

SPIS TREŚCI NUMERU 11 (366)

Cassini-Huygens – misja na Saturna <i>Paweł Pietrukowicz</i>	str. 1
Zadania <i>Marcin Peczański</i>	str. 3
Sortowanie z minimalną liczbą porównań <i>Marcin Peczański</i>	str. 4
Kwantowe efekty grawitacji <i>Paweł Tomasz Pęczkowski</i>	str. 6
Mała Delta: Salon gier losowych	str. 8
Problem najlepszego wyboru <i>J. Jakubowski, R. Sztencel</i>	str.10
Europejski Projekt Interferometru <i>Jean Surdej</i>	str.13
Aktualności	str.14
Klub 44	str.15
Patrz w niebo	str.16
Listopad	str.16
Kącik biologiczny	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 5450, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numerzy archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Gwiazda Betlejemka

Cassini–Huygens – misja na Saturna

Paweł PIETRUKOWICZ

Saturn – szosta według odległości od Słońca planeta Układu Słonecznego była znana już w starożytności, ale dopiero skonstruowane w XVII wieku układy optyczne, jak luneta czy teleskop zwierciadlany, ukazały prawdziwe oblicze planety z pierścieniami. We wczesnych badaniach Saturna wsławił się Holender Christian Huygens (1629–1695), odkrywca największego księżyca planety Tytana oraz Francuz włoskiego pochodzenia Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), który odkrył przerwę w pierścieniach i cztery kolejne satelity. Na ich cześć amerykańska agencja kosmiczna NASA nadała swojej sondzie-orbiterowi nazwę Cassini, a europejska ESA podczepionemu do sondy lądownikowi, który ma osiąść na powierzchni Tytana, nadała nazwę Huygens.

Pomysł wysłania sondy mającej szczegółowo zbadać układ Saturna narodził się już w pierwszych latach astronautyki (przełom lat 50. i 60. XX wieku), ale dopiero w latach 80. uzyskano fundusze i zaczęto poważnie planować przebieg takiej misji. Wówczas impulsem do realizacji projektu było mnóstwo niejasności i pytań pozostawionych bez odpowiedzi, które powstały po analizie danych przesłanych przez mijające Saturna próbniki Voyager 1 (VII 1980) i Voyager 2 (VIII 1981).

Misja Cassini-Huygens to najdroższa (około 3,5 mld dolarów) i trwająca wiele lat misja międzyplanetarna zorganizowana przez 28 państw, w tym Polskę. Jest to zarazem największa sonda wysłana kiedykolwiek przez człowieka, bowiem jest wielkości małego autobusu (długość 6,7 m). Start miał miejsce 15 października 1997 roku. W trakcie podróży do układu Saturna sonda mijiała Wenus (dwukrotnie: IV 1998, VI 1999), Ziemię (VIII 1999) i Jowisza (XII 2000). Przelot w pobliżu tych planet umożliwił wyłącznie grawitacyjne (bez zużycia paliwa) zwiększenie prędkości sondy. Wejście na orbitę wokół Saturna planowane było na 1 lipca 2004 r. Nie oznacza to jednak, że wszelkie eksperymenty naukowe na pokładzie sondy rozpoczęły się dopiero tego dnia. Już mijając Jowisza Cassini, wraz z okrążającym tę planetę od 1995 roku próbnikiem Galileo (patrz Delta 3/2004), prowadził intensywne badania jej atmosfery i magnetosfery. Ponadto precyzyjna analiza położenia Cassiniego w drodze do Saturna umożliwiła poszukiwanie fal grawitacyjnych i tym samym testowanie ogólnej teorii względności Einsteina.

Najważniejsze informacje, jakie dotychczas posiadamy o Saturnie, to między innymi jego parametry fizyczne, takie jak promień równikowy (60 000 km = 9,4 razy promień Ziemi), masa (95 razy masa Ziemi), okres rotacji (10 h 40 min). Wiadomo, że Saturn jest gazowym olbrzymem, a to, co obserwujemy, to atmosfera planety, składająca się w około 89% z wodoru cząsteczkowego, 11% z helu i domieszek metanu w postaci chmur. Co ciekawe Saturn ma średnią gęstość równą zaledwie 0,71 g/cm³. Gdybyśmy umieścili planety Układu Słonecznego w wielkim oceanie, to jako jedyny pływałby po powierzchni wody. Szybka rotacja powoduje, że Saturn jest silnie spłaszczony (promień biegunowy to 90% promienia równikowego); również i w tym jest rekordzistą pośród planet. W atmosferze wieją huraganowe wiatry osiągające prędkość 1800 km/h. Obserwacje w podczerwieni pokazały, że Saturn emituje o 87% więcej energii niż otrzymuje ze Słońca. Pomimo to temperatura umownej powierzchni planety wynosi zaledwie –180°C.

Wielką zagadką jest budowa wewnętrzna Saturna. Przypuszcza się, że planeta ta ma skalno-lodowe jądro wielkości 1/4 średnicy całego globu. Bardzo możliwe, że w warstwie powyżej jądra ciśnienie jest na tyle duże, że powłoki elektronowe atomów wodoru „zachodzą” na siebie i ośrodek staje się przewodzący, tak jak metal. Takie właściwości wnętrza planety mogą być odpowiedzialne za obecność silnego pola magnetycznego Saturna, które często przejawia się w postaci zórz polarnych. Dodatkowo, niedawne obserwacje Saturna, wykonane przez okrążającego Ziemię satelitę Chandra, wskazują na znaczną emisję





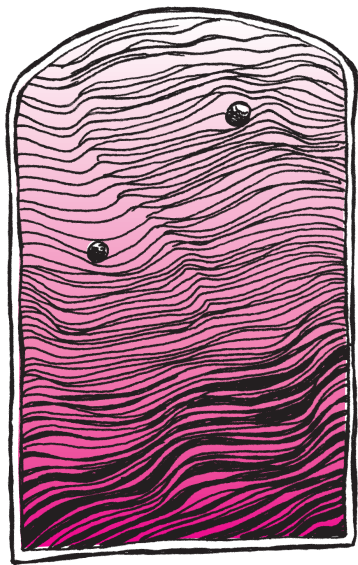
promieniowania rentgenowskiego z obszarów równikowych w porównaniu z obszarami polarnymi. Kontrastuje to z obserwacjami Jowisza. Wiele z tych wątpliwości ma rozwiązać właśnie sonda Cassini zaopatrzona w kamery wizualne z licznymi filtrami, spektrometry w zakresach od podczerwieni do nadfioletu czy magnetometr.

Prócz samego globu wielkim zainteresowaniem cieszą się oczywiście wspaniałe pierścienie Saturna, które rozciągają się już od 1,1 promienia planety (licząc od jej centrum), spośród których wyróżnia się siedem głównych pierścieni, oznaczonych literami kolejno (od Saturna): D, C, B, A, F, G, E. Nie są one tworem sztywnym, lecz składają się z ogromnej ilości brył wielkości od mikrometrów do kilku metrów, obiegających planetę z okresem od 5 godzin do kilku dni. Bryły te pokryte są lodem wodnym, dzięki czemu pierścienie bardzo dobrze odbijają światło słoneczne. Przerwy występujące pomiędzy głównymi pierścieniami oraz w nich samych są całkowicie puste albo wypełnione wyłącznie bardzo drobnymi bryłkami rzędu mikrometrów (jak np. przerwa Cassiniego pomiędzy pierścieniami A i B). Jest to rezultat oddziaływania grawitacyjnego, tzw. rezonansu z satelitami Saturna. Ponadto obserwuje się zmienność czasową pierścieni w postaci zgrubień, przeplatania się i ciemnych radialnych struktur. Bardzo możliwe, że owe ciemne pasma (tzw. szprychy) przemieszczają się po pierścieniach pod wpływem pola magnetycznego planety. Dzięki sondzie Cassini powinniśmy zmierzyć dokładnie grubość pierścieni, rozkład i wielkość brył, a także ich skład chemiczny. Intrygujące jest też pytanie o przeszłość i przyszłość pierścieni. Aktualna hipoteza mówi, że powstały przez rozpadnięcie się ciała (być może satelity Saturna) o średnicy do 400 km i będzie można je podziwiać jeszcze tylko przez kilka milionów lat.

Saturna otacza cała chmara satelitów, których naliczono aż 31 (stan na luty 2004). Są to głównie niewielkie i nieregularne ciała skalno-lodowe wielkości kilkudziesięciu kilometrów. Przykładowo satelita Pan wielkości około 20 km okrąża planetę wewnątrz przerwy Enckego (mieszczącej się w pierścieniu A), zaś para satelitów Prometeusz i Pandora (rozmiar rzędu 50 km) strzeże pierścienia F przed „rozpłynięciem się” w wyniku zderzeń cząstek tworzących ten pierścień. Stąd też tego typu księżyce nazywamy księżycami pasterskimi. Inny mały satelita – Phoebe (średnica około 220 km), który obiega Saturna w odległości aż 13 mln km (w przybliżeniu 34 razy dalej niż Księżyc Ziemi) w kierunku przeciwnym niż pozostałe satelity, jest prawdopodobnie przechwyconą planetoidą.

Księżyce średniej wielkości jak Rhea (średnica 1530 km), Dione (1120 km) czy Tethys (1050 km) to gęsto usiane kraterami kule pokryte lodem wodnym. Ciekawostką jest tu Iapetus (1440 km), którego powierzchnia dzieli się na dwa porównywalnej wielkości obszary, ale o drastycznie różnym stopniu odbicia światła (odpowiednio 50% i 3%). Cassini ma zbadać skład chemiczny tych obszarów. Być może ciemniejszy składa się z materii organicznej. Poza tym, być może sondzie uda się wyjaśnić, dlaczego powierzchnia Enceladusa (średnica 500 km) jest geologicznie młoda, o czym świadczy stosunkowo nieduża liczba kraterów, a także czy ten księżyc jest źródłem odłamków tworzących najbardziej zewnętrzną pierścień E.

Bez wątpliwości ogromną zagadką jest największy księżyc Saturna – Tytan. Jego średnica wynosi 5150 km, co plasuje go na drugim miejscu (po Ganimedesie obiegającym Jowisza) pod względem wielkości spośród satelitów planet. Tytan jest nawet większy od Plutona i Merkurego. Jako jedyny księżyc w naszym układzie planetarnym ma grubą atmosferę. Tak gęstą, że nawet kamery próbników Voyager nie mogły dostrzec niczego na powierzchni. W świetle widzialnym Tytan jawi się jako pomarańczowa kula bez żadnych widocznych struktur. Odnośnie atmosfery wiadomo, że jest około 10 razy grubsza od ziemskiej, a ciśnienie na powierzchni jest o 60% wyższe niż na Ziemi. Tworzą ją głównie cząsteczki azotu (95%) z domieszką metanu i etanu. Zdjęcia (niestety niewystarczającej rozdzielczości) wykonane przez Kosmiczny Teleskop Hubble'a w podczerwieni ukazują obszary jaśniejsze i ciemniejsze na powierzchni.



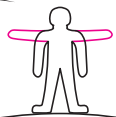
Uwzględniając fakt, że jej prawdopodobna temperatura to zaledwie -180°C można snuć domysły, że występują tam morza płynnego etanu oraz stałe lądy.

Dokładną mapę powierzchni Tytana ma sporządzić radar sondy Cassini. Jednakże zasadniczą część informacji o tym obiekcie ma uzyskać lądownik Huygens, który obecnie jest przytwierdzony do sondy macierzystej. Kontrolerzy misji zaplanowali odłączenie na 25 grudnia 2004 r. (trzeci obieg Cassiniego wokół Saturna), a lądowanie na Tytanie na 14 stycznia 2005 r. W trakcie 2,5-godzinnego przelotu przez atmosferę Huygens ma zmierzyć jej parametry fizyczne (takie jak temperaturę, gęstość, przewodnictwo cieplne), zbadać skład chemiczny, oszacować prędkość wiatrów i wykonać kilkadziesiąt zdjęć. Warto tutaj odnotować, że przyrząd do pomiaru temperatury został skonstruowany przez naukowców z Centrum Badań Kosmicznych PAN w Warszawie. Po etapie opadania na spadochronach aparat jest przygotowany do lądowania na twardym gruncie albo w cieczy. Przewiduje się, że z powodu niskiej temperatury i stąd szybkiego rozładowywania się baterii misja na powierzchni potrwa do 30 minut. Dane z Huygensa mają trafić drogą radiową najpierw do sondy macierzystej, a dopiero potem na Ziemię.

Zakłada się wstępnie, że badania układu Saturna potrwają 4 lata. Przez ten czas Cassini okrąży planetę około 80 razy po różnej wielkości i różnie nachylonych orbitach, za każdym razem zbliżając się do Tytana i sporadycznie mijając inne księżyce. Jeśli po 2007 roku sonda będzie działać sprawnie, to być może wykona bardziej ryzykowne manewry, jak np. przelot przez pierścień G.



Zadania



Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 631. Polarnik stoi na biegunie północnym. W pewnym momencie unosi ręce do poziomu (rys. 1). Oszacować, o ile z tego powodu wydłuży się ziemską doba (gwiazdowa).

Rozwiązanie na str. 15

F 632. Ten sam polarnik rzuca śnieżką do celu odległego o 30 m pod kątem 45° do poziomu. O ile chybi celu z powodu siły Coriolisa? Pomiąć wpływ powietrza.

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

M 1078. Liczby x i y są całkowite. Wykazać, że liczba $2x + 3y$ jest podzielna przez 17 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $9x + 5y$ jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie na str. 16

M 1079. Cięciwa AB okręgu o promieniu 1 przecina pewną średnicę tego okręgu w punkcie C i jest nachylona do niej pod kątem 45° (rys. 2). Obliczyć $AC^2 + BC^2$.

Rozwiązanie na str. 6

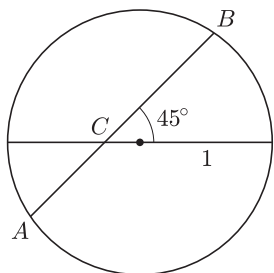
M 1080. W trapezie $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami podstaw AB i CD (rys. 3) oraz zachodzi równość

$$MN = \frac{AB - CD}{2}.$$

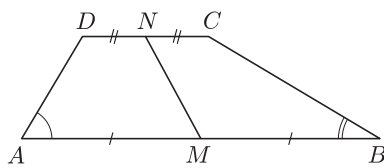
Wykazać, że $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 90^{\circ}$.

Rozwiązanie na str. 6

Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Sortowanie skończonego zbioru polega na ustawieniu go w ciąg według niemalejącej wartości jakiejś cechy. Na przykład zbiór znaczków pocztowych możemy ustawić według ich wartości. Jedną z metod sortowania jest wykonanie pewnej liczby porównań par elementów. Pojedyncze porównanie dostarcza nam informacji, który z dwóch porównywanych elementów powinien znaleźć się wcześniej w tworzonym ciągu. Gdyby zdarzyło się, że porównywane elementy mają tę samą wartość rozważanej cechy, to ustalamy ich kolejność w dowolny sposób. Z pewnością uda się posortować dany zbiór, gdy porównamy każdy element z każdym. Dla zbioru n -elementowego oznacza to konieczność wykonania

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

porównań. Tyle w pesymistycznym przypadku potrzebuje algorytm *sortowania przez wstawianie*. Działa on w ten sposób, że kolejno dla $k = 1, 2, \dots, n$ do posortowanego już ciągu $k-1$ elementów wstawiamy k -ty element, porównując go (w najgorszym przypadku) ze wszystkimi dotychczas rozważonymi elementami. Można lepiej. Aby wstawić element x do posortowanego ciągu u_1, u_2, \dots, u_j , porównujemy go najpierw z elementem „środkowym” u_i , gdzie $i = \lceil j/2 \rceil$. Jeśli x poprzedza u_i , to z przechodniości relacji porządku wiemy, że poprzedza wszystkie elementy na prawo od niego (o większych indeksach) i musimy wstawić x do ciągu u_1, u_2, \dots, u_{i-1} . Analogicznie, gdy u_i poprzedza x , to x powinien znaleźć się na prawo od u_i , czyli musimy go wstawić do ciągu $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j$. Powtarzamy powyższą procedurę, za każdym razem wybierając nowy element środkowy. Każde porównanie zmniejsza co najmniej dwukrotnie długość ciągu, do którego należy wstawić x . W pewnym momencie ciąg ten będzie miał długość 0. Oznacza to, że x znalazł się na właściwej pozycji. Dla wstawienia k -tego elementu potrzeba co najwyżej $\lceil \lg_2 k \rceil$ porównań. *Sortowanie ze wstawianiem binarnym* wymaga zatem

$$B_n = \sum_{k=1}^n \lceil \lg_2 k \rceil = n \lceil \lg_2 n \rceil - 2^{\lceil \lg_2 n \rceil} + 1$$

porównań. Dodajmy, że stosowany praktycznie algorytm *quicksort* dla dużych n wykonuje średnio około $1,4 \cdot n \lg_2 n$ porównań, choć sporadycznie w pesymistycznym przypadku potrzebuje ich około $n^2/2$.

Hugo Steinhaus postawił problem znalezienia minimalnej liczby porównań S_n zawsze wystarczającej do posortowania n elementów. Każde porównanie może dać dwa wyniki. Zatem algorytm wykonujący co najwyżej S_n porównań może zakończyć się co najwyżej 2^{S_n} różnymi wynikami. Z drugiej strony mamy $n!$ możliwych uporządkowań (permutacji) n elementów. Stąd $2^{S_n} \geq n!$, czyli $S_n \geq \lceil \lg_2 n! \rceil$. Liczbę $C_n = \lceil \lg_2 n! \rceil$ nazywamy *teoriainformacyjną dolną granicą sortowania*. Jak bardzo możemy zbliżyć się do tej granicy?

Wiadomo, że $B_n > C_n$ już dla $n > 4$. Lester Ford Jr i Selmer Johnson opublikowali w 1959 roku algorytm, który potrzebuje

$$F_n = \sum_{k=1}^n \lceil \lg_2 \frac{3}{4} k \rceil$$

porównań. Zatem $C_n \leq S_n \leq F_n$. Dla $n \leq 11$ i $n = 20, 21$ problem został rozwiązany, gdyż wtedy $C_n = F_n$. Dla $12 \leq n \leq 19$ zachodzi $F_n = C_n + 1$. Jak wyznaczyć kolejne wartości S_n ? Zapręgnijmy do pracy komputer. Aby formalnie opisać proces sortowania i stosowane metody, będziemy potrzebowali kilku pojęć.

Definicja 1. Porządkiem (częściowym) zbioru U nazywamy relację $r \subseteq U \times U$, która jest:

- zwrotna – $(u, u) \in r$ dla każdego $u \in U$;
- przechodnia – jeżeli $(u, v) \in r$ i $(v, w) \in r$, to $(u, w) \in r$ dla każdego $u, v, w \in U$;
- antysymetryczna – jeżeli $(u, v) \in r$ i $(v, u) \in r$, to $u = v$ dla każdego $u, v \in U$.

Definicja 2. Porządkiem liniowym zbioru U nazywamy relację $r \subseteq U \times U$, która jest porządkiem i jest spójna – $(u, v) \in r$ lub $(v, u) \in r$ dla każdego $u, v \in U$.

Definicja 3. Porządkiem dualnym do porządku r nazywamy relację $r^* = \{(u, v) : (v, u) \in r\}$.

Definicja 4. Porządek r_1 zbioru U_1 i porządek r_2 zbioru U_2 nazywamy izomorficznymi, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f: U_1 \rightarrow U_2$ przekształcająca U_1 na U_2 spełniająca ponadto dla dowolnych $u, v \in U_1$ następujący warunek: $(u, v) \in r_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(f(u), f(v)) \in r_2$.

Definicja 5. Jeżeli r jest porządkiem zbioru U oraz $(u, v) \notin r$ i $(v, u) \notin r$, to przez $r + uv$ oznaczamy porządek $r \cup \{(x, y) : (x, u) \in r \wedge (v, y) \in r\}$ zbioru U . Mówimy, że $r + uv$ jest domknięciem przechodnim zbioru $r \cup \{(u, v)\}$.

Niech $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ będzie sortowanym zbiorem. Sortowanie rozpoczyna się od totalnego nieporządku $r_0 = \{(u_1, u_1), (u_2, u_2), \dots, (u_n, u_n)\}$, czyli w sytuacji, gdy nie znamy relacji pomiędzy żadną parą różnych elementów ze zbioru U . Niech stan sortowania po wykonaniu pewnej liczby porównań reprezentowany będzie przez porządek r . W następnym kroku wybieramy do porównania elementy u_j i u_k , których wzajemnego uporządkowania jeszcze nie znamy, czyli takie że $(u_j, u_k) \notin r$ i $(u_k, u_j) \notin r$. Powiedzmy, że jako wynik porównania uzyskujemy informację: element u_j poprzedza element u_k . Teraz stan sortowania reprezentowany jest przez nowy porządek $r + u_j u_k$. Sortowanie kończy się, gdy uzyskamy porządek liniowy, czyli gdy dla dowolnej pary (u, v) wiemy, czy jest ona w relacji, czy też w relacji jest (v, u) .

Naiwna metoda jest następująca. Zaczynamy od totalnego nieporządku r_0 . Sprawdzamy rekurencyjnie,

czy możemy go posortować za pomocą C_n porównań. Aktualnie rozważany porządek r można posortować za pomocą c porównań wtedy i tylko wtedy, gdy $c \geq 0$ i r jest już posortowany (innymi słowy r jest porządkiem liniowym) albo istnieje para (u_j, u_k) , taka że $(u_j, u_k) \notin r$, $(u_k, u_j) \notin r$ i porządki $r + u_j u_k$, $r + u_k u_j$ można posortować za pomocą $c - 1$ porównań. Niestety liczba przypadków, które należy rozważyć jest tak ogromna, że dla $n = 12$ nie uda się zakończyć sprawdzania w rozsądnym czasie.

Można to zrobić lepiej. Mówimy, że porządki r_1 i r_2 są *przystające*, jeśli są izomorficzne lub porządek r_1 jest izomorficzny z porządkiem dualnym do porządku r_2 . Zauważmy, że jeśli porządki r_1 i r_2 są przystające, to do posortowania wymagają tej samej liczby porównań. Eliminowanie przystających porządków pozwala istotnie zmniejszyć liczbę rozważanych przypadków. Liczbę sposobów, na jakie możemy posortować porządek r nazywamy jego *liczbą rozszerzeń liniowych* i oznaczamy przez $e(r)$. Jeżeli $e(r) > 2^c$, to analogicznie do użytego dla wyznaczenia teorii-informacyjnej granicy rozumowanie daje, że porządku r nie można posortować za pomocą c porównań. Zauważmy ponadto, że jeśli dla danej pary (u_j, u_k) jeden z porządków $r + u_j u_k$, $r + u_k u_j$ okaże się niesortowalny, to drugiego nie musimy już sprawdzać.

Powyższe spostrzeżenia wykorzystał Mark Wells, aby wyznaczyć S_{12} . Zaczynamy od zbioru P_0 zawierającego totalny nieporządek r_0 . Następnie dla $c = 1, 2, \dots, C_n$ tworzymy zbiory P_c porządków, które mogą powstać po c porównaniach. Robimy to tak, aby z niemożliwości posortowania wszystkich porządków z P_c za pomocą $C_n - c$ porównań wynikała niemożliwość posortowania wszystkich porządków z P_{c-1} za pomocą $C_n - c + 1$ porównań. Utożsamiamy przy tym porządki przystające. Dla każdego porządku $r \in P_{c-1}$ rozważamy wszystkie pary (u_j, u_k) , których wzajemne uporządkowanie jest jeszcze nieznanne, czyli $(u_j, u_k) \notin r$ i $(u_k, u_j) \notin r$. Niech

$$r_1 = r + u_j u_k, \quad r_2 = r + u_k u_j.$$

Jeśli $r_1 \notin P_c$, $r_2 \notin P_c$, $e(r_1) \leq 2^{C_n - c}$ i $e(r_2) \leq 2^{C_n - c}$, to dodajemy do P_c ten z porządków r_1 lub r_2 , który ma większą liczbę rozszerzeń liniowych. Jest to uzasadnione przypuszczeniem, że porządek o większej liczbie rozszerzeń liniowych jest trudniejszy do posortowania. Remisy rozstrzygamy dowolnie. Jeśli w wyniku takiego postępowania pewien zbiór P_c okaże się pusty, to żaden z porządków ze zbioru P_{c-1} nie może być posortowany za pomocą $C_n - c + 1$ porównań. W konsekwencji r_0 nie może być posortowany za pomocą C_n porównań, czyli $S_n > C_n$. Mark Wells przeprowadził stosowny eksperyment w 1965 roku i po około 60 godzinach obliczeń komputera Maniac II odkrył, że $S_{12} = F_{12} = 30$.

Wadą metody Wellsa jest to, że może ona wykazać tylko nieistnienie algorytmu sortującego. Dla każdego $r \in P_c$ zachodzi $2^{C_n - c - 1} < e(r) \leq 2^{C_n - c}$. Ponadto $e(r) = 1$

wtedy i tylko wtedy, gdy r jest porządkiem liniowym. Zatem jeśli $P_{C_n} \neq \emptyset$, to P_{C_n} zawiera jakiś porządek liniowy jako jedyny element (wszystkie porządki liniowe są izomorficzne). Niestety nie można na tej podstawie wnioskować o istnieniu algorytmu sortującego. Taka sytuacja ma miejsce dla $n = 13, 14$.

Zaproponowałem następujące rozwiązanie. Wyznaczamy podzbiory $P_c^* \subseteq P_c$ porządków sortowalnych za pomocą $C_n - c$ porównań. Zaczynamy od $P_{C_n}^* = P_{C_n}$. Następnie kolejno dla $c = C_n - 1, C_n - 2, \dots, 0$ sprawdzamy wszystkie porządki ze zbioru P_c . Dla każdego $r \in P_c$ rozważamy wszystkie pary (u_j, u_k) , dla których $(u_j, u_k) \notin r$ i $(u_k, u_j) \notin r$. Niech jak poprzednio $r_1 = r + u_j u_k$, $r_2 = r + u_k u_j$. Porządek r dodajemy do zbioru P_c^* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka para (u_j, u_k) , że $r_1 \in P_{c+1}^*$ i dodatkowo $r_2 \in P_{c+1}^*$ lub $r_2 \notin P_{c+1}^*$ ale r_2 jest sortowalny za pomocą $C_n - c - 1$ porównań, co sprawdzamy rekurencyjnie. Jeśli któryś ze zbiorów P_c^* okaże się pusty, to algorytm sortujący nie istnieje. W przeciwnym przypadku poszukiwany algorytm istnieje i analiza zbiorów P_c^* umożliwi jego skonstruowanie.

Eksperymenty przeprowadzone dla $n = 13, 14$ w latach 2002–2003 wykazały, że w obu przypadkach $P_{15}^* = \emptyset$. Zatem $S_{13} > C_{13} = 33$ i $S_{14} > C_{14} = 37$, a ponieważ $F_{13} = 34$ i $F_{14} = 38$, więc $S_{13} = 34$ i $S_{14} = 38$. Ponadto dla $n = 22$ eksperyment pokazał, że $P_{40} = \emptyset$, czyli

$$C_{22} = 70 < S_{22} = F_{22} = 71.$$

Eksperymenty dla $n = 12, 13, 14, 22$ wykonywały się na moim komputerze odpowiednio 3 s, 41 min, 392 godz., 155 dni.

Na swoich odkrywców czekają $S_{15}, S_{16}, \dots, S_{19}, S_{23}, S_{24}, \dots$. Otwartym problemem pozostaje też znalezienie najmniejszego n , dla którego istnieje algorytm wymagający mniej porównań niż algorytm Forda–Johnsona. Aktualny wynik pochodzi z 1981 roku i należy do Jürgena Schulte Möntinga, który znalazł algorytm sortujący 47 elementów za pomocą 200 porównań, podczas gdy $F_{47} = 201$ ($C_{47} = 198$). Istnieje uzasadnione przypuszczenie, że szukanym minimum może być 15 lub 16 ($C_{15} = 41$, $F_{15} = 42$, $C_{16} = 45$, $F_{16} = 46$).

Duże znaczenie ma efektywna implementacja przedstawionych metod. Szczególnie trudnymi problemami algorytmicznymi są rozpoznawanie izomorfizmu porządków i zliczanie rozszerzeń liniowych. Istotne przyspieszenie uzyskano stosując różne heurystyki, których nie sposób tu opisać. Zainteresowani mogą ściągnąć kod źródłowy ze strony autora <http://www.mimuw.edu.pl/~marpe> i sami poeksperymentować albo mogą też sięgnąć po książkę Donalda Knutha [Sztuka programowania, Tom 3, Sortowanie i wyszukiwanie, WNT 2002], gdzie znajdują wiele dodatkowych informacji i problemów dotyczących sortowania.

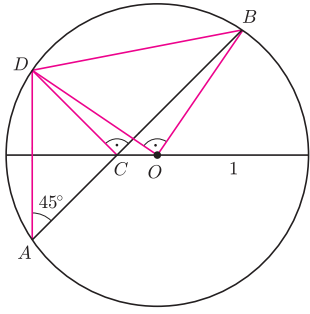


Kwantowe efekty grawitacji

Paweł Tomasz PEŹCZKOWSKI

Rozwiązanie zadania M 1079.

Niech D będzie punktem symetrycznym do punktu A względem danej średnicy.



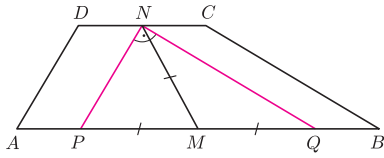
Oznaczmy ponadto przez O środek danego okręgu. Wówczas $\sphericalangle ACD = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle DAC = 45^\circ$. Stąd wynika, że $\sphericalangle DOB = 90^\circ$, gdyż jest to kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany DAB . Zatem

$$AC^2 + BC^2 = DC^2 + BC^2 = BD^2 = BO^2 + DO^2 = 2.$$



Rozwiązanie zadania M 1080.

Niech P i Q będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach AM i BM , że czworokąty $ADNP$ i $BCNQ$ są równoległobokami.



Wówczas $AP = BQ$, a więc $PM = MQ$. Ponadto

$$MN = \frac{AB - CD}{2} = \frac{PQ}{2} = MP.$$

Stąd wynika, że punkt M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQN .

Zatem $\sphericalangle PNQ = 90^\circ$, skąd otrzymujemy

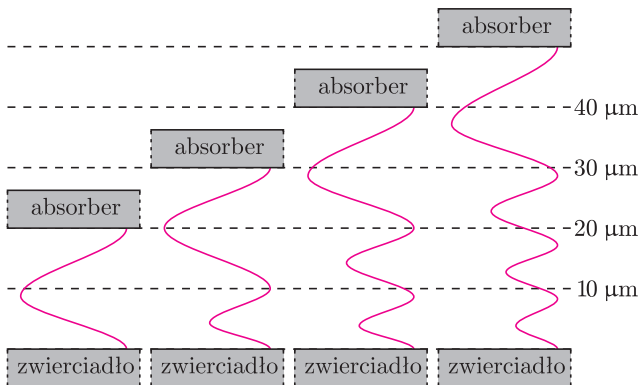
$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = \sphericalangle NPQ + \sphericalangle NQP = 90^\circ.$$

Grawitacja jest obserwowana w dużej skali – rządzi ona ruchem pocisku oraz ruchami planet i gwiazd. Z kolei efekty mechaniki kwantowej, zaniedbywalne dla obiektów makroskopowych, są obserwowane w skali atomów i cząstek elementarnych. W tej skali siła grawitacji jest za słaba, żeby obserwować efekty jej działania. Oddziaływanie grawitacyjne jest zdominowane przez oddziaływanie elektromagnetyczne i oddziaływanie silne. Rozważania teoretyczne przewidują, że pole grawitacyjne powinno prowadzić do stanów kwantowych, podobnych jak dla elektronów w polu elektromagnetycznym i nukleonów w polu oddziaływań silnych. Jednak aby zaobserwować efekty kwantowe pola grawitacyjnego, trzeba wyeliminować wpływ innych pól. Do przeprowadzenia doświadczeń mających na celu badanie efektów kwantowych grawitacji nadają się neutrony, ponieważ mają długi średni czas życia (około 1000 s), są obojętne elektrycznie i mają dużą masę ($939,6 \text{ MeV}/c^2$).

Pierwsze doświadczenie, którego celem było zaobserwowanie powiązania między zjawiskami kwantowo-mechanicznymi a grawitacją, zostało opisane w 1975 roku w artykule [1] i dotyczyło interferencji neutronów znajdujących się w polu grawitacyjnym Ziemi. Drugie doświadczenie zostało przeprowadzone w ostatnich latach przez zespół V.V. Nesvizhevsky'ego w Instytucie Laue-Langevin (ILL) w Grenoble (Francja) [2, 3]. W tym drugim doświadczeniu użyto ultrazimnych neutronów (UCN – ultracold neutrons), generowanych przez ich źródło, dostępne w ILL w Grenoble. Takie neutrony mają tak małe wartości energii kinetycznej, że mogą zostać uwięzione przez grawitację, tak jak odbijająca się od podłogi piłka.

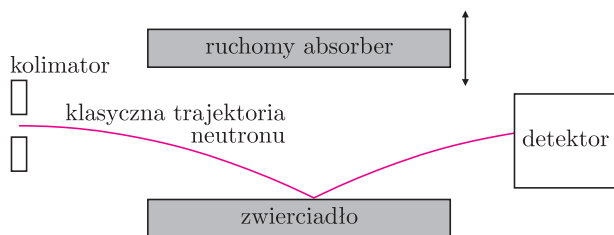
Oprócz pola grawitacyjnego potrzebna jest jeszcze „podłoga” pułapki, którą może być poziome zwierciadło neutronowe. Ponieważ długość fali de Broglie'a dla zimnych neutronów jest większa od odległości międzyatomowych w ciele stałym, to oddziaływanie neutronów z takim ciałem można opisywać za pomocą efektywnego potencjału, a nie oddziaływania z poszczególnymi jądrami. Jeżeli siła odpychająca pochodząca od bariery potencjału jest większa niż energia kinetyczna obliczona tylko dla składowej prędkości prostopadłej do powierzchni zwierciadła, to neutron zostanie odbity. Ponieważ bariera potencjału jest bardzo mała, więc w normalnych warunkach tylko neutrony poruszające się prawie stycznie do powierzchni są odbijane. Jednak neutrony UCN mają tak małą prędkość (poniżej 8 m/s), że od niektórych materiałów są odbijane niezależnie od kąta padania.

Pułapka skonstruowana przez zespół Nesvizhevsky'ego może być formalnie opisana jako studnia potencjału. Cząstka jest uwięziona, ponieważ ma za mało energii, żeby pokonać przyciąganie grawitacyjne. Klasycznie cząstka może mieć w takiej sytuacji dowolną energię (tzn. jej energia zmienia się w sposób ciągły), dopóki jest ona mniejsza niż energia ucieczki. Ale w mechanice kwantowej cząstka w studni potencjału może zajmować tylko dyskretne poziomy energii. Opis matematyczny rozważanego problemu można znaleźć w artykule [2]. Przewiduje on, że energia neutronu w pułapce przyjmuje dyskretne wartości numerowane główną liczbą kwantową n . Dla każdej energii tworzy się w studni fala stojąca, która ma n maksimów. Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia neutronu na danej wysokości zmienia się tak, jak jest to pokazane na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat przedstawiający kształt funkcji falowej dla pierwszych czterech wartości energii neutronu w studni potencjału grawitacyjnego.

Pod wpływem grawitacji neutron oscyluje między brzegami studni utworzonej przez pole grawitacyjne Ziemi i poziome zwierciadło odbijające. Z obliczeń analitycznych [3] wynika, że energia dla pierwszych czterech stanów kwantowych wynosi: $E_1 = 1,41$ peV, $E_2 = 2,46$ peV, $E_3 = 3,32$ peV, $E_4 = 4,08$ peV ($1 \text{ peV} = 10^{-12} \text{ eV}$). Natomiast klasyczna energia potrzebna do podniesienia neutronu o $10\mu\text{m}$ w polu grawitacyjnym o natężeniu g wynosi 1 peV . Wynika stąd, że poziom E_1 odpowiada wysokości $z_1 = 15\mu\text{m}$.

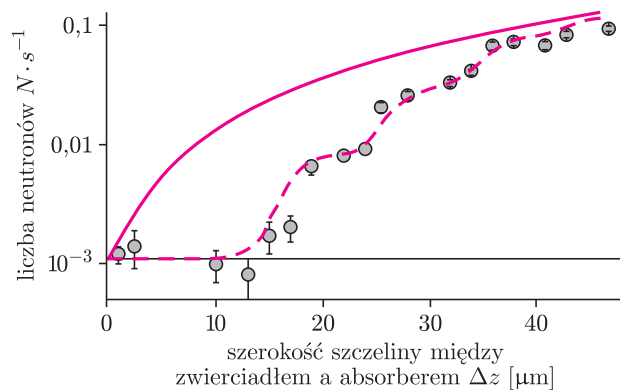


Rys. 2. Schemat doświadczenia [3].

Jak jednak sprawdzić, że w rzeczywistości jest tak, jak to przewiduje teoria? W doświadczeniu nie jest możliwe, żeby podnieść neutron, upuścić go i zmierzyć rozkład gęstości jako funkcję wysokości.

W doświadczeniu opisanym w publikacji [3] użyto poziomego zwierciadła długości 10 cm i neutronów o prędkościach około 10 m/s , uzyskanych z generatora ultra-zimnych neutronów w ILL w Grenoble. Schemat układu doświadczalnego jest pokazany na rysunku 2.

Oprócz zwierciadła użyto ruchomego absorbera neutronów – wielkość szczeliny między zwierciadłem i absorberem mogła być regulowana. W doświadczeniu neutrony przelatywały między zwierciadłem i absorberem. Rejestrowano liczbę N przechodzących przez układ neutronów w zależności od wielkości szczeliny między zwierciadłem i absorberem Δz . Spodziewano się, że jeżeli Δz będzie mniejsza niż szerokość odpowiadającą najmniejszemu stanowi kwantowemu, to N powinno być równe zero (neutrony w ogóle nie powinny docierać do detektora). Gdy szerokość Δz zostanie powiększona do wielkości odpowiadającej pierwszemu stanowi kwantowemu, to powinien nastąpić gwałtowny wzrost liczby N transmitowanych neutronów. Ogólnie oczekiwano skokowej zależności liczby N przechodzących przez układ neutronów od szerokości szczeliny Δz .



Rys. 3. Wyniki doświadczenia [3].

Wynik eksperymentu jest przedstawiony na rysunku 3. Punkty oznaczone kółkami przedstawiają wyniki doświadczenia.

Kolorowa linia ciągła oznacza krzywą teoretyczną przewidywaną przez fizykę klasyczną, natomiast kolorowa linia przerywana odpowiada przewidywaniom mechaniki kwantowej. Pozioma linia prosta wskazuje poziom sygnału przy wyłączonym źródle neutronów.

Jak widać, wyniki świetnie zgadzają się z kwantowo-mechanicznym opisem zjawiska. Dla małych wartości szerokości szczeliny sygnał w ogóle nie jest rejestrowany. Dopiero przy $\Delta z \approx 15\mu\text{m}$ liczba

rejestrowanych neutronów zaczyna rosnąć w sposób skokowy, przy czym miejsca gwałtownych wzrostów zgadzają się z przewidywaniami mechaniki kwantowej.

Autorzy planują dalsze badania. Rozdzielczość energii jest określona przez zasadę nieoznaczoności i czas, jaki UCN spędzają w pułapce. Jeżeli ten czas będzie zwiększony, to można osiągnąć wyższą rozdzielczość. Silniejsze źródła UCN (budowane obecnie) pozwolą na uzyskanie dokładności umożliwiającej przeprowadzenie testów fundamentalnych praw fizyki.

Chodzi przede wszystkim o test zasady równoważności. Jest ona kluczowym krokiem prowadzącym do ogólnej teorii względności. Stwierdza, że efekty przyspieszenia są nieodróżnialne od efektów jednorodnego pola grawitacyjnego. Oznacza to, że masa bezwładna i masa grawitacyjna neutronów są równoważne. Ten postulat trzeba sprawdzić doświadczalnie, a badania Nesvizhevsky'ego i jego kolegów idą w kierunku przeprowadzenia takiego testu o większej dokładności niż uzyskana innymi metodami.

[1] R. Colella, A.W. Overhauser, S.A. Wagner, *Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference*, Phys. Rev. Lett. **34**(1975)1472-1474.

[2] V.V. Nesvizhevsky, H. Börner, A.M. Gagarski, G.A. Petrov, A.K. Petukhov, H. Abele, S. Bäßler, T. Stöferle, S.M. Soloviev, *Search for quantum states of the neutron in a gravitational field: gravitational levels*, Nuclear Instr. and Meth. in Phys. Research **A440**(2000)754-759.

[3] V.V. Nesvizhevsky, H.G. Börner, A.K. Petukhov, H. Abele, S. Bäßler, F.J. Rueß, T. Stöferle, A. Westfal, A.M. Gagarski, G.A. Petrov, A.V. Strelkov, *Quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field*, Nature **415**(2002)297-299.



mała delta

Salon gier losowych

Jeden z bardzo znanych matematyków stwierdził niedawno, że matematyka to tak naprawdę część fizyki, wyróżniająca się tylko tym, że eksperymenty są w niej bardzo tanie. Nie chcemy Was namawiać aż do tak radykalnych poglądów, spróbujemy jednak zachęcić do zabawy w „matematykę empiryczną”. To też jakieś oblicze królowej nauk, więc można mu się od czasu do czasu przyjrzeć.

Prawo wielkich liczb

Już sama nazwa „prawo” zamiast „twierdzenie” przywoła na myśl fizykę. Istotnie, jest to wynik matematyczny bliski sercom doświadczalników. O co w nim chodzi?

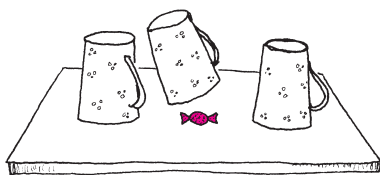
Wyobraźmy sobie, że w pewnym eksperymencie losowym mamy n jednakowo prawdopodobnych wyników. Wyniku pojedynczego eksperymentu nie da się przewidzieć. Jednak prawo wielkich liczb mówi, że gdy eksperyment powtórzymy M razy, to gdy M jest bardzo duże, każdy z możliwych wyników pojawi się w dobrym przybliżeniu M/n razy. Możemy teraz – mając do czynienia z jakąś grą losową – postępować na dwa sposoby do wyboru. Po pierwsze możemy wypisać wszystkie możliwe wyniki pojedynczego eksperymentu, a potem policzyć, jaki procent spośród nich zajmują te, które sprzyjają naszej wygranej. Stąd będziemy wiedzieli, czy opłaca się grać, czy nie, zanim zaczęliśmy grę. Drugi sposób to pójść na żywioł i eksperymentować, grając w grę wiele, wiele razy...

Najprostszy przypadek jest wtedy, gdy M razy rzucamy monetą. W jednym eksperymencie (pojedynczy rzut) możliwe są $n = 2$ zdarzenia: orzeł lub reszka. Prawo wielkich liczb mówi, że gdy np. $M = 100\,000$, to w przybliżeniu 50 000 razy wypadnie orzeł. Bardzo ważne jest tu słowo „w przybliżeniu”. Szansa, że orzeł wypadnie dokładnie 50 000 razy jest niemal zerowa, natomiast, szansa tego, że wypadnie w 49 do 51 procentach wypadków (czyli od 49 000 do 51 000 razy) jest właściwie równa 1.

Eksperyment 1: Koza i samochód.

W pewnym teleturnieju (o którym zresztą niedawno pisaliśmy w Delcie) w kulminacyjnym punkcie prowadzący pokazuje troje drzwi i mówi, że za jednymi znajduje się samochód, natomiast za pozostałymi dwoma coś w porównaniu z samochodem bezwartościowego, na przykład koza. Uczestnik zostaje poproszony o wybór drzwi, ale wybrane przez niego drzwi jeszcze się nie otwierają, prowadzący zaś otwiera jedno z dwójga pozostałych drzwi. Oczywiście pokazuje się w nich koza. Uczestnik ma wtedy ostatnią szansę na zmianę swojej decyzji. Czy powinien to zrobić? Rozwiążmy problem empirycznie.

Będą potrzebne trzy jednakowe kubki, jakiś mały fant (mieszczący się pod kubkiem), trochę monet lub zapalek oraz cierpliwość. Do gry potrzeba minimalnie trzech osób, jedna do roli krupiera, jedna do gry strategią 1: zawsze zmieniaj wybór; druga do gry strategią 2: nigdy nie zmieniaj wyboru. Krupier postępuje tak, jak prowadzący w teleturnieju, ukrywając fant pod jednym z kubków i gra się rozpoczyna. Za każdą





wygraną (czyli odkrycie kubka z fantem) gracz otrzymuje monetę (zapałkę lub inny licznik). Teraz potrzebna jest cierpliwość: żeby otrzymać jakieś sensowne wyniki, należy grać dość długo, jednak już po około pięćdziesięciu rundach zarysowuje się różnica w ilości zgromadzonych monet przez graczy grającymi różnymi metodami.

Spróbujcie po wykonaniu odpowiedniej liczby eksperymentów określić, jaka jest w przybliżeniu szansa na zwycięstwo w grze, gdy gramy strategią nr 1 i gdy gramy strategią nr 2. Czy potraficie też wypisać wszystkie możliwe wyniki pojedynczego eksperymentu? Czy „teoria” zgadza się z wynikami doświadczalnymi?

Eksperyment 2: Wykrywacz kłamstw.

Jak powszechnie wiadomo kłamstwo ma krótkie nogi. Ale gdyby tak trochę pokłamać dla celów naukowych? Podczas VII Festiwalu Nauki zaproponowaliśmy uczniom następującą grę, którą z powodzeniem możesz powtórzyć ze swoimi znajomymi. Podziel ich na dwie drużyny (mogą być jednoosobowe), które uzbrojone w kartkę, długopis i monetę będą wychodzić z Twojego pokoju. Za drzwiami drużyny umawiają się, która z nich będzie grała uczciwie, a która będzie oszukiwać. Drużyna uczciwa rzuca 100 razy symetryczną monetą i zapisuje ciąg kolejnych wyników np.: OOOORROROOORRRRRORO... , gdzie O oznacza wyrzucenie orła, a R – wyrzucenie reszki. Drużyna, która oszukuje, wcale nie rzuca monetą, tylko wymyśla ciąg stu wyników i też go zapisuje. Po wykonaniu zadania obie drużyny wracają do pokoju i przekazują kartki z wynikami osobie prowadzącej grę, czyli Tobie.



Teraz przyjrzyj się uważnie wynikom. Jeśli na któreś z kartek nie będzie sześciu kolejno wyrzuconych orłów lub reszek mów śmiało, że drużyna kłamała. W pozostałych przypadkach... trudno, musisz zgadywać. Okaże się – o ile Twoi znajomi wykażą się dostateczną cierpliwością, by zagrać z Tobą kilka lub kilkanaście razy – że zadziwiająco często odróżnisz oszustów od uczciwych. Dlaczego? Otóż wśród możliwych wyników stukrotnego rzutu monetą zdecydowana większość zawiera co najmniej 6-krotne serie orłów. O tym jednak „nie wie” nasza intuicja, która „oszustom” błędnie podpowiada, by nie wpisywali więcej, niż pięciu orłów z rzędu.

W tym miejscu warto spostrzec, że wypisanie wszystkich możliwych wyników 100-krotnego rzutu monetą nie da się właściwie zrealizować (jest 2^{100} możliwości), trzeba więc sprytnie i trickowo wyliczać, ile serii ma co najmniej 6 orłów z rzędu lub... przeprowadzić trochę eksperymentów.

Małą Deltę przygotowali: Marta MAŃCZUK i Witold SADOWSKI

Problem najlepszego wyboru

Jacek JAKUBOWSKI, Rafał SZTENCEL

Problem ten występuje w literaturze również jako problem wyboru sekretarki albo problem posagu. Jest zresztą wiele sytuacji, gdy musimy dokonać wyboru najlepszego spośród n pojawiających się po kolei obiektów, przy czym do odrzuconego obiektu nie można wrócić. Liczba n jest znana, obiektom możemy przypisać liczby rzeczywiste a_1, \dots, a_n , wyrażające nasze preferencje (sekretarka) lub mierzalną cechę obiektu (posag). Liczby a_i nie znamy z góry, wiemy tylko, że są one wszystkie różne. W dalszym ciągu założymy, że $n \geq 3$, bowiem przypadek $n = 1$ nie jest interesujący, a gdy $n = 2$, jest wszystko jedno, jaką strategię wybierzemy.

Założmy, że ograniczamy się do następującej strategii (ograniczenie to nie jest w rzeczywistości istotne; dowód można znaleźć w [1]): oglądamy ustaloną z góry liczbę m obiektów, a potem wybieramy pierwszy z pozostałych lepszy od każdego z obejrzanych m obiektów. Jeśli nie doczekamy się takiego obiektu, zadowolamy się ostatnim. Nasuwają się dwa naturalne pytania, na które odpowiemy:

1. Jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu przy danym m , jeśli za sukces uznamy wybór najlepszego obiektu?
2. Przy jakim m jest ono największe?

Obiekty, a zatem i przypisane im liczby a_1, a_2, \dots, a_n , mogą pojawić się w dowolnej kolejności, tworząc permutację zbioru $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dlatego zbiór zdarzeń elementarnych Ω będzie składać się ze wszystkich takich permutacji. Przyjmijmy, że zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Przeprowadzając doświadczenie zapoznajemy się z permutacją zbioru A , czyli ciągiem $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$, stopniowo. Dla dalszych rozważań kluczowe znaczenie ma następująca

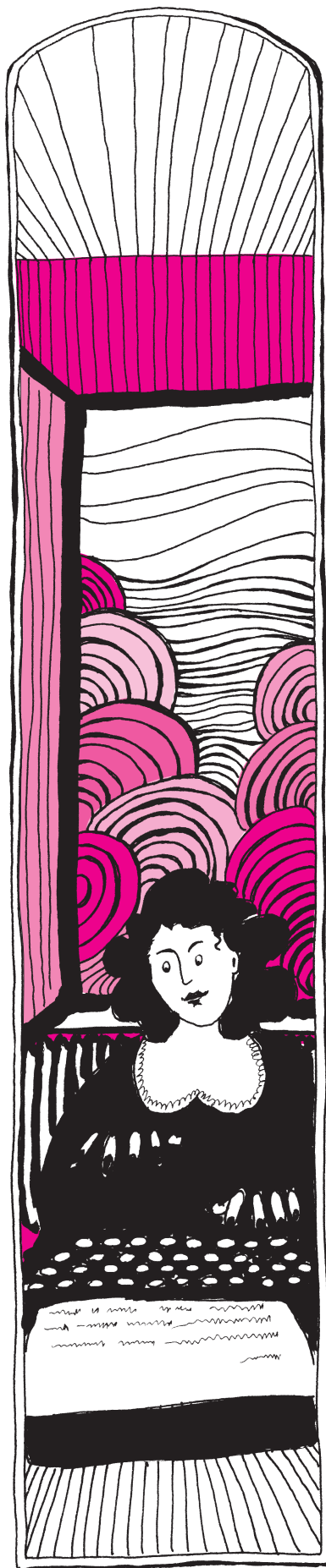
Uwaga. Jeśli znamy już pierwszych k wyrazów powyższego ciągu i nazwiemy je w kolejności rosnącej b_1, \dots, b_k (a więc $b_1 < b_2 < \dots < b_k$), to następny wyraz wpada z równymi prawdopodobieństwami do każdego z $k + 1$ przedziałów:

$$(-\infty, b_1), (b_1, b_2), (b_2, b_3), \dots, (b_k, \infty).$$

Istotnie, rozpatrzmy zdarzenie, polegające na tym, że $a_{i_{k+1}} \in (b_1, b_2)$. Jeśli zamienimy miejscami $a_{i_{k+1}}$ i b_2 , to nowy wyraz (czyli b_2) wpadnie do następnego przedziału, którego lewym końcem jest teraz $a_{i_{k+1}}$. To nowe zdarzenie musi mieć jednak identyczne prawdopodobieństwo, bowiem zamiana miejsc dwóch wyrazów ciągu ustala wzajemnie jednoznaczność pomiędzy zdarzeniami elementarnymi, tworzącymi rozpatrywane zdarzenia.

Powyższy argument (i całe zadanie) można przedstawić mniej formalnie: wyobraźmy sobie, że jest n kandydatów do ręki Alicji, którzy po kolei oświadczają się. Alicja tworzy na bieżąco listę rankingową, przypisując kandydatom liczby a_i . Załóżmy teraz, że Bernard i Bolesław już zdążyli się oświadczyć, zostali odrzuceni, i na razie zajmują (niestety) pozycję ostatnią i przedostatnią wśród k znanych Alicji kandydatów. Następny w kolejce jest Arnold, który ma pewne szanse, że znajdzie się między Bernardem a Bolesławem. Załóżmy, że tak właśnie się zdarzyło.

Gdyby Arnold i Bolesław zamienili się przedtem miejscami w kolejce, to teraz Bolesław zastanawiałby się, jaka jest szansa, że znajdzie się między Bernardem i Arnoldem – ale nie trafiłby tam, zająłby bowiem, wyprzedziwszy Arnolda, pozycję trzecią od końca. Jasne jest, że pierwsze zdarzenie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy po zamianie miejsc zachodzi drugie. Składają się one z tej samej liczby zdarzeń elementarnych (ciągów), a zamiana miejsc Arnolda z Bolesławem ustala wzajemnie jednoznaczność pomiędzy ciągami tworzącymi oba zdarzenia.



Udowodniliśmy więc, że nowy kandydat ma takie same szanse na drugie i trzecie (od końca) miejsce na liście. Podobne rozumowanie pokazuje, że są takie same szanse na pierwsze i drugie, trzecie i czwarte, etc.

Niech teraz B_k będzie zdarzeniem „wybrano k -ty z kolei obiekt”, gdzie $k = m + 1, m + 2, \dots, n$. Wykażemy, że

$$P(B_k) = \frac{m}{k(k-1)}.$$

Dla dowodu zauważmy, że bezpośrednio z Uwagi wynika, że $P(B_{m+1}) = \frac{1}{m+1}$, bowiem $(m+1)$ -szy obiekt okazał się lepszy od m poprzednich. Jeśli nie zaszło B_{m+1} , to – znów zgodnie z Uwagą – prawdopodobieństwo warunkowe zajścia B_{m+2} jest równe $\frac{1}{m+2}$. Zatem wzór na prawdopodobieństwo całkowite daje:

$$\begin{aligned} P(B_{m+2}) &= P(B_{m+2}|B_{m+1}) \cdot P(B_{m+1}) + P(B_{m+2}|B'_{m+1}) \cdot P(B'_{m+1}) = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} \cdot \frac{m}{m+1} = \frac{m}{(m+1)(m+2)}. \end{aligned}$$

Łatwe rachunki pokazują, że i dalej wszystko się zgadza. Zdarzenia B_{m+1}, \dots, B_n wykluczają się wzajemnie, a w sumie dają cały zbiór Ω . Dlatego możemy jeszcze raz zastosować wzór na prawdopodobieństwo całkowite w celu wyznaczenia prawdopodobieństwa zdarzenia S_m , czyli sukcesu:

$$\begin{aligned} P(S_m) &= \sum_{k=m+1}^n P(S_m|B_k) \cdot P(B_k) = \sum_{k=m+1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{k(k-1)} = \\ &= \frac{m}{n} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k-1} = \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

gdy tylko dowiemy się, że $P(S_m|B_k) = \frac{k}{n}$. Aby to wykazać, zobaczymy (znów korzystając z Uwagi), jakie szanse utrzymania najwyższej pozycji miałyby k -ty obiekt, gdybyśmy zdecydowali się obejrzeć je wszystkie. Wtedy obiekt o numerze $k+1$ nie mógłby przewyższyć k -tego, czyli wpaść do ostatniego przedziału: (a_{i_k}, ∞) , więc musiałby wpaść do jednego z pozostałych k przedziałów, podobnie obiekt o numerze $k+2$ do jednego z $k+1$ przedziałów (znów: do każdego, z wyjątkiem ostatniego), itd. Ostatecznie

$$P(S_m|B_k) = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Odpowiedzieliśmy tym samym na pierwsze pytanie, teraz zajmiemy się drugim. Oznaczmy $P(S_m) = p_m$ i zbadamy różnice $p_m - p_{m-1}$:

$$\begin{aligned} p_m - p_{m-1} &= \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{n} \sum_{k=m-1}^{n-1} \frac{1}{k} = \\ &= \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{n} \cdot \frac{1}{m-1} = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że żadna z różnic nie jest równa zeru, gdy $n \geq 3$ (dlaczego?), zatem tylko jeden wyraz ciągu (p_m) osiąga maksimum, i jest ono wyznaczone przez warunki

$$(1) \quad \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n-1} < 1,$$

$$(2) \quad \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{n-1} > 1,$$

równoważne stwierdzeniu, że $p_m - p_{m-1}$ jest ostatnią dodatnią różnicą. Jeśli na przykład $n = 10$, to

$$(3) \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 0,996 < 1$$

$$(4) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 1,329 > 1,$$

zatem $m = 3$, a prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p_{10} = \frac{3}{10} \cdot 1,329 = 0,399$.



Wyprowadzimy teraz przybliżenia dla m i p_m przy dużych n .

1. Jak wiadomo, $\ln(1+x) \leq x$, gdy $x > -1$. Wynika stąd, że $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. Warunek (1) daje

$$\ln\left(\frac{m+2}{m+1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \leq \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n-1} < 1,$$

czyli

$$\ln\left(\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{m+3}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1}\right) < 1,$$

wobec tego

$$\frac{n}{m+1} < e,$$

czyli

$$(5) \quad n - e < me.$$

2. Jeśli $1 > x > 0$, to $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 2x$ (obie funkcje przyjmują w zerze wartość zero, i wystarczy porównać tempo wzrostu obu stron, czyli pochodne). Podstawiając $x = \frac{1}{2n}$ otrzymujemy

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}.$$

Z warunku (2) wynika teraz, że

$$\ln\left(\frac{2m+1}{2m-1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2n-1}{2n-3}\right) > \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{n-1} > 1,$$

czyli

$$\ln\left(\frac{2m+1}{2m-1} \cdot \frac{2m+3}{2m+1} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n-3}\right) > 1,$$

co daje

$$\frac{2n-1}{2m-1} > e,$$

czyli

$$(6) \quad n + \frac{e-1}{2} > me.$$

3. Nierówności (5) i (6) po podzieleniu przez e dają

$$\frac{n}{e} - 1 < m < \frac{n}{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2e},$$

co pozwala na szybkie wyznaczenie m z błędem nie przekraczającym jedności, jako że w przedziale o długości $\frac{3}{2} - \frac{1}{2e}$ są co najwyżej dwie liczby całkowite.

Niestety, nie ma szans na proste wzory w rodzaju $m = \lceil \frac{n+1}{e} \rceil$, ten akurat jest prawdziwy co najmniej dla $n \leq 25$, ale z wyjątkiem $n = 10$.

W dalszym ciągu m wyznaczone z warunków (1) i (2) będziemy oznaczać przez m_n , żeby podkreślić zależność od n .

4. Łatwo obliczyć granicę prawdopodobieństwa sukcesu przy strategii optymalnej, gdy $n \rightarrow \infty$: z (1) i (2) wynika, że $\frac{1}{m_n} + \dots + \frac{1}{n-1}$ różni się od jedności co najwyżej o $\frac{1}{m_n}$, a ponadto

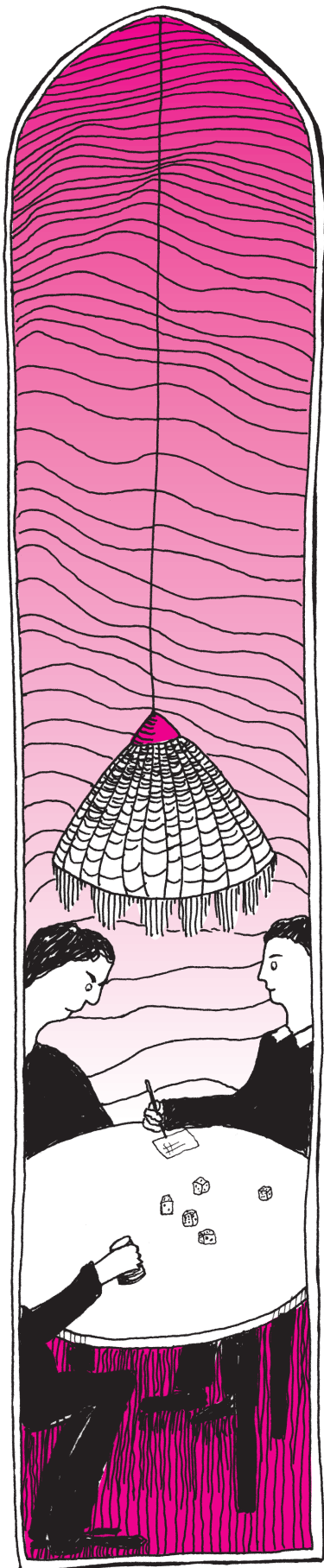
$$\frac{1}{e} - \frac{1}{n} < \frac{m_n}{n} < \frac{1}{e} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2ne},$$

wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} \sum_{k=m_n}^{n-1} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} = \frac{1}{e}.$$

Jak się zdaje, większość ludzi stosuje w przypadku konieczności wyboru opisaną wyżej strategię, przyjmując $m = 1$. Dla niedużych n wybór „pierwszego lepszego od pierwszego” jest całkiem niezły, co powinno być jasne w świetle udowodnionych zależności.

[1] E. B. Dynkin, A. A. Juskiewicz, *Twierdzenia i problemy procesów Markowa*, PWN, Warszawa 1970, rozdz. III, §1.



Europejski Projekt Interferometru

Jean SURDEJ, Belgia

Astronomowie zawsze wykazywali się dużą pomysłowością, gdy chodziło o zwiększenie czułości lub kątowej rozdzielczości obserwacji odległych i słabych obiektów. Przypomnijmy, że zasięg teleskopu określa kwadrat jego średnicy D , podczas gdy kątowa zdolność rozdzielcza, wyrażona w radianach, jest odwrotnie proporcjonalna do średnicy (dokładniej, wynosi $1,22 \lambda/D$, gdzie λ oznacza obserwowaną długość fali). Do niedawna postęp wynikał z budowania teleskopów o coraz większej średnicy. Choć prowadziło to do wzrostu zasięgu obserwacji, to kątowa rozdzielczość zawsze pozostawała ograniczona przez seeing atmosferyczny. Polepszenie tej sytuacji uzyskiwano budując wielkie teleskopy na szczytach gór, gdzie panują dobre warunki obserwacyjne (np. w Chile, na Wyspach Kanaryjskich, w Kalifornii, na Hawajach). Ostatnio rozdzielczość bliską teoretycznej, określonej przez rozmiary dysku Airy'ego, uzyskano przez zastosowanie optyki adaptacyjnej, która w czasie rzeczywistym znosi efekty seeingu.

W ramach europejskich prób zbudowania teleskopu stumetrowego (projekt OverWhelming Large (OWL) Telescope, prowadzony w European Southern Observatory (ESO)) największych sukcesów w zakresie optycznym i podczerwonym można w najbliższej przyszłości spodziewać się w dziedzinie interferometrii, gdzie zestaw wielu teleskopów wykorzystany będzie jako jeden spójny teleskop. Najwłaściwszą dla niego będzie fala $2,2 \mu\text{m}$, przy której przewiduje się największą czułość i zarazem wysoką rozdzielczość rzędu $0,001''$.

Optyczna i podczerwona interferometria zaczęła grać wielką rolę w naziemnych obserwacjach wymagających wysokiej rozdzielczości. Istnieje już wiele tego typu obserwatoriów, wśród których największe nadzieje rokuje Very Large Telescope Interferometer w Chile, a to dzięki możliwości połączenia wiązek światła gwiazd zebranych przez cztery 8-metrowe i cztery 1,8-metrowe teleskopy. W celu uzyskania największej naukowej wydajności badań interferometrycznych konsorcjum 15 państw europejskich (Austria, Belgia, Szwajcaria, Czechy, Niemcy, Dania, Hiszpania, Francja, Wielka Brytania, Węgry, Włochy, Izrael, Holandia, Polska, Portugalia) oraz międzynarodowych organizacji astronomicznych (ESO) i kosmicznych (ESA) postanowiło utworzyć European Interferometry Initiative (EII). 1 stycznia 2004 r. EII otrzymało fundusz 1,2 mln euro na uruchomienie Joint Research Project (JRP). Oto szczegóły tej działalności.



Celem działalności JRP – oprócz prowadzenia obserwacji astronomicznych – jest zintegrowanie interferometrii z bardziej tradycyjnymi technikami astronomicznymi i udostępnienie interferometrii niespecjalistom. Uczestnicy projektu są pewni, że w przyszłości Europa będzie grać wiodącą rolę w rozwijaniu optycznej interferometrii, zarówno naziemnej jak i kosmicznej.

W najbliższej przyszłości wydajność naukowa interferometrów będzie prawdopodobnie ograniczona głównie przez wewnętrzne niedostatki już istniejących przyrządów i brak odpowiednich algorytmów do analizy i interpretowania danych. Dla pokonania tych trudności JRP przewiduje projektowanie nowych przyrządów i algorytmów, w czym będą brać udział uczestnicy wszystkich programów badawczych. Najbardziej obiecujące rozwiązania, po ocenie ich pod względem merytorycznym oraz kosztów, będą realizowane praktycznie. JRP będzie też udoskonalać w miarę nowych potrzeb i pomysłów już istniejące

oprogramowanie przeznaczone do analizy danych optycznej i podczerwonej interferometrii. Oprogramowanie to stanie się standardem dla europejskiej optycznej interferometrii wielkobazowej (Optical Long-Baseline Interferometry (OLBI)). Musi ono mieć możliwości tworzenia nowych procedur wejścia-wyjścia, sortowania i mieszania danych, ich graficznego przedstawiania, tworzenia podprogramów, musi też zapewnić możliwości dopasowywania parametrów źródeł promieniowania do danych obserwacyjnych. W skład oprogramowania będą też wchodzić procedury do redukcji danych astrometrycznych i do konstrukcji obrazów oparte na już znanych i na nowych metodach opracowania danych interferometrycznych.

Więcej informacji można znaleźć w <http://www.strw.leidenuniv.nl/~eurinterf/>

Tłumaczył Tomasz KWAST

${}^7\text{Be}@C_{60}$

Ten tajemniczy tytuł to nie fragment SMSa, tylko oznaczenie berylu o siedmiu nukleonach, uwięzionego w cząsteczce fullerenu o sześćdziesięciu atomach węgla. Otrzymanie takiej hybrydy w dość dużej ilości nie jest proste. Autorzy pracy [1] posłużyli się mieszaniną węglanu litu Li_2CO_3 i oczyszczonego fullerenu (tak, odkryte tak niedawno fullereny można już wytwarzać prawie na skalę przemysłową). Cienką warstwę tej mieszaniny naświetlili wiązką protonową. Proton, uderzając w lit, może zamienić się w neutron, jednocześnie zmieniając uderzane jądro w beryl i nadając mu pewną energię kinetyczną. Energia ta jest wystarczająca do umożliwienia implantacji powstającego berylu do wnętrza fullerenu. Ten sprytny sposób jest ciekawy sam w sobie, ale to dopiero początek.

Dość prosty pojęciowo opis struktury atomowej materii jest możliwy dzięki temu, że wiązania chemiczne praktycznie nie zależą od składu izotopowego, czyli od szczegółów budowy jąder. I odwrotnie, to w jakim związku chemicznym znajduje się atom, nie ma zauważalnego wpływu na własności jądra, takie jak np. czas połowicznego zaniku jąder promieniotwórczych. (Właściwie jedyną własność jądra, którą daje się zaobserwować w fizyce atomowej – oprócz całkowitego ładunku wynikającego z liczby protonów i determinującego, z jakim pierwiastkiem mamy do czynienia – jest spin, od którego zależy, czy atom jako całość jest bozonem czy fermionem.) Od każdej reguły są jednak wyjątki. Autorzy pracy [1] po to uwięzili beryl w węglowych klatkach, żeby sprawdzić, czy nie zmieni się jego czas życia. W tym celu na zmianę mierzyli aktywność próbki ${}^7\text{Be}@C_{60}$ i kontrolnej próbki metalicznego berylu wzbogaconego w izotop ${}^7\text{Be}$. Każdy pomiar trwał 6 godzin i tak, na zmianę, mierzono przez... 170 dni. Okazało się, że aktywność ${}^7\text{Be}@C_{60}$ spada szybciej. Ostatecznie określono, że czas życia w klatce jest o 0,83% krótszy niż w stadzie (w stanie metalicznym).

Oczywiście, nie świadczy to o tym, że zamknięte w klatkach atomy berylu żyją krócej, bo tęsknią. Węglowa klatka musi jednak jakoś wpływać na własności jądra. Nigdy wcześniej nie udało się zaobserwować aż tak dużej zmiany czasu życia jądra w wyniku modyfikacji zewnętrznych warunków.

Żeby zrozumieć, dlaczego zmiana jest tak wyraźna, należy przypomnieć sobie, że nieprawdą jest, jakoby elektrony krążyły wokół jądra atomowego, tak jak planety krążą wokół Słońca. Atom berylu ma cztery elektrony. W stanie podstawowym wszystkie one mają zerowy orbitalny moment pędu, czyli zajmują sferycznie symetryczne orbitale, dla których punktem przestrzeni o największej gęstości prawdopodobieństwa znalezienia elektronu, jest środek jądra. Właśnie dzięki temu, że prawdopodobieństwo znalezienia elektronów we wnętrzu jądra izotopu ${}^7\text{Be}$ jest skończone, jądro to się rozpada. Kanalem rozpadu jest tzw. wychwytywanie elektronu, czyli reakcja, w wyniku której jeden z protonów, łącząc się z elektronem, staje się neutronem, emitując neutrino elektronowe.

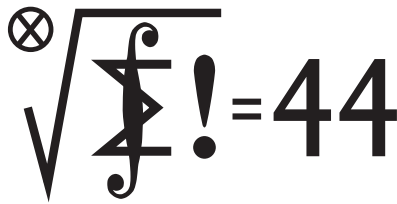
Okazuje się, że klatka węglowa ścisła orbitale elektronowe berylu tak, że prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w jądrze znacząco rośnie.

Jest to piękny dowód na to, że z wyrokowaniem o tym, co nie może mieć wpływu na wynik, należy uważać.

Piotr ZALEWSKI

[1] T. Ohtsuki, H. Yuki, M. Muto, J. Kasagi, K. Ohno, *Enhanced Electron-Capture Decay Rate of ${}^7\text{Be}$ Encapsulated in C_{60} Cages*, Phys. Rev. Lett. **93**(2004)112501, 10 września 2004

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 I 2005

UWAGA!

**ZMIANA ADRESU
DO KORESPONDENCJI!**

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
477 ($WT = 3,21$) i **478** ($WT = 1,06$)
z numeru 3/2004

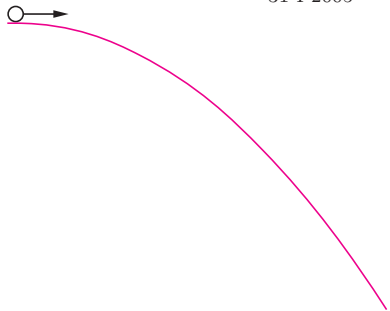
Józef Siwy	– Łaziska Górne	43,54
Michał Kieza	– Warszawa	42,76
Janusz Olszewski	– Suwałki	42,17
Witold Bednarek	– Łódź	40,04
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	39,73

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 I 2005



Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
376 ($WT = 2,28$), **377** ($WT = 1,83$)
378 ($WT = 1,45$), **379** ($WT = 2,31$)
z numerów 4/2004 i 5/2004

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	36,22
Tomasz Rudny	– Warszawa	31,48
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	29,30
Jerzy Witkowski	– Radlin	20,52
Piotr Kumor	– Olsztyn	13,92
Konrad Kapcia	– Częstochowa	10,40
Piotr Ładyżyński	– Michalin	10,21

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 489, 490

Redaguje Marcin E. KUCZMA

489. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC , wpisanego w okrąg o środku O , przecinają się w punkcie H . Wykazać, że istnieją punkty D, E, F , leżące odpowiednio na bokach BC, CA, AB , takie, że $|OD| + |DH| = |OE| + |EH| = |OF| + |FH|$, a proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

490. Wyznaczyć liczbę permutacji π zbioru $\{1, \dots, 15\}$, spełniających warunek

$$|\pi(i+1) - \pi(i)| > 1 \quad \text{dla } i = 1, \dots, 14.$$

Zadanie 490 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Zadania z fizyki nr 386, 387

Redaguje Jerzy B. BROJAN

386. Małe ciało położono w najwyższym punkcie pochylni o kształcie paraboli o ramionach opadających i nadano mu pewną prędkość początkową w kierunku poziomym (rys.). Prędkość ta była zbyt mała, aby ciało oderwało się od pochylni i poleciało swobodnie. Ciało porusza się po pochylni bez tarcia. Czy nacisk ciała na pochylnię będzie rósł w miarę wzrostu prędkości ciała, czy malał? Czy możliwe jest, żeby ciało początkowo sunęło po pochylni, a w pewnym momencie się od niej oderwało? Poza konkursem: Jaki powinien być kształt pochylni, aby siła nacisku pozostawała stała?

387. Ciała będące dobrymi absorberami promieniowania są również – jak wiadomo – dobrymi emiterami. Dlaczego więc termometr z bańką pomalowaną na czarno nagrzewa się w promieniach Słońca silniej od termometru z bańką pomalowaną na białą?



Rozwiązanie zadania F 631.

Zasada zachowania momentu pędu mówi, że $(I_z + 2I_1)\omega_1 = (I_z + 2I_2)\omega_2$, gdzie I_z to moment bezwładności Ziemi, I_1 i I_2 – momenty bezwładności opuszczonej i podniesionej ręki polarnika, a ω_1 i ω_2 to prędkości kątowe obrotu Ziemi przed i po podniesieniu rąk. Traktując ręce polarnika jako jednorodne pręty o długości $d = 1$ m i masie $m = 2$ kg umocowane $r = 0,3$ m od środka ciała dostajemy: $I_1 = mr^2$.

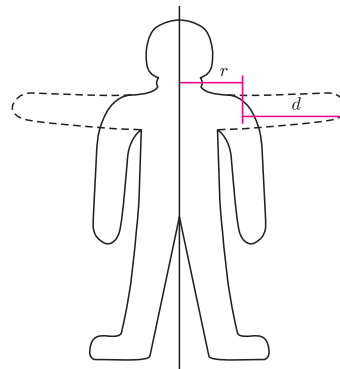
$$I_2 = \frac{m(r+d)^3 - mr^3}{3d},$$

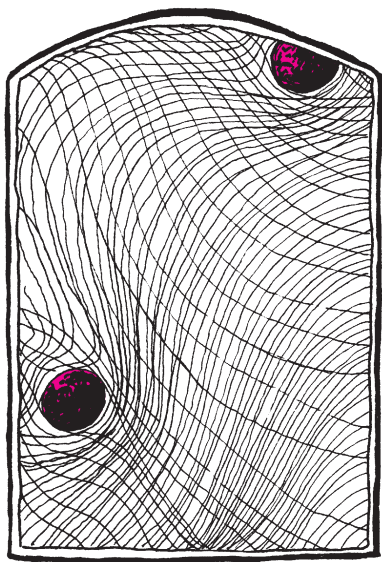
czyli

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{I_z + 2I_1}{I_z + 2I_2} \approx \omega_1 \left(1 + \frac{2I_1 - 2I_2}{I_z} \right) = \omega_1 \left(1 - 2 \frac{mrd + md^2/3}{I_z} \right),$$

a po podstawieniu $I_z = 8,2 \cdot 10^{31}$ kg m² mamy

$\omega_2 = \omega_1 (1 - 1,5 \cdot 10^{-31})$, co odpowiada wydłużeniu doby o $1,3 \cdot 10^{-26}$ s.





Patrz w niebo

Uformowana 4,5 mld lat temu Ziemia była planetą gorącą, a w dodatku powstała zbyt blisko Słońca, by woda pochodząca z pierwotnej okolicznej mgławicy mogła zachować się w stanie ciekłym przez dłuższy czas. Dlaczego więc na Ziemi jest tyle wody? Panował kiedyś pogląd, że po powstaniu planet spadały na nie błędzące w Układzie Słonecznym liczne komety i to one dostarczyły – również na Ziemię – odpowiednio wielką ilość wody. Brzmi to rozsądnie – niestety woda w kometach jest inna niż ziemską. Mianowicie stosunek ilości deuteru do zwykłego wodoru jest w wodzie kometarnej dwa razy większy niż w wodzie ziemskiej. Ponadto nie wiadomo, dlaczego komety miały spaść na Ziemię w wielkiej liczbie właśnie wtedy (czyli około 4 mld lat temu) przez dziwnie krótki czas.

Grupa francuskich astronomów około trzech lat temu wykonała symulacje dynamiki młodego Układu Słonecznego, które rzucają pewne światło na problem ziemskiej wody. Otóż cztery miliardy lat temu w obszarze dzisiejszego pasa planetoid istniały już – według badaczy – wielkie obiekty nawet o rozmiarach Marsa lub Księżyca, niektóre zawierające do 10% wody. Jednak w pobliżu formował się Jowisz, który osiągnąwszy wtedy swoją wielką masę dosłownie rozgonił w krótkim czasie owe planetoidy. Ich część spadła na Jowisza, część opuściła Układ Słoneczny, wreszcie jeszcze inne planetoidy zostały skierowane ku Słońcu, a po drodze miały szansę spaść również na Ziemię. Ziemia była wtedy też już na tyle wielka, że mogła zatrzymać znaczną część materii tych planetoid (spadających z prędkością wielu dziesiątek kilometrów na sekundę), w tym również wodę. Nie wyklucza to oczywiście dostaw wody za pośrednictwem komet, ale w ilościach znacznie mniejszych. Dlatego dostarczony wtedy – nawet przez długi czas – deuter nie mógł znacząco zmienić izotopowego składu ziemskiej wody. Jak widać, model astronomów francuskich sugeruje, że pochodzenie wody ziemskiej (okolicznej) jest inne, niż wody kometarnej.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania F 632.

Z elementarnych wzorów dotyczących rzutu ukośnego dostajemy, że początkowa prędkość musiała wynieść

$$v_0 = 10\sqrt{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pionowa i pozioma składowa prędkości to

$$v_x = v_y = 5\sqrt{6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

czas lotu śnieżki to

$$\frac{2v_y}{g},$$

a zasięg:

$$l = \frac{2v_y v_x}{g}.$$

W tym czasie Ziemia obraca się z prędkością kątową $\omega = 0,73 \text{ s}^{-1}$ o

$$\omega \frac{2v_y}{g},$$

czyli miejsce upadku śnieżki będzie różniło się od planowanego o

$$l\omega \frac{2v_y}{g},$$

czyli

$$\omega \frac{4v_y^2 v_x}{g^2}.$$

W naszym przypadku to około 0,5 cm.



Rozwiązanie zadania M 1078.

Przyjmijmy najpierw, że liczba $2x + 3y$ jest podzielna przez 17. Wówczas z równości

$$9(2x + 3y) - 2(9x + 5y) = 17y$$

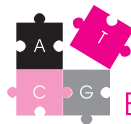
wynika, że liczba $2(9x + 5y)$, a więc również liczba $9x + 5y$, jest podzielna przez 17. Analogicznie dowodzimy, że jeśli liczba $9x + 5y$ jest podzielna przez 17, to podzielna przez 17 jest również liczba $2x + 3y$.

Listopad

W listopadowe wieczory niezbyt wysoko nad południowym horyzontem widzimy Ryby, rozległy, ale nie zawierający jasnych gwiazd gwiazdozbiór zodiakalny. Jego najjaśniejsza gwiazda ma zaledwie 4 mag, a na starych ilustracjach do niej właśnie przywiązane są linkami obie ryby wchodzące w skład gwiazdozbioru. Gwiazda ta (alfa) jest w rzeczywistości układem podwójnym leżącym w odległości 40 pc. W Rybach znajduje się jeden z pierwszych odkrytych białych karłów, Gwiazda van Maanena, o średniej gęstości rzędu 10 ton/cm^3 . Jest ona odległa o 4,2 pc, ale – jak to biały karzeł – jest obiektem bardzo słabym; jej jasność wynosi 12,4 mag mimo stosunkowo niewielkiej odległości. W Rybach znajduje się też punkt równonocy wiosennej, czyli inaczej punkt Barana. To pomieszanie nazw wynika stąd, że gdy wprowadzono pojęcie punktów równonocy, ten właśnie leżał w Baranie. Ale w ciągu około 2000 lat wskutek precesji przesunął się do Ryb, a nazwa pozostała.

Merkury znajdzie się najdalej kątowno od Słońca 21 XI i można go próbować odszukać wieczorem. Wenus jest w Pannie i widać ją przed wschodem Słońca. Mars i Jowisz też są w Pannie, natomiast Saturn na granicy Bliźniąt i Raka i wieczorem wschodzi. Now Księżyca wypada 12 XI, a pełnia 26 XI. W listopadzie Księżyc zakryje cztery planety, ale żadne zakrycie w Polsce widoczne nie będzie. 9 XI będzie zakrycie Jowisza (widoczne w Kanadzie, północnych stanach USA i na Grenlandii), 10 XI zakrycie Wenus (Indie, Australia), 11 XI zakrycie Marsa (Afryka, Ocean Indyjski, Nowa Zelandia) i 14 XI zakrycie Merkurego (widoczne z Antarktydy). W Polsce będziemy widzieć jedynie zbliżenia Księżyca do wymienionych planet. Dodatkowo 4 XI Wenus i Jowisz znajdą się w odległości kątowej poniżej 1° .

T. K.



Biologiczne komputery

W świecie ożywionym na każdym kroku spotykamy się z przetwarzaniem informacji. Informacje są przetwarzane przez mózgi zwierząt, ale czynią to i pojedyncze komórki podążające za światłem, pożywieniem czy ukrywające się przed drapieżnikami. Fizyk Roger Penrose w „Nowym umyśle cesarza” twierdzi, że gdzieś w neuronach siedzą ukryte komputery kwantowe (zapewne nie ma racji, ale to przywilej specjalisty w jednej dziedzinie – aby mylić się w innej).

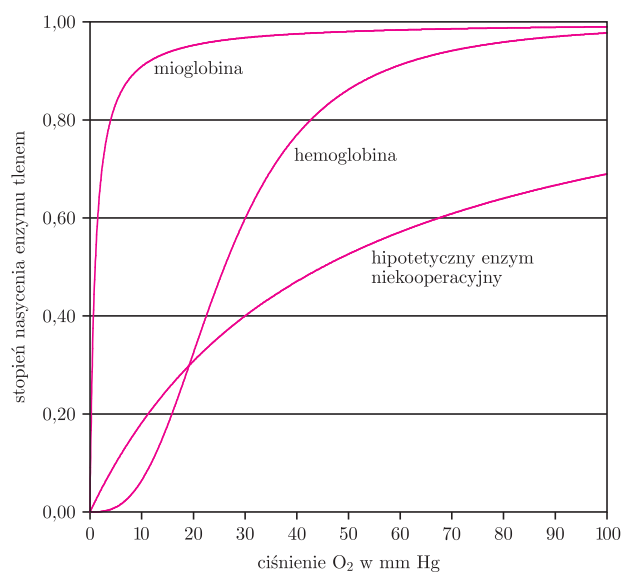
Na przeciwnym biegunie złożoności można umieścić równie nieprawdopodobne pomysły Lovelocka, który uważa, iż cała ziemską biosferę razem z geosferą potrafi aktywnie reagować na zmiany kosmicznego środowiska, tak aby utrzymać dogodne warunki dla rozwoju życia na powierzchni Ziemi. . . Gdzie faktycznie możemy się spotkać z układami przetwarzającymi informację? Kwantowych komputerów w organizmach żywych jeszcze nikt nie znalazł, ale tylko nieco dalej, na poziomie pojedynczych (aczkolwiek trzeba – sporych) cząsteczek – możemy znaleźć już to, czego szukamy. Choćby taki przykład – transport tlenu przez krew. Banalna sprawa? Tlen się rozpuszcza we krwi? Ze szkoły pamiętamy, że jest transportowany przez hemoglobinę. Można by przypuszczać, że hemoglobina to tylko taki dobry rozpuszczalnik dla tlenu. . . Cóż – przyjrzyjmy się temu bliżej.

Pod koniec lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku John Kendrew i Max Perutz poznali szczegółową strukturę białek wiążących tlen: mioglobiny i hemoglobiny. Pierwsza jest pojedynczym białkiem, druga składa się z czterech białek – bardzo podobnych do mioglobiny – połączonych w jeden większy kompleks. Cała duża cząsteczka hemoglobiny, składająca się z około 10 000 atomów – potrafi przetransportować. . . raptem tylko cztery cząsteczki tlenu. Może się to wydać dość rozrzutne, jednak cząsteczka hemoglobiny zachowuje się dość ciekawie. Jeśli choć jedno miejsce wiązania tlenu zostanie zajęte – struktura całego białka zmienia się tak, że pozostałe trzy miejsca łatwiej wiążą kolejne cząsteczki życiodajnego gazu. I odwrotnie – gdy choćby jedno z miejsc aktywnych uwolni cząsteczkę tlenu – pozostałym trzem cząsteczkom łatwiej jest opuścić ten molekularny transporter. Co z tego wynika? Otóż tam gdzie tlenu jest dużo (czyli w płucach) – hemoglobina chętnie tlen wiąże, tam gdzie tlenu jest mało – łatwo go oddaje. Dzięki temu potrafi dostarczyć znacznie więcej tlenu tam, gdzie jest on potrzebny, niż mógłby to zrobić prosty enzym, nie wykazujący takich właściwości.

Każda reakcja chemiczna łatwiej zachodzi w obfitości substratu, jednak to, co potrafi hemoglobina, jest czymś więcej niż ta naturalna własność reakcji chemicznych. Nie tylko efekt zostaje wzmocniony dzięki wpływowi każdej z czterech podjednostek wiążących tlen na siebie, ale też zmienia się charakter zależności pomiędzy ilością dostępnego tlenu a wysyceniem nim białka. Tę zależność opisuje krzywa reakcji, która w przypadku mioglobiny jest hiperbolą, a dla hemoglobiny – sigmoidą. Jak widać, to białko wykorzystuje informację o dostępności substratu dla zmiany własności biologicznej maszyny, którą jest. . . ale to nie wszystko.

Hemoglobina może wiązać produkty pojawiające się w intensywnie pracujących tkankach w wyniku oddychania komórek: CO_2 i jony H^+ , których szczególnie dużo pojawia się w bardzo intensywnie pracujących mięśniach i wszędzie tam, gdzie brakuje tlenu. Miejsca wiązania tych cząsteczek znajdują się w różnych miejscach białka. Jednak po ich związaniu zmienia się kształt całej cząsteczki, tak, że łatwiej uwalnia ona transportowany tlen. I odwrotnie – wiązanie tlenu powoduje uwolnienie tak transportowanych jonów H^+ i cząsteczek CO_2 . Dzięki temu efektywnie usuwa ona produkty przemiany materii z pracujących tkanek, reguluje pH i, co bardzo istotnie, cząsteczka hemoglobiny zachowuje się tak, jakby wiedziała, czy znajduje się w płucach, gdzie tlen ma być związany z nią możliwie najsilniej, czy w tkankach umiarkowanie pracujących, gdzie należy uwolnić niewielką ilość tlenu, czy też np. w pracującym mięśniu, gdzie zapotrzebowanie na tlen jest ogromne i hemoglobina powinna go jak najłatwiej oddać. . . Cząsteczka hemoglobiny zachowuje się tak dlatego, że potrafi integrować informację chemiczną docierającą do niej kilkoma kanałami i wykorzystywać ją do modyfikacji swoich właściwości chemicznych. Jest ona w istocie precyzyjnym urządzeniem biochemicznym przetwarzającym informacje płynące z otoczenia.

W naturze istnieją tysiące białek, z których znaczna część jest regulowana poprzez chemiczne sygnały docierające z otoczenia. Pojedyncze cząsteczki działają jak najprostsze bramki logiczne AND czy OR, gdy wiązanie jednego lub większej ilości chemicznych regulatorów uruchamia właściwe funkcjonowanie enzymu. Białka złożone z kilku podjednostek, jak opisana wyżej hemoglobina, potrafią zachowywać się w bardziej skomplikowany sposób. Jak łatwo się domyślić – tam gdzie zacznie oddziaływać na siebie kilka takich cząsteczek – sprawa stanie się bardziej złożona i ciekawsza i o tym będzie w następnym odcinku. . .



Krzywe dysocjacji tlenu dla hemoglobiny i mioglobiny, czyli wysycenie białek tlenem w zależności od ciśnienia tlenu nad roztworem. Dodatkowo zaznaczono hipotetyczną krzywą hiperboliczną enzymu podobnego do mioglobiny, który mógłby przenosić tlen przy typowych różnicach stężenia tlenu pomiędzy płucami (100 mm Hg) a tkankami (20 mm Hg).

Autor: Paweł PORĘBA

Współpraca: Anna LORENC, Jarek BRYK