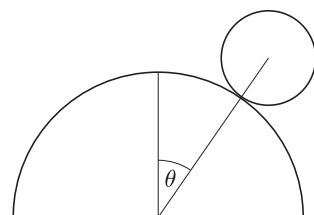
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
380 ($WT = 3,05$) i **381** ($WT = 1,45$)
z numeru 6/2004

Andrzej Idzik – Bolesławiec	40,42
Tomasz Rudny – Warszawa	31,48
Jacek Piotrowski – Rzeszów	29,30
Jerzy Witkowski – Radlin	23,50
Piotr Kumor – Olsztyn	13,92
Konrad Kapcia – Częstochowa	11,85

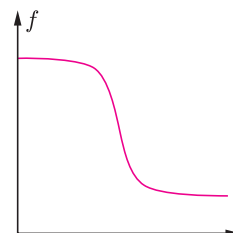
Zadania z fizyki nr 388, 389

Redaguje Jerzy B. BROJAN

388. Jednorodną kulę położono w najwyższym punkcie nieruchomej półkuli, nadając jej bardzo małą prędkość początkową. Współczynnik tarcia kinetycznego (poślizgowego) wynosi 0,3, natomiast podczas toczenia się bez poślizgu nie ma strat energii. W jakim punkcie kula zacznie się ślizgać po półkuli? Należy podać wartość kąta θ (zob. rys. 1).



Rys. 1



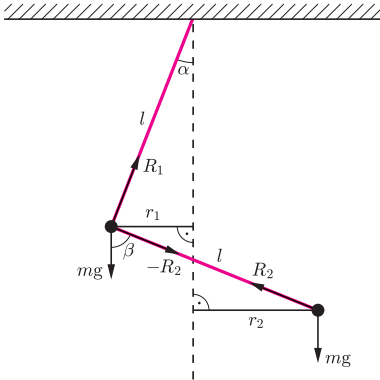
Rys. 2

389. Źródło wysyłające dźwięk o stałej częstotliwości porusza się po linii prostej mijając nieruchomy odbiornik położony w pewnej odległości od tej prostej. Dany jest wykres częstotliwości odbieranego dźwięku w zależności od czasu (rys. 2). Jak na podstawie tego wykresu można wyznaczyć chwilę, w której nastąpiło największe zbliżenie źródła do odbiornika? Należy podać niezbędne wzory.

**Rozwiązanie zadania F 633.**

Obie kulki wykonują jednostajny ruch obrotowy względem osi l . Równania ruchu kulki wraz z rozkładem sił na składowe (rysunek) dają

$$\begin{aligned} R_{2x} &= mg, \\ R_{1y} &= R_{2x} + mg = 2mg, \\ R_{2y} &= m\omega^2 r_2, \\ R_{1y} + R_{2y} &= m\omega^2 r_1. \end{aligned}$$



Ze wzorów trygonometrycznych otrzymujemy

$$R_{1x} = R_{1y} \operatorname{tg} \alpha, \quad R_{2x} = R_{2y} \operatorname{tg} \beta.$$

Ponadto z rysunku widać, że

$$r_1 = l \sin \alpha \quad \text{i} \quad r_2 = l (\sin \beta - \sin \alpha).$$

Dostajemy więc po podstawieniu i uproszczeniu

$$2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega^2 l}{g} \sin \alpha$$

oraz

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega^2 l}{g} (\sin \beta - \sin \alpha).$$

Po rozwiązaniu względem $\sin \beta$ otrzymujemy

$$\beta = \arcsin \left(2 \sin \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{g}{\omega^2 l} \right).$$

**Rozwiązanie zadania M 1083.**

Niech d będzie wspólnym dzielnikiem dodatnim liczb $n^2 + 1$ oraz $(n + 1)^2 + 1$. Wówczas liczba

$$(n + 1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$$

jest podzielna przez d . Zatem liczba d jest również dzielnikiem liczby

$$4(n^2 + 1) - (2n + 1)(2n - 1) = 5.$$

Stąd $d = 1$ lub $d = 5$ (przy czym obydwie te wartości są przyjmowane, bo $\text{NWD}(1^2 + 1, 2^2 + 1) = 1$, $\text{NWD}(2^2 + 1, 3^2 + 1) = 5$).

Patrz w niebo

Trudno podejrzewać, żeby cyrkowy treser zastanawiał się, jaki fizyczny mechanizm umożliwił strzelanie z bata. Treser po prostu wie, że odpowiedni ruch ręką, w której trzyma bat, spowoduje tak gwałtowny ruch drugiego końca bata, że usłyszy się niemal strzał. Otóż istotne jest, że treser trzyma bat za grubszy koniec. Nadając mu pewien ruch, a zatem energię, powoduje przemieszczanie się wzdłuż bata fali niosącej tę energię. Ponieważ energia tej fali przypada na coraz mniejszą masę metra bieżącego bata, wywołuje coraz gwałtowniejszy jego ruch, niekiedy objawiający się jako strzał.

Analogiczne zjawisko zachodzi w atmosferze Słońca. Niezliczone zaburzenia na powierzchni powodują rozchodzenie się w górę fal akustycznych. Jednak napotykają one coraz rzadsze warstwy atmosfery, wywołują więc coraz gwałtowniejsze w niej ruchy, a więc jej silne grzanie. Dlatego korona słoneczna w odległości promienia Słońca od jego powierzchni ma temperaturę rzędu miliona kelwinów. Zdawałoby się, że dołączenie do tego mechanizmu pola magnetycznego jakościowo niczego nie zmieni. Linie pola magnetycznego zachowują się jak struny i mogą uczestniczyć w przenoszeniu energii z powierzchni Słońca do rzadkiej korony. Tymczasem nie zgadza się to z obserwacjami wykonanymi kilka lat temu przez sondę TRACE (Transition Region and Coronal Explorer). Stwierdzono mianowicie, że materia słonecznej atmosfery w pętlach pola magnetycznego jest najgorętsza u podstaw pętli, czyli przy powierzchni Słońca, podczas gdy najwyższej temperatury oczekiwano na szczytach pętli. Wygląda na to, że mechanizm strzelania z bata jakoś nie obowiązuje w polu magnetycznym, albo może inaczej działa, gdy linie pola są zamknięte, a inaczej, gdy otwarte. Krótko mówiąc, w zasadzie wiadomo, co jest źródłem energii korony, ciągle jednak nie wiadomo, jak ta energia jest w koronie rozprowadzana.

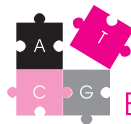
Tomasz KWAST

Grudzień

Wieczorami Droga Mleczna przecina niebo od wschodu do zachodu, przechodząc prawie przez zenit. Właśnie w pobliżu zenitu, ale poza Drogą Mleczną, widać galaktykę M31, najdalszy obiekt widoczny gołym okiem (jasność 4,8 mag, odległość 0,7 Mpc). O około 20° na południowy wschód od niej znajduje się w Trójkącie galaktyka M33. Podobno, gdy noc jest bardzo ciemna i powietrze bardzo czyste, obserwator o bardzo dobrym wzroku może ją też dostrzec nieuzbrojonym okiem. Dla niego ta właśnie galaktyka byłaby najdalszym obiektem (jasność 6,7 mag, odległość 0,8 Mpc). M31, M33 oraz nasza Galaktyka są największymi ciałami w tzw. Lokalnej Grupie Galaktyk, do której należy około 30 obiektów i która zajmuje obszar o rozmiarach 3 Mpc. Lokalna Grupa Galaktyk (inaczej – Układ Lokalny) prawdopodobnie jest peryferyjnym zgęszczeniem supergromady galaktyk w Pannie.

Wenus i Mars są w Wadze i obie te planety wschodzą przed wschodem Słońca. 29 XII Merkury znajdzie się najdalej kątowno od Słońca i można go szukać również przed wschodem. Jowisz jest w Pannie i wschodzi po północy. Saturn jest na granicy Bliźniąt i Raka, przez co widać go praktycznie przez całą noc. Now Księżyc wypada 12 XII, a pełnia 26 XII. 7 XII Księżyc zakryje Jowisza, ale zjawisko to będzie widać w Ameryce Północnej, północno-wschodniej Brazylii i w Afryce. W Polsce zobaczymy tylko zbliżenie tych obiektów, zresztą niekorzystnie, gdyż największe zbliżenie nastąpi w środku dnia. 21 XII nastąpi przesilenie zimowe, czyli od tej daty dni zaczną się wydłużać i zacznie się astronomiczna zima. Szczęśliwego Nowego Roku!

T. K.



Język genów

Język genów to najprawdziwszy język programowania, pozwalający precyzyjnie realizować przeróżne instrukcje warunkowe. Jednocześnie jest on tak pogmatwany, że nawet zaprawionemu w bojach z chaosem programiście C włos mógłby się na głowie zjeżyć przy próbie debugowania tego, co siedzi w materiale genetycznym najprostszej bakterii. Już one muszą w złożony sposób regulować funkcjonowanie swoich genetycznych podprogramów.

Prostą regulacją zapobiegającą marnotrawstwu zasobów potrzebnych do produkcji białek jest sterowanie produkcją enzymów syntezujących aminokwasy, np. tryptofanu. Geny kodujące te enzymy są zgromadzone w jednym długim odcinku DNA (operonie), odwzorowywanym w jednej cząsteczce mRNA. Operon jest czymś na kształt procedury, znanej z języków programowania, dzięki której wszystkie białka potrzebne do kolejnych etapów syntezy aminokwasu powstają jednocześnie, w jednym miejscu i w równych ilościach.

Na początku nowo powstającej nici mRNA jest szczególnie miejsce, w którym może ona na dwa sposoby skleić się sama ze sobą, tworząc alternatywne struktury tzw. szpilki do włosów. Jeśli nic nie przeszkodzi temu procesowi, struktura ta powstaje daleko od miejsca działania enzymu tworzącego mRNA (polimerazy RNA) i nie blokuje powstania produktu. Jednak w normalnych warunkach świeżo zsyntetyzowany odcinek mRNA jest natychmiast wiązany przez rybosom, który zaczyna tworzyć na jego matrycy białko, wędrując zaraz za polimerazą RNA i uniemożliwiając powstanie szpilki do włosów. W tej sytuacji powstaje położona tuż przy polimerazie alternatywna szpilka, która odrywa ten enzym od DNA i cały proces zatrzymuje się po wytworzeniu stosunkowo krótkiego odcinka RNA. A regulacja? Otóż białka składają się z aminokwasów, również z tryptofanu, końcowego produktu fabryki kodowanej przez opisany operon. I właśnie w początkowej części pierwszego genu operonu znajduje się para leżących obok siebie kodonów dla tryptofanu. Jeśli w komórce brakuje tego aminokwasu, rybosom wskutek przestoju z braku surowca zatrzymuje się na nici mRNA i umożliwia powstanie pierwszej szpilki do włosów. Blokuje w ten sposób powstanie drugiej szpilki oraz zakończenie transkrypcji. Dzięki temu wszystkie złożone enzymy potrzebne do produkcji aminokwasu powstają tylko wtedy, gdy jest on rzeczywiście potrzebny komórce! Ten mechanizm zmienia poziom transkrypcji o rząd wielkości.

To nie koniec, gdyż istnieje białko, represor, które samo w sobie nie oddziałuje z operonem tryptofanowym. Jednak, gdy zwiąże cząsteczkę tryptofanu, zmienia swoją strukturę – rozsuwają się w nim fragmenty wiążące DNA

z 2,6 do 3,4 nm. Dzięki temu represor silnie wiąże się ze specyficzną sekwencją DNA, leżącą na początku operonu i uniemożliwia rozpoczęcie transkrypcji. Skuteczność tego mechanizmu pozwala na 70-redukcję transkrypcji operonu. Oba mechanizmy działają synergistycznie, redukując 700 razy produkcję pięciu białek potrzebnych do syntezy tryptofanu!

Bardziej złożona jest regulacja pobierania przez bakterie węgla organicznego, którego źródłem są zazwyczaj różne cukry. Najdogodniejszy z nich to glukoza i jeśli jest ona dostępna, bakterie nie szukają innych źródeł węgla, takich jak np. arabinoza. Wszystkie operony służące do produkcji enzymów potrzebnych do wykorzystania innych niż glukoza cukrów są regulowane w podobny sposób. Gdy brakuje glukozy, komórka produkuje małe cząsteczki, cAMP, które są sygnałem głodu i aktywują specyficzne białko przyłączające się na początku operonu arabinozowego (i wielu innych), gdzie pełnią rolę aktywatora transkrypcji. To nie koniec! Przecież nie zawsze, gdy zabraknie glukozy, bakteria znajduje akurat arabinozę. Inne białko przy braku arabinozy wiąże się z początkiem operonu i blokuje jego transkrypcję. Gdy pojawi się arabinoza, białko to wiąże się z nią i na tyle zmienia swój kształt, że przestaje być represorem. Jest to system podwójnej kontroli: enzymy potrzebne do wykorzystania arabinozy powstają wyłącznie wtedy, gdy brakuje glukozy i tylko wtedy, gdy jednocześnie jest obecna arabinoza.

Mamy jeszcze jeden piękny przykład regulacji u pasożytniczej bakterii *Salmonelli*, walczącej bezustannie z systemem odpornościowym swych żywicieli, który z łatwością uczy się rozpoznawać białka powierzchniowe ciała bakteryjnego, takie jak flagellina, z której zbudowane są rzęski. Są dwa geny produkujące różne wersje flagelliny: gen H1 i H2. Gen H2 leży w jednym operonie z genem kodującym represor wyłączający produkcję H1. Początek operonu H2 jest zawarty pomiędzy odwróconymi sekwencjami, które z dość niską częstością, mniej więcej raz na 1000 pokoleń, są rozpoznawane przez inny enzym odwracający ten fragment DNA. Cały operon H2 staje się wtedy nieaktywny, gdyż miejsce startu jego transkrypcji działa w przeciwną stronę niż powinno... A pod nieobecność represora produkowana jest flagellina w wersji H1. I tak aż do następnej inwersji. Dzięki temu pomysłowemu rozwiązaniu bakteria wymyka się układowi odpornościowemu, który zmuszony jest raz na jakiś czas uczyć się rozpoznawać nową wersję tego białka.

Wyżej opisane przykłady to tylko najprostsze możliwości regulacji ekspresji genów. Jeśli ktoś chce się zmierzyć z prawdziwie złożonymi układami, może spróbować rozgryźć np. dobrze poznany system regulacji genów homeotycznych odpowiadających za rozwój muszki owocowej. Ale to już wykracza poza ramy tego artykułu...

Autor: Paweł POREBA

Współpraca: Anna LORENC, Jarek BRYK



mała delta

Oczywiste?

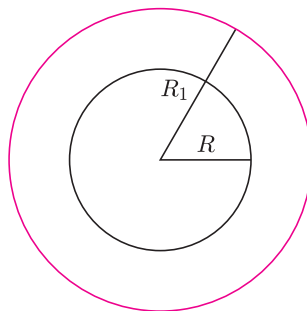
Nierzadko zbywamy kandydatów na twierdzenia matematyczne niemal pogardliwym określeniem: *oczywiste!* Liczba 2^{60} jest większa od 3^{40} ? Oczywiście! Środek okręgu opisanego na trójkącie leży wewnątrz trójkąta? Oczywiście!

Warto takie oczywistości weryfikować. Zróbmy to na przykładzie starego, ale wciąż pouczającego zadania. Wyobraźmy sobie, że udało nam się otoczyć Ziemię ściśle przylegającym do równika sznurem. Sznur będzie miał, rzecz jasna, długość równika, czyli około 40 000 000 m.

Podobnie oplećmy sznurem pomarańczę wokół jej równika. Potrzebny będzie do tego sznur o długości mniej więcej 0,30 m.

A teraz do każdego z tych dwóch sznurów dodajmy po jednym metrze. Sznury przestaną przylegać do Ziemi i pomarańczy, pod każdym z nich powstanie luka. Która z tych dwóch luk będzie szersza i o ile?

Zanim rzucimy niedbałe *oczywiście, między sznurem a pomarańczą*, zajmijmy się prostymi obliczeniami. Musimy odpowiedzieć na pytanie, o ile zwiększy się promień okręgu, gdy powiększymy jego obwód o 1.



Niech R oznacza promień okręgu przed powiększeniem, a R_1 – promień po powiększeniu obwodu. Wtedy

$$2\pi R_1 = 2\pi R + 1,$$

a więc

$$R_1 - R = \frac{1}{2\pi}.$$

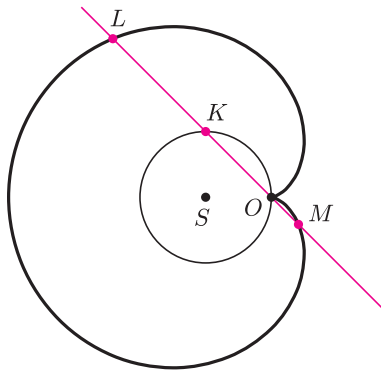
To znaczy, że powiększenie obwodu okręgu o 1 powoduje wydłużenie promienia o $\frac{1}{2\pi}$... niezależnie od pierwotnego promienia okręgu! Luka między sznurem a Ziemią, wynikła z powiększenia długości sznura o $\frac{1}{40000000}$ jego pierwotnej długości, jest taka sama, jak luka powstała z wydłużenia sznura otaczającego pomarańczę o $\frac{10}{3}$ jego pierwotnej długości! Oczywiście?

Zachęcam Czytelnika do sprawdzenia równie oczywistego przekonania, że liczba $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ jest niewymierna. Bo przecież musi być, prawda?

Wiktor BARTOL

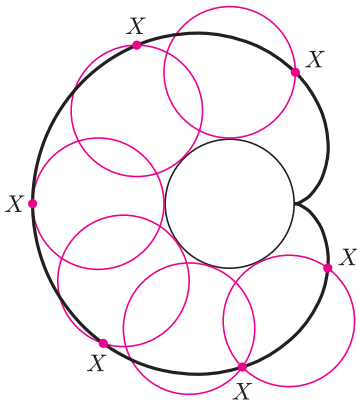
Kardioida jest wszystkim – proszę spojrzeć

Jest **ślimakiem Pascala** o parametrze $2r$, co oznacza, że można ją otrzymać tak: wybieramy punkt O na okręgu o promieniu r i na każdej przechodzącej przez niego prostej zaznaczamy oba punkty L i M odległe o $2r$ od K – jej drugiego przecięcia z okręgiem (rys. 1); na stycznej bierzemy $K = O$.



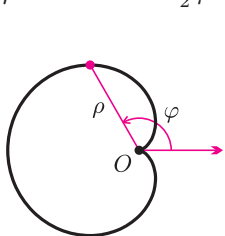
Rys. 1. $KL = KM = 2r = 2OS$.

Jest **epicykloidą okręgu** o stosunku 1, co oznacza, że powstaje jako tor ustalonego punktu O okręgu toczącego się bez poślizgu zewnątrz po okręgu o tym samym promieniu (rys. 2).

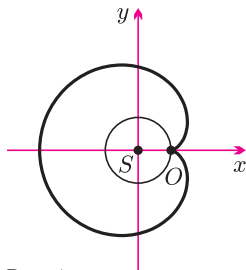


Rys. 2

Jest **spiralą sinusoidalną** o parametrze $m = \frac{1}{2}$, co oznacza, że w biegunowym układzie współrzędnych (rys. 3) ma równanie $\rho^{\frac{1}{2}} = 2r^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi$.



Rys. 3



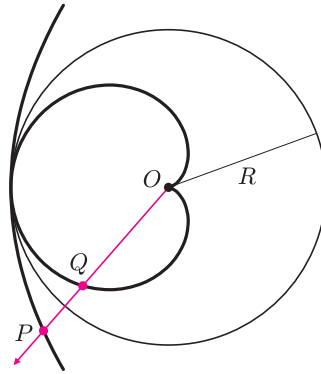
Rys. 4

Jest **krzywą algebraiczną** czwartego stopnia, bo w kartezjańskim układzie współrzędnych (rys. 4) ma równanie

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2((x - r)^2 + y^2) = 0.$$

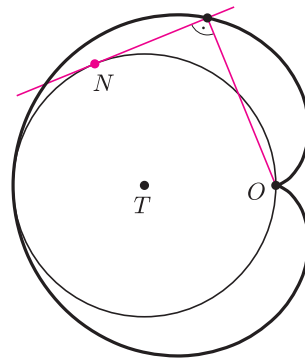
ii

Jest **obrazem inwersyjnym paraboli** względem okręgu o środku O stycznego do kardioidy, co oznacza, że dla punktów Q kardioidy punkty P leżące na półprostej OQ i spełniające warunek $OP \cdot OQ = (4r)^2$ tworzą parabolę (rys. 5).



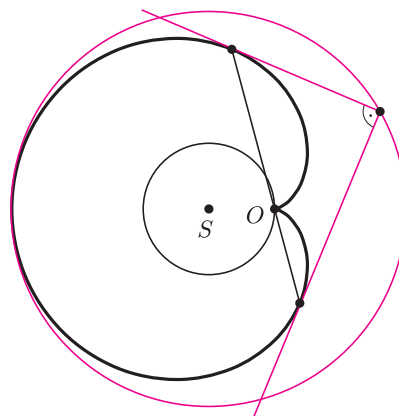
Rys. 5. $OP \cdot OQ = R^2$.

Jest **krzywą spodkową okręgu** względem jego ustalonego punktu O , co oznacza, że rzuty prostokątne O na styczne do okręgu leżą na kardioidzie (rys. 6).

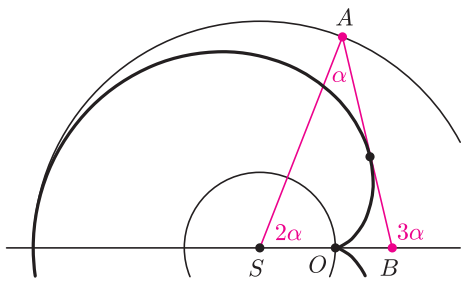


Rys. 6

Styczne do kardioidy w jej punktach antypodycznych (to jest leżących na prostej przechodzącej przez O) są prostopadłe, co więcej, przecinają się na okręgu o środku S , stycznym do kardioidy (rys. 7).



Rys. 7



Rys. 8. $SA = 3SO$.

Za pomocą kardiody można wykonać trysekcję kąta. Mianowicie, jeżeli styczna do kardiody przecina okrąg o środku S i promieniu $3r$ w punkcie A , a oś symetrii kardiody w punkcie B , to kąt SAB jest jedną trzecią kąta zewnętrznego trójkąta SAB przy wierzchołku B (rys. 8).

A to, oczywiście, nie wszystko.

Marek KORDOS

Co dały zaćmienia Słońca?

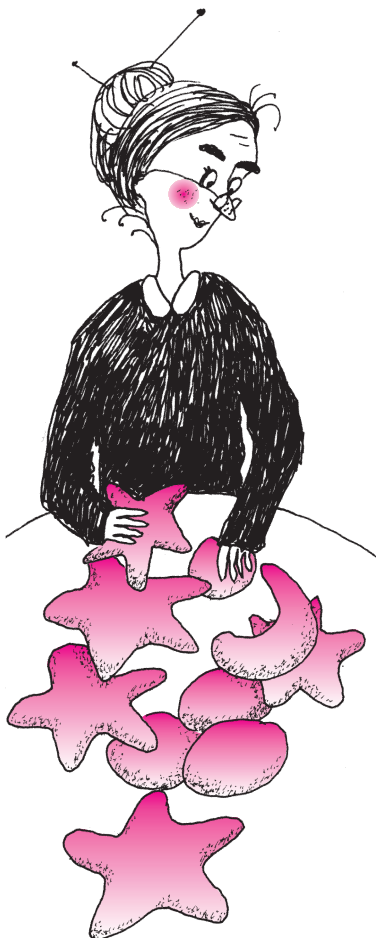
Do dziś całkowite zaćmienia Słońca budzą zainteresowanie nie tylko z powodu swojej efektowności. Rejestracja tzw. kontaktów Słońca i Księżycy (tj. momentów, gdy tarcze tych ciał są chwilowo styczne – zewnętrznie lub wewnętrznie) stwarza możliwość sprawdzania poprawności teorii ruchu ciał w Układzie Słonecznym. A co poza tym?

Francuski uczony Pierre J.C. Janssen obserwował zaćmienie Słońca w Indiach 18 sierpnia 1868 r. za pomocą trochę wcześniej wynalezionej spektroskopu. Tuż przed fazą całkowitości i tuż po niej zobaczył w widmie Słońca silną żółtą linię emisyjną, którą poprawnie utożsamił ze znaną linią sodu. Wiadomo już wtedy było, że jest ona podwójna, jednak w widmie Słońca parze tej towarzyszyła tajemnicza trzecia linia. Badacz uznał, że tworzy ją nieznaną dotąd pierwiastek. Angielski astronom J. Norman Lockyer niezależnie doszedł do tego samego wniosku i na cześć Słońca nazwał ten pierwiastek helem (Helios – grecki bóg Słońca). Hel, ten najobficiej – po wodorze – występujący we Wszechświecie pierwiastek, do roku 1895 nie był w ogóle znany z laboratorium.

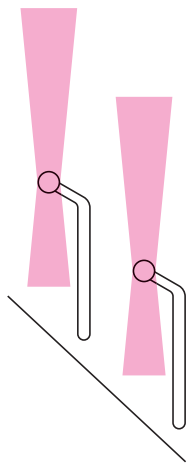
7 sierpnia 1869 r. amerykańscy astronomowie Charles A. Young i William Harkness niezależnie wykryli podczas zaćmienia Słońca w widmie jego korony słabą zieloną linię nieznanego pochodzenia. Hipotetyczny pierwiastek odpowiedzialny za tę linię widmową nazwano koronium. Wtedy jednak układ okresowy pierwiastków był już niemal kompletny i było jasne: dla koronium nie ma w nim miejsca. Zagadkę wyjaśnili dużo później Niemiec Walter Grotrian (1939) i Szwed Bengt Edlen. Stwierdzili mianowicie, że zieloną linię dają atomy żelaza pozbawione 13 elektronów. Tak wysoka jonizacja żelaza dowodziła, że korona słoneczna jest niezmiernie gorąca, a własności trzynastokrotnie zjonizowanego żelaza świadczyły dodatkowo o tym, że pod względem gęstości korona jest praktycznie próżnią.

Wreszcie zaćmienie 29 maja 1919 r. umożliwiło wykonanie precyzyjnych pomiarów pozycji gwiazd należących do gromady Hyad, na tle której znajdowało się wtedy Słońce. Dzięki tym pomiarom grupa angielskich astronomów, którą kierował Arthur S. Eddington, stwierdziła przesunięcia obrazów gwiazd wywołane ugięciem światła w polu grawitacyjnym Słońca, a przewidywanym przez ogólną teorię względności Einsteina. Fakt ten uczynił Einsteina postacią słynną w całym świecie. Obserwacje powtórzone później wielokrotnie z takim samym pozytywnym skutkiem, a w czasach już nam bliskich również na falach radiowych, których źródłem były kwazary. Te ostatnie obserwacje oczywiście już nie wymagały zaćmienia.

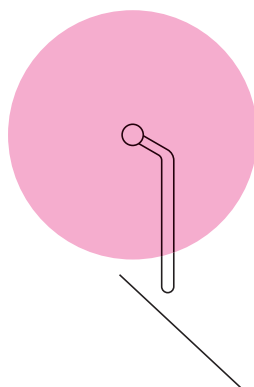
Tomasz KWAST



Słupy na niebie



Rys. 1



Rys. 2

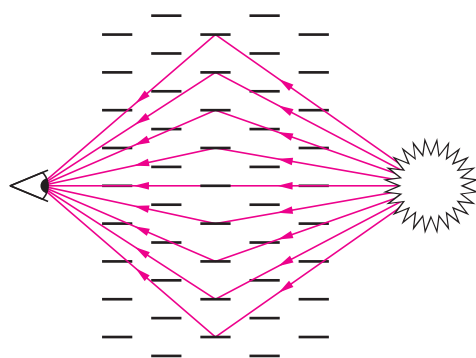
Zdarzyło mi się zeszłorocznej zimy obserwować ciekawe zjawisko. Podczas jednej z najbardziej mroźnych nocy, a jednocześnie dość pogodnej, zauważyłem, że ze wszystkich jaśniejszych miejskich lamp ulicznych strzelają w górę słupy światła podobne trochę do smug wycelowanych pionowo silnych reflektorów (rys. 1). Jednak na słupach oświetleniowych na poboczu drogi żadnych takich urządzeń na pewno nie było. Dodam jeszcze, że efekt na pewno nie tworzył się „w oku obserwatora”, bo po pochyleniu głowy kierunek smug pozostawał ten sam. Do wyjaśnienia zjawiska przyda się jeszcze jedna obserwacja: w powietrzu widać było unoszące się niewielkie drobiny, zbyt małe, by je zobaczyć bezpośrednio, lecz widoczne przy podświetlaniu latarką z boku.

Łatwo się domyśleć, że za widok były odpowiedzialne niewielkie drobiny lodu w powietrzu. Szczegółowe wyjaśnienie nie jest jednak takie oczywiste. Wyobraźmy sobie bowiem najpierw, jaki byłby wpływ na widok losowo rozrzuconych w powietrzu kryształków. Każdy z nich odbija silnie światło swoimi ścianami, zwłaszcza gdy kąt padania jest niewielki. Oznacza to, że zaobserwujemy pojaśnienie *dookoła* każdego dalekiego źródła światła (rys. 2).

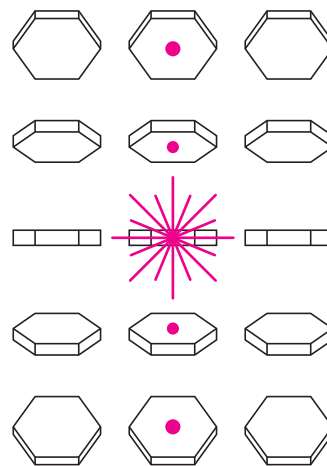
Ale w opisanym przeze mnie zjawisku widać było tylko pojaśnienie nad i pod źródłem światła. Najbardziej zaskakujące jest właśnie naruszenie symetrii tej sytuacji i wyróżnienie kierunku pionowego.

Wyjaśnieniem takiego efektu jest mocno niesymetryczny kształt kryształków lodu. Jeśli są one bardzo płaskie, to – po pierwsze – odbijają światło głównie swoją szeroką, płaską powierzchnią, a niewiele powierzchniami bocznymi.

Po drugie zaś, kryształki bardzo płaskie podczas opadania w atmosferze będą miały tendencję do utrzymywania się raczej poziomo niż pionowo – przypomnijmy sobie sposób opadania liści lub spadochronu. Jeśli zaś kryształki nie są w powietrzu zorientowane przypadkowo, lecz wykazują tendencję do ustawienia poziomego, to najwięcej odbitego światła będziemy obserwować właśnie nad oraz pod źródłem światła (rys. 3) – po prostu na lewo i na prawo od źródła światła możemy obserwować tylko odbicie od małych, bocznych ścianek.



Rys. 3



To zjawisko, nazywane w meteorologii całkiem odpowiednio *słupami świetlnymi*, można obserwować także wokół naturalnych źródeł światła, np. zachodzącego Słońca czy Księżyca. W tej sytuacji kryształki lodu znajdują się jednak na dosyć dużej wysokości, tworząc np. wysoką chmurę typu *cirrus*.

Mikołaj KORZYŃSKI

Z nożyczkami na Pitagorasa

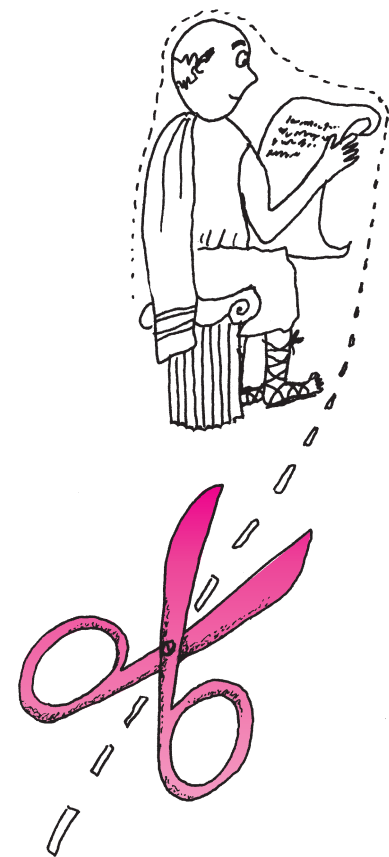
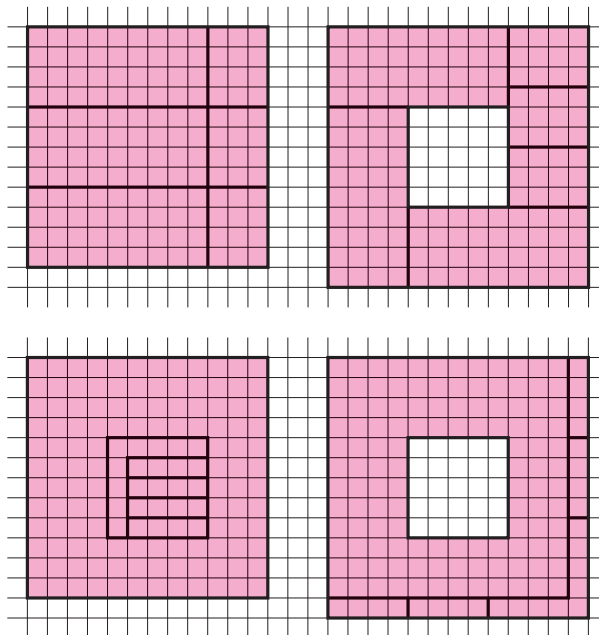
Ponieważ $5^2 = 4^2 + 3^2$, więc jeśli na środku kwadratu A o boku 5 wytniemy kwadrat B o boku 3, to C – to, co zostanie, będzie miało pole równe polu kwadratu D o boku 4. Można więc kwadrat D pociąć na kawałki, z których ułoży się figurę C . Jaka jest najmniejsza liczba części, które pozwalają to wykonać?

Nie wiem, ale wydaje mi się, że cztery. Na cztery odpowiednie części umiem pociąć D nawet na różne sposoby. Oto dwa z nich.



Ale jak zręcznie przeprowadzić dowód, że trzy części nie wystarczą?

Oczywiście, mamy również $13^2 = 12^2 + 5^2$, a więc dla liczb 13, 12 i 5 możemy postawić podobne pytanie. Tu najmniejsza liczba części, przy której umiem zrealizować odpowiednie pocięcie, jest równa sześć. Umieję to zrobić też na wiele sposobów. Poniżej znów prezentuję dwa.



Ale słyszałem, że można wykonać to za pomocą czterech części. Może któryś z Czytelników potrafi? Podobnie chętnie wydrukujemy dowód, że jakaś liczba jest najmniejszą liczbą części, dla której podzielenie kwadratu tak, aby dał się z tego ułożyć „pierścień kwadratowy”, jest możliwe.

Ciekaw też jestem, jak wygląda sytuacja dla innych pitagorejskich trójek liczb, czyli liczb całkowitych dodatnich a , b , c , spełniających równość $c^2 = b^2 + a^2$. „Kolejna” taka trójka to 17, 15 i 8. Trzeba by zatem pociąć kwadrat o boku 8 na części, z których da się ułożyć kwadrat o boku 17 z wyciętym na środku kwadratem o boku 15 (tutaj od razu widzę pocięcie na osiem części, ale czy można mniej?).

Dla tych, którzy chcieliby sięgać do jeszcze innych trójek pitagorejskich, przypominam, że wszystkie

trójki można uzyskać, biorąc dowolne liczby całkowite dodatnie d , m , n , przy czym ma być $m > n$, i podstawiając

$$c = d(m^2 + n^2), \quad b = 2dmn, \quad a = d(m^2 - n^2).$$

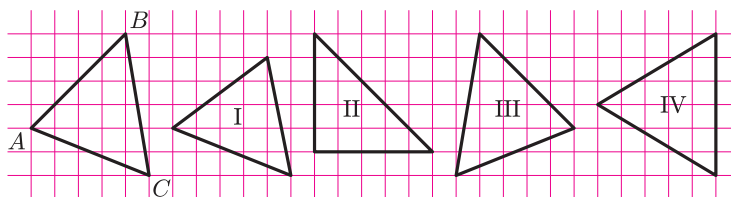
Otrzymamy wtedy każdą trójkę, ale niektóre wielokrotnie, np. dla $d = 1$, $m = 3$, $n = 1$ i dla $d = 2$, $m = 2$, $n = 1$ otrzymujemy te same liczby, choć w różnym porządku. Liczby te zresztą pokazują drugą wadę wskazanej tu ogólnej recepty na liczby pitagorejskie: trójka (10, 8, 6) z punktu widzenia naszego zadania nie różni się istotnie od trójki (5, 4, 3).

Uwaga: podane wzory będą dawały każdy trójkąt jeden raz, gdy m i n nie będą miały wspólnego dzielnika większego od 1 i jedna z nich będzie parzysta.

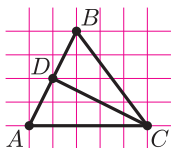
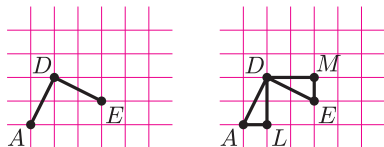
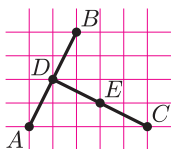
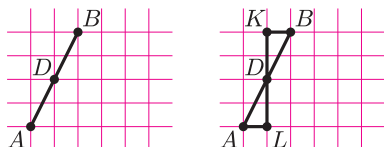
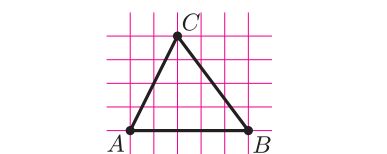
Marek KORDOS

Równanie Pitagorasa

Pomysł tego artykułu powstał na lekcji matematyki w I klasie gimnazjum. Rozwiązywałem z uczniami zadanie 3 (str. 85) z podręcznika wydanego przez Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe: który z narysowanych trójkątów jest przystający do trójkąta ABC ?



Odpowiedź, że trójkąt III, była oczywista. Trochę mniej oczywiste było to, że pozostałe trójkąty nie są przystające. Wtedy zadałem sobie pytanie: jak bez twierdzenia Pitagorasa (a jeszcze go nie było!) przekonać moich uczniów, że jakieś odcinki narysowane na papierze w kratkę są lub nie są równe? Weźmy najprostszy przykład. Jak pokazać, że przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 3 i 4 ma długość 5? Inaczej mówiąc, jak pokazać, że trójkąt ABC na rysunku obok jest równoramienny? Okazało się to dość łatwe. Potrzebne były trzy rysunki pomocnicze. Z lewej strony mamy pierwszy z nich. Jak pokazać, że punkty A , D i B są współliniowe? Uczniowie szybko dostrzegli przystające trójkąty ADL i BDK (rys. z prawej strony). Zatem kąty ADL i BDK są równe, więc z twierdzenia o kątach wierzchołkowych (nikt nie zawracał tu sobie głowy czymś takim, jak twierdzenie odwrotne...) wynika, że punkty A , D i B są współliniowe. A więc punkty D , E i C na następnym rysunku też są współliniowe. Potrzebny był jeszcze kąt ADE . Narysowałem trzeci rysunek i zapytałem, jak dowiedzieć, że kąt ADE jest prosty? Uczniowie zaproponowali kilka rozwiązań. Najprostsze z nich polegało na zauważeniu, że trójkąty ADL i EDM są przystające, zatem „to, co z kąta prostego zabraliśmy kątem EDM , oddaliśmy z powrotem kątem ADL ”. Mogliśmy teraz powrócić do pierwszego rysunku, na którym dorysowaliśmy odcinek CD . Uczniowie już natychmiast dostrzegli, że trójkąty ADC i BDC są przystające, więc $AC = BC$.



Niektórzy uczniowie byli nieco zdziwieni tym, że taki odcinek „ukośny” okazał się być równy „prostemu” (tzn. poziomemu). Trochę mnie zastanowiła pełna zdegustowania mina jednej uczennicy, zdająca się mówić: i po co to wszystko? Zrozumiałem po najbliższej klasówce, na której dałem zadanie podobne z trójkątem o przyprostokątnych 5 i 12. Rozwiązanie tej uczennicy było krótkie:

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2, \text{ c. b. d. o.}$$

Te proste dowody geometryczne nie odwołujące się do twierdzenia Pitagorasa, skłoniły mnie do zastanowienia się nad geometrycznym rozwiązaniem równania Pitagorasa w liczbach całkowitych. Przedstawię teraz to rozwiązanie. Mamy więc równanie

$$x^2 + y^2 = z^2$$

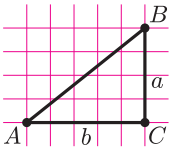
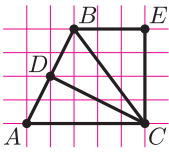
i zakładamy, że x , y i z są całkowite. Łatwo pokazujemy, że co najmniej jedna z liczb x i y jest parzysta. Gdyby bowiem

$$x = 2k + 1 \quad \text{i} \quad y = 2l + 1,$$

to

$$z^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2,$$

vi



więc liczba z^2 byłaby parzysta i niepodzielna przez 4, co jest niemożliwe. Załóżmy zatem, że liczba y jest parzysta. Zauważmy, że wtedy liczby x i z są tej samej parzystości. Narysujmy teraz trójkąt prostokątny BCE o bokach x , y i z na papierze kratkowanym tak jak na rysunku obok. Wierzchołki A , B , C i E leżą w punktach kratowych, przy czym:

$$BE = x, \quad CE = y, \quad BC = AC = z.$$

Ponieważ liczby y i $z - x$ są parzyste, więc środek D odcinka AB też leży w punkcie kratowym. Zastanówmy się teraz, jakie punkty kratowe mogą leżeć na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego położonego w taki sposób, że przyprostokątne leżą na liniach tworzących kratki.

Lemat 1. Jeśli w trójkącie ABC , takim jak na rysunku obok, $\text{NWD}(a, b) = 1$, gdzie $BC = a$ i $AC = b$, to jedynymi punktami kratowymi leżącymi na przeciwprostokątnej AB są jej końce A i B .

Dowód lematu wynika dość łatwo z twierdzenia Talesa, ale poradzimy sobie bez niego.

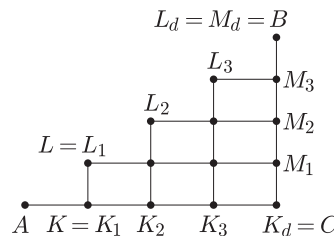
Dowód. Przypuśćmy, że na przeciwprostokątnej leżą inne punkty kratowe i niech P będzie takim punktem leżącym najbliżej wierzchołka A . Niech Q będzie rzutem punktu P na bok AC . Niech $p = PQ$ i $q = AQ$. Odłóżmy następnie odcinek AP w odcinku AB tyle razy, ile się da. Niech punkt R będzie ostatnim z otrzymanych tak punktów przed wierzchołkiem B . Niech wreszcie punkt S będzie rzutem punktu R na bok BC . Podobnie jak na lekcji w gimnazjum pokazujemy, że wszystkie punkty na przeciwprostokątnej, otrzymane w wyniku odkładania odcinka AP , są kratowe. W szczególności punkty R i S są kratowe. Przypuśćmy najpierw, że $RS < AQ$. Weźmy taki punkt T na odcinku AQ taki, że $AT = RS$ i weźmy punkt U przeciwprostokątnej, że $UT \perp AT$. Oczywiście trójkąty ATU i RSB są przystające, więc $TU = SB$, skąd wynika, że punkt U jest punktem kratowym, co przeczy wyborowi punktu P . Zatem $RS = AQ$, czyli odcinek AP został odłożony w odcinku AB całkowitą liczbę razy, powiedzmy d razy. Oczywiście $d \geq 2$. Wtedy $a = dp$ i $b = dq$, co przeczy temu, że liczby a i b są względnie pierwsze.

Wniosek. Jeśli $\text{NWD}(a, b) = 1$, punkt M leży na półprostej AB , N jest rzutem punktu M na prostą AC , $MN = m$ oraz $AN = n$, to istnieje liczba całkowita d taka, że $m = ad$ i $n = bd$.

Lemat 2. Zachowajmy oznaczenia z lematu 1. Jeśli a i b mają wspólny dzielnik większy od 1, to na przeciwprostokątnej AB istnieją inne punkty kratowe poza jej końcami.

Dowód. Niech $a = dk$ i $b = dl$. Narysujmy trójkąt prostokątny AKL o przyprostokątnych k i l , a następnie odłóżmy d razy odcinek AK w odcinku AC i d razy odcinek KL w odcinku CB , otrzymując punkty

$$K_1 = K, K_2, \dots, K_d = C \quad \text{oraz} \quad M_1, M_2, \dots, M_d = B.$$



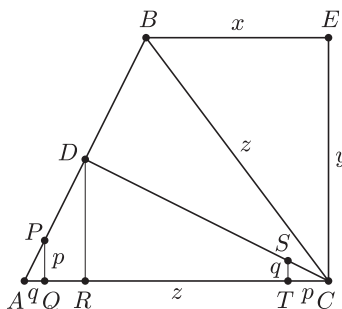
Niech następnie punkt kratowy L_i (dla $i = 1, 2, \dots, d$) będzie punktem, którego rzutami na proste AC i BC są odpowiednio punkty K_i oraz M_i .

Pokazujemy, że punkty

$$A, L_1, L_2, \dots, L_d = B$$

są współliniowe, a więc punkty L_i dla $i = 1, \dots, d - 1$ leżą na przeciwprostokątnej AB .

Powróćmy do naszego trójkąta prostokątnego o bokach długości x , y i z . Niech P będzie punktem kratowym leżącym na odcinku AD najbliższym punktu A , a Q jego rzutem na AC .



Niech następnie $PQ = p$ i $AQ = q$. Z lematu 2 wynika, że $\text{NWD}(p, q) = 1$. Z wniosku wynika, że istnieje liczba całkowita d taka, że

$$AR = \frac{z-x}{2} = dq \quad \text{oraz} \quad DR = \frac{y}{2} = dp,$$

gdzie R jest rzutem D na AC . Odlóżmy następnie odcinek $CT = p$ na półprostej CA i niech S będzie takim punktem półprostej CD , że $TS \perp CT$. Ponieważ $CD \perp AD$, więc kąty TCS i QAP są równe, a zatem trójkąty CTS i PQA są przystające. Stąd wynika, że $ST = q$, więc punkt S jest punktem kratowym. Z lematu 1 wynika, że istnieje liczba całkowita e taka, że

$$CR = z - \frac{z-x}{2} = \frac{z+x}{2} = ep \quad \text{oraz} \quad DR = \frac{y}{2} = eq.$$

Zatem

$$\frac{y}{2} = dp = eq,$$

skąd wynika, że q jest dzielnikiem dp . Ponieważ liczby p i q są względnie pierwsze, więc q jest dzielnikiem d . Istnieje więc liczba całkowita t taka, że $qt = d$. Mamy teraz

$$eq = dp = qtp,$$

czyli $e = tp$. Zatem

$$\frac{z-x}{2} = dq = tq^2,$$

$$\frac{z+x}{2} = ep = tp^2,$$

$$\frac{y}{2} = dp = tpq,$$

skąd ostatecznie dostajemy

$$(*) \quad x = t(p^2 - q^2), \quad y = 2tpq, \quad z = t(p^2 + q^2).$$

Dla każdego rozwiązania (x, y, z) równania

$$x^2 + y^2 = z^2$$

istnieją liczby całkowite t , p i q takie, że spełnione są równości (*).

Z drugiej strony, łatwo sprawdzić, że jeśli x , y i z są określone wzorami (*), to spełniają równanie Pitagorasa.

Wojciech GUZICKI

