

SPIS TREŚCI NUMERU 8 (363)

Grupy i magiczna sztuczka

Czesław Bagiński

Edmund R. Puczyłowski

str. 1

Czy można sklonować foton?

Rafał Demkowicz-Dobrzański

str. 5

Zadania

str. 7

Aktualności

str. 8

Duża Mała Delta

Można zacząć od banknotu

Szuflady pana Dirichleta

Przekształcenie piekarza

Czym różniło się

starożytne pojęcie

ruchu od obecnego?

Ułamki łańcuchowe i saros

Czym różni się

budowa woltomierza

i amperomierza?

Kilka doświadczeń z monetą

Dodawanie wielkości

gwiazdowych

Na czym polega

paradoks bliźniąt?

Siła rachunków interwałowych

Marek W. Gutowski

str. 9

O wielościanach większych

i mniejszych

Adam Piwocki

str.12

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Sierpień

str.16

Kącik biologiczny

str.17

W następnym numerze:

Codziennosc

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nacz.

Okladki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Grupy i magiczna sztuczka

Na pewno nie każdy uświadamia sobie, że liczby całkowite rozważane w oderwaniu od naturalnych działań dodawania i mnożenia stają się jakby sensne i mało rozróżnialne. To dopiero własności działań czynią świat liczb tak żywym i wielobarwnym. Okazuje się zresztą, że można „działanie” przenieść także w inne światy obiektów matematycznych, które wyposażone w nową strukturę tzw. grupy stają się niezwykle atrakcyjnym tematem badań.

Przypomnijmy, że grupą nazywamy niepusty zbiór G z działaniem \circ , spełniającym warunki:

łączywości

$$(1) \quad \forall x, y, z \in G \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z);$$

istnienia elementu neutralnego

$$(2) \quad \exists e \in G \quad \forall x \in G \quad e \circ x = x \circ e = x;$$

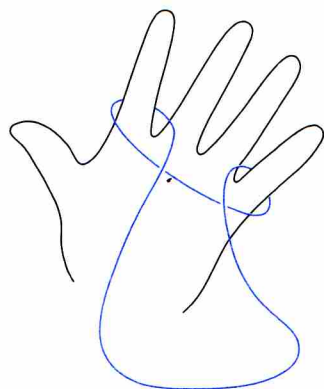
odwracalności każdego elementu

$$(3) \quad \forall x \in G \quad \exists y \in G \quad x \circ y = y \circ x = e.$$

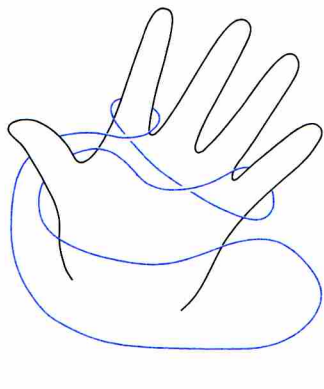
Rok temu pisaliśmy już o użyteczności pojęcia grupy w elementarnej teorii liczb (*Delta* 8/2003). Tym razem dostrzeżemy strukturę grupy tam, gdzie wydawałoby się matematyka nie sięga.

Będzie to opowieść o pewnej sztuczce znanej nam z dzieciństwa. Jej znajomość pozwalała wielokrotnie imponować kolegom z podwórka, którzy mimo uważnego śledzenia kolejnych etapów jej wykonania, nie potrafili przez długi czas jej powtórzyć. Jak zatem wygląda ta magiczna sztuczka?

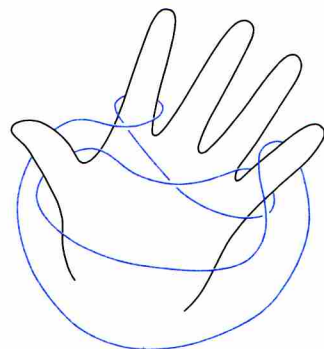
Na palcach lewej ręki w kolejnych etapach opisanych przez rysunki 1–3 zakładamy wykonaną ze sznurka pętlę, aż osiągniemy pętlę z rysunku 4.



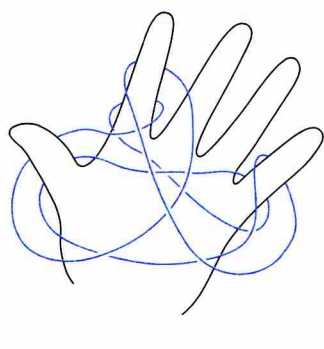
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

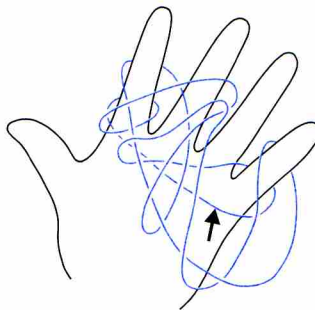


Rys. 4

Czesław BAGIŃSKI

Edmund R. PUCZYŁOWSKI

Robimy to możliwie szybko, by oglądający nie zauważyli dokładnie, jak ją tworzymy. Ostatnim etapem sztuczki jest pozorne jej skomplikowanie. Zdejmujemy mianowicie te fragmenty pętli, które są zaczepione o kciuk i przekładamy między palec środkowy i serdeczny (rys. 5).

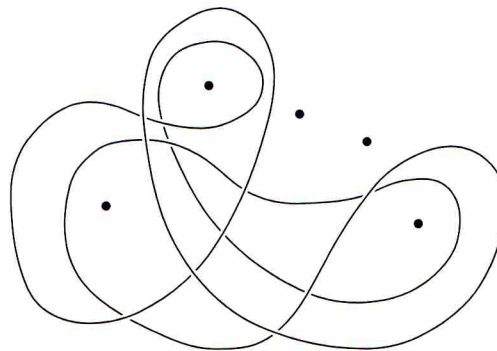


Rys. 5

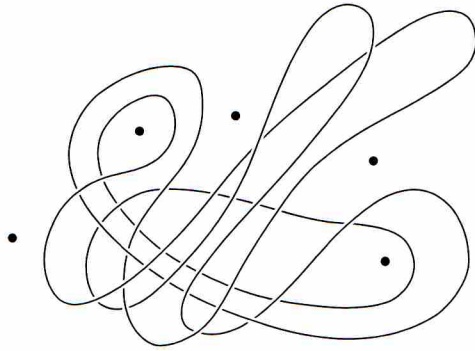
Na koniec ciągniemy powoli ku sobie fragment sznurka wskazany na rysunku strzałką. Okazuje się, że cała pętla daje się w ten sposób ściągnąć z ręki bez przekładania żadnego jej fragmentu przez czubki palców.

Dla lepszego zrozumienia całej sytuacji przyjrzymy się jeszcze raz pętlom z rysunków 4 oraz 5 i opiszemy je w bardziej ścisły i formalny sposób. W tym celu wprowadzimy odpowiednie uproszczenia oraz podamy zasady tworzenia pętli, ich porównywania i opisu.

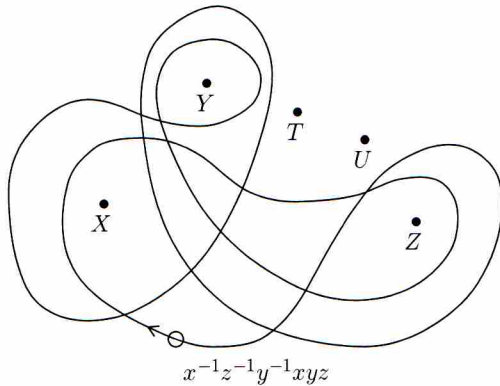
Możliwie najprostszą pętlę, wykonaną ze sznurka z połączonymi końcami, będziemy zakładać na, powiedzmy, kilka kołków wbitych w płaską powierzchnię. Będziemy to ilustrować dwuwymiarowymi rysunkami, gdzie kołkom odpowiadać będą wyróżnione punkty płaszczyzny, a pętlom krzywe zamknięte umieszczone na tej płaszczyźnie. Będziemy przy tym zakładać, że dwie pętli są równoważne, jeżeli jedną z nich można tak przesunąć po powierzchni bez przekładania przez wierzchołki kołków, by wyglądała dokładnie tak, jak druga. Pętlę nazwiemy ściągającą, jeśli można ją bez żadnych ograniczeń dowolnie przemieszczać po całej płaszczyźnie, innymi słowy – jeśli jest to pętla niezaczepiona na żadnym z kołków (np. taka jak „motyl” z rysunku 10).



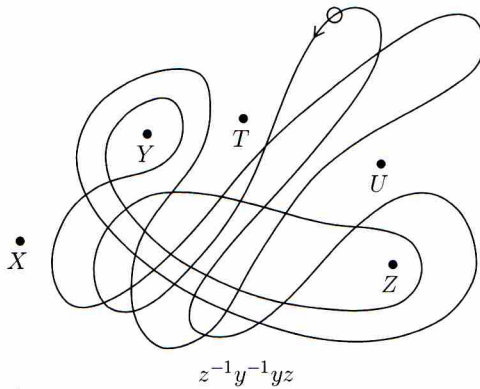
Rys. 6



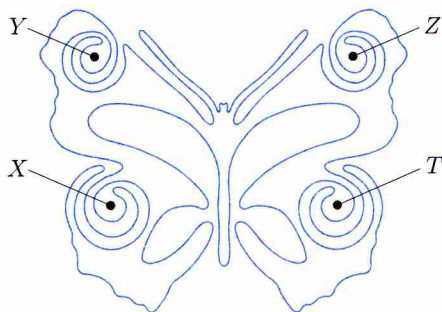
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



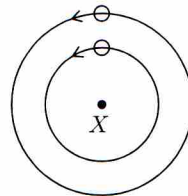
Rys. 10

Do opisu rysunku pętli użyjemy symboli literowych. Najpierw każdy z wyróżnionych punktów płaszczyzny (odpowiadających kołkom) nazwiemy wielkimi literami alfabetu (X, Y, Z, \dots). Następnie w rysowanej pętli zaznaczymy kierunek rysowania oraz początek pętli,

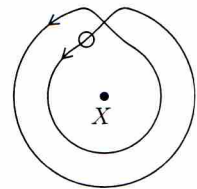
który, rzecz jasna, jest jednocześnie jej końcem. Te dwa parametry pozwolą nam przypisywać pętli ciąg symboli – małych liter odpowiadających wyróżnionym punktom, które pętla obiega. Przyjmujemy przy tym następujące zasady.

1. Każdą pętlę ściągającą oznaczmy symbolem 1.
2. Jeżeli rysujemy pętlę, to jednocześnie zapisujemy kolejne litery odpowiadające punktom, które pętla otacza, przy czym obiegając np. punkt X przeciwnie do ruchu wskazówek zegara piszemy x , a zgodnie z ruchem wskazówek zegara x^{-1} .
3. Ciąg symboli odpowiadających ustalonej pętli będziemy redukować do możliwie najkrótszego zapisu, usuwając z zapisu każdy fragment postaci aa^{-1} oraz $a^{-1}a$.

Zauważmy, że właściwie każdą pętlę można posklejać z pętli najprostszymi (rys. 11), jeśli będziemy trzymać się zasady, wedle której możliwy jest obieg po całej pętli bez naruszenia kierunków pierwotnych w najprostszymi pętlach wchodzących w jej skład.

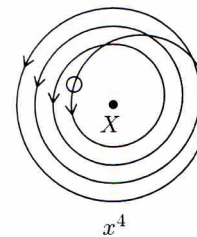
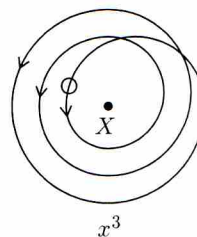


Rys. 11a



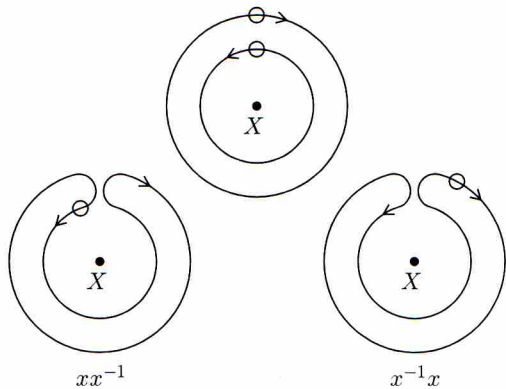
Rys. 11b

Rozważmy na początek pętle obiegujące jeden punkt X . Weźmy np. dwie pętle obiegujące punkt X przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i sklejmy je według powyższej zasady. Obie pętle oznaczmy symbolem x . Niezależnie od tego, czy najpierw będziemy obiegać pętlę, która na rysunku jest większa, czy też pętlę, która jest mniejsza, po ich sklejeniu powstanie pętla równoważna tej, która jest na rysunku 11b. W każdej z tych sytuacji otrzymanej pętli przypiszemy symbol xx , który dla skrótu zapiszemy w postaci x^2 . Po sklejeniu trzech czy czterech pętli równoważnych pętli x powstaną pętle oznaczone jako x^3 i x^4 (rys. 12).



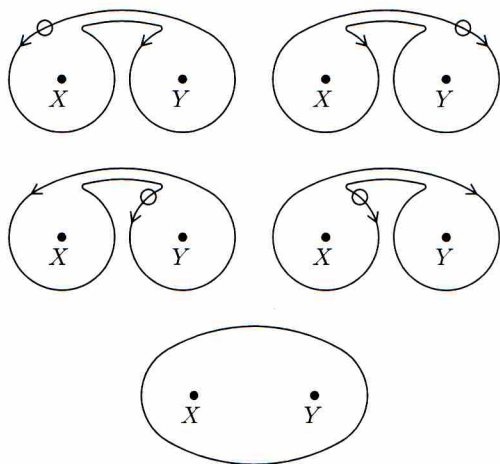
Rys. 12

Łatwo zauważyć, że sklejenie pętli x z pętlą x^{-1} prowadzi do pętli ściągającej. Jest to więc zgodne z przyjętą zasadą usuwania z zapisu nazwy pętli symboli postaci aa^{-1} i $a^{-1}a$. Tak więc obie pętle: xx^{-1} i $x^{-1}x$ są pętlami ściągającymi i możemy im przypisać symbol 1 (rys. 13).



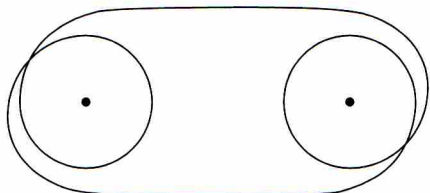
Rys. 13

Przejdźmy teraz do pętli obiegających dwa punkty: X i Y . Będziemy je sklejać z pętli prostych postaci x , x^{-1} , y i y^{-1} . Zauważmy, że jeżeli w rysunkach zapomnimy zaznaczyć punkt początkowy (końcowy) pętli oraz kierunek obiegu, to cztery różne pętłe xy , $y^{-1}x^{-1}$, yx i $x^{-1}y^{-1}$ będą wyglądać tak samo (rys. 14), ale aż takie uproszczenia nas nie interesują.

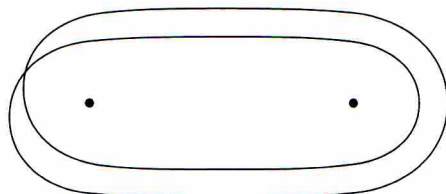


Rys. 14

Rozróżnimy bowiem, który kołek obchodzimy najpierw, który potem i w jakim kierunku to robimy. Jest to o tyle ważne, że w przeciwnym razie doszlibyśmy do błędnego wniosku, że np. $xy = yx$, co z kolei sugerowałoby istnienie możliwości przemieszczania pętli z rysunku 15 do postaci pętli z rysunku 16, co, jak widać „gołym okiem”, nie jest wykonalne.



Rys. 15

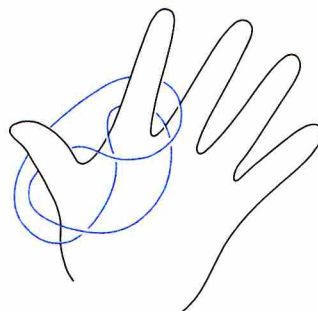


Rys. 16

Rzeczywiście, przy ustaleniu np. dodatniego obiegu względem punktu X , w zależności od określenia punktu początkowego, pętla z rysunku 15 reprezentuje każdą z pętli x^2y^2 , xy^2x , y^2x^2 lub yx^2y , natomiast pętla z rysunku 16 tylko $xyxy$ lub $yxyx$. Widzimy zatem, że działanie łączenia pętli (słów) nie jest przemienne! Zauważmy jeszcze tylko, że zdjęcie pętli z kołka X pociąga za sobą modyfikację zapisu przez usunięcie z niego symboli x i x^{-1} . Każda z pętli z rysunków 15 i 16 zostałaby w ten sposób doprowadzona do postaci y^2 (przy zachowaniu wcześniej ustalonego dodatniego obiegu).

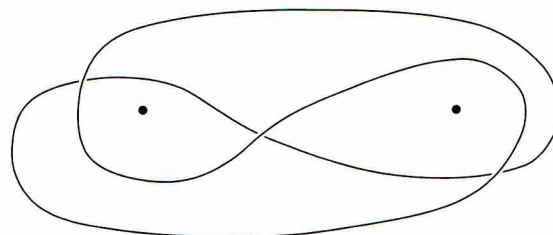
Jesteśmy już gotowi, by wykorzystać wprowadzony wyżej formalny opis do wyjaśnienia tajemnicy magicznej sztuczki. Powróćmy zatem do pętli z rysunków 4 i 5 i do ich uproszczonych wersji z rysunków 8 i 9. Pierwszą z nich można nazwać słowem $x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz$. Druga powstaje z niej przez zdjęcie z palca X , zatem jej zapis ma postać $z^{-1}y^{-1}yz$, ale z tego zapisu już widać, że jest to pętla ściągalna, bo po usunięciu ciągu symboli $y^{-1}y$ zostanie tylko $z^{-1}z$, a zatem nazwą dla tej pętli jest symbol 1 ! W ten sposób na pozór magiczny efekt znalazł zupełnie racjonalne wytłumaczenie.

Skoro już mamy sposób nazywania pętli, pozwalający z nazwy wywnioskować jej ważne własności, pobawmy się przez chwilę w tworzenie pętli dla iluzjonisty. Na rysunku 17a przedstawiona jest pętla mająca tę własność, że jeśli zdejmujemy ją z któregoś z palców, to z drugiego palca można już ją ściągnąć.

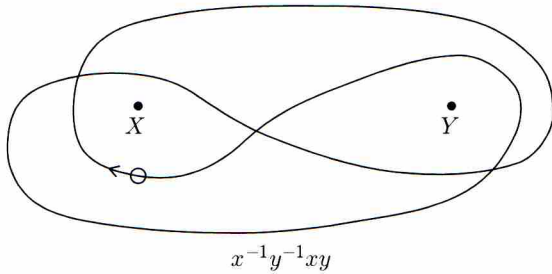


Rys. 17a

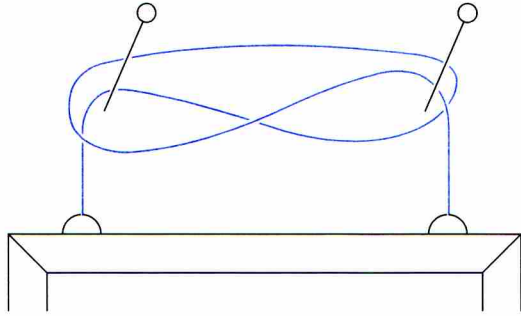
Rzeczywiście, jej płaski rysunek pozwala nazwać ją np. słowem $x^{-1}y^{-1}xy$. Jeśli zdejmujemy ją z palca X , to zostanie nam pętla o nazwie $y^{-1}y$, a jeśli zdejmujemy ją z palca Y , zostanie nam pętla o nazwie $x^{-1}x$. Idąc za sugestią p. Michała Krycha, można by to wyrazić tak: gdybyśmy zawiesili na ścianie obrazek zaczepiony na dwóch gwoździach tak, jak na rysunku 17d, to wyciągnięcie któregoś z gwoździ sprawi, że obrazek spadnie.



Rys. 17b



Rys. 17c



Rys. 17d

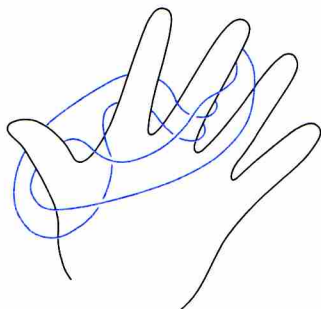
Czy potrafilibyśmy zawiesić obrazek na trzech gwoździach, by po wyjęciu któregoś z nich obrazek spadł? Co prawda, nie jest to łatwe, ale takie zawieszenie jest możliwe na trzech i na czterech, i na dowolnej skończonej liczbie gwoździ. Zaczniemy od słowa, które odpowiada za takie zaczepienie na dwóch gwoździach i oznaczymy je symbolem $[x, y]$:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

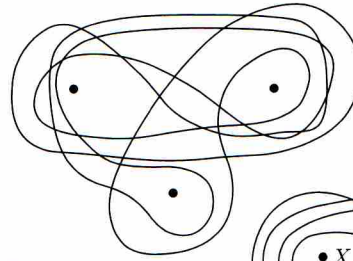
Jak zauważyliśmy, zastąpienie symbolu x przez 1 lub symbolu y przez 1 prowadzi do pętli ściąganej. Innymi słowy, można przyjąć, że $[1, y] = 1$ i $[x, 1] = 1$. Jeśli teraz p jest słowem odpowiadającym pętli zaplątej wokół m punktów, a przez p^{-1} oznaczymy tę samą pętlę, tyle że mającą przeciwny kierunek obrotu, to łatwo stwierdzić, że pętla $p^{-1}p$ i pp^{-1} są ściągane, czyli $p^{-1}p = pp^{-1} = 1$. Mając to na względzie, widzimy, że pętla odpowiadająca słowu $[p, z]$ po zdjęciu z punktu odpowiadającego z staje się ściągana. To oznacza w szczególności, że pętla postaci

$$\begin{aligned} [[x, y], z] &= [x, y]^{-1}z^{-1}[x, y]z = \\ &= (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1}z^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz = \\ &= y^{-1}x^{-1}yxz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz \end{aligned}$$

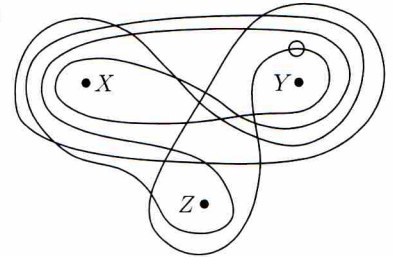
odpowiada za takie powieszenie obrazka na trzech gwoździach, o jakim mówimy wyżej. Jej wygląd pokazuje rysunek 18.



Rys. 18a

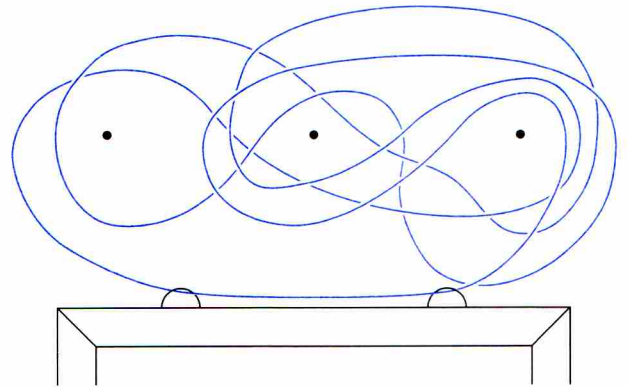


Rys. 18b



Rys. 18c

$$[[x, y], z] = y^{-1}x^{-1}yxz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz$$



Rys. 18d

Teraz już nietrudno się domyśleć, że wieszanie obrazka według opisanej zasady na czterech gwoździach można np. zrobić zgodnie ze słowem $[[[x, y], z], t]$, na pięciu – $[[[[x, y], z], t], u]$ i tak dalej.

Zostawiamy Czytelnikowi wymyślenie, jak sprawnie i szybko takie pętla wykonane ze sznurka zakładać na palcach ręki lub kołkach.

Została nam jeszcze sprawa grupy. Otóż grupa, która zawiera w sobie te wszystkie prawa rządzące pętlami, jakie można zaplatać wokół wyróżnionych n punktów X_1, X_2, \dots, X_n , to grupa, której elementami są wszystkie możliwe 'słowa', jakie możemy utworzyć z symboli $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}$, zapisanych kolejno jeden po drugim. Przyjmujemy przy tym, że dwa słowa są identyczne, jeśli z jednego z nich można otrzymać drugie w skończonej liczbie kroków wstawiając bądź usuwając z niego fragmenty postaci aa^{-1} lub $a^{-1}a$. Działaniem w zbiorze tych słów jest ich łączenie: jeśli w_1, w_2 są słowami, to

$$w_1 \circ w_2 \stackrel{\text{def.}}{=} w_1w_2.$$

Elementem neutralnym jest, oczywiście, słowo 1, a łączność działania nie budzi wątpliwości.

Na zakończenie sugerujemy zbadanie własności trzech pętli, których nazwy podane są poniżej.

1. $[x, yz][z, xy][y, zx]$
2. $[x, yzt][t, xyz][z, txy][y, ztx]$
3. $[x, y, x^{-1}zx][z, x, z^{-1}yz][y, z, y^{-1}xy]$

Czy można sklonować foton?

W ostatnich latach ogromne emocje rozpała problem klonowania organizmów żywych. W 1997 roku biologom udało się sklonować słynną owieczkę Dolly. Sklonować, czyli z owieczki, mającej w swoich komórkach pewien unikalny kod genetyczny, wytworzyć jej genetyczną kopię. To znaczy osobnika (owieczkę) z dokładnie takim samym zestawem genów.

Proces klonowania jest technicznie bardzo skomplikowany i wciąż nie do końca zrozumiany. Oczywiście, im organizm prostszy, tym łatwiej powinno się go dać klonować. Łatwiej jest sklonować pierwotniaka niż owcę, nie mówiąc już o wirusach, których kod genetyczny potrafimy złożyć z pojedynczych nukleotydów i wyprodukować na zamówienie według danego przepisu tyle kopii, ile chcemy.

A czy możemy sklonować cząsteczkę chemiczną? Wyobraźmy sobie takie zadanie: ktoś przysłała nam w kopercie pewną nieznaną nam cząsteczkę chemiczną. Mamy do dyspozycji wszystko, czego dusza zapagnie – nowoczesne laboratorium, wszelkie substancje chemiczne... Polecenie jest proste: wytworzyć cząsteczkę chemiczną taką samą jak otrzymana w kopercie. Otwieramy więc kopertę i ostrożnie badamy przyslaną cząsteczkę, tak żeby jej nie zniszczyć, a dowiedzieć się, z jakich atomów się składa. Możemy to zrobić, na przykład świecąc na nią światłem laserowym i obserwując światło, jakie tak wzbudzona cząsteczka emituje. Gdy już poznamy, z jakich atomów się składa, musimy użyć naszej chemicznej wiedzy, aby dokonać syntezy tej cząsteczki (zazwyczaj uzyskamy całe mnóstwo takich cząsteczek) i klonowanie gotowe.

Czy rzeczywiście sklonowana cząsteczka jest identyczna z oryginałem? Odpowiedź na to pytanie zależy od tego, co rozumiemy przez słowo „identyczna”. Jeśli chodzi nam tylko o skład atomowy cząsteczki, to rzeczywiście odnieśliśmy sukces. Ale jeśli ktoś ma wyższe wymagania i zażąda, żeby sklonowana cząsteczka była w dokładnie takim samym stanie kwantowym co cząsteczka przysłana w kopercie, to jest to już znacznie poważniejsze wyzwanie. Mówiąc *w takim samym stanie kwantowym* mam na myśli, że wszystkie atomy, a wraz z nimi elektrony, protony, neutrony należące do cząsteczki-klonu są w tym samym stanie co elektrony, protony i neutrony cząsteczki oryginalnej.

Okazuje się, że takiego zadania nie jesteśmy w stanie wykonać! Zaskakującym twierdzeniem mechaniki kwantowej jest to, że wierne klonowanie nieznanego układu kwantowego (np. cząsteczki chemicznej) jest niemożliwe!

Żeby zrozumieć, skąd się bierze w mechanice kwantowej tak ostre ograniczenie naszych możliwości powielania, zajmiemy się obiektem jeszcze prostszym od cząsteczki chemicznej. Zajmiemy się pojedynczą cząstką światła – fotonem. Zobaczymy na tym przykładzie, że sklonowanie nawet czegoś tak mało skomplikowanego jak foton okazuje się niemożliwe w świetle obecnie uznawanych praw fizyki.

Rafał DEMKOWICZ-DOBRZAŃSKI

Myśląc o świetle w sposób klasyczny, mówimy, że światło jest falą elektromagnetyczną. Długość fali λ (odstęp między kolejnymi brzuszkami) decyduje o tym, jakiego koloru jest światło.

Poza barwą światło ma jeszcze inną ważną cechę – polaryzację. Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną, co oznacza, że pole elektryczne i magnetyczne drgają w kierunkach prostopadłych do kierunku rozchodzenia się fali. Rozważmy falę elektromagnetyczną, która pada prostopadle na kartkę, którą właśnie czytacie. Poprzeczność fali oznacza, że pola elektryczne i magnetyczne będą wzajemnie prostopadłymi wektorami leżącymi w płaszczyźnie kartki. Umownie przyjmuje się, że kierunek polaryzacji światła to kierunek drgań pola elektrycznego. Żeby wytworzyć spolaryzowane światło, wystarczy przepuścić światło niespolaryzowane, np. z żarówki, przez polaryzator, który przepuści tylko światło o określonej polaryzacji. Możemy kręcić polaryzátorem tak, aby zamiast przepuszczać światło spolaryzowane np. pionowo, przepuścił światło spolaryzowane np. pod kątem 45° . W ten sposób możemy wytworzyć światło o dowolnej polaryzacji (liniowej).

O świetle nie da się jednak myśleć jedynie jako o fali. W wielu sytuacjach światło przejawia naturę cząsteczkową (korpuskularną) i trzeba myśleć o nim, że składa się z cząstek. Te cząstki nazywamy fotonami. Fotonom przypisujemy takie same cechy co fali elektromagnetycznej: kolor i polaryzację, jakkolwiek trudno intuicyjnie uchwycić pojęcie polaryzacji czy koloru pojedynczego fotonu.

Zapomnijmy na jakiś czas o tym, że foton ma kolor i skupmy się tylko na jego polaryzacji. To pomoże nam zrozumieć, dlaczego klonowanie fotonu jest niemożliwe. Jeśli ustawimy idealny polaryzator tak, aby przepuszczał światło spolaryzowane pionowo, a następnie puścimy na taki polaryzator pojedynczy foton o polaryzacji pionowej, to foton ten na pewno przejdzie przez polaryzator. Jeśli na ten sam polaryzator puścimy foton spolaryzowany poziomo, to tym razem foton na pewno przez polaryzator nie przejdzie. Ale co będzie, jeśli ktoś nam prześle pojedynczy foton o polaryzacji pod kątem 45° ? Czy nasz polaryzator go zatrzyma czy przepuści? Otóż tu właśnie objawia swoją naturę fizyka kwantowa i mówi: „Nie można przewidzieć, czy foton przejdzie czy nie! Można powiedzieć tylko, że z prawdopodobieństwem 50% przejdzie, a z prawdopodobieństwem 50% nie”.

Jeśli ktoś nam przesyła pojedynczy foton o polaryzacji albo poziomej, albo pionowej, albo 45° , to ustawiając polaryzator i sprawdzając, czy foton przeszedł czy nie, nie jesteśmy w stanie stwierdzić, jaki foton został nam przysłany! Jeśli foton przejdzie przez polaryzator, to nie wiemy, czy był to foton o polaryzacji pionowej, czy też foton o polaryzacji 45° , któremu szczęśliwie (z prawdopodobieństwem 50%) udało się przejść przez polaryzator. Jedyne, co możemy w tej sytuacji

powiedzieć, to to, że na pewno nie był to foton o polaryzacji poziomej, bo ten by na pewno nie przeszedł.

Zamiast polaryzacji 45° można by użyć w powyższych rozważaniach polaryzacji światła pod dowolnym kątem np. 30° , byle tylko innej niż pozioma i pionowa. Spowodowałoby to jedynie zmianę prawdopodobieństw przejścia lub nieprzejścia takiego fotonu przez polaryzator, zamiast 50% i 50% byłoby np. 25% i 75%. Nie zmieniłoby to jednak zasadniczych wniosków dyskusji.

Wróćmy teraz do klonowania. Ktoś nam przesyła „w kopercie” foton o nieznannej polaryzacji. Naszym zadaniem jest sklonować ten foton, to znaczy zwrócić zleceniodawcy dwa fotony o takiej samej polaryzacji jak foton przysłany. Nasuwa się strategia: najpierw sprawdzimy, jaką polaryzację ma foton, a potem wytworzymy jego kopię. Spróbujemy postąpić w sposób opisany w poprzednim akapicie. Ustawiamy polaryzator np. tak, by przepuszczał światło spolaryzowane pionowo i... no cóż, mamy ten sam problem co poprzednio. Jeśli foton przejdzie, to wiemy tylko tyle, że nie był to foton spolaryzowany poziomo, ale mógł być to foton spolaryzowany pionowo albo foton o polaryzacji pod kątem 8° , 17° , 34° , 77° ,..., któremu szczęśliwie udało się przejść. Więc właściwie nic nie wiemy. Co gorsza po dokonaniu pomiaru nieodwracalnie zaburzyliśmy stan fotonu. Jeśli foton miał polaryzację 45° i szczęśliwie udało mu się przejść przez polaryzator, to po przejściu jest już fotonem o polaryzacji pionowej i całkowicie „zapomniał” swoją pierwotną naturę. Widać, że ta metoda nie pozwoli nam sklonować fotonu. A może jest inna?

Może nie należy wykonywać pomiaru na przysłanym fotonie. Kwantowa natura fotonu nie pozwala dowiedzieć się o nim tego, czego byśmy chcieli, za pomocą pomiaru na pojedynczym egzemplarzu. I to nie dlatego, że pomiar za pomocą polaryzatora jest zbyt prymitywny. Każda inna próba pomiaru polaryzacji pojedynczego fotonu zostawiłaby nam ten sam niedosyt.

Zrezygnujmy więc z pomiaru i zastanówmy się, czy możemy sklonować foton, nie dowiadując się wcale, jaki on jest. To zadanie nie jest wcale aż tak absurdalne. Możemy, na przykład, przygotować urządzenie, do którego wpuszczamy foton, on tam oddziałuje z jakimś wzbudzonym atomem, który w wyniku oddziaływania wysyła dodatkowy foton o takiej samej polaryzacji jak foton, który wpadł do urządzenia. Na żadnym etapie tego procesu nie wykonujemy pomiaru, nie wiemy więc, jaka jest polaryzacja przysłanego fotonu. Po wyprodukowaniu jego kopii oba fotony odsyłamy zleceniodawcy, również teraz nie mierząc ich polaryzacji (bo moglibyśmy coś popsuć).

Niestety, okazuje się, że nie można skonstruować takiego urządzenia, które by klonowało foton o nieznannej polaryzacji i było zgodne ze znanymi nam prawami mechaniki kwantowej. Przedstawię tutaj dowód tego faktu, wynikający jedynie z tego, że wszelkie operacje w mechanice kwantowej (pomiar, ewolucja układu) są operacjami liniowymi.

Wyobraźmy sobie maszynę, która potrafi dobrze klonować fotony mające albo polaryzację pionową, albo poziomą (taka maszyna jest dopuszczalna przez mechanikę kwantową). Oznaczmy stan początkowy maszyny jako $|M_0\rangle$. Oznaczenie stanu w postaci $|\rangle$ nosi w fizyce nazwę „ket”. Zapiszmy, co robi maszyna, jeśli dostanie na wejściu foton o polaryzacji poziomej $|\leftrightarrow\rangle$ lub foton o polaryzacji pionowej $|\updownarrow\rangle$:

$$(1) \quad \begin{cases} |\leftrightarrow\rangle|M_0\rangle & \longrightarrow |\leftrightarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle|M_1\rangle \\ |\updownarrow\rangle|M_0\rangle & \longrightarrow |\updownarrow\rangle|\updownarrow\rangle|M_2\rangle \end{cases}$$

Zapis po lewej stronie oznacza, że na początku mamy foton o pewnej polaryzacji (poziomej, pionowej) oraz maszynę w stanie początkowym. Po działaniu maszyny na wyjściu otrzymujemy dwa fotony o tych samych stanach polaryzacyjnych oraz maszynę, której stan może w ogólności zależeć od tego, jaki foton klonowała (stąd różne stany $|M_1\rangle$ oraz $|M_2\rangle$). W zapisie po prawej stronie mamy trzy „kety”: pierwszy oznacza stan pierwszego fotonu, drugi oznacza stan drugiego fotonu, a trzeci stan maszyny. Można myśleć o tych „ketach”, że są przez siebie mnożone, co ułatwi dalsze rozumowania. Jest to najogólniejsza postać maszyny, która dobrze klonuje stany $|\leftrightarrow\rangle$ oraz $|\updownarrow\rangle$. Sprawdźmy teraz, czy ta maszyna dobrze sklonuje również foton o innej niż pionowa lub pozioma polaryzacji, np. 45° .

Stan fotonu o polaryzacji 45° w mechanice kwantowej zapisuje się jako $|45^\circ\rangle = 1/\sqrt{2}(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle)$. O stanach w mechanice kwantowej można myśleć jak o wektorach o długości 1. W tym przypadku jest to szczególnie intuicyjne. Można myśleć, że stan $|\leftrightarrow\rangle$ to wektor długości 1 skierowany np. w prawo, stan $|\updownarrow\rangle$ to wektor długości 1 skierowany do góry. A stan $|45^\circ\rangle$ to wektor skierowany pod kątem 45° . O stanie $|45^\circ\rangle$ można myśleć jako o pewnej kombinacji polaryzacji pionowej i poziomej.

Równie dobrze polaryzację poziomą i pionową można by wyrazić np. przez polaryzację pod kątem 45° i polaryzację pod kątem 135° . Matematycznie oznacza to, że zdecydowaliśmy się na wybór pewnej bazy w przestrzeni wektorowej. To tak, jak opisując wektory na płaszczyźnie, możemy wybrać różne układy współrzędnych. Np. zamiast osi x, y możemy wybrać układ współrzędnych x', y' obrócony względem tamtego o 45° i rozpisywać wektory w nowym układzie współrzędnych.

Współczynnik $1/\sqrt{2}$ zapewnia, że długość wektora $|45^\circ\rangle$ jest równa 1.

Co by oznaczało dobre klonowanie stanu $|45^\circ\rangle$? Na wyjściu chcielibyśmy uzyskać dwa fotony w stanie $|45^\circ\rangle$, czyli stan:

$$(2) \quad \begin{aligned} |45^\circ\rangle|45^\circ\rangle|M_3\rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle)|M_3\rangle, \end{aligned}$$

gdzie $|M_3\rangle$ oznacza stan maszyny po klonowaniu, który może być w ogólności inny od $|M_1\rangle$ i $|M_2\rangle$.

Operację A nazywamy liniową, jeśli spełnione są prawa:

$$A(v + w) = A(v) + A(w), \quad A(\alpha v) = \alpha A(v),$$

gdzie α jest dowolną liczbą.

Wymnażając nawiasy, otrzymujemy wniosek, że stan, jaki chcielibyśmy uzyskać, jest postaci

$$(3) \quad \frac{1}{2} (|\leftrightarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle|\updownarrow\rangle + |\updownarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle|\updownarrow\rangle) |M_3\rangle.$$

A co nam da nasza maszyna klonująca, jeśli wpuścimy do niej stan $|45^\circ\rangle = 1/\sqrt{2}(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle)$? Skorzystamy tutaj z zapowiadanej wcześniej liniowości mechaniki kwantowej i wzorów (1).

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle) |M_0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle |M_1\rangle + |\updownarrow\rangle|\updownarrow\rangle |M_2\rangle).$$

Niestety, ku naszemu zmartwieniu musimy stwierdzić, że jest to znacząco inny stan niż ten w wyrażeniu (3), który chcielibyśmy uzyskać od idealnej maszyny klonującej. Nawet jeśli przyjmiemy, że $|M_1\rangle = |M_2\rangle = |M_3\rangle$, to i tak wyrażenia będą się różnić tym, że w równaniu (4) w końcowym stanie mamy w nawiasie dodane do siebie dwa człony, a w wyrażeniu (3) są cztery nieredukowalne składniki. Podsumowując, każda maszyna, która dobrze klonuje stany $|\updownarrow\rangle$ i $|\leftrightarrow\rangle$, nie może dobrze klonować stanu $|45^\circ\rangle$. Czyli nie ma urządzenia klonującego dobrze foton o dowolnej polaryzacji.

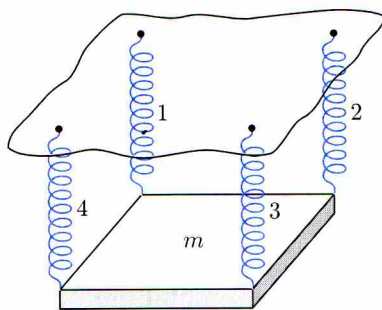
Z tego wszystkiego płynie bardzo prosty i ogólny wniosek. Rozważaliśmy jeden z najprostszyc przykładów układu kwantowego i doszliśmy do wniosku, że nie da się sklonować tego układu, jeśli znajduje się on w nieznanym stanie. Oczywiście, jeśli interesują nas

tylko wybrane stany kwantowe, np. tylko polaryzacja pionowa lub pozioma, to klonowanie jest możliwe. Wszystko to przenosi się na bardziej skomplikowane układy kwantowe, takie jak atomy, cząsteczki, a nawet owieczki. Mając jeden egzemplarz układu kwantowego i nic nie wiedząc o jego stanie, nie da się stworzyć jego wiernej kopii. Przez wierną rozumiemy, oczywiście, układ w dokładnie takim samym stanie kwantowym (w przypadku fotonu stan kwantowy utożsamiliśmy z jego polaryzacją).

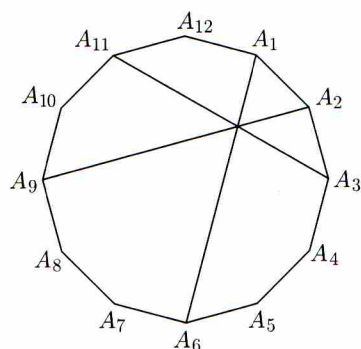
Na problem klonowania stanów kwantowych można patrzeć jak na problem powielenia pewnej informacji. Trudność kwantowego klonowania nie polega na tym, że nie mamy materiałów, żeby wytworzyć klon, ani że nie umiemy złożyć odpowiednich części. Problem tkwi natomiast w tym, że nie potrafimy powielić stanu kwantowego układu. Mówiąc inaczej – nie umiemy powielić kwantowej informacji zapisanej w stanie układu. Klasyczna informacja łatwo poddaje się powieleniu, natomiast kopiowanie informacji kwantowej jest niemożliwe. Ograniczenie to ma swoje dobre strony. Dzięki temu istnieje bezpieczna kwantowa metoda rozsyłania klucza, którego użyć można do szyfrowania wiadomości (kryptografia kwantowa).

A co z tego wynika dla owieczek? Biologowie mają mniejsze wymagania co do tego, czym jest wierne klonowanie. Nie martwią się o kwantową naturę układu i dlatego mogą się szczycić tym, że umieją klonować. My jednak wiemy, że nie ma metody, żeby owieczka Dolly była naprawdę (kwantowo) identyczna ze swoim pierwowzorem!

Zadania



Rys. 1



Rys. 2

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 625. Sonda kosmiczna o masie M i prędkości v wpada w chmurę spoczywającego pyłu. Pył składa się z przypadkowo rozrzuconych drobin o masie m i koncentracji n . Pole przekroju poprzecznego sondy względem kierunku ruchu wynosi A . Jakie będzie obserwowane opóźnienie a sondy, jeśli każda drobina po zderzeniu grzęźnie w powierzchni sondy?

Rozwiązanie na str. 16

F 626. Kwadratowa, jednorodna płyta o masie m wisi na 4 sprężynach o różnych stałych sprężystości k_1, k_2, k_3 i k_4 (rys. 1). Płyta wisi równolegle do podłoża, a długości swobodne sprężyn 1 i 2 są równe (pozostałych niekoniecznie). Jakimi siłami działają sprężyny na płytę?

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Waldemar POMPE

M 1069. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z spełniające układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 16

M 1070. Wykazać, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2 \dots A_{12}$ przekątne $A_1A_6, A_2A_9, A_3A_{10}$ przecinają się w jednym punkcie (rys. 2).

Rozwiązanie na str. 16

M 1071. Rozstrzygnąć, czy istnieje trójkąt o polu równym 100 i każdej wysokości mniejszej od 1.

Rozwiązanie na str. 14

Złoty jubileusz CERNu

W tym roku CERN obchodzi pięćdziesiątą rocznicę powstania. Ośrodek wywodzi swój akronim od Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, czyli Europejskiej Rady Badań Jądrowych, która w 1952 roku wybrała Genewę jako miejsce lokalizacji przyszłego laboratorium. W czerwcu 1953 roku projekt, stosunkiem głosów 16539 do 7332, przeszedł w kantonalnym referendum (w końcu to przecież Szwajcaria). Poniższe zdjęcie przedstawia początek prac ziemnych, które rozpoczęły się 17 maja 1954 roku pod okiem przedstawicieli lokalnych władz i pracowników powstającego ośrodka.



Obok *Wspólnoty Węgla i Stali* ośrodek był prekursorem europejskiej współpracy, która obecnie przybrała postać Unii Europejskiej. Celem powołania ośrodka było skuteczne konkurowanie z naukowym potencjałem Stanów Zjednoczonych i Związku Radzieckiego. Udało się to od samego początku, po dzień dzisiejszy. 24 listopada 1959 roku uruchomiony został potężny akcelerator *Proton Synchrotron* (PS). Przyspieszał on protony do energii 24 GeV (odpowiadającej przyspieszeniu potencjałem 24 miliardów wolt), która przyćmiła najwyższą do tej pory energię 10 GeV osiąganą w Dubnej (ZSRR). Rosjanie, przewidując przejście pałeczki przez CERN, zaopatrzyli Johna Adamsa w magiczny przedmiot ułatwiający świętowanie sukcesu (zdjęcie na pierwszej stronie okładki). Po opróżnieniu, lampa została odesłana do Alladyna z fotografią dokumentującą osiągniętą energię. Po ponad 40 latach PS nadal działa! To w nim wstępnie przyspieszane są wszystkie rodzaje cząstek używanych w CERNie. PS będzie prawdopodobnie służył przynajmniej przez najbliższe ćwierćwiecze: za trzy lata rozpocznie się kolejna era bezwzględnej dominacji CERNu w dziedzinie osiągania maksymalnych energii przyspieszanych cząstek. Zacznie działać Wielki Zderzacz Hadronów (Large Hadron Collider LHC), w którym będą krążyć przeciwbieżne wiązki protonów o energii 7 TeV każda.

Z perspektywy czasu widać, że to głównie dzięki CERNowi udało się stworzyć, a następnie niezwykle precyzyjnie potwierdzić standardowy model cząstek elementarnych (SM) [1]. Przypomnijmy tylko kamienie milowe tego procesu. W 1973 roku olbrzymia cernowska komora pęcherzykowa *Gargamelle* zarejestrowała *prądy neutralne*, a konkretnie oddziaływania neutrin mionowych bez przemiany neutrina w odpowiadający mu naładowany mion. Jedno z pierwszych takich oddziaływań pokazane jest na pierwszej stronie okładki.

Odkrycie to dowodziło istnienia neutralnych bozonów pośredniczących Z^0 , bez których SM nie miał sensu.

Dzięki temu teoretycy Steven Weinberg, Abdus Salam i Sheldon Glashow otrzymali w 1979 roku Nagrodę Nobla z Fizyki (NNF).

CERN nie poprzestał na udokumentowaniu istnienia Z^0 . Zbudowany został gigantyczny Super Proton Synchrotron (SPS), który w genialnej wersji Sp̄pS, zderzającej przeciwbieżne wiązki protonów i anyprotonów o energii bliskiej 1 TeV, pozwolił na odkrycie najpierw naładowanych bozonów pośredniczących W^+ i W^- , a następnie bozonu Z^0 .

Za to osiągnięcie, w 1984 roku, NNF otrzymali Carlo Rubbia i Simon van der Meer. I na tym nie poprzestano, tylko w 1989 roku uruchomiono Wielki zderzacz Elektronów i Pozytonów (LEP), który przez pięć lat był fabryką Z^0 , a przez następne pięć intensywnie szukał bozonu Higgsa (ostatniej brakującej cegiełki SM), produkując przy okazji pary bozonów pośredniczących. Te dziesięć lat intensywnej pracy, uzupełnione o wyniki innych eksperymentów, pozwoliły uczynić z SM najbardziej kompleksową, precyzyjną teorię fizyki. Dość powiedzieć, że to LEP pokazał, jaką masę powinien mieć najcięższy kwark top, co pozwoliło uwierzyć w jego odkrycie w Tevatronie (Stany Zjednoczone) na podstawie bardzo małej statystyki.

Te same precyzyjne dane pozwalają obecnie wierzyć, że enigmatyczny bozon Higgsa istnieje tuż ponad doświadczalnie wyznaczoną granicą jego masy (grafika na pierwszej stronie okładki) i tylko czeka na odkrycie jego i/lub fizyki, której SM jest tylko niskoenergetycznym przybliżeniem. Precyzja opisywanych pomiarów przyniosła w 1999 roku NNF Gerardusowi 't Hooftowi i Martinusowi J.G. Veltmanowi, teoretykom, których prace legły u podstaw rachunkowej wirtuozerii.

CERN to, oczywiście, nie tylko badania podstawowe w dziedzinie cząstek elementarnych [2]. W 1992 roku pracujący w CERNie Georges Charpak dostał NNF za wkład w budowę detektorów nie tyle ze względu na ich niezbędność w badaniach podstawowych, co na ich wykorzystanie w innych dziedzinach z medycyną na czele. To w CERNie Tim Berners-Lee wymyślił WWW, a obecnie to CERN odgrywa wiodącą rolę w rozwijaniu technik GRIDowych, czyli tworzeniu z rozproszonych komputerów jednego efektywnie działającego systemu. Technologia ta jest potrzebna do przetwarzania olbrzymich mas danych, które będzie dostarczać LHC, ale jednocześnie okazuje się niezbędna w rosnącej liczbie dziedzin.

Głównym celem CERNu pozostaje jednak badanie... początków Wszechświata. Badania mikroskopowe (femtoskopowe?) pozwalają na wniknięcie tam, gdzie nie sięgną najpotężniejsze teleskopy.

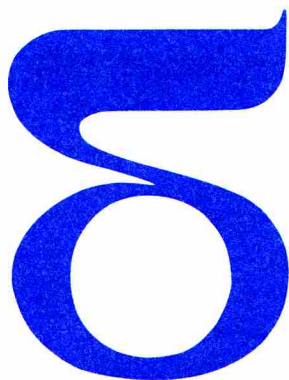
Co jeszcze czeka nas na tej drodze? Sami to sprawdzimy – CERN to przecież także nasze, polskie laboratorium.

Piotr ZALEWSKI

[1] Delta 5/2000, <http://hep.fuw.edu.pl/delta/5-2000.html>

[2] Delta 6/1996, <http://hep.fuw.edu.pl/delta/6-1996.html>

Polska strona CERNu:
<http://www.fuw.edu.pl/~ajduk/Public/Welcome.html>



mała delta

Można zacząć od banknotu

Na ile sposobów można przykryć banknotem prostokąt o tych samych rozmiarach? Każdy od razu zgadnie, że na cztery sposoby: do góry orłem, przy czym orzeł może być do dołu lub do góry nogami, i podobnie na dwa sposoby królem do góry (choć na banknocie nie widać jego nóg).



Na sprawę można spojrzeć inaczej: na ile sposobów można zmienić położenie takiego banknotu? Odpowiedź, wbrew pozorom, też będzie: cztery. Trzy znajdujemy łatwo: symetria względem pionowej osi (A), symetria względem poziomej osi (B) i obrót o 180° względem środka, czyli symetria środkowa (C). A czwarty sposób? No właśnie: ... nie ruszać go wcale (D). Taki układ ruchów, który prowadzi do każdego możliwego położenia banknotu to jego *izometrie własne* lub jego *ruchy*.



Mają one ciekawą własność: jeśli wykonamy po kolei kilka z nich, to zawsze okaże się, że końcowy wynik można było uzyskać za pomocą tylko jednego. Proszę sprawdzić, że ta tabelka, mówiąca, co wyjdzie z wykonania kolejno dwóch takich ruchów, nie kłamie.

	A	B	C	D
A	D	C	B	A
B	C	D	A	B
C	B	A	D	C
D	A	B	C	D

Za jej pomocą możemy obliczyć, jak będzie leżał banknot po kilku ruchach, bez posługiwania się banknotem. Na przykład

$$ABCBDACBCB = CAAAA = C,$$

czyli zamiast wykonywać skomplikowane operacje opisane na początku wystarczyło tylko raz obrócić banknot. Jak to zostało obliczone? Otóż przy takich obliczeniach można dowolnie wstawiać nawiasy, więc liczyliśmy tak

$$(AB)((CB)(DA))((CB)(CB)) = C(AA)(AA) = CDD = CD = C.$$

Jak widać, te cztery ruchy, oznaczone przez nas A , B , C , D , tworzą układ zamknięty. W takiej sytuacji mówimy, że *tworzą one grupę*. Jest to grupa o czterech elementach.



Można by się zastanowić, czy jest to jedyna grupa czteroelementowa, to znaczy, czy każde inne zamknięte cztery ruchy różnić się będą od ruchów banknotu tylko obrazkiem czy nazwami.

Spróbujmy wykonać eksperyment.

Tym razem zastanowimy się, jak można przekładać kwadrat, co ma cztery rogi. Bez trudu stwierdzimy, że tym razem odwrócić go

na drugą stronę się nie da – rogi nie pozwalają. Ale można go obrócić o 90° , 180° , 270° i 360° (lub w ogóle go nie ruszać, co na jedno wychodzi). Niech będą to ruchy P , Q , R , S . Ułóżmy dla nich tabelkę.

	P	Q	R	S
P	Q	R	S	P
Q	R	S	P	Q
R	S	P	Q	R
S	P	Q	R	S

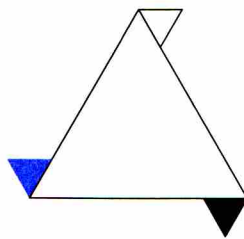
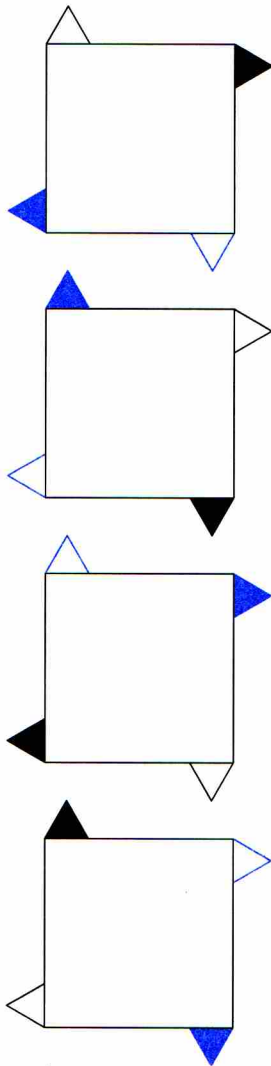
Tabelka wygląda trochę inaczej, ale może można tak poprzestawiać wiersze lub kolumny tej tabelki, by stała się taka sama jak ta na poprzedniej stronie?

Bacniejsze przyjrzenie się obu tabelkom (to nawet lepiej, że oglądać je będziemy z osobna) pokazuje, że jest to jednak inna tabelka. Tam, na poprzedniej stronie, wszystkie ruchy miały tę własność, że jak się je wykonało dwa razy, to wychodziło to samo:

$$AA = BB = CC = DD = D,$$

a tutaj tak nie jest. Oznacza to, że grupa rogatego kwadratu jest inna od grupy banknotu, bo ma inne własności. Mamy więc już dwie różne grupy o czterech elementach. A czy jest ich więcej?

A czy grupa może mieć mniej niż cztery elementy? Oczywiście. Na przykład grupa rogatego trójkąta równobocznego. Proszę sprawdzić, że to jest jej tabelka.



	K	L	M
K	L	M	K
L	M	K	L
M	K	L	M

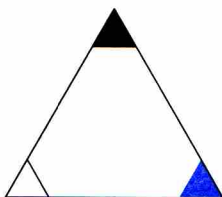
Jest ona podobna do tabelki rogatego kwadratu – tak samo linie z lewego dołu do prawej góry składają się z jednakowych liter. A jakie właściwie ruchy oznaczają litery K , L , M ?

A czy jest więcej grup trójelementowych niż ta jedna?

Każdy zgadnie z łatwością, jak napisać tabelkę rogatego pięciokąta foremnego. A czy grup pięcioelementowych jest więcej?

Zostawię to – jako bardzo trudne pytanie – Czytelnikom.

Jako ćwiczenie proponuję natomiast ustalenie liczby ruchów i napisanie tabelki dla ruchów nierogatego trójkąta równobocznego. Każdy dostrzeże, że może to być coś trochę podobnego do banknotu, bo trójkąt będzie się mógł obracać „na lewą stronę”. Ale i do rogatego trójkąta też.



Po wykonaniu tego ćwiczenia będzie można z łatwością stwierdzić, że grup sześćelementowych jest co najmniej dwie.

Marek KORDOS

Szuflady pana Dirichleta

Jeśli macie w biurku trzy szuflady, a chcecie do nich włożyć zeszyty z, powiedzmy, sześciu przedmiotów, to nie ma rady: w co najmniej jednej szufladzie muszą znaleźć się zeszyty z co najmniej dwóch przedmiotów. Tę prostą obserwację można rozwinąć do następującej zasady ogólnej: jeśli rozmieścić m przedmiotów w n szufladach i $m > n$, to w co najmniej jednej szufladzie znajdą się co najmniej dwa przedmioty. Ta ogólna zasada znana jest pod nazwą *zasady szufladkowej Dirichleta*. Jej matematyczne sformułowanie brzmi tak: jeśli $m > n$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa ze zbioru m -elementowego w zbiór n -elementowy.

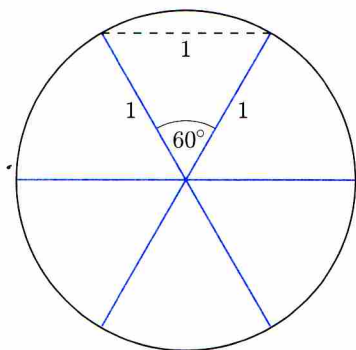
Funkcja f jest różnowartościowa, gdy różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości: gdy $a \neq b$, to $f(a) \neq f(b)$.

Oczywiście, szuflady mogą być przeróżne, w zależności od kontekstu, mogą nawet wcale nie przypominać fragmentu mebla. Istotne jest jedynie, co jesteście skłonni uznać za szufladę. Popatrzmy na dwa zadania, które można rozwiązać za pomocą zasady Dirichleta, odpowiednio interpretując pojęcia „szuflady” i „przedmiotu”.

Na początek zadanie geometryczne.

W kole o promieniu 1 wybrano siedem punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość jest nie większa od 1.

Rozwiązanie: Zaczniemy od zbudowania szuflad. Podzielmy koło na sześć przystających wycinków.



Zauważmy, że odległość dowolnych dwóch punktów należących do tego samego wycinka jest równa co najwyżej 1. Mamy 6 wycinków (to są nasze szuflady) i 7 punktów (przedmioty), zatem w co najmniej jednym wycinku leżą dwa punkty – a więc odległość między nimi nie przekracza 1 i teza zadania jest spełniona.

Spróbujmy teraz użyć zasady szufladkowej Dirichleta w następującym zadaniu.

Nauczyciel matematyki postanowił na każdej z najbliższych 14 lekcji przepytac co najmniej

jedną osobę, tak aby w sumie przepytac co najwyżej dwadzieścioro uczniów. Wykaż, że niezależnie od sposobu rozdzielania pytaných uczniów na 14 lekcji, zawsze znajdzie się kilka kolejnych lekcji, w trakcie których nauczyciel przepytac w sumie dokładnie 7 osób.

Rozwiązanie: Można się domyślić, że „szufladami” będą lekcje, a „przedmiotami” uczniowie, ale tym razem nie chodzi o to, co lub kto trafi do jednej szufladki, lecz o kilka szufladek z określoną z góry „zawartością”.

Niech x_i oznacza liczbę uczniów przepytanych do końca lekcji o numerze i , dla $i = 1, 2, \dots, 14$. Na każdej lekcji ma być przepytana co najmniej jedna osoba, zatem

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{14};$$

inaczej mówiąc, wszystkie liczby x_i są różne. Ponadto, $1 \leq x_1$ oraz $x_{14} \leq 20$. Dodajmy teraz 7 do każdej z tych liczb: otrzymamy

$$x_1 + 7 < x_2 + 7 < \dots < x_{14} + 7,$$

zatem te liczby też będą wszystkie różne, a przy tym $8 \leq x_1 + 7$ i $x_{14} + 7 \leq 27$. W takim razie wszystkie liczby

$$x_1, x_2, \dots, x_{14}, x_1 + 7, x_2 + 7, \dots, x_{14} + 7$$

są liczbami całkowitymi zawartymi między 1 i 27. Jest ich jednak 28, więc co najmniej dwie z nich muszą być równe. W pierwszej czternastce nie ma dwóch jednakowych liczb, w drugiej też nie, zatem jedna z pierwszych czternastu liczb, powiedzmy, x_i , musi być równa jednej z następnych czternastu liczb, powiedzmy, $x_j + 7$: $x_i = x_j + 7$. Oznacza to, że $x_i - x_j = 7$, a więc między lekcją o numerze j a końcem lekcji o numerze i przepytanych zostało dokładnie 7 uczniów. I koniec dowodu.

Nie chcąc odbierać Czytelnikowi przyjemności wynikającej z samodzielnego rozwiązania zadania, proponuję następujące.

1. W kole o promieniu 1 rozmieszczono 7 punktów, przy czym odległość między dowolnymi dwoma z nich jest nie mniejsza niż 1. Wykaż, że jeden z tych punktów jest środkiem koła.

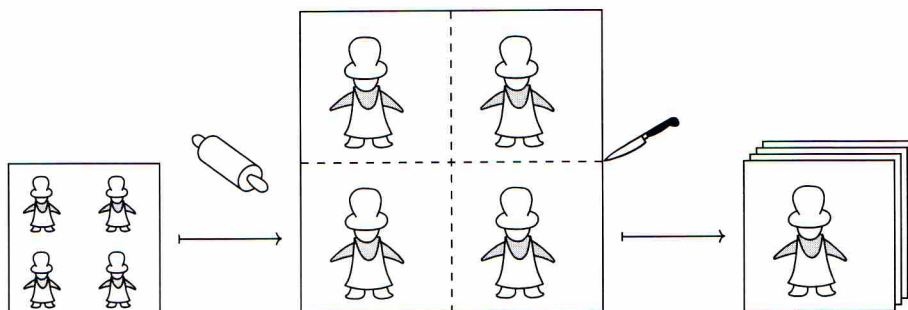
2. Każde dwa wierzchołki sześciokąta połączono odcinkiem w jednym z dwóch kolorów, amarantowym lub seledynowym. Udowodnij, że z wierzchołków sześciokąta można wybrać co najmniej jeden trójkąt o wszystkich bokach w tym samym kolorze.

Powodzenia!

Wiktor BARTOL

Przekształcenie piekarza

Zapewne widzieliście kiedyś Mamę, Tatę lub Babcię przygotowujących ciasto na pierogi. Jeśli nie przyszło Wam wtedy do głowy spojrzeć na ich pracę okiem matematyka, to nic straconego! Wprowadzimy teraz bowiem trochę abstrakcji do naszej kuchni. Przyjmiemy najpierw, że ciasto ma kształt kwadratu o boku 1, wałkowanie to jednokładność o skali 2, natomiast składanie wygląda tak jak na rysunku 1.

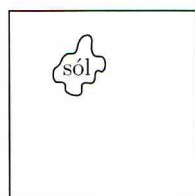


Rys. 1

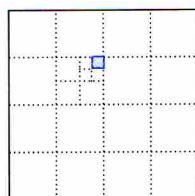
Oczywiście, cała praca piekarska ma na celu m.in. dobre wymieszanie składników. Wyobraźmy więc sobie, że gdzieś w pewnym miejscu kwadratu została rozsypana sól. Czy potraficie udowodnić, że zostanie ona równomiernie rozprowadzona po całym placku, po odpowiedniej liczbie rozwałkowań i złożzeń? (rys. 2).

Jeśli sól jest rozsypana na obszarze o dziwnym kształcie, nasze zadanie jest zbyt skomplikowane. Uprościmy je zatem i zbadajmy, co się dzieje, gdy sól jest rozsypana w kwadracie o boku 2^{-j} , $j \in \mathbb{N}$ (rys. 3).

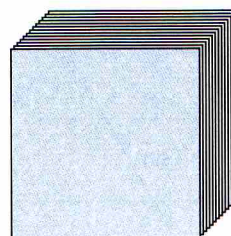
Nietrudno spostrzec, że po j rozwałkowaniach i złożeniach kolorowy kwadracik osiągnie rozmiary 1 na 1 i zgromadzona w nim sól wniknie równomiernie w placek (rys. 4).



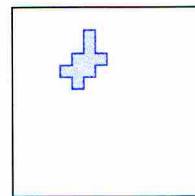
Rys. 2



Rys. 3



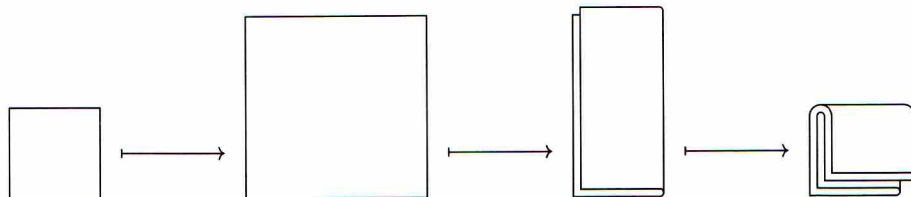
Rys. 4



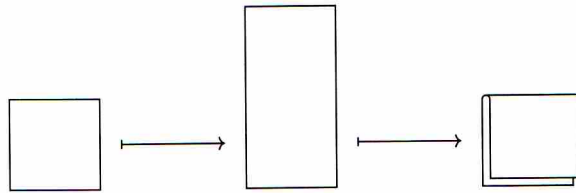
Rys. 5

Teraz łatwo poradzimy sobie także z sytuacją z rysunku 5 i ostatecznie przybliżając obszar z rysunku 2 odpowiednią sumą kwadratów, dojdziemy do wniosku, że i z tym przypadkiem sobie poradzimy.

Zastanówcie się teraz, czy sól będzie równomiernie rozprowadzona także wtedy, gdy wałkowanie i składanie będzie przebiegać zgodnie ze schematem z rysunku 6 lub ze schematem z rysunku 7.



Rys. 6

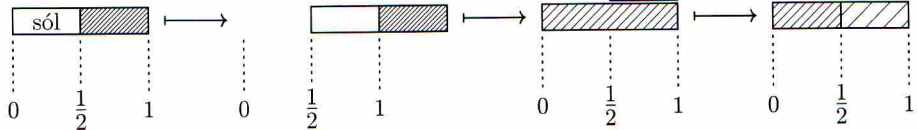


Rys. 7

A teraz spójrzmy na bardziej wyrafinowanego piekarza, który ugniata ciasto według schematu z rysunku 8. Czy on również równomiernie rozprowadzi sól? Ile wałkowań na to potrzebuje? Czy może tego dokonać w skończonym czasie?

Przekształcenie „wyrafinowanego piekarza” można opisać wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{dla } x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$



Rys. 8

Może ktoś na koniec tych zabaw spytać, czy taka piekarska matematyka może się istotnie jakiemś piekarzowi przydać? Oczywiście nie! Przydatna jest ona bowiem raczej samym matematykom, którzy z „wałkowaniem i składaniem” spotykają się w bardziej skomplikowanych przypadkach, tam gdzie odrobina intuicji jest na wagę złota.

A problem równomiernego rozproszenia soli to – po odpowiednim uogólnieniu – jeden z podstawowych problemów pewnej bardzo rozbudowanej gałęzi matematyki (teorii ergodycznej). Ale to już zupełnie inna para kaloszy.

Witold SADOWSKI

Czym różniło się starożytne pojęcie ruchu od obecnego?

Trudności z poprawnym zdefiniowaniem prędkości pokonał dopiero Newton wprowadzając rachunek różniczkowy. Wcześniej „straszyło” widmo aporii Zenona z Elei, który poddawał w wątpliwość istnienie ruchu pokazując, że przyjęcie jego realności prowadzi do sprzeczności. Najbardziej znane z tych aporii to „Achilles i żółw”, oraz „strzała”. Achilles, żeby dogonić żółwia, musi najpierw znaleźć się w miejscu, w którym teraz znajduje się żółw, ale przez ten czas żółw trochę się przesunie itd. Strzała, żeby dolecieć do tarczy, musi najpierw przebyć połowę odległości, następnie połowę połowy itd. Zenon twierdził, że w takim razie ani Achilles nie powinien dogonić żółwia, ani strzała dolecieć do tarczy. W konsekwencji pojęcie ruchu jest wewnętrznie sprzeczne. Twierdzili tak eleaci, którzy uważali, że jest tylko byt, a niebytu nie ma. W takim razie nie ma ruchu, bo ruch musiałby powodować przejście do czegoś, czego nie ma. A jak czegoś nie ma, to nie ma i nie można do tego przejść.

Pozostali filozofowie greccy aż tak drastycznie do ruchu nie podchodzili, ale ani oni, ani ich następcy (aż do Newtona) nie potrafili sobie z pojęciem prędkości poradzić.

Należy jednak pamiętać, że dla starożytnych ruch był przedmiotem rozważań filozoficznych,

a obecnie jest to przedmiot badań fizyki. Cele tych nauk są różne, więc nie można bezpośrednio porównywać poglądów starożytnych i współczesnych, bo to tak, jakby przeciwstawiać sobie twierdzenia: „jabłko jest okrągłe” i „jabłko jest smaczne”.

Obecnie wiemy, że choć strzała rzeczywiście musi przebyć ten nieskończony ciąg odcinków

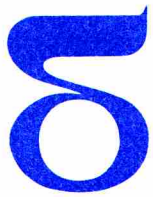
$$s = s/2 + s/4 + s/8 + \dots,$$

to jeśli pokonuje każdy z nich w czasie proporcjonalnym do jego długości, to dotrze do celu w skończonym czasie

$$t = t/2 + t/4 + t/8 + \dots,$$

a więc ze stałą prędkością $v = s/t$. Wydaje się, że nie ma w tym nic odkrywczego, ale to tylko dlatego, że się do tego przyzwyczailiśmy. Tak naprawdę „prędkość jest stosunkiem drogi do czasu” tylko dla ruchu jednostajnego (lub dla prędkości średniej). Ogólnie, prędkość (chwilowa) jest to „granica ilorazu wyrazów dwóch ciągów”. Jednego opisującego przebywaną drogę w coraz mniejszych odcinkach czasu i drugiego opisującego właśnie te coraz mniejsze odcinki czasu. Aby robić to w sposób dający poprawne wyniki należy użyć rachunku różniczkowego.

Piotr ZALEWSKI



Ułamki łańcuchowe i saros

Ułamek łańcuchowy był w starożytności wysuniętą przez Teajtetosa propozycją przedstawiania tego, co dziś nazywamy liczbami rzeczywistymi. Pomysł Teajtetosa nie przyjął się, niemniej jednak za pomocą ułamka łańcuchowego można zilustrować pewne zagadnienie astronomiczne.

Iloraz dwu liczb A/B to część całkowita K_0 oraz jakiś ułamek właściwy. Ten ułamek to jedność podzielona przez odwrotność ułamka, a ona to znowu jakaś inna część całkowita K_1 plus inny ułamek właściwy. Do tego ułamka znowu stosuje się to, co powiedziano w poprzednim zdaniu itd. Zapisuje się to właśnie jako ułamek łańcuchowy

$$A/B = [K_0; K_1, K_2, \dots].$$

Jeżeli na starcie był iloraz stanowiący po prostu liczbę wymierną, to odpowiadający jej ułamek łańcuchowy będzie skończony, bo opisana tu procedura osiągnie koniec. Jeżeli iloraz był liczbą niewymierną, to ułamek będzie wprawdzie nieskończony, ale jego obcięcia (mówi się: redukty) będą wymiernymi przybliżeniami wyjściowego stosunku liczb. A to już może być interesujące.

Niech $A = 29,5306$ oraz $B = 27,2122$ będą wyrażonymi w dniach przybliżonymi długościami miesiąca synodycznego i smoczego. Miesiąc synodyczny to okres, po jakim powtarzają się fazy Księżyca, a smoczy to okres, po jakim Księżyc powraca do tego samego węzła orbity, tj. punktu, w którym jego orbita przecina ekliptykę. Żaden z nich nie jest równy okresowi obiegu Księżyca wokół Ziemi, ponieważ ani Słońce, ani węzły orbity nie są na niebie nieruchome. Znaczenie tych pojęć wynika stąd, że z ich pomocą można łatwo

sformułować prawo rządzące zaćmieniami (Słońca lub Księżyca). Aby w ogóle nastąpiło zaćmienie, Księżyc musi znajdować się albo w nowiu, albo w pełni oraz blisko któregoś węzła. Jeżeli więc kiedyś nastąpiło zaćmienie, to w przyszłości zaćmienie nastąpi, gdy upłynie całkowita liczba miesięcy zarówno synodycznych, jak i smoczych – wszystko oczywiście w jakimś rozsądnym przybliżeniu. Długości miesięcy określone ze skończoną dokładnością dają iloraz wymierny, zatem odpowiadający mu ułamek łańcuchowy jest skończony, tylko nie wiadomo, jak długi. Jego początek to $A/B = [1; 11, 1, 2, 1, 4, \dots]$. Obcięcie akurat na tej czwórce daje $A/B \approx 242/223$. Wynik ten oznacza, że 242 miesiące smocze trwają tyle samo co 223 miesiące synodyczne, z błędem – co łatwo sprawdzić – zaledwie 0,03 dnia.

Okres ten, zwany sarosem, równy w przybliżeniu 6585,3 dni, znany był już w starożytności. Odkryto go prawdopodobnie metodą prób i błędów. Rzecz jasna, w czasie każdego sarosu wystąpi wiele innych zaćmień, ale te, które dzieli saros, stanowią regularną serię. Jednak przewidywanie zaćmień na tej podstawie na bardzo odległą przyszłość musi zawieść, bo przecież ta regularność to tylko przybliżenie.

Tomasz KWAST

Czym różni się budowa woltomierza i amperomierza?

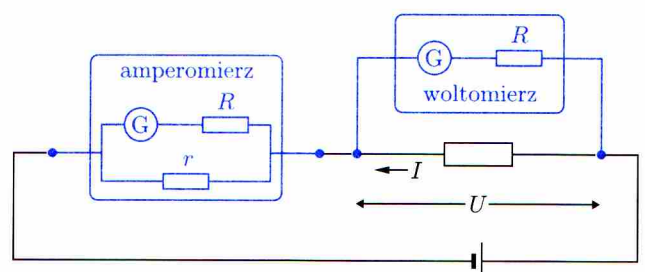
Jeżeli chodzi o budowę „zewnątrzną”, to zarówno amperomierz, jak woltomierz wyglądają podobnie: są to pudełka z dwoma kabelkami wyposażone we wskaźnik wychyleniowy lub elektroniczny. Obecnie często używa się mierników uniwersalnych, których funkcje zmienia się za pomocą np. pokręteł. Taki przyrząd może być zależnie od potrzeby amperomierzem, woltomierzem, omomierzem itp.

Woltomierz i amperomierz (w tradycyjnej postaci) mierzą natężenie prądu za pomocą galwanometru analogowego. Sekret polega na różnym sposobie włączania go w obwód.

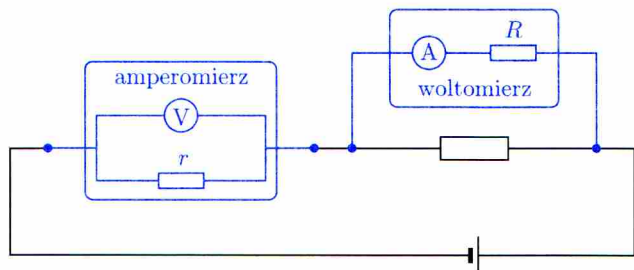
Woltomierz włączamy równolegle. Prąd płynący przez woltomierz płynie przez szeregowo połączone: galwanometr, czyli przyrząd bezpośrednio mierzący natężenie prądu i oraz duży, znany opór R . Spadek napięcia jest po prostu równy $i \cdot R$, a ponieważ

opór jest duży, to natężenie prądu jest bardzo małe, a więc prąd płynący przez badany element jest prawie niezakłócony.

Amperomierz natomiast włączamy szeregowo, ale ma on w środku dwie równoległe gałęzie. Jedna ze znanym, bardzo małym oporem r , przez którą płynie większość prądu oraz drugą z dużym oporem R i z szeregowo do tego oporu włączonym galwanometrem.



Czyli amperomierz to mały opór r z dołączonym do niego równolegle woltomierzem.



Mierząc prąd i płynący przez gałąź z oporem R , mierzymy całkowity prąd $I = i \cdot (1 + R/r)$, a ponieważ $R \gg r$, to można przyjąć, że $I = i \cdot R/r$, więc wskazania galwanometru (mierzącego prąd i) musimy tylko zmienić odpowiednio skalę mnożąc przez czynnik R/r .

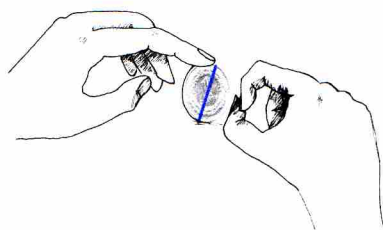
Natomiast sam (wychyleniowy) galwanometr mierzy siłę odchyłającą ramkę umieszczoną

w zewnętrznym polu magnetycznym. Obrót ramki jest spowodowany polem magnetycznym indukowanym przez płynący w niej prąd, a powstrzymywany przez sprężynę. Siła jest z jednej strony proporcjonalna do wychylenia (dzięki temu możemy ją mierzyć), a z drugiej do natężenia.

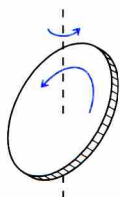
W przypadku mierników cyfrowych wewnętrzna budowa może być odwrócona. Sensor (przetwornik analogowo-cyfrowy) może mierzyć napięcie, a nie natężenie prądu jak galwanometr. To nie ma jednak w praktyce większego znaczenia, gdyż zawsze amperomierza można użyć jako woltomierza i odwrotnie. Wystarczy znać (lub zmierzyć) wewnętrzny opór przyrządu i mieć dodatkowy, znany, mały (duży) opór, aby przerobić woltomierz (odpowiednio: amperomierz) na amperomierz (odpowiednio: woltomierz).

Piotr ZALEWSKI

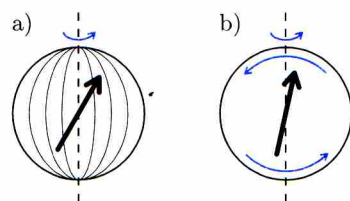
Kilka doświadczeń z monetą



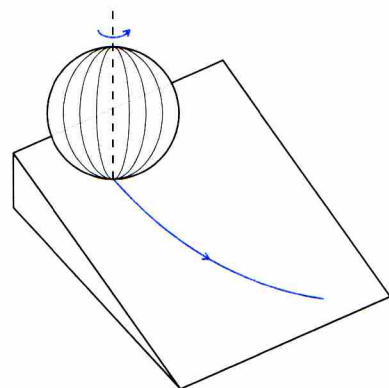
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Moneta to jeden z ulubionych „przyrządów” zadaniowych matematyków, zwłaszcza miłośników rachunku prawdopodobieństwa (patrz np. artykuł „Gry Penneya” w *Delcie* 7/2004). Spróbuję pokazać, że za pomocą monety można równie skutecznie bawić się w fizykę.

Pierwsze doświadczenie jest proste: na dużej, gładkiej i poziomej powierzchni spróbujmy przytrzymać monetę palcem pionowo. Drugim palcem należy ją „pstryknąć” w sam kraniec (rysunek 1). Moneta zacznie wirować z dużą szybkością i jednocześnie poruszać się powoli do przodu. Ruch postępowy po chwili ustanie, ale moneta będzie cicho kręcić się w miejscu. Po pewnym czasie charakter ruchu znów się zmieni, moneta przechyli się i z łoskotem będzie się turlać w kółko coraz bardziej przechylona, aż ruch ustanie całkowicie (rysunek 2).

Jeśli namalować na powierzchni monety dużą, kolorową strzałkę (np. flamastrem), to widać będzie, że póki moneta wiruje prosto, strzałka podczas ruchu wskazuje wciąż ten sam kierunek. Kiedy jednak zacznie się przechylać, strzałka będzie szybko wirować wokół osi monety (rysunek 3a i 3b).

Wyjaśnienie tego zachowania jest następujące: gdy prędkość wirowania jest dostatecznie duża, moneta wykonuje po prostu ruch wirowy wokół ustalonej osi, stojąc na krawędzi. Gdy jednak ta prędkość jest zbyt mała, moneta pochyla się i do wirowania dochodzi toczenie się monety po coraz to szerszym kółku. Gdy moneta toczy się, strzałka kręci się wokół osi monety.

Ciekawe może być porównanie czasu trwania poszczególnych etapów ruchu dla różnych monet – np. dla cienkiej i dużej jednozłotówki i grubej, ale mniejszej dwuzłotówki.

Czytelnikom pozostawiam natomiast przyjemność pogłównienia się nad rezultatem następującego eksperymentu: monetę pstrykamy na równi pochylej, ustawionej pod niewielkim kątem do poziomemu. Moneta będzie oczywiście zsuwać się z równi, ale po zaskakującej trajektorii (rysunek 4).

Mikołaj KORZYŃSKI

8

Dodawanie wielkości gwiazdowych

Znane z fizjologii prawo Webera-Fechnera głosi, że „wrażenie” jest proporcjonalne do logarytmu wywołującego je „bodźca”. Zgodnie z nim, ale nieświadomie, Ptolemeusz określił najjaśniejsze gwiazdy nieba jako gwiazdy „pierwszej wielkości”, a najślabsze (widoczne nieuzbrojonym okiem) jako „szóstej wielkości”. Tradycja ta przetrwała wieki, z tym że w czasach nowożytnych ten system określania jasności gwiazd uściślono. Okazało się, że najlepszą zgodność ze skalą Ptolemeusza uzyskuje się, jeżeli wielkość gwiazdowa m (magnitudo) z oświetleniem E dawanym przez gwiazdę będzie się wiązać zależnością

$$m = -2,5 \log E + C,$$

gdzie – jeżeli oświetlenie jest w luksach – to stała $C \approx -14$ mag. Im słabsza jest gwiazda, tym większą liczbą wyraża się jej jasność, jeżeli zaś obiekt jest bardzo jasny, to jego magnitudo jest liczbą ujemną. Np. Słońce ma jasność $-26,8$ mag.

A jak obliczyć łączną wielkość gwiazdową dwu gwiazd o znanych jasnościach m_1 i m_2 ? No właśnie, trzeba tu pamiętać, że dodawać można oświetlenia, a nie wielkości gwiazdowe. Trzeba zatem w pierwszej kolejności gwiazdowe „odlogarytmować”:

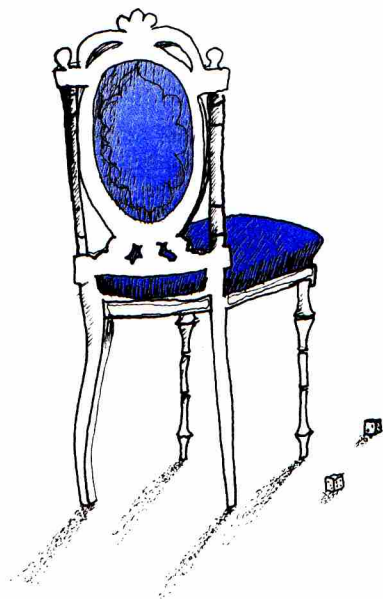
$$E_1 = 10^{0,4(C-m_1)}, \quad E_2 = 10^{0,4(C-m_2)},$$

teraz dopiero dodać E_1 i E_2 i na koniec obliczyć łączną wielkość gwiazdową m z definicji, czyli jako

$$m = -2,5 \log(E_1 + E_2) + C = -2,5 \log(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2}).$$

Jak widać, stała C zniknęła, zatem przy dodawaniu jasności jej wartość jest nieistotna. I tak jest z tym trochę roboty. Dla początkujących astronomów wynik zawsze jest nieco zaskakujący: magnitudo dwu gwiazd razem jest mniejsze niż magnitudo jaśniejszej gwiazdy składowej.

Tomasz KWAST



Na czym polega paradoks bliźniąt?

Paradoks bliźniąt nie jest tak naprawdę paradoksem, tylko zadziwiającym faktem. Chodzi o następującą sytuację. Wysyłamy jedno z bliźniąt rakieta, która bardzo szybko się porusza. Zgodnie ze szczególną teorią względności czas w poruszającym się układzie (ale mierzony z „naszego”, spoczywającego układu) biegnie wolniej. W takim razie po powrocie podróżujący bliźniak będzie młodszy. To już wygląda jak paradoks, ale nim nie jest. Rzeczywiście podróżujący bliźniak byłby młodszy! Zostało to sprawdzone, ale oczywiście nie na ludziach. Tak zachowują się cząstki elementarne (które, zazwyczaj, poruszają się z prędkościami bliskimi prędkości światła). Przeprowadzono również (z pozytywnym skutkiem) eksperyment z wożeniem samolotem bardzo dokładnego zegara. Właściwym paradoksem bliźniąt jest następujące pytanie. Dlaczego to podróżujący bliźniak ma być młodszy? Przecież, jeżeli ruch jest względny, to „bliźniak domator” w układzie „bliźniaka podróżnika” porusza się dokładnie tak samo jak

„podróżnik” w układzie „domatora” (prędkości będą miały tylko przeciwne zwroty). W takim razie wydaje się, że żaden nie powinien być młodszy! Okazuje się, że paradoks jest pozorny. Młodszy będzie ten, który porusza się z przyspieszeniami. Różnica w długości życia będzie brała się z okresów przyspieszania i hamowania „podróżnika”. Ich sytuacja nie jest identyczna. Gdyby nawet obydwu zamknąć w identycznych kabinach bez okien, to i tak będą wiedzieli, czy polecili, czy zostali na Ziemi. Ten problem jest w pełni prawidłowo rozwiązany dopiero w ogólnej teorii względności (teorii grawitacji Einsteina), według której tempo upływu czasu zależy również od natężenia pola grawitacyjnego nieodróżnialnego od pola sił bezwładności. W szczególnej teorii względności (bez poprawnego uwzględnienia ruchów przyspieszonych) rzeczywiście mamy coś, co wygląda jak paradoks.

Piotr ZALEWSKI

Siła rachunków interwałowych

Marek W. GUTOWSKI

Sporo już czasu minęło od przedstawienia Czytelnikom podstaw rachunków interwałowych (*Delta 9* (232), str. 4–6, 1993), zaczniemy więc od ich przypomnienia. Zostały one wymyślone przede wszystkim dlatego, że – jak wiadomo – nie do końca można polegać na wynikach obliczeń wykonywanych za pomocą komputera. Dzieje się tak z kilku powodów, z których wymienimy dwa:

- każdy współczesny komputer posługuje się skończonymi przedstawieniami dwójkowymi potrzebnych liczb. Oznacza to, że komputer „nie zna” takich liczb, jak $\sqrt{2}$ czy π (bo, jako liczby niewymierne, mają przedstawienia nieskończonej długości), ale także ma kłopoty z pospolitymi ułamkami, takimi jak $\frac{1}{10}$ czy $\frac{1}{3}$. Nie jest też w stanie poprawnie przetwarzać liczb zbyt dużych lub zbyt bliskich zera.

Tak naprawdę, ten cudowny wynalazek „zna” jedynie **niewielki podzbiór liczb wymiernych o skończonej liczbie elementów**.

- nawet jeśli liczby zostaną odwzorowane zupełnie dokładnie, to już wyniki działań arytmetycznych, zwłaszcza dzielenia, ale niekiedy także zwykłego dodawania, będą musiały być jakoś zaokrąglone.

Nietrudno sobie wyobrazić, że po długim cyklu obliczeń końcowy wynik może znacznie odbiegać od prawdziwego. Kiedy w grę wchodzi bezpieczeństwo ludzi albo sprzęt o ogromnej wartości – wyniki „mniej więcej dobre” nie mogą być akceptowane. Nawet jeśli nie są one dokładne, to przynajmniej powinniśmy wiedzieć, w jakim przedziale mieszczą się prawdziwe wartości.

Konieczność operowania wielkościami znanymi niedokładnie zainspirowała m.in. polskiego matematyka Mieczysława Warmusa, który w r. 1956 opublikował swoje pierwsze prace na ten temat. Za ojca rachunków interwałowych uznajemy obecnie Raymonda E. Moore'a, który w swojej rozprawie doktorskiej (1962), a później w formie książkowej podsumował swoje wcześniejsze badania w tej dziedzinie. Nic nowego pod słońcem, powiedzą ci, którzy wiedzą, że o wiele wcześniej Archimedes z Syrakuz pokazał, że $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$, oraz podał sposób ulepszania tego oszacowania.

Nie byłoby jednak tego artykułu, gdyby rola rachunków przedziałowych ograniczała się do gwarantowanych oszacowań wyników obliczeń komputerowych.

Podstawowe przepisy

Będziemy odtąd oznaczać liczby znane niedokładnie tłustym drukiem: $\mathbf{x} := [\underline{x}, \bar{x}]$, gdzie \underline{x} oraz \bar{x} są liczbami rzeczywistymi, takimi że zachodzi podwójna nierówność $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$. Obiekt \mathbf{x} jest zatem odcinkiem, który z całą pewnością zawiera naszą bliżej nieznaną liczbę x .

Zauważmy przy okazji, że zwyczajne liczby rzeczywiste można utożsamiać z interwałami *cienkimi*, tj. mającymi postać: $x = x = [x, x]$.

Na początek potrzebne nam będą przepisy na wykonywanie czterech podstawowych działań na takich obiektach. Oczywiście wymaganiem jest to, aby wynik takiego działania, sam będący przedziałem, z *całą pewnością* zawierał wynik prawdziwy.

Określamy zatem

$$(1) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}],$$

$$(2) \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}],$$

$$(3) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\min(\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \cdot \bar{y}), \max(\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \cdot \bar{y})].$$

Przepis na dzielenie otrzymujemy, zamieniając w przepisie na mnożenie znak „ \cdot ” na znak dzielenia „ $/$ ” oraz pamiętając, żeby interwał \mathbf{y} , ten w mianowniku, nie zawierał zera. Można się przekonać, że tak otrzymane wyniki są *ciasne* (dokładne?), w tym sensie, że zawierają wszystkie możliwe wyniki obliczeń, dla dowolnych $x \in \mathbf{x}$ oraz $y \in \mathbf{y}$, a jednocześnie *tylko te* wyniki – nic tu nie da się ulepszyć.

Pracując z komputerem powinniśmy do powyższych przepisów dodać jeszcze jedną, żelazną regułę: *każdy* wynik pośredni, oraz końcowy, trzeba koniecznie *zaokrąglać na zewnątrz* – to znaczy lewy kraniec wyniku w dół, a prawy – w górę. Jedynie tym sposobem uzyskamy gwarancję poprawnego wyniku, niezależnie od wspomnianych wcześniej niedostatków arytmetyki komputera.

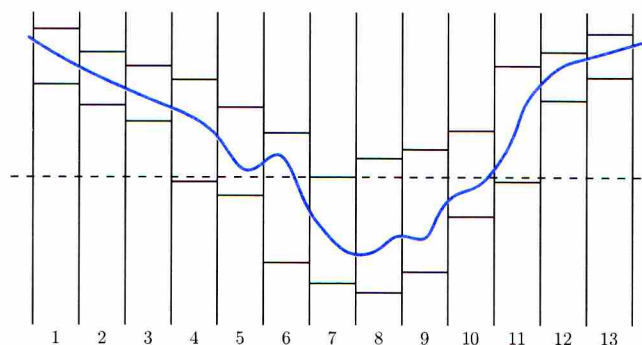
Niewątpliwie Czytelnik będzie zaskoczony faktem, że choć dodawanie i mnożenie są, jak należy, łączne i przemienne, to jednak prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania nie zawsze jest spełnione. Zawsze natomiast mamy:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \subseteq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}.$$

Wyposażeni w podstawowe umiejętności będziemy odtąd potrafili obliczać wartości wszelkich wyrażeń wymiernych. Jak jednak pokazuje ostatni przykład, nasz wynik końcowy ma prawo, przynajmniej od czasu do czasu, być „zbyt szeroki”. Możemy się spodziewać tego niepożądanego efektu zawsze wtedy, gdy w obliczanym wyrażeniu przynajmniej jedna zmienna pojawia się więcej niż jeden raz albo w potęgę innej niż pierwsza.

Funkcje interwałowe

Wprawdzie cztery działania arytmetyczne powinny nam wystarczyć do wielu zastosowań, ale tak naprawdę to chcielibyśmy czegoś więcej. Chcielibyśmy umieć rzetelnie odpowiadać na pytania w rodzaju: *jeśli x jest dowolnie wybraną liczbą z pewnego ustalonego przedziału x , to w jakim przedziale jest x^2 ? albo $\log x$?* Okazuje się, że konstrukcja funkcji, które byłyby ścisłymi odpowiednikami zwykłych funkcji rzeczywistych, tyle że określonymi na zbiorze interwałów (funkcje takie nazywane są po angielsku *range functions*, czyli funkcje-zakresy), bywa niełatwym zadaniem, nawet dla wielomianów. Niełatwym, gdyż opisujące je wyrażenia niekoniecznie dadzą się przedstawić jako funkcje samych tylko krańców interwałowych argumentów. Jedynym wyjątkiem są funkcje monotoniczne (czyli wszędzie rosnące albo wszędzie malejące) względem każdej zmiennej.



Fragmenty obwoluty interwałowej funkcji narysowanej kolorem. Choć nie mamy pewności, jak przebiega jej wykres, to jednak możemy twierdzić, że na pewno nie ma ona minimum w obszarach z numerami 1, 2, 3, 12 i 13. Linia przerywana przebiega po górnej granicy obwoluty wyczonej dla obszaru z numerem 7.

Z konieczności musimy się więc posługiwać innymi funkcjami, łatwiejszymi do skonstruowania i obliczeń, które nazwiemy obwolutami interwałowymi (ang. *interval enclosures*) funkcji-zakresów.

W tym jednakże przypadku musimy się pogodzić z nieuchronnymi nadmiarami, wynikami o zawyżonej szerokości. Nawet w tak trudnych warunkach bardzo często uda nam się uzyskać wartościowe wyniki, choćby częściowe, jak to można prześledzić na rysunku. Widzimy tam właśnie taką niedoskonałą obwolutę, dzięki której możemy się podjąć zadania wykrycia, gdzie oryginalna funkcja osiąga wartość najmniejszą.

Pomocne nam będą przede wszystkim interwałowe odpowiedniki zwykłych funkcji, które noszą nazwę *monotonicznie inkluzywnych*. Są to obwoluty interwałowe o niesłychanie cennej właściwości. Mówiąc obrazowo, generują one tym mniejsze nadmiary wyników, im węższe są ich argumenty. W granicznym przypadku, kiedy $\underline{x} = \bar{x}$ (interwał zdegenerowany, czyli punktowy, innymi słowy najzwyczajniejsza liczba rzeczywista), nadmiar ten jest dokładnie równy zeru (w komputerze: z dokładnością do zaokrągleń). Dobra wiadomość jest taka, że wyrażenia obliczane według

podanych przepisów są dobrymi, monotonicznie inkluzywnymi obwolutami interwałowymi wyrażań i funkcji rzeczywistych, które zastępują. Oj, przydałaby się obwoluta o takich właściwościach do rozwiązania zadania zilustrowanego rysunkiem. Łatwo można by wtedy zawęzić granice, w których „siedzi” nasze rozwiązanie, gdyż obszar opisany numerami od 4 do 11 wydaje się niewiele mniejszy niż ten, od którego rozpoczęliśmy.

Algorytmy interwałowe

Przykład rysunkowy jest typowy dla przedziałowych metod rozwiązywania rozmaitych problemów. Ich charakterystyczną cechą jest podział podejrzanego obszaru na mniejsze części, z których te na pewno „niedobre” zostają sukcesywnie eliminowane. Te, o których nie potrafimy powiedzieć, czy są dobre czy nie, muszą być rozdrobnione jeszcze bardziej, i tak aż do skutku. A zatem, jeśli rozwiązanie w ogóle istnieje, to musi być elementem zbioru obszarów jeszcze nie przebadanych, nigdzie indziej.

Po co to wszystko fizykom albo inżynierom?

Zacznijmy od potrzeb „inżynierskich”. Konstruktor nowego urządzenia musi się liczyć z tym, że elementy, z których ono ma się składać, produkowane są z określoną dokładnością, albo jak kto woli – tolerancją. Przekonanie się, czy telewizor zbudowany z podzespołów o znanych rozrzutach parametrów rzeczywiście będzie działał, wymaga wykonania tzw. analizy wrażliwości, jeszcze na etapie projektowania. Analiza interwałowa, w swojej najprostszej wersji, nadaje się tutaj znakomicie. Otrzymamy wynik obejmujący każdy, nawet najgorszy możliwy przypadek. Jeśli nasza konstrukcja przejdzie ten test, to wadliwy wyrób końcowy może być jedynie efektem wadliwych podzespołów (spoza zakresu tolerancji) lub innych uszkodzeń, których zwykle gwarancja nie obejmuje, np. spowodowanych przez powódź. Standardowa statystyczna analiza wrażliwości bada raczej „przypadek przeciętny”, co dopuszcza możliwość, że wyrób złożony wyłącznie z dobrych elementów nie zadziała jako całość.

A co dla fizyków?

Jak dotąd – jeszcze niewiele. Pierwsze zastosowania rachunków interwałowych pojawiły się – gdzieżby indziej? – w fizyce doświadczalnej. Przydały się one w opisie sił działających pomiędzy częściami aparatury do precyzyjnego wyznaczenia stałej grawitacji. Chodziło o to, że niektóre części były wykonane z mosiądzu, który jest stopem nie do końca jednorodnym. W obrębie kilkudziesięciokilogramowego mosiężnego walca należy się liczyć z lokalnymi odstępstwami gęstości od wartości średniej. Z tego powodu dokładne wyliczenie sił grawitacyjnych, w tym także ich kierunku, wytwarzanych przez taki obiekt, nie może ograniczyć się

do wykonania kilku całkowań. Rachunki interwałowe pozwoliły ponadto uwzględnić możliwe odstępstwa od idealnego kształtu walca, spowodowane obróbką mechaniczną.

Co dalej?

Poprzedni przykład może wydać się nieco egzotyczny. Porozmawiajmy zatem o zastosowaniach, które, przynajmniej potencjalnie, są bardziej uniwersalne.

Częsta w praktyce badawczej jest czynność zwana gwarowo *fitowaniem* danych. Chodzi o odgadywanie wartości parametrów fizycznych, których nie można zmierzyć bezpośrednio, ale których wartości można wywnioskować z innych obserwacji. Możemy np., nie posiadając omomierza, próbować „zmierzyć” opór elektryczny poprzez pomiar napięcia na próbce podczas przepływu przez nią prądu elektrycznego o znanym natężeniu. Pojedynczy pomiar może dać nam wynik obciążony znaczną niepewnością. Powtarzamy więc doświadczenie kilkakrotnie, zmieniając za każdym razem natężenie prądu. Otrzymane wyniki możemy przedstawić na wykresie. W przypadku przewodnika metalicznego prostokąty niepewności powinny układać się na linii prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Możemy, oczywiście, znaleźć szukane nachylenie nieznannej linii prostej łatwą metodą „graficzną”, poprzez odpowiednie przyłożenie linijki. Jednakże liczba położenia, przy których linia prosta przetnie wszystkie prostokąty niepewności, będzie zwykle spora. A to oznacza, że szukany opór można wyznaczyć jedynie z ograniczoną dokładnością. Trudno się zdecydować, które położenie jest najlepsze. Rutynowym trikiem jest użycie metody najmniejszych kwadratów, która pozwala na wyliczenie szukanego parametru i jego niepewności.

Naiwne podejście interwałowe sugeruje takie obracanie linijki wokół punktu ($I = 0, U = 0$), aż znajdziemy dwa skrajne położenia: w jednym z nich wszystkie prostokąty niepewności znajdują się powyżej linijki, w drugim – wszystkie będą poniżej. Ale czy to jest najlepsze rozwiązanie? Mamy lepszy sposób: rozpoczynając od położenia, w którym linia prosta przecina wszystkie prostokąty, obracamy linijkę najpierw w jedną, a potem w drugą stronę, aż do momentu, kiedy *nie wszystkie* prostokąty będą miały punkty wspólne z próbną prostą. I to są poprawne granice poszukiwanego rozwiązania. Widać, że „naciąganie” wyników pomiarów, poprzez rozmyślnie zaniżanie niepewności pomiarowych, może się skończyć bardzo nieprzyjemnie: może się okazać, że szukana prosta zwyczajnie nie istnieje.

Już w przypadku jednej niewiadomej (współczynnik kierunkowy prostej) widzimy, że otrzymany przedział zawiera w sobie poszukiwany wynik, ale także wiele innych liczb, które *nie* są rozwiązaniami naszego problemu. Przy dwóch niewiadomych wynikiem będzie fragment płaszczyzny o kształcie prostokąta, przy trzech – fragment przestrzeni trójwymiarowej o kształcie prostopadłościanu, itd. Ważnym zadaniem analizy

interwałowej jest poszukiwanie takich sposobów rozwiązania, aby te obszary były możliwie małe. Obszary, których rozmiarów nie da się już dalej zmniejszyć bez jednoczesnej straty zawartych w nich rozwiązań, nazywamy naukowo *powłokami interwałowymi* zbiorów rozwiązań.

Rozmiary powłoki interwałowej są wobec tego ściśle, bez żadnych przybliżeń, związane z niepewnościami danych wejściowych, i w sposób jednoznaczny ograniczają od góry niepewności wyników.

Siła

Siła metod interwałowych przejawia się w kilku miejscach. Po pierwsze, w każdym kroku prawie dowolnego algorytmu przedziałowego przetworzeniu ulega nie jedna, dwie czy n liczb, lecz od razu nieskończona ich ilość – podobnie jak wtedy, gdy „ręcznie” rozwiązujemy układ równań. Po drugie, jak dowiódł R.E. Moore, można wskazać przypadki, w których wraz z powłoką zbioru rozwiązań jednocześnie otrzymujemy gwarancję, że poszukiwane rozwiązanie znajduje się na pewno w tym zbiorze i jest w nim jedyne. Inne metody mogą nas zwodzić, wskazując jedynie kandydatów na rozwiązania, niekoniecznie prawdziwe rozwiązania.

Niewątpliwym przejawem siły metod przedziałowych jest możliwość rozwiązania problemów, dla których – przynajmniej dziś – nie znamy innych metod.

Częściej pewnie spotkamy się z innym, pozornie destruktywnym, przejawem mocy algorytmów interwałowych. W prowadzonych przez autora badaniach absorpcji mikrofal przez bardzo cienkie druty żelazne okazało się, że przypuszczenie, iż – jak się wszystkim wydawało – obserwujemy zwykły rezonans ferromagnetyczny, jest błędne. Zbiór poszukiwanych parametrów opisujących to zjawisko okazał się pusty, mimo drastycznego zawyżenia niepewności pomiarowych. Wynik ten, choć negatywny, okazał się nie do podważenia, właśnie dlatego, że został uzyskany metodami interwałowymi. Trzeba było poszukać innego wyjaśnienia, co się, na szczęście, udało.

Ciąg dalszy nastąpi?

Doceniając znaczenie rachunków, które produkują zawsze niezawodne wyniki, amerykańska rządowa agencja DARPA, ta sama, dzięki której powstał internet, przydzieliła w lipcu 2003 r. grant o wartości blisko 50 mln dolarów na kontynuację prac nad przyszłym komputerem. Będzie on 50 razy szybszy niż najszybsze maszyny współczesne, a obliczenia będzie wykonywać zgodnie z regułami arytmetyki interwałowej. Firma *Sun*, beneficjent tego grantu, już od lat oferuje kompilatory (fortran, C), które „znają się” na rachunkach przedziałowych. W niektórych krajach metody interwałowe są wykładane studentom wyższych lat studiów. Warto, abyśmy i my zapoznali się z tym potężnym narzędziem.

O wielościanach foremnych słyszeliśmy w szkole, a niektórzy z nas nawet pamiętają, ile ich jest. Już w starożytności Platon udowodnił, że *wypukłych wielościanów foremnych jest dokładnie pięć*. Stąd często mówi się o nich *bryły platońskie*. Chodziło mu, oczywiście, o bryły trójwymiarowe, których ściany są wielokątami foremnymi, a naroża są przystające. Jednak Platonowi do głowy nie przyszło, że wielościany mogą mieć swoje odpowiedniki w innych wymiarach, więc tym bardziej nie udało mu się ich policzyć. Spróbujmy to zrobić za niego.

Najpierw sprecyzujemy, czym się będziemy zajmować. W wypukłym wielościanie foremnym wszystkie ściany muszą być takimi samymi wielokątami foremnymi i kąty między dowolnymi parami sąsiednich ścian muszą być takie same. Przykładem pospolitym jest sześciąt, czyli kostka (choć bez kropek na ścianach). Tu każda ściana jest kwadratem, a kąt między sąsiednimi ścianami jest prosty. Sześciątami można wypełnić całą przestrzeń trójwymiarową, tak jak płaszczyznę da się pokryć kwadratami. Porównanie jest nieprzypadkowe, bo właśnie kwadrat jest dwuwymiarowym odpowiednikiem sześciąt. A kwadrat to przecież cztery odcinki równej długości z kątem prostym między nimi. Mamy więc jeden dwuwymiarowy „wielościan”, a inne?

Czworościan to piramida o trójkątnej podstawie, w której wszystkie krawędzie (trzy podstawy i trzy boczne) są równej długości, a jego „młodszy brat” z płaszczyzny to, oczywiście, trójkąt równoboczny. Stąd pomysł, że za niższymi wymiarami wielościan przyjmujemy wypukłą figurę płaszczyzny, której wszystkie boki są równej długości, a kąty między nimi takie same. Dostajemy wielokąty foremne. Takich jest bardzo dużo, bo dla każdego $n \geq 3$ istnieje n -kąć foremny. Ale o tym Platon wiedział.

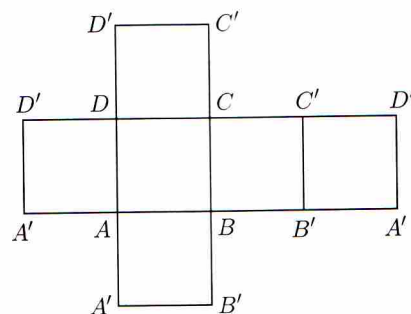
Jeżeli środek każdego boku n -kąta połączymy ze środkami sąsiednich boków, to otrzymamy figurę *dualną* do pierwotnego n -kąta, będącą zresztą też n -kątem, ale mniejszym. Czy możemy tak postąpić z wielościanami? Jeżeli połączymy środki wszystkich ścian czworościanu foremnego, to otrzymamy mniejszy czworościan. Ale ten sam zabieg wykonany na sześciątach da nam ośmiościan foremny, a wykonany drugi raz daje znowu sześciąt. Są to więc bryły wzajemnie dualne. Podobnie dualne są dwunastościan i dwudziestościan.

Teraz poszukamy wyższymi wymiarowymi członków wielościanowego bractwa. Zaczniemy od najprostszego przedstawiciela. Aby zbudować trójkąt równoboczny, musimy mieć trzy odcinki równej długości, do obu końców jednego z nich przyczepiamy pozostałe dwa. To możemy zrobić na prostej, ale w następnym kroku wyginamy skrajne odcinki, aż się spotkają, tworząc trójkąt. Podobnie tworzymy czworościan: do wszystkich trzech boków trójkąta równobocznego doklejamy po jednym trójkącie, które następnie podnosimy z płaszczyzny, aż się spotkają przy wierzchołku.

Idźmy za ciosem i do każdej ściany czworościanu (podstawy) doklejmy po jednym czworościanie. To się na razie mieści w trzech wymiarach. Teraz „wyginamy” z przestrzeni (??) wszystkie cztery czworościany boczne, aż się spotkają przy wspólnym wierzchołku. Tak otrzymaliśmy *pięciobrył foremną*. W każdym z pięciu wierzchołków schodzą się cztery czworościany, a figurą dualną, powstałą z połączenia środków wszystkich czworościanów, jest też pięciobrył.

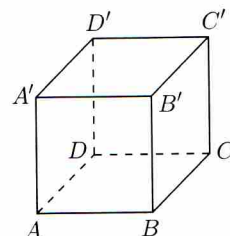
Jeżeli zdefiniujemy *wypukły wielobrył foremny* tak: jest to *figura wypukła, której wszystkie trójwymiarowe „ściany” są takimi samymi wielościanami foremnymi oraz wszystkie kąty między sąsiednimi wielościanami są takie same*, to zobaczymy (?), że pięciobrył jest tego dobrym przykładem (o ile wiemy, jak mierzyć kąty między wielościanami). Ale pójdźmy dalej: możemy jeden pięciobrył oblepić pięcioma innymi, wygiąć je i otrzymać coś, co mieści się dopiero w pięciu wymiarach. Możemy więc zdefiniować n -wymiarowy wielościan foremny tak, że jego „ściany” są $(n - 1)$ -wymiarowymi wielościanami. W najprostszym przypadku jest to n -sympleks, tzn. trójkąt to 2-sympleks, czworościan to 3-sympleks, pięciobrył to 4-sympleks, itd. Wszystkie są samodualne.

Inną nieskomplikowaną figurą jest kwadrat, który powstaje z przesuwania odcinka w kierunku prostopadłym do prostej, na której leży. Podobnie, jeśli będziemy przesuwać kwadrat prostopadłe do zawierającej go płaszczyzny, to otrzymamy sześciąt. I dalej: przesuniemy sześciąt w kierunku prostopadłym do zawierającej go przestrzeni i dostaniemy hiperkostkę. A co to jest? Figura złożona z ośmiu sześciątów, po cztery w każdym wierzchołku. A jak to wygląda? Ma dwie równoległe podstawy-sześciąt i sześć bocznych sześciątów. A jak to zobaczyć? Zwykły sześciąt można zrobić za pomocą dwuwymiarowej siatki, np. w kształcie krzyża złożonego z sześciu kwadratów (rys. 1a).



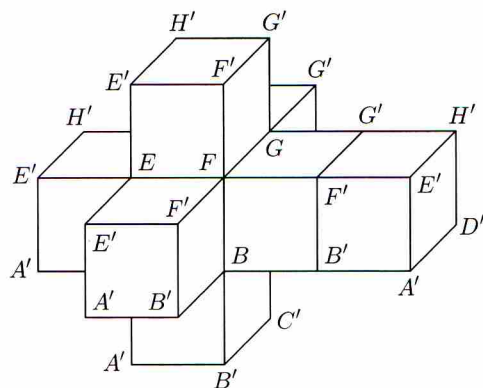
Rys. 1a

Odpowiednio sklejkając boki kwadratów, dostajemy kostkę (rys. 1b).



Rys. 1b

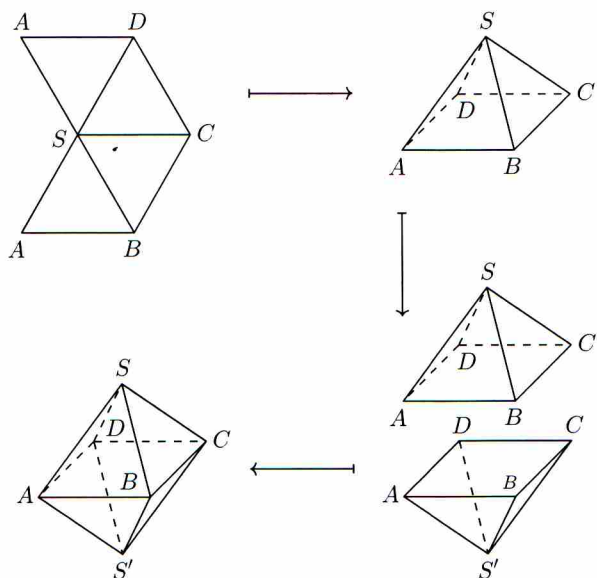
Podobnie możemy wykonać trójwymiarową siatkę złożoną z ośmiu sześciątów, zwaną *tesseractem*.



Rys. 2

Teraz trzeba tylko odpowiednio posklejać sześciiany wzdłuż kwadratów i hiperkostka gotowa.

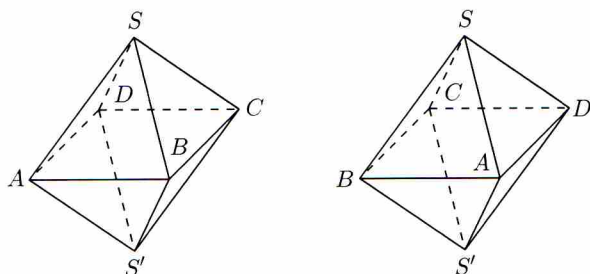
Ale dlaczego mielibyśmy na tym poprzestać? Czemu nie popychać powstałej hiperkostki w jeszcze innym kierunku, tworząc hiperhiperkostkę? Można tak dowolnie wiele razy, a to, co dostaniemy po n takich ruchach, to kostka n -wymiarowa, którą oznaczamy I^n , i która jest ścianą w kostce $(n + 1)$ -wymiarowej. Dosyć? A skądże! Przecież sześciąt ma bryłę dualną – ośmiościan. Podobnie, jeśli połączymy środki wszystkich ośmiu sześciątów w hiperkostce, to dostaniemy coś, co ma osiem wierzchołków. Jest to *szesnastobrył foremny*, zbudowany z szesnastu czworościanów, po osiem w każdym wierzchołku. Oczywiście, środki tych czworościanów wyznaczają wierzchołki hiperkostki. Konstrukcja nie powinna być za trudna. Aby otrzymać zwykły ośmiościan, można skleić dwie piramidy wzdłuż kwadratowych podstaw.



Rys. 3

Wykonujemy na płaszczyźnie siatkę z czterech trójkątów równobocznych (rys. 3) i sklejąc dwie krawędzie, dostajemy piramidę, której podstawa $ABCD$ nadal leży w jednej płaszczyźnie. Podstawa niby jest kwadratem,

ale tak naprawdę jest figurą dualną do kwadratu. Łączymy z drugą piramidą i mamy ośmiościan. Podobnie, w trzech wymiarach robimy siatkę z ośmiu czworościanów. Po sklejeniu odpowiednich ścian w przestrzeni pozostanie podstawa w kształcie ośmiościanu, wzdłuż którego doklejamy drugą taką figurę (rys. 4).

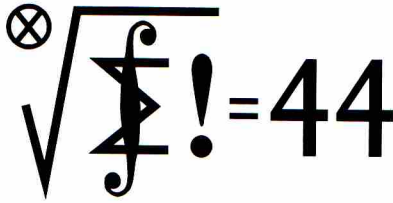


Rys. 4

(Topolodzy zauważają, że ośmiościan jest zawieszeniem kwadratu, a 16-brył jest zawieszeniem ośmiościanu. W jeszcze wyższych wymiarach ta konstrukcja nadal działa: figura dualna do kostki I^n jest zawieszeniem figury dualnej do I^{n-1} .) Wyobraźmy sobie, że na hiperkostce opisaliśmy (hiper)sferę. W tę samą sferę wpisujemy 16-brył foremną w taki sposób, że jego przekątne są prostopadłe do „ścian” hiperkostki. Wówczas wierzchołki obu brył (a jest ich $16 + 8 = 24$) są wierzchołkami figury zwanej *24-bryłą foremną*. Składa się ona z dwudziestu czterech ośmiościanów foremnych, po sześć w każdym wierzchołku, sklejonych z sobą tak, że kwadraty, będące ich równikami, wyznaczają ściany (dwuwymiarowe) w hiperkostce. Tę figurę trudniej sobie wyobrazić, gdyż nie ma swojego odpowiednika w niższych wymiarach ani zresztą w wyższych. Fakt, że ta samodualna figura jest charakterystyczna tylko dla czwartego wymiaru, jest konsekwencją tego, iż krawędź I^4 ma taką samą długość jak promień sfery opisanej na tej hiperkostce.

Wśród wielościanów trójwymiarowych jest dualna para o stosunkowo dużej liczbie ścian, mianowicie dwunasto- i dwudziestościan. Czy w przestrzeni czterowymiarowej też istnieje podobna para? Tak. Poza czterema wyżej opisanymi wielobryłami, można jeszcze zbudować figurę o stu dwudziestu bryłach oraz figurę do niej dualną o sześciuset(!) bryłach. Ten pierwszy to 120 dwunastościanów foremnych, po cztery w każdym wierzchołku, ten drugi zaś to 600 czworościanów, po dwanaście przy wierzchołku. Aż strach pomyśleć, jakie potwory kryją się w wyższych wymiarach. Otóż wymiary od piątego w górę są, niestety, ubogie: poza n -sympleksem, kostką I^n oraz bryłą do niej dualną nie ma żadnych wypukłych wielościanów foremnych. A szkoda. Widzimy więc, że Platonowi nie udało się znaleźć zaledwie trzech nowych brył: samodualnego 24-bryłu oraz dualnej pary o stu dwudziestu i sześciuset bryłach, występujące wyłącznie w czterech wymiarach. Trzy z jego wielościanów – czworościan, sześciąt i ośmiościan – to przedstawiciele długiego, nieskończonego rodu hiperbrył foremnych.

Klub 44



UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
370 ($WT = 1,54$) i **371** ($WT = 2,02$)
z numeru 1/2004

Zbigniew Galias	- Kraków	42,38
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	24,97
Marian Lupieżowicz	- Gliwice	22,14
Tomasz Wietecha	- Tarnów	19,44
Jacek Piotrowski	- Rzeszów	17,80



Rozwiązanie zadania F 626.

Niech x oznacza wydłużenie sprężyn 1 i 2 od długości swobodnej, x_3, x_4 – wydłużenie sprężyn 3 i 4. Z warunków zadania mamy

$$k_1x + k_2x + k_3x_3 + k_4x_4 = mg$$

oraz z równości momentów sił działających na płytę:

$$k_1x + k_4x_4 = k_2x + k_3x_3.$$

także

$$k_1x + k_2x = k_3x_3 + k_4x_4.$$

Stąd $x_3 = x \frac{k_1}{k_3}$ oraz $x_4 = x \frac{k_2}{k_4}$, a po podstawieniu do pierwszego równania

$$x = \frac{mg}{2k_1 + 2k_2}.$$

Sily wynoszą więc odpowiednio

$$F_1 = F_3 = \frac{k_1mg}{2k_1 + 2k_2}.$$

$$F_2 = F_4 = \frac{k_2mg}{2k_1 + 2k_2}.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
471 ($WT = 2,24$) i **472** ($WT = 1,37$)
z numeru 12/2003

Paweł Kubit	- Kraków	44,94
Jerzy Cisło	- Wrocław	39,86
Marian Lupieżowicz	- Zebrzydowice	39,64
Michał Józwiowski	- Błonie	38,07
Janusz Olszewski	- Suwałki	37,90
Witold Bednarek	- Łódź	37,64
Zbigniew		
Sewartowski	- Wieliczka	37,44
Andrzej Daniluk	- Kraków	34,80

Paweł Kubit, wytrawny uczestnik **Ligi**, autor wielu zadań, kończy trzecią rundę, zostając dwudziestym szóstym Weteranem Klubu 44 M.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0.1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2004

Przypominamy treść zadań:

479. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

480. Czy istnieje dodatnia liczba całkowita a mająca tę własność, że dla każdej trójki dodatnich liczb całkowitych k, ℓ, m iloczyn $a^k(a+1)^\ell(a+2)^m$ da się przedstawić jako sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych?

479. Niech f będzie jedną z szukanych funkcji. Oznaczmy $f(0) = c$. Podstawienie $x = y = 0$ pokazuje, że $f(c^2 + c) = 0$. Z kolei podstawienie $x = y = c^2 + c$ prowadzi do równości $f(0) = c^2 + c$; stąd $c = c^2 + c$, czyli $c = 0$, czyli $f(0) = 0$.

Kładąc w danym równaniu $x = 0$ dostajemy równość $f(f(y)) = y$, z której wynika, że funkcja f jest różnowartościowa. Kładąc zaś $y = 0$ otrzymujemy zależność

$$f(f(x)^2) = xf(x).$$

Podstawiając w niej $x = f(y)$ i uwzględniając równość $f(f(y)) = y$, otrzymujemy

$$f(y^2) = f(y)y.$$

Zastępując y przez x dostajemy po prawej stronie ten sam iloczyn, co w poprzednim równaniu. Zatem $f(x^2) = f(f(x)^2)$ i wobec różnowartościowości funkcji f mamy $f(x)^2 = x^2$, czyli

$$f(x) = x \quad \text{lub} \quad f(x) = -x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście funkcje $f(x) \equiv x$ oraz $f(x) \equiv -x$ są rozwiązaniami zadanego równania. Pokażemy, że innych nie ma. Przypuśćmy, że f jest taką „inną” funkcją. Istnieją więc liczby $u, v \neq 0$, dla których $f(u) = u$, $f(v) = -v$. Przyjmując w danym równaniu $x = u$, $y = v$, otrzymujemy $f(u^2 - v) = u^2 + v$, co oznacza, że

$$u^2 - v = u^2 + v \quad \text{lub} \quad u^2 - v = -(u^2 + v).$$

W obu przypadkach mamy sprzeczność z warunkiem $u, v \neq 0$. Ostatecznie więc $f(x) \equiv x$ lub $f(x) \equiv -x$.

480. Zadanie jest ilustracją znanej tożsamości

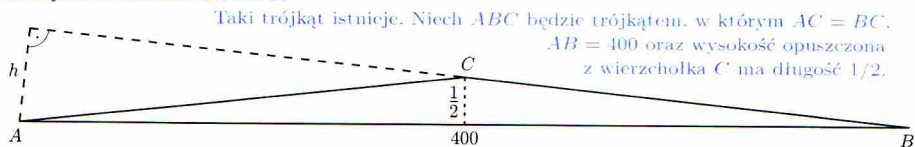
$$(x^2 + y^2)(s^2 + t^2) = (xs + yt)^2 + (xt - ys)^2,$$

która mówi, że iloczyn sum dwóch kwadratów także jest sumą dwóch kwadratów. Wystarczy zatem znaleźć taką liczbę naturalną a , by każda z liczb $a, a+1, a+2$ była sumą dwóch kwadratów. Skoro ta własność jest mnożyliwna, będzie ona przysługiwała każdej liczbie postaci $a^k(a+1)^\ell(a+2)^m$.

Żądany warunek spełnia, na przykład, liczba $a = 144 = 12^2 + 0^2$, bowiem $145 = 12^2 + 1^2$, $146 = 11^2 + 5^2$.

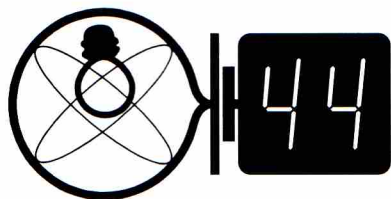


Rozwiązanie zadania M 1071.



Trójkąt ABC ma pole 100. Wykażemy, że wysokości trójkąta ABC są mniejsze od 1. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc wystarczy wykazać, że wysokość h poprowadzona z wierzchołka A jest mniejsza od 1. Ale

$$h = \frac{2 \text{ pole}_{ABC}}{BC} = \frac{200}{BC} < 1, \quad \text{gdź } BC > \frac{1}{2}AB = 200.$$



UWAGA!

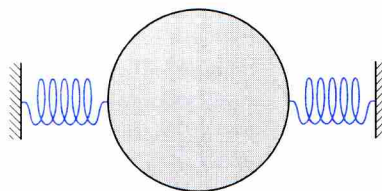
ZMIANA ADRESU
DO KORESPONDENCJI!

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2004

Przypominamy treść zadań:

376. Do jednorodnej płytki o kształcie koła doczepiono dwie sprężynki w przeciwległych punktach obwodu. napięto sprężynki pewną siłą, a drugie ich końce zamocowano, tak że w położeniu równowagi długość każdej sprężynki jest równa promieniowi koła (rys. 1a).



Rys. 1a

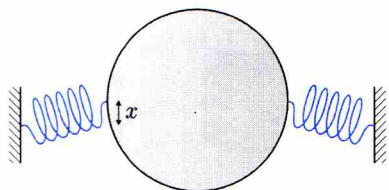
Jeśli w ruchu postępowym płytki wzdłuż osi pionowej okres małych drgań jest równy T , to ile wynosi okres małych drgań dla ruchu obrotowego:

- wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek koła,
- wokół pionowej osi przechodzącej przez środek koła?

377. Obwód składa się z n węzłów połączonych każdy z każdym opornikami o oporze r .

- Obliczyć opór zastępczy między dwoma węzłami sieci ($n \geq 2$).
- Zwarto dwa węzły tego obwodu. Obliczyć opór zastępczy między tymi dwoma węzłami a dowolnym innym ($n \geq 3$).
- Zwarto dwa węzły tego obwodu. Obliczyć opór zastępczy między dwoma innymi węzłami ($n \geq 4$).

376. Oznaczmy masę płytki jako m , promień jako r , a siłę napięcia sprężyn jako F . Zauważmy, że w przybliżeniu małych drgań we wszystkich trzech rozpatrywanych przypadkach można zaniedbać zmiany wartości F , gdyż wydłużenie sprężyn jest znacznie mniejsze od wychylenia płytki z położenia równowagi (dawniej mówiono: „jest małą drugiego rzędu”). Dla ruchu postępowego wzdłuż pionowej osi siłą kierującą płytkę w stronę położenia równowagi jest pionowa składowa F , równa w przybliżeniu Fx/r (gdzie x – przesunięcie płytki, zob. rys. 1b).

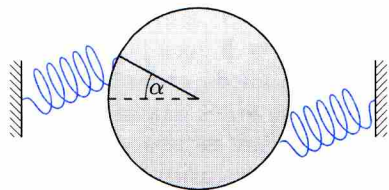


Rys. 1b

Łącznie dla obu sprężyn odpowiednikiem stałej sprężystości jest wyrażenie $2F/r$, zatem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{2F}}$$

Wychylenie płytki w przypadku a) jest przedstawione na rys. 1c i nietrudno sprawdzić, że jeśli kąt obrotu α jest mały, to moment każdej z sił F względem środka koła wynosi w przybliżeniu $2Fr\alpha$ – łącznie $4Fr\alpha$.



Rys. 1c

Do wzoru na okres wahadła sprężynowego powinniśmy więc podstawić zamiast stałej sprężystości wyrażenie $4Fr$, a zamiast masy – moment bezwładności jednorodnego koła (lub walca), równy $(1/2)mr^2$. Otrzymujemy

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{8F}} = \frac{T}{2}$$

Dla przypadku b) moment sił kierujących jest taki sam, jak dla przypadku a), ale moment bezwładności koła względem

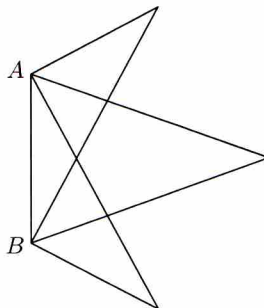
osi przechodzącej przez jego środek i leżącej w jego płaszczyźnie jest dwukrotnie mniejszy, niż względem osi prostopadłej do płaszczyzny. Zatem

$$T_b = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{16F}} = \frac{T}{2\sqrt{2}}$$

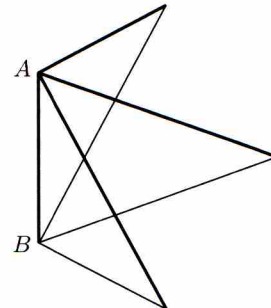
377. Oznaczmy symbolami A i B te węzły, do których przyłączono napięcie zewnętrzne.

a) Ze względu na symetrię układu oczywiste jest, że prąd nie popłynie żadnym z połączeń między pozostałymi węzłami. Zatem mamy do czynienia z równoległym połączeniem oporu r (łączącego A i B bezpośrednio) oraz $(n-2)$ oporów $2r$ (zob. rys. 2a). Opór zastępczy całości wynosi

$$R = \frac{2}{n}r$$



Rys. 2a



Rys. 2b

b) Zwarte węzły można uważać za węzeł połączony z każdym innym węzłem opornikiem o wartości $r/2$. Jak poprzednio, pozostałe węzły (tzn. ani oba zwarte, ani węzeł podłączony do drugiego bieguna źródła) mają ze względu na symetrię jednakowy potencjał i można je uważać za zwarte lub też pominąć połączenia między nimi. Mamy tu zatem połączenie równoległe oporu $r/2$ i $(n-3)$ oporów $3r/2$ (zob. rys. 2b, gdzie „podwójne” połączenia oznaczono grubszą linią), a szukana wartość oporu zastępczego jest równa

$$R = \frac{3}{2n}r$$

c) W tym przypadku zwarcie nie ma znaczenia, gdyż dotyczy węzłów, które i tak miały ten sam potencjał. Wynik jest ten sam, co w punkcie a).



Rozwiązanie zadania F 625.

W czasie Δt do sondy przyczepia się średnio $nSv\Delta t$ drobin. Początkowy pęd układu chmura-sonda wynosi $p_1 = Mv$, a końcowy: $p_2 = (M + mnSv\Delta t)v'$, gdzie v' to prędkość sondy po czasie Δt . Z zasady zachowania pędu $p_1 = p_2$, więc

$$a = \frac{1}{\Delta t}(v' - v) = \frac{v}{\Delta t} \left(\frac{M + mnSv\Delta t - M}{M + mnSv\Delta t} \right)$$

a gdy $\Delta t \rightarrow 0$, to

$$a = \frac{mnSv^2}{M}$$



Rozwiązanie zadania M 1069.

Z drugiego równania mamy

$$xy = 1 + z^2$$

skąd wniosek, że liczby x , y są albo obie dodatnie, albo obie ujemne. To w połączeniu z pierwszym równaniem dowodzi, że $x, y > 0$. Dalej, stosując nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną, mamy

$$(*) \quad 1 = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{1+z^2}$$

skąd otrzymujemy $z^2 \leq 0$. Stąd wniosek, że $z = 0$, oraz że w nierówności (*) zachodzi równość. To oznacza, że

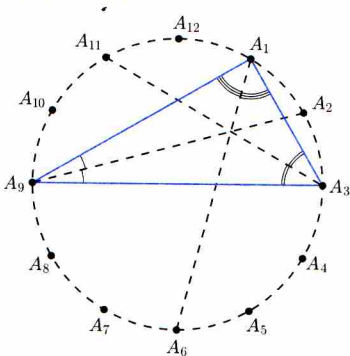
$$x = y = 1$$

Zatem $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ jest jedynym rozwiązaniem danego układu.



Rozwiązanie zadania M 1070.

Opiszmy okrąg na dwunastokącie $A_1A_2 \dots A_{12}$.



Z równości cięgiw A_3A_6 i A_6A_9 wnioskujemy, że prosta A_1A_6 jest dwusieczną kąta $A_3A_1A_9$. Analogicznie, proste A_2A_9 oraz A_3A_{11} są odpowiednio dwusiecznymi kątów $A_1A_9A_3$ oraz $A_9A_3A_1$. Zatem proste A_1A_6 , A_2A_9 , A_3A_{11} są dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta $A_1A_3A_9$, czyli przecinają się w jednym punkcie.

Patrz w niebo

Wydaje się, że powstawanie czarnych dziur w wyniku eksplozji supernowych jest zjawiskiem niezłe już poznanym. Teoria ewolucji gwiazd przewiduje (a obserwacje potwierdzają), że gwiazda o masie kilku mas Słońca, zużywszy w swoim centrum wodór, powstały z niego hel i powstałe z niego cięższe pierwiastki, wytwarza w końcu jądro żelazne. Żelazo paliwem jądrowym być już nie może, gdyż synteza jeszcze cięższych pierwiastków nie prowadzi do produkcji energii (jak synteza helu z wodoru), lecz wymaga dostarczenia energii. Dlatego żelazne jądro zapada się do stanu czarnej dziury, jeżeli przed zapaścią miało masę nie mniejszą niż 2–3 masy Słońca. Bardziej zewnętrzne warstwy gwiazdy zostają podczas tego kataklizmu rozerwane i w końcu rozpraszają się, stając się częścią materii międzygwiazdowej. Z gwiazd najmaszywniejszych mogą prawdopodobnie pozostawać czarne dziury o masach rzędu 10 mas Słońca.

Z kolei w samych centrach wielu galaktyk obserwuje się obiekty, które najprawdopodobniej są czarnymi dziurami o masach od miliona Słońc wzwyż. Jeżeli nawet pominąć fakt, że właściwie nie wiadomo, jak one powstają, to jedno wydawało się pewne: nie ma czarnych dziur o masach pośrednich. Tymczasem w 2000 roku pojawiło się doniesienie o odkryciu, za pomocą rentgenowskiego satelity Chandra, w galaktyce M82 czarnej dziury o masie nieprzekraczającej 100 000 mas Słońca. Świadczyć o tym miały dość szybkie zmiany jasności pewnego punktowego źródła w pobliżu centrum tej galaktyki. Rzecznik zespołu opiekującego się satelitą ogłosił wkrótce, że zmiany jasności mogły zostać zaobserwowane – niestety – z przyczyn tylko technicznych. Górną granicę masy, czyli 100 000 mas Słońca, należało więc odwołać, ale sama ogromna jasność obiektu dowodzi, że obecna tam czarna dziura powinna mieć masę co najmniej 500 mas słonecznych, a więc nie mogła powstać w wyniku ewolucji pojedynczej gwiazdy. Na razie nie wiadomo, ani jak powstała, ani czy może mieć coś wspólnego z bardzo masywnymi czarnymi dziurami obecnymi w centrach galaktyk.

Tomasz KWAST

Sierpień

Wielka szkoda, że Strzelca widać w Polsce tak nisko. Przesuwa się nad południowym horyzontem m.in. właśnie w sierpniowe wieczory, nigdy jednak nie widać go w całości. Jest gwiazdozbiorem zodiakalnym, a więc od czasu do czasu bywają w nim planety (choć w tym roku akurat nie). Przez niego przebiega Droga Mleczna, mnóstwo więc jest w nim gromad otwartych i mgławic, zarówno jasnych, jak i ciemnych. W nim znajduje się centrum naszej Galaktyki. Gdyby nie materia międzygwiazdowa przesłaniająca odległe gwiazdy, to centralne zgęszczenie Galaktyki świeciłoby według niektórych ocen jak Księżyc w pełni. Zdumiewające jest, że mimo obecności materii międzygwiazdowej widać w Strzelcu kilka gromad kulistych, które leżą przecież daleko poza dyskiem Galaktyki. Jeżeli, będąc na wakacjach, znajdziemy się w miejscu, gdzie jest czyste powietrze i brak jest świateł na południu, to warto w południowe niebo skierować choćby lornetkę.

Wenus jest w Bliźniętach i widać ją jako Gwiazdę Poranną. Najdalej kątowno od Słońca (46° na zachód) znajdzie się 17 VIII. W Bliźniętach jest też Saturn, który zaczyna być widoczny rano, natomiast Mars i Jowisz są w Lwie, blisko Słońca, przez co praktycznie ich nie widać. Nów Księżyca wypada 16 VIII, a pełnia 30 VIII. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych gwiazd w sierpniu nie będzie.

T. K.

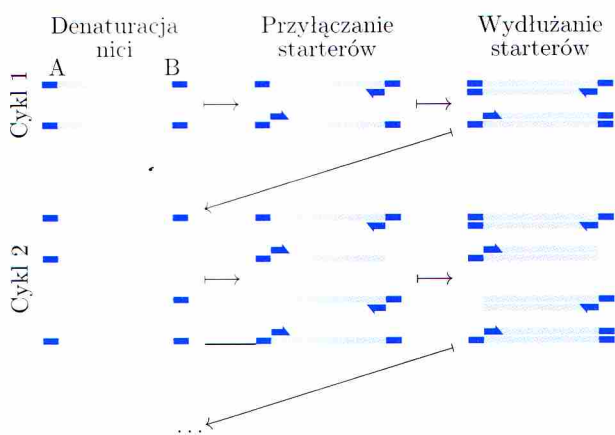


Kary Mullis to zdecydowanie najbardziej kontrowersyjny z noblistów. Jako dziecko wysyłał żaby na wysokość 1,5 mili w skonstruowanych przez siebie rakietach. W 1968 roku, pod wpływem przemyśleń po zażyciu LSD, napisał artykuł „Kosmologiczne znaczenie odwrócenia czasu”, który opublikowało *Nature*. Wreszcie, gdy pewnego letniego wieczoru wracał z pracy, wpadł mu do głowy pomysł, który zrewolucjonizował biologię molekularną.

Wymyślił prosty sposób na nieograniczone powielenie niemal dowolnego fragmentu DNA. Do tamtego czasu wymagało to prowadzenia hodowli bakteryjnych na dużą skalę, było bardzo pracochłonne i trwało przynajmniej dobę. Sposób Mullisa wymagał jednej probówki, 5 odczynników i w ciągu najwyżej kilku godzin dostarczał ogromnych ilości materiału.

Dwie nici w cząsteczce DNA biegną antyrównolegle i końce każdej z nich nie są równocenne. Oznaczamy je 3' i 5' – od numerów atomów węgla, do których mogą przyłączać się kolejne nukleotydy. Polimeraza DNA dołącza nowe nukleotydy według zasady komplementarności, wykorzystując jako matrycę rozplecioną na pojedyncze nici macierzystą cząsteczkę DNA. Jednak może ona dołączać nowe cegiełki tylko do nukleotydów, które mają wolne końce 3'. Nie może rozpocząć syntezy „od zera”, wymaga obecności tzw. startera – cząsteczki kwasu nukleinowego, która dostarczy pierwszego nukleotydu z wolnym końcem 3'. Dzięki temu lokalizacja starterów decyduje o miejscu startu syntezy nowej nici DNA.

Spróbujmy prześledzić następujący cykl reakcji:



Chcemy namnożyć fragment DNA człowieka – odcinek AB. W pierwszym kroku musimy rozdzielić dwuniciową cząsteczkę – co jest proste, gdyż wystarczy ją podgrzać do 95°C. W ten sposób uzyskamy dwie jednoniciowe matryce dla polimerazy. Do rozpoczęcia syntezy potrzebujemy jeszcze dwóch starterów, dołączonych do matrycy dokładnie w punktach A (starter „prawy”) i B (starter „lewy”).

Starterami w naszej reakcji są krótkie, jednoniciowe fragmenty DNA, których syntezą zajmują się komercyjne firmy. Cetus Corporation, dla której pracował Mullis w latach 70. ubiegłego wieku, zajmowała się właśnie ich produkcją.

Zaprojektowanie i zsyntetyzowanie odpowiednich starterów wymaga znajomości sekwencji końców odcinka AB. Gdyby naszym materiałem wyjściowym był genom człowieka, takie startery musiałyby wiązać się z matrycowym DNA tylko w regionie AB wśród 3 miliardów par zasad.

Zakładając, że sekwencja nukleotydów w nici matrycowej jest losowa (każdy z 4 nukleotydów ma jednakową szansę znalezienia się w dowolnym miejscu sekwencji), szansa znalezienia dowolnej sekwencji o długości n w genomie wynosi $(\frac{1}{4})^n$. Aby starter był unikalny, $(\frac{1}{4})^n$ musi być mniejsze niż $3,3 \cdot 10^{-10}$; warunek ten jest spełniony dla $n \geq 16$. Zwykle stosuje się startery o długości 17–26 nukleotydów.

Kiedy więc do jednoniciowych matryc dodamy nieco starterów, polimerazy, wolnych nukleotydów i obniżymy trochę temperaturę, by startery mogły przyłączyć się do matrycy, polimeraza rozpocznie syntezę nowych nici. Jeśli powtórzymy ten cykl zmian temperatury, powiedzmy 30 razy, to po trzecim cyklu liczba cząsteczek potomnych – odcinków AB – zacznie rosnąć w postępie geometrycznym!

Tak właśnie działa PCR, czyli wymyślona przez Karego Mullisa łańcuchowa reakcja polimerazy. Nie wymaga uprzedniego wyizolowania odcinka AB z genomu – po prostu selektywnie go powiela. Nie wymaga dużej ilości materiału wyjściowego – wystarczy tylko jedna cząsteczka DNA matrycowego. Nie wymaga skomplikowanego sprzętu – współczesne maszyny do PCR to po prostu bloki grzejno-chłodzące, których temperaturę steruje procesor. Jeden cykl reakcji trwa przeciętnie minutę. Jedynym poważnym problemem związanym ze stosowaniem PCR jest jego czułość: każde zanieczyszczenie próbki (np. nasz własny DNA) namnoży się równie dobrze jak badany DNA, jeśli tylko startery przyłączą się do cząsteczki matrycowej. PCR wymaga dobrej techniki laboratoryjnej i stosowania wielu kontroli w każdej reakcji. Oczywiście, musimy też znać sekwencję, którą chcemy namnożyć.

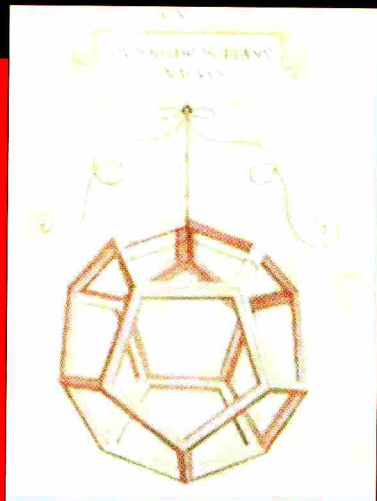
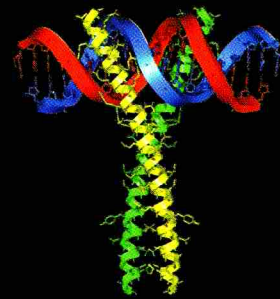
Dzięki PCR można zidentyfikować przestępcę na podstawie DNA wyizolowanego ze śliny, którą ten zostawił na polizanym znaczku listu z pogróżkami. Można zdiagnozować chorobę genetyczną zarodka, pobierając zaledwie jedną jego komórkę. Można też zbadać DNA neandertalczyka, zachowany przez 30 tys. lat w skamieniałych kościach.

Bez wielkiej przesady można powiedzieć, że wynalazek Karego Mullisa zmienił biologię molekularną. Dla Cetus Corporation miał też wymiar bardziej bezpośredni – Hoffman-La Roche odkupił od niej patent na PCR za 300 milionów dolarów, co do dziś pozostaje rekordową sumą zapłaconą za patent w historii.

Anna LORENC, Jarek BRYK

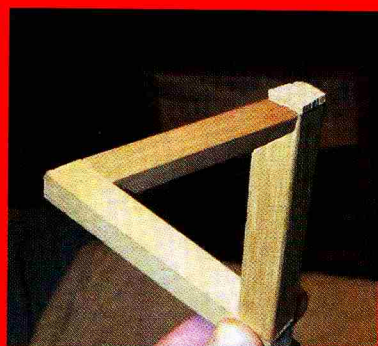
VIII Festiwal Nauki

odbędzie się w dniach 17-26 września 2004
w Warszawie

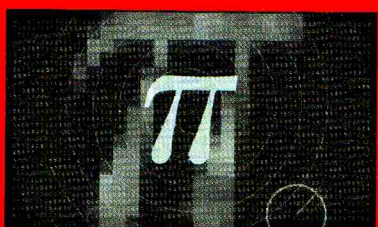


Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW,
ul. Banacha 2 (wejście od ul. Pasteura) zaprasza na:

Wielościany foremne fascynowały nie tylko wielkiego Leonarda. O takich wielościanach, które wypełniają przestrzeń i o takich, które poruszają się, nie wyginając swych ścian, będzie mowa w sobotę 18 września.



Matematycy wiedzą nie tylko to, co wiedzą, ale nawet wiedzą, czego nie mogą wiedzieć. O tym, dlaczego nie można skonstruować 23-kąta foremnego, udowodnić niesprzeczności matematyki, wykonać kwadratury koła lub trysekcji dowolnego kąta, opowiemy w sobotę 25 września.



Zero i jeden. Pi. Liczba urojona i , która po podniesieniu do kwadratu daje -1 . Liczba e , która przewija się przez całą analizę. Co łączy te liczby? O najważniejszych stałych matematyki i wzorze, w którym wszystkie one występują, będzie można posłuchać w trakcie spotkań klubowych od poniedziałku do piątku (20-24 września, godz. 18.00)

Wydział Fizyki UW, ul. Hoża 69, zaprasza na:

Citus, altius, fortius: fizyka sportu.

O tym, dlaczego sport jest fascynujący, jak osiągnąć jak najlepsze wyniki i czy to może mieć cokolwiek wspólnego z fizyką, można będzie się przekonać w niedzielę 19. i 26. września.

Zrób to sam: fizyka cząstek elementarnych.

Przez cały tydzień od 20. do 24. września, będą odbywały się lekcje festiwalowe, w czasie których uczestnicy osobiście przeprowadzą eksperyment z fizyki cząstek elementarnych. Żadna uprzednia wiedza nie jest wymagana, wystarczy chęć zmierzenia się z nieznanym.

