

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (361)

Czy bomba E zniszczy nasze komputery?

Stanisław Bednarek

str. 1

Indukcja matematyczna . . . w układach oporników

Witold Bednarek

str. 3

Złośliwe świnki

Jacek Jakubowski

Rafał Sztencel

str. 4

Zadania

str. 5

Twierdzenie Napoleona

Zbigniew Blajerski

str. 6

Kolorowanie parkietaży

Mateusz Kwaśnicki

str. 8

Aktualności

str. 9

Mała Delta

str.10

Cztery barwy wystarczają, czyli o kolorowaniu map

Robin Wilson

str.12

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Czerwiec

str.16

Kącik biologiczny

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numerzy archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:

Pasiaste minerały

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Czy bomba E zniszczy nasze komputery?

Stanisław BEDNAREK

Nie ulega wątpliwości, że w ostatnich latach obserwuje się niezwykle szybki wzrost liczby komputerów, sprzętu telekomunikacyjnego i innych urządzeń elektronicznych. Wszystkie te urządzenia znajdują zastosowanie w bardzo różnych dziedzinach aktywności człowieka – poczynając od rozrywki, edukacji i sztuki, poprzez naukę, przemysł, opiekę zdrowotną, aż po administrację państwową i wojsko. Nic więc dziwnego, że trudno wyobrazić sobie funkcjonowanie bez nich współczesnego społeczeństwa. Z tego faktu dobrze zdają sobie sprawę specjaliści od techniki wojskowej, pracujący nad nowym rodzajem broni nazywanej bombą E. Doszli oni do wniosku, że obecnie o wygraniu ewentualnej wojny może zdecydować szybkie zniszczenie urządzeń elektronicznych przeciwnika. Temu właśnie celowi ma służyć bomba E.

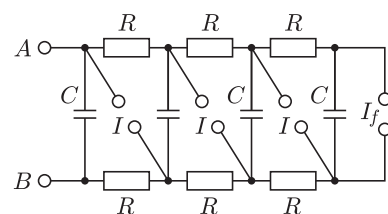
Niszczące działanie bomby E polega na tym, że wysyła ona przez bardzo krótki czas, nieprzekraczający milionowych części sekundy, niezwykle silną falę elektromagnetyczną, której moc osiąga miliardy watów. Długość tej fali wynosi od kilkudziesięciu centymetrów do ułamków milimetra, a więc jest to fala należąca do zakresu mikrofalowego. Wysłana fala rozchodzi się w otaczającej przestrzeni i dociera do wszelkiego rodzaju urządzeń elektronicznych. Zmienne pola elektryczne i magnetyczne, stanowiące tę falę, indukują zmiany napięcia w obwodach wspomnianych urządzeń, powodując ich zniszczenie lub poważne zakłócenia pracy. Jednocześnie okazuje się, że taka fala elektromagnetyczna jest praktycznie nieszkodliwa dla ludzi i innych organizmów żywych. Dlatego też bomba E nazywana jest często bronią humanitarną.

Pomysł wykorzystania fal elektromagnetycznych do zakłócania pracy urządzeń elektronicznych nie jest nowy. Już w czasie drugiej wojny światowej, a więc około sześćdziesięciu lat temu, stosowane były nadajniki skutecznie zakłócające pracę radarów. Podczas próbnego wybuchów bomb jądrowych w drugiej połowie lat czterdziestych ubiegłego wieku zauważono powstawanie tzw. burzy elektromagnetycznej, uniemożliwiającej nawet przez kilkadziesiąt minut prowadzenie łączności radiowej i funkcjonowanie urządzeń elektronicznych. Przyczyną tego zjawiska było wytworzenie w momencie wybuchu dużej liczby szybkich elektronów, kwantów promieniowania γ i zjonizowanych atomów. Elektrony, oddziałując z kwantami γ , ulegały rozproszeniu Comptona. Z kolei zjonizowane atomy ponownie przyłączały elektrony, ulegając rekombinacji. W wyniku tych efektów oddawana była energia w postaci fal elektromagnetycznych powodujących zakłócenia.

Zainteresowanie bombą E gwałtownie wzrosło w ostatnich latach. Przyczyny tego to zwiększenie liczby i znaczenia wszelkiego rodzaju urządzeń elektronicznych, wykorzystujących elementy półprzewodnikowe, które są bardzo podatne na uszkodzenia przez niewielkie skoki napięcia – w granicach 1–2 V oraz opracowanie metod wytwarzania impulsów promieniowania

elektromagnetycznego o bardzo dużej mocy. Procesory stosowane we współczesnych komputerach zasilane są napięciem wynoszącym 1,4–1,6 V. Zwiększenie tego napięcia nawet o 1 V prowadzi zwykle do zniszczenia procesora. Dla porównania, stosowane dawniej lampy elektronowe wymagały napięcia anodowego 200–300 V i wytrzymywały jego zmiany wynoszące 40–50 V. Niewielkie zmiany napięcia, powodujące zniszczenie elementów półprzewodnikowych, mogą być indukowane właśnie przez silne i szybkozmienne pole elektromagnetyczne, które wytwarza bomba E.

Pierwszym etapem, prowadzącym do wytworzenia takiego pola elektromagnetycznego, jest przepływ impulsu prądu o bardzo dużym natężeniu. Impuls ten uzyskuje się przez rozładowanie specjalnego układu kondensatorów, stanowiącego generator Marxa, którego schemat przedstawia rysunek 1.

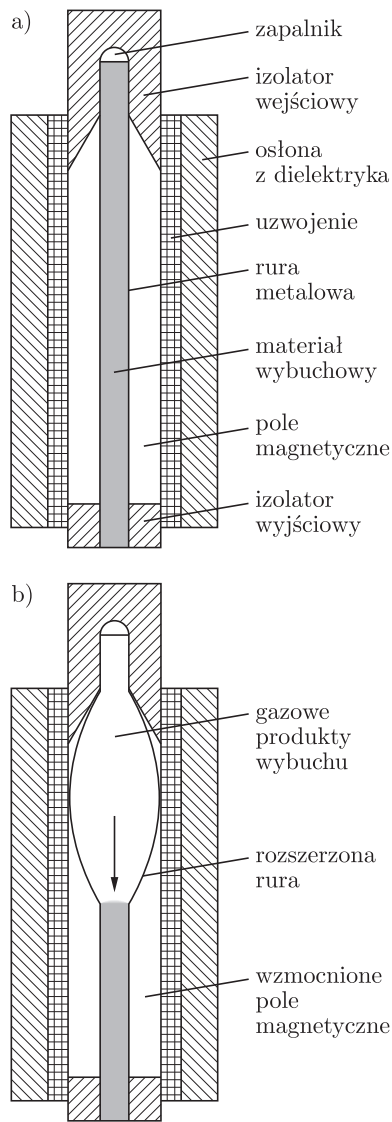


Rys. 1

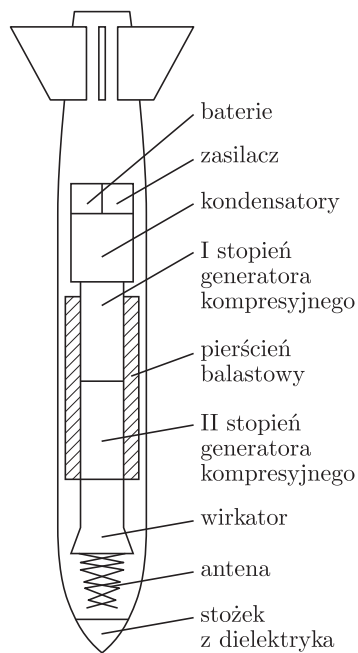
Oprócz tego, do sąsiednich kondensatorów przyłączone są iskierniki I, a do końcowego kondensatora iskiernik główny I_f . Każdy iskiernik składa się z dwóch rozsuniętych na odpowiednio dobraną odległość metalowych kulek i stanowi przerwę w obwodzie elektrycznym. Po naładowaniu kondensatorów do dostatecznie wysokiego napięcia między kulkami iskierników zapala się łuk elektryczny. Iskierniki zaczynają przewodzić i zmieniają początkowo równoległe połączenie kondensatorów na szeregowe, w którym napięcia na poszczególnych kondensatorach sumują się. Dzięki temu uzyskuje się zwielokrotnienie napięcia zasilacza, co powoduje przepływ bardzo silnego prądu podczas rozładowania wszystkich kondensatorów przez iskiernik główny.

Uzyskany z generatora Marxa impuls prądu zasila z kolei uzwojenie wytwarzające silne pole magnetyczne. Wewnątrz tego uzwojenia (rys. 2a), na dwóch pierścieniowych izolatorach, umieszczona jest metalowa rura wypełniona materiałem wybuchowym. W momencie, gdy natężenie prądu zasilającego osiąga wartość maksymalną, zostaje uruchomiony zapalnik znajdujący się na końcu rury. Na skutek tego rozpoczyna się wybuch, któremu towarzyszy wydzielanie dużej ilości gazów (rys. 2b). Wydzielające się gazy tworzą falę uderzeniową, rozprzestrzeniającą się wzdłuż rury i powodującą jej rozepchnięcie aż do wypełnienia wnętrza uzwojenia. Początkowo cała przestrzeń między rurą a uzwojeniem wypełniona jest polem magnetycznym, któremu przypisać można pewien strumień magnetyczny. Wartość tego strumienia

Początkowo kondensatory C, rozdzielone opornikami R, przyłączone są równoległe do biegunów zasilacza AB.



Rys. 2

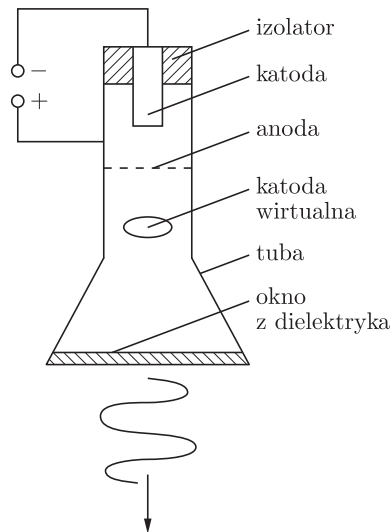


Rys. 4

pozostaje w rozważanym układzie stała. Poruszające się ścianki rury powodują wypchnięcie strumienia na zewnątrz w kierunku uzwojenia. Ponieważ wartość strumienia nie zmienia się, jest on przez to ściskany między rurą i uzwojeniem, a pole magnetyczne, przenikające uzwojenie, staje się przez to silniejsze. Zwiększające się pole magnetyczne indukuje w uzwojeniu dodatkowy prąd elektryczny, wzmacniający początkowy impuls prądu wytworzony przez generator Marxa. W rezultacie urządzenie to, zwane generatorem z kompresją strumienia, wytwarza jeszcze silniejszy impuls prądu o natężeniu dochodzącym do milionów amperów. W celu uzyskania jeszcze silniejszych impulsów prądu stosuje się dwustopniowe generatory tego typu, w których impuls wytworzony przez pierwszy generator służy do zasilania drugiego, większego generatora.

Elementem wytwarzającym w bombie E fale elektromagnetyczne jest generator mikrofal z wirtualną katodą, nazywany z angielska wirkatorem. Budowę wirkatora przedstawia rysunek 3. Katoda w postaci metalowego walca umieszczona jest wewnątrz metalowej tuby i oddzielona od niej pierścieniowym izolatorem.

Naprzeciw katody znajduje się anoda wykonana z siatki metalowej i połączona z tubą. Wylot tuby zamknięty jest oknem z dielektryka. Katoda i tuba przyłączone są do biegunów generatora z kompresją strumienia magnetycznego. Po zadziałaniu tego generatora z katody emitowana jest chmura elektronów i przyspieszana w kierunku anody. Ponieważ anodę wykonano z siatki, większość elektronów przez nią przechodzi, tworząc za anodą chmurę nazywaną wirtualną katodą. Przy takim rozkładzie ładunków wewnątrz tuby wzbudzają się drgania elektryczne o wielkiej częstotliwości, których energia wypromieniowana zostaje w postaci krótkotrwałego, lecz bardzo silnego impulsu mikrofal.



Rys. 3

Budową bomby E zainteresowane są niektóre kraje, a szczególnie Stany Zjednoczone. Badania nad źródłami wysyłającymi impulsy mikrofal o bardzo dużej mocy prowadzi się w stanie Nowy Meksyk. Oczywiście, szczegóły techniczne dotyczące konstrukcji podzespołów takiej bomby objęte są ścisłą tajemnicą. Domniemaną budowę jednego z rodzajów bomby E przedstawia schematycznie rysunek 4. Jest to bomba wysyłająca ukierunkowaną wiązkę mikrofal o wąskim przedziale częstotliwości. Bomba ta, oznaczona kryptonimem Mk.84, ma masę około 900 kg, długość 3,84 m i maksymalną średnicę 0,46 m. Zawiera 2 kg materiału wybuchowego i potrafi zniszczyć lub uszkodzić urządzenia elektroniczne na obszarze o promieniu około 1 km. Prawdopodobnie tego typu bomba E została zdetonowana nad Bagdadem w początkowym etapie interwencji wojsk sojuszników w Iraku wiosną 2003 r. Spowodowała ona uszkodzenie i zaprzestanie działania m.in. nadajnika irackiej telewizji. Budowane są również bomby E niemające wirkatora i emitujące jedynie impuls promieniowania elektromagnetycznego wytworzony przez dwustopniowy generator kompresyjny. Impuls taki charakteryzuje się większą głębokością wnikania w elementy przewodzące niż mikrofałe. W celu uzyskania jeszcze większych natężeń prądu i silniejszych pól elektromagnetycznych rozważa się również zastosowanie w bombie E elementów wykonanych z nadprzewodników.

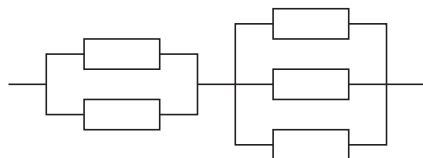
Odpowiadając na zadane w tytule pytanie należy stwierdzić, że ewentualne użycie bomby E może, ale nie musi zagrozić naszym komputerom i urządzeniom elektronicznym. Jest tak dlatego, ponieważ mikrofałe, trafiając na powierzchnię przewodnika, wnikają do niego tylko na pewną głębokość, która jest tym mniejsza, im mniejsza jest długość mikrofal oraz im większa przewodność właściwa i przenikalność magnetyczna przewodnika. Ponadto, natężenie mikrofal

w dobrym przewodniku bardzo szybko maleje wraz z odległością od jego powierzchni. Dla przykładu, na głębokości równej długości mikrofal natężenie to wynosi już tylko 0,05% natężenia mikrofal padającej. Ograniczone wnikanie mikrofal do przewodnika spowodowane jest indukowaniem w nich prądów elektrycznych przez zmienne pola magnetyczne i elektryczne. W wyniku tego mikrofałe ulegają częściowemu pochłonięciu i odbiciu od powierzchni przewodnika, nie wnikając do jego wnętrza. Umożliwia to budowę osłon, zwanych też ekranami, zabezpieczających urządzenia elektroniczne. Łatwo więc wyobrazić sobie osłonę w kształcie szczelnego pudełka wykonanego z przewodnika o odpowiednich właściwościach i grubości, zabezpieczającą np. nasz

komputer osobisty czy kalkulator. Niestety, stosowane obecnie obudowy komputerów stacjonarnych są tylko częściowo wykonane z blachy i ponadto zbyt cienkie, natomiast obudowy komputerów przenośnych wytwarza się zwykle z tworzyw sztucznych. Z kolei wszelkie anteny, np. urządzeń radiokomunikacyjnych czy radarów, należy wyposażyć w bardzo szybkie wyłączniki przepięciowe odłączające je w przypadku pojawienia się zbyt silnego sygnału. Wynika stąd, że zabezpieczenie urządzeń elektronicznych przed skutkami ewentualnego użycia bomby E jest możliwe, choć zapewne związane ze zwiększeniem ich ceny i masy. Już obecnie można spotkać reklamy przenośnych komputerów przeznaczonych dla wojska, których cena trzykrotnie przewyższa cenę ich „cywilnych” wersji.

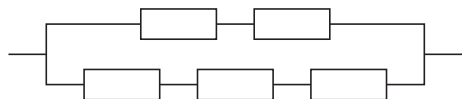
Indukcja matematyczna ...w układach oporników

Rozważmy układ oporników o jednakowym oporze r , połączonych – na przykład – tak, jak na rysunku.



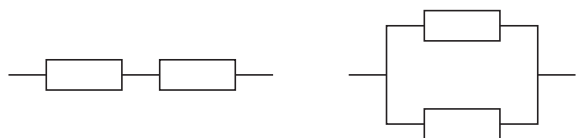
Ograniczamy się tylko do przypadku, gdy oporniki połączone są w sposób szeregowo-równoległy, tzn. nie ma żadnych gwiazdek, trójkątów itp.

Zmieniamy wszystkie połączenia równoległe na szeregowe, a szeregowe – na równoległe.



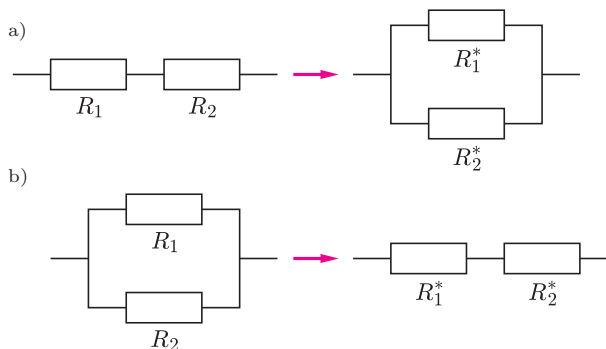
Jak łatwo obliczyć, opór zastępczy wyjściowego układu jest równy $\frac{5}{6}r$, a zmienionego $\frac{6}{5}r$. Zauważmy, że iloczyn współczynników bezwymiarowych jest równy 1, czyli jeden z nich jest odwrotnością drugiego. Nie jest to przypadek. Wykażemy, że jeśli mamy układ $n \geq 2$ oporników o jednakowym oporze r i jego opór zastępczy jest równy kr , to – po zamianie wszystkich połączeń szeregowych na równoległe i odwrotnie – opór zastępczy nowego układu oporników jest równy $\frac{1}{k}r$.

Zastosujemy zasadę indukcji matematycznej względem n . Dla $n = 1$ twierdzenie jest trywialne. Dla $n = 2$ mamy dwie możliwości.



Nasze twierdzenie jest wówczas prawdziwe, gdyż opór zastępczy połączenia szeregowego jest równy $2r$, równoległego zaś $\frac{1}{2}r$.

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych nie większych od n . Wykażemy, że jest ono prawdziwe dla układu $n + 1$ oporników. W tym celu rozbijemy go na dwa podukłady. Połączenia „końcowe” tych podukładów można przedstawić tak, jak na rysunkach.



$R_1 = k_1r$ i $R_2 = k_2r$ oznaczają opory zastępcze podukładów, a R_1^* i R_2^* oznaczają opory zastępcze podukładów, w których połączenia równoległe zastąpiono szeregowymi i odwrotnie. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$R_1^* = \frac{1}{k_1}r \quad \text{i} \quad R_2^* = \frac{1}{k_2}r.$$

Opór zastępczy układu w przypadku a) jest równy

$$(1) \quad R = R_1 + R_2 = (k_1 + k_2)r.$$

Obliczamy opór zastępczy R^* po zmianie. Mamy

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*} = \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r},$$

skąd

$$(2) \quad R^* = \frac{1}{k_1 + k_2}r.$$

Wobec tego, na podstawie równości (1) i (2) mamy tezę indukcyjną.

Rozważania w przypadku b) są podobne.

Witold BEDNAREK

W dziale naukowym jednej z gazet pojawiło się następujące zadanie:

Jest sto skarbonek (to tytułowe świnki) z kluczyczkami. Każdy kluczyczek pasuje tylko do jednej skarbonki. Skarboneki zamykamy, a wymieszane losowo kluczyczki wrzucamy po jednym do każdej skarbonki. Teraz tłuczemy jedną skarbonekę, a wyjętym z niej kluczyczkiem otwieramy następną, etc. Jaka jest szansa, że pozostałe skarboneki uda się otworzyć bez rozbijania?

Do wyboru były cztery odpowiedzi:

a) 0, b) 1/100, c) 1/2, d) 1. Wielu czytelników uważało jednak, że żadna z podanych odpowiedzi nie jest prawdziwa, na ogół z powodu skojarzenia z dobrze znanym zadaniem o kapeluszach: jeśli n osób włoży losowo n kapeluszy, to z prawdopodobieństwem równym

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \approx \frac{1}{e} \approx 0,37$$

żadna z nich nie będzie miała swojego kapelusza na głowie.

Co gorsza, piszący te słowa obserwowali to zjawisko na sobie i swoich studentach. Pierwszym odruchem była uwaga: *aha, jeśli żaden kluczyczek nie znajdzie się w skarbonce, którą otwiera, to otworzymy po kolei wszystkie*. Owszem, jest to warunek konieczny, ale nie dostateczny. Otóż operacja uda się wtedy i tylko wtedy, gdy kluczyczek od rozbitej skarbonki pojawi się na końcu. A szansa na to – ze względu na symetrię – jest równa 1/100.

Gdyby ktoś nie wierzył, może rozwiązać zadanie formalnie. Rozważmy n skarbonek. Zdarzeniami elementarnymi, które uznajemy za jednakowo prawdopodobne, są n -elementowe ciągi kluczyczków. Takich ciągów jest $n!$, zdarzeniami sprzyjającymi są zaś te, w których kluczyczek od rozbitej skarbonki pojawia się na końcu. Jest ich $(n-1)!$, stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Niestety, właściwe rozwiązanie przychodzi zwykle do głowy poniewczasie. Świnki są naprawdę złośliwe. Dlatego będziemy je tłuc bardziej intensywnie.

Załóżmy, że w chwili pojawienia się kluczyczka niepasującego do żadnej skarbonki tłuczemy kolejną. Ile *średnio* trzeba stłuc skarbonek, by otworzyć wszystkie?

Czytelnik może spróbować odgadnąć rząd wielkości. Średnia jest zaskakująco nieduża i wynosi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \approx 5,187.$$

Dla n skarbonek średnia, którą oznaczymy przez e_n , jest równa n -tej sumie częściowej szeregu harmonicznego:

$$e_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \gamma,$$

gdzie $\gamma \approx 0,577$ jest stałą Eulera. Jak widać, e_n rośnie wraz z n dość powoli.

Jak uzyskać ten wynik?

Sposób 1. Jeśli stłuczemy pierwszą świnkę, to pasujący do niej kluczyczek ma równe szanse pojawienia się jako pierwszy, drugi, itd. Wtedy zadanie sprowadza się do otwarcia pozostałych $n-1$, $n-2$, itd. skarbonek w ten sam sposób. Dlatego

$$e_n = \frac{1}{n}(e_0 + \dots + e_{n-1}) + 1, \quad n \geq 1, \quad e_0 = 0.$$

Mamy zatem dla $n \geq 1$:

$$(1) \quad ne_n = (e_0 + \dots + e_{n-1}) + n,$$

$$(2) \quad (n-1)e_{n-1} = (e_0 + \dots + e_{n-2}) + n - 1.$$

Z równania (2) wynika, że

$$(3) \quad ne_{n-1} = (e_0 + \dots + e_{n-1}) + n - 1,$$

i odjęcie stronami (3) od (1) daje $n(e_n - e_{n-1}) = 1$, czyli $e_n - e_{n-1} = 1/n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Ostatecznie

$$e_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Jak zwykle, poniewczasie wpadamy na inny pomysł, prowadzący do prostszych rachunków.

Sposób 2. Po stłuczeniu pierwszej świnki mamy szansę $1/n$ znalezienia tam pasującego do niej kluczyczka; wtedy pozostaje do otwarcia średnio e_{n-1} skarbonek. W przeciwnym razie jesteśmy w stanie otworzyć kolejną skarbonekę (nie musimy jej tłuc), zatem pozostaje średnio $e_{n-1} - 1$ skarbonek do otwarcia. Stąd równanie:

$$\begin{aligned} e_n &= \frac{1}{n}(1 + e_{n-1}) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(1 + e_{n-1} - 1) = \\ &= \frac{1}{n}(1 + e_{n-1}) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)e_{n-1} = \frac{1}{n} + e_{n-1}. \end{aligned}$$

Rozwiązując zadanie, korzystaliśmy tak naprawdę z pojęcia warunkowej wartości oczekiwanej.

Przypomnijmy, że zwykła wartość oczekiwana dla zmiennej losowej przyjmującej skończenie wiele wartości x_1, \dots, x_n jest dana wzorem

$$(4) \quad EX = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k).$$

Jeśli teraz wprowadzimy zdarzenie A (takie, że $P(A) > 0$) i zastąpimy we wzorze (4) zwykłe prawdopodobieństwo przez warunkowe, otrzymamy średnią wartość X na A :

$$(5) \quad E(X|A) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k|A).$$

Jeżeli dane jest rozbitcie \mathcal{F} przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω na zdarzenia A_1, \dots, A_m , to definiujemy warunkową wartość oczekiwaną X pod warunkiem \mathcal{F} jako zmienną losową, która przyjmuje wartości $E(X|A_i)$ na A_i :

$$(6) \quad E(X|\mathcal{F})(\omega) = E(X|A_i), \quad \omega \in A_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Wtedy można łatwo udowodnić odpowiednik wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$(7) \quad E(E(X|\mathcal{F})) = EX.$$

Oto dowód:

$$(8) \quad E(E(X|\mathcal{F})) = \sum_{i=1}^m E(X|A_i) \cdot P(A_i) =$$

$$(9) \quad = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k|A_i) \cdot P(A_i) =$$

$$(10) \quad = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m x_k P(X = x_k|A_i) \cdot P(A_i) \right] =$$

$$(11) \quad = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k) = EX.$$

Wyrażenie (9) otrzymaliśmy, korzystając z (5).

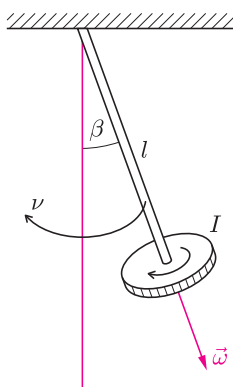
Po zamianie kolejności sumowania równość wyrażen (10) i (11) wynika oczywiście ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

Dwa rozwiązania zadania o średniej liczbie stłuczonych świnek ilustrują typowe zastosowania wzoru (7), który umożliwi układanie równań. Mielśmy do czynienia z dwoma rozbiciami przestrzeni Ω na (wykluczające się!) zdarzenia: w sposobie 1 ze względu na chwilę pojawienia się kluczyka od pierwszej stłuczonej świnki, w sposobie 2 – ze względu na to, czy miała w środku swój kluczyk, czy też nie. Można było łatwo odgadnąć, bez zbędnych formalizmów, czemu są równe średnie $E(X|A_i)$.



Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



F 621. Samolot naddźwiękowy poruszający się z prędkością $v > c$ (gdzie c to prędkość dźwięku w otaczającym gazie) leci wpierw prosto, potem skręca, zachowując tę samą prędkość. O jaki kąt α musi skręcić samolot, by „usłyszeć” własną falę uderzeniową?

Rozwiązanie na str. 8

F 622. Wahadło składa się ze sztywnego, nieważkiego pręta o długości l i wirującego z dużą prędkością ω krążka o masie m i momencie bezwładności I zamocowanego na dole (rysunek). Wahadło wykonuje swobodne, jednostajne obroty wokół osi pionowej odchylone o kąt β od pionu. Jaka jest prędkość kątowa ν tych obrotów?

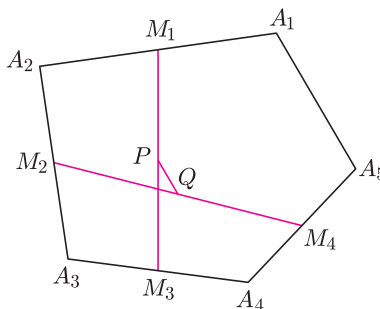
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Waldemar POMPE

M 1063. Zbiór A zawarty w odcinku o długości 1 składa się z pewnej liczby rozłącznych odcinków. Wiadomo, że odległość dowolnych dwóch punktów zbioru A jest różna od $1/10$. Wykazać, że łączna długość odcinków ze zbioru A nie przekracza $1/2$.

Rozwiązanie na str. 6

M 1064. Punkty M_1, M_2, M_3 i M_4 są odpowiednio środkami boków A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 i A_4A_5 pięciokąta wypukłego $A_1A_2A_3A_4A_5$.



Punkty P i Q są odpowiednio środkami odcinków M_1M_3 i M_2M_4 . Wykazać, że proste PQ i A_1A_5 są równoległe oraz $PQ = \frac{1}{4} A_1A_5$.

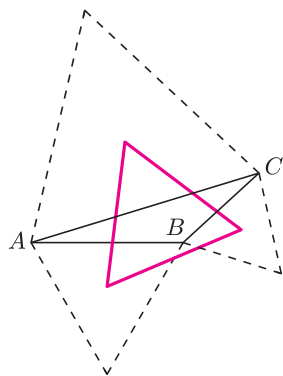
Rozwiązanie na str. 8

M 1065. Ciąg d_1, d_2, d_3, \dots liczb całkowitych dodatnich jest zdefiniowany w ten sposób, że dla $n = 1, 2, 3, \dots$, liczba d_{n+1} jest liczbą dodatnich dzielników liczby d_n . Rozstrzygnąć, dla jakich wartości $d_1 > 1$ ciąg (d_n) nie zawiera kwadratów liczb całkowitych.

Rozwiązanie na str. 7

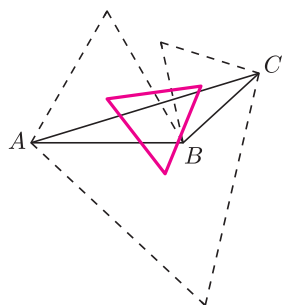
Twierdzenie Napoleona

Zbigniew BLAJERSKI



Rys. 1

Jeśli na bokach dowolnego trójkąta zbudujemy trójkąty równoboczne tak, by albo każdy z nich miał wewnątrz rozłączne z wnętrzem danego trójkąta (mówimy wtedy o przypadku zewnętrznym – rysunek 1), albo każdy z nich miał wewnątrz nierozłączne z wnętrzem danego trójkąta (przypadek wewnętrzny – rysunek 2), to okaże się, że środki tych zbudowanych trójkątów będą wierzchołkami trójkąta równobocznego.



Rys. 2

Fakt ten jest znany pod nazwą twierdzenia Napoleona, choć jego związek z Cesarzem Francuzów jest niejasny.

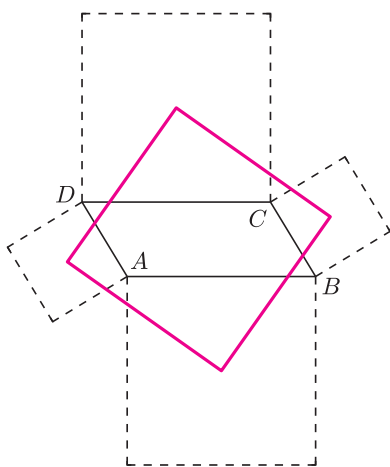
Nie jest jednak prawdziwe proste uogólnienie tego faktu: jeśli na bokach dowolnego n -kąta zbudujemy n -kąty foremne, to ich środki nie muszą być wierzchołkami n -kąta foremnego. Powstaje w związku z tym pytanie, przy jakich najslabszych dodatkowych założeniach można to twierdzenie uogólnić. Problem ten dla $n = 4$ i $n = 6$ został w 1952 roku rozwiązany przez włoskiego matematyka Adriano Barlottiego.

A. Barlotti, *Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo ad triangolo*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 7 (1952), 182–185.

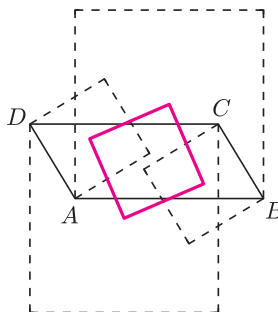
Oto ten rezultat.

Twierdzenie 1. Środki kwadratów zbudowanych (zewnątrznie lub wewnątrznie) na bokach czworokąta są wierzchołkami kwadratu wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt ten jest równoległobokiem (rys. 3, rys. 4).

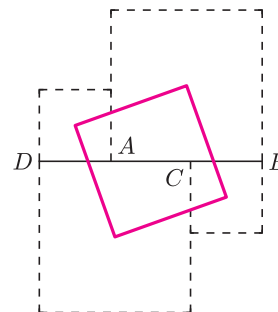
Można tu dopuścić (podobnie jak we wszystkich innych przypadkach) również sytuację zdegenerowaną – rysunek 5.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rozwiązanie zadania M 1063.

Przyjmijmy, że $I = [0, 1]$ jest danym odcinkiem o długości 1. Rozpatrzmy 10 odcinków:

$$I_k = \left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10} \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 9).$$

Dodając $1/10$ do każdej liczby ze zbioru $A \cap I_{2i}$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), przesuwamy ten zbiór o $1/10$ w prawo. Otrzymujemy w ten sposób podzbiór przedziału I_{2i+1} , który jest rozłączny ze zbiorem A . Stąd wynika, że łączna długość odcinków ze zbioru A nie przekracza połowy długości odcinka I , czyli $1/2$.

Twierdzenie 2. Środki sześciokątów foremnych zbudowanych na bokach sześciokąta $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ są wierzchołkami sześciokąta foremnego wtedy i tylko wtedy, gdy główne przekątne P_iP_{i+3} przecinają się w jednym punkcie i są równoległe do boków $P_{i+1}P_{i+2}$ i $P_{i+4}P_{i+5}$ (indeksy modulo 6).

W trzy lata później Barlotti analitycznie (posługując się liczbami zespolonymi) znalazł warunek, który pozwala na sformułowanie odpowiednika twierdzenia Napoleona dla dowolnego $n \geq 3$.

A. Barlotti, *Una proprietà degli n -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n -agono regolare*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 10 (1955), 96–98.

Mianowicie prawdziwe jest

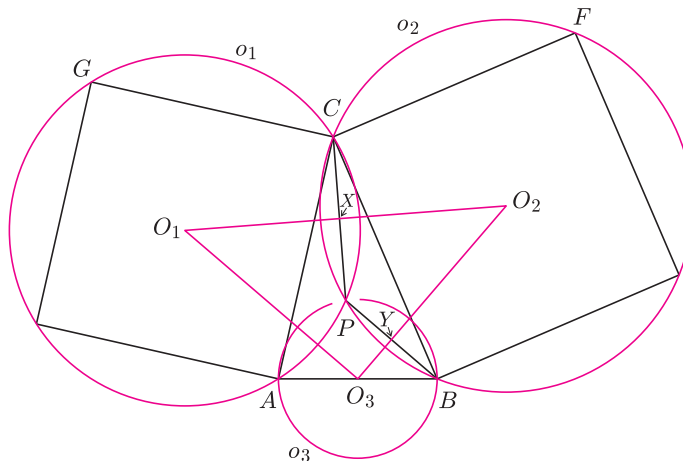
Twierdzenie 3. Środki n -kątów foremnych zbudowanych na bokach pewnego n -kąta są wierzchołkami n -kąta foremnego wtedy i tylko wtedy, gdy ten n -kąt jest obrazem n -kąta foremnego w jakimś przekształceniu afinicznym.

Zapewne istnieją proste geometryczne dowody twierdzenia 3. Tu chciałem przedstawić jedynie geometryczny dowód twierdzenia dla czworokąta, przy czym będę rozważał tylko przypadek, gdy kwadraty budowane są zewnątrz, bo dla pozostałych przypadków (łącznie ze zdegenerowanym) dowód jest analogiczny.

Dogodnie jest posłużyć się następującym lematem.

Lemat. Jeśli na dwóch bokach trójkąta zbudujemy (zewnątrznie) kwadraty, to okręgi o_1 i o_2 na nich opisane przecinają się na okręgu o_3 , którego średnicą jest trzeci bok trójkąta; ponadto środki tych okręgów są wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Dowód lematu. Niech P będzie drugim poza C (oznaczenia z rysunku 6) punktem przecięcia o_1 i o_2 .



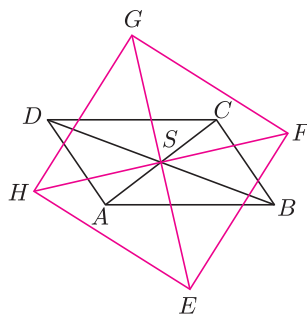
Rys. 6

Mamy $\sphericalangle CGA = \sphericalangle CFB = 45^\circ$, więc $\sphericalangle CPA = \sphericalangle CPB = 135^\circ$. Zatem $\sphericalangle APB = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$,

czyli punkt P leży także na o_3 . Druga część tezy wynika z faktu, że O_1O_3 i O_2O_3 są symetralnymi przyprostokątnych trójkąta APB , a więc są prostopadłe. Podobnie O_1O_2 jest symetralną CP , a więc w czworokącie PXO_2Y mamy

$$\sphericalangle O_1O_2O_3 = \sphericalangle XO_2Y = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Dowód twierdzenia 1 w wersji zewnętrznej. Załóżmy, że $ABCD$ jest równoległobokiem, a E, F, G, H – środkami kwadratów zbudowanych na jego bokach (rys. 7).



Rys. 7

Wobec lematu czworokąt $EFGH$, jako złożony z czterech jednakowych trójkątów prostokątnych równoramiennych, jest kwadratem.

Założmy z kolei, że $EFGH$ jest kwadratem. Wobec lematu zastosowanego do trójkątów ABC i BCD punkt S jest środkiem zarówno AC , jak BD . Zatem czworokąt $ABCD$ ma środek symetrii, czyli jest równoległobokiem.

Podobnie dowodzi się twierdzenia 2.

Proponuję jednak Czytelnikom zmierzenie się z innymi przypadkami twierdzenia 3, a może nawet znalezienie elementarnego geometrycznego dowodu tego twierdzenia w pełnej ogólności.

Przekształcenie afiniczne to takie, które zachowuje linie proste.



Rozwiązanie zadania M 1065.

Wykażemy, że podany ciąg nie zawiera kwadratów liczb całkowitych jedynie wtedy, gdy d_1 jest liczbą pierwszą.

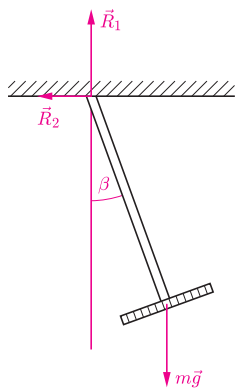
Jeśli d_1 jest liczbą pierwszą, to wszystkie pozostałe wyrazy tego ciągu są równe 2, a zatem ciąg ten nie zawiera żadnego kwadratu.

Przyjmijmy, że $d_1 > 2$ jest liczbą złożoną. Oczywiście $d_{n+1} \leq d_n$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $d_n = 2$. Zatem dla pewnego $k \geq 3$ mamy $d_k = 2$ oraz $d_{k-1} \neq 2$. Wówczas d_{k-1} jest liczbą pierwszą nieparzystą, co z kolei oznacza, że d_{k-2} jest kwadratem liczby całkowitej. Gdyby bowiem d_{n-2} nie było kwadratem, to wszystkie jego dzielniki można by połączyć w pary $(k, d_{n-2}/k)$, gdzie $k < \sqrt{d_{n-2}}$.



Rozwiązanie zadania F 622.

Długość wektora pochodnej momentu bezwładności wahadła względem czasu to $I\omega\nu \sin \beta$.



Zmiana ta wywołwana jest przez moment siły reakcji \vec{R} względem środka masy wahadła:

$$lR_1 \sin \beta - lR_2 \cos \beta.$$

Pionowa składowa siły reakcji równoważy ciężar wahadła:

$$R_1 = mg,$$

pozioma wywołuje ruch dookoła środka masy:

$$R_2 = ml \sin \beta \nu^2.$$

Po przyrównaniu pochodnej momentu bezwładności i sumy momentów sił otrzymujemy zależność

$$I\omega \sin \beta \nu = mgl \sin \beta - ml^2 \sin \beta \cos \beta \nu^2,$$

czyli

$$\nu = \frac{I\omega \pm \sqrt{I^2\omega^2 + m^2gl^3 \cos \beta}}{2ml^2 \cos \beta}.$$

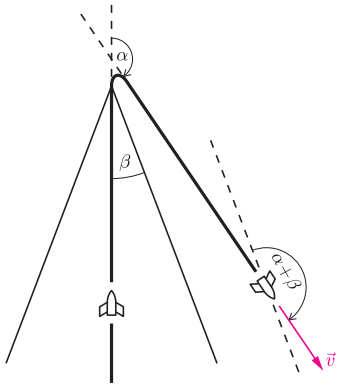


Kolorowanie parkietaży

Mateusz KWAŚNICKI

Rozwiązanie zadania F 621.

Kąt, pod jakim rozchodzi się fala uderzeniowa w stosunku do kierunku ruchu, dany jest przez $\sin \beta = c/v$. Po zakręcie składowa prędkości samolotu równoległa do kierunku rozchodzenia się fali uderzeniowej, wytworzonej przed zakrętem, równa jest $v' = \sin(\alpha + \beta)v$.



Aby własna fala uderzeniowa doścignęła samolot, musi zajść

$$v' < c$$

– inaczej fala nie dogoni samolotu, oraz

$$\alpha + \beta > 90^\circ$$

– inaczej samolot nie znajdzie się na „drodze” swojej fali uderzeniowej.

Wobec tego

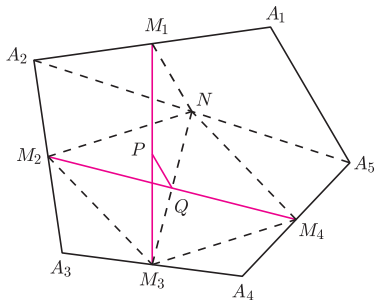
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \\ &= \frac{c}{v} = \sin \beta, \end{aligned}$$

a ponieważ $180^\circ - \alpha - \beta < 90^\circ$, to implikuje $\alpha > 180^\circ - 2\beta$.



Rozwiązanie zadania M 1064.

Niech N będzie środkiem odcinka A_2A_5 .



Wówczas czworokąt $NM_2M_3M_4$ jest równoległobokiem, gdyż każdy jego bok jest równoległy do prostej A_2A_4 lub prostej A_3A_5 . Zatem punkt Q – jako środek przekątnej M_2M_4 – jest również środkiem odcinka NM_3 . Stąd wynika, że odcinki PQ i NM_1 są równoległe oraz $PQ = \frac{1}{2}NM_1$. Ponadto odcinki NM_1 i A_1A_5 są równoległe oraz zachodzi równość $NM_1 = \frac{1}{2}A_1A_5$. W efekcie proste PQ i A_1A_5 są równoległe oraz $PQ = \frac{1}{4}A_1A_5$.

Spotkałem następujące zadanie: znaleźć wielościan o 2003 ścianach, spośród których 1001 pomalowanych jest na biało, a 1002 na czarno w ten sposób, że żadna krawędź nie oddziela dwóch ścian czarnych. Zadanie nietrudne, lecz w trakcie jego rozwiązywania przyszło mi do głowy pewne uogólnienie.

Niech v , e , f oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu. Liczbę ścian białych oznaczmy przez k , czarnych – przez l . Niech m krawędzi rozdziela białe ściany, a n krawędzi oddziela białe od czarnych. Ze wzoru Eulera

$$v + f = 2 + e.$$

Ponadto

$$f = k + l; \quad e = m + n;$$

wreszcie każdy wierzchołek należy do co najmniej:

- (i) dwóch ścian czarnych,
- (ii) jednej ściany czarnej i jednej krawędzi rozdzielającej białe ściany lub
- (iii) trzech krawędzi rozdzielających białe ściany.

Mamy więc

$$v \leq \frac{1}{2}(2m + n).$$

Stąd

$$m + \frac{1}{2}n + k + l \geq 2 + m + n,$$

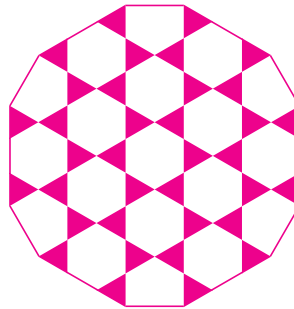
czyli

$$l \geq 2 + \frac{1}{2}n - k.$$

Każda czarna ściana ma co najmniej trzy krawędzie, więc $n \geq 3k$. Ostatecznie zatem

$$(*) \quad l \geq 2 + \frac{1}{2}k.$$

Rozważmy powierzchnię, która widziana z góry przypomina sześciokątny fragment parkietaży sześciokątno-trójkątnego o „średnicy” $2p + 1$ sześciokątów, z narożnymi sześciokątami przyciętymi do pięciokątów.



(Przypomina, ponieważ powierzchnia o dokładnie takim rzucie nie istnieje, żadne dwie krawędzie na brzegu nie mogą być współliniowe; ponadto zakładamy, że brzeg takiego rzutu jest foremny $12p$ -kątem.) Składając dwie takie powierzchnie skrócone względem siebie, otrzymamy bryłę, dla której:

$$\frac{1}{2}k = 6p(p + 1), \quad \frac{1}{2}l = 1 + 3p(p + 1),$$

co pokazuje, że oszacowanie $(*)$ jest wynikiem najlepszym z możliwych. Można zatem powiedzieć, że teza początkowego zadania jest stosunkowo słaba. Okazuje się, że ścian czarnych może być nie tylko więcej, lecz prawie dwa razy więcej niż białych.

Fermionowa galaretka

Jednym z ulubionych poleceń w nowych, szkolnych podręcznikach fizyki jest wymienienie wszystkich stanów skupienia materii. Oprócz ciał stałych, cieczy i gazów autorom chodzi zazwyczaj o podanie czwartego, a czasem piątego stanu skupienia. Przyznam, że ja już dawno pogubiłem się, gdyż ostatnio stany skupienia mnożą się jak króliki.

Tytułowa galaretka jest właśnie jednym z nich (nie pytajcie którym). Jest to nadciekły kondensat fermionowy, który właśnie (koło Wielkiej Nocy), udało się uzyskać naukowcom z Duke University w Durham [1].

Kondensat fermionowy to właściwie oksymoron. Przecież podstawową własnością fermionów jest to, że nie można ich „zmusić” do przebywania w jednym stanie kwantowym. Odwrotnie zachowują się bozony. Jeżeli tylko mogą, to wszystkie „najchętniej” znalazłyby się w tym samym stanie. Ponieważ tak fermiony, jak bozony są między sobą nieodróżnialne, więc podział na bozony i fermiony bierze się z własności funkcji opisującej stan kwantowy układu wielu identycznych cząstek. Reaguje ona na operację zamiany miejscami dwóch spośród nich. Ponieważ powrotna zamiana nic nie zmienia, to pojedyncza zamiana może najwyżej zmieniać znak funkcji. Okazuje się, że robi to w przypadku układu identycznych fermionów. Natomiast gdy mamy do czynienia z identycznymi bozonami, znak się nie zmienia. O tym, czym jest dany rodzaj cząstek, bozonami czy fermionami, decyduje ich spin, czyli wewnętrzny moment pędu. Może on wyrażać się liczbą całkowitą w jednostkach \hbar i wtedy są to bozony, lub połówkową (wielokrotność $\hbar/2$) w przypadku fermionów. Ponieważ spin jest wielkością addytywną, to identyczne układy parzystej liczby związanych fermionów są bozonami.

Pora przypomnieć, o jaki rodzaj kondensacji chodzi. W przypadku bozonów jest to kondensacja Bosego-Einsteina. Odpowiednio oziębione bozony powinny wszystkie znaleźć się w najniższym stanie kwantowym. I rzeczywiście tak się dzieje. Pierwszą zaobserwowaną kondensacją tego typu była nadciekłość helu-4, a przed dziesięciu laty udało się przeprowadzić taki proces dla utrzymywanych w pułapce magnetoptycznej rozrzedzonych gazów. Główną trudnością eksperymentalną było otrzymanie niezwykle niskiej temperatury, mniejszej od milionowej części kelwina powyżej zera bezwzględne. Za to osiągnięcie przyznana została Nagroda Nobla z Fizyki w 2001 roku.

W przypadku fermionów przed kondensacją powinny one połączyć się w pary. Jest jednak wiele możliwości łączenia w pary fermionów. Może to być albo „zwykłe” wiązanie, w którym dwa fermiony o przeciwnych spinach tworzą molekułę. Dla takich molekuł może zajść „zwykła” kondensacja Bosego-Einsteina.

Może jednak mieć miejsce bardziej subtelne wiązanie wynikające z oddziaływania wielu cząstek. W tym przypadku wiążą się fermiony, które mają zbliżone pędy, a nie przestrzenne pozycje. Ten typ wiązania występuje w nadprzewodnikach. Tak związane fermiony nazywa się parami Coopera.

Od kilku lat przypuszczano, że w układach rozrzedzonych par metali alkalicznych będących fermionami można regulować sposób ich wiązania poprzez zewnętrzne pole magnetyczne. W ten sposób można by było badać obszar przejściowy między kondensacją Bosego-Einsteina a kondensacją par Coopera.

Pod koniec zeszłego roku pojawiły się doniesienia o zaobserwowaniu kondensacji Bosego-Einsteina dla fermionowego litu i potasu [2, 3]. Na początku tego roku jedna z grup doniosła [4] o uzyskaniu kondensacji właśnie w takim przejściowym obszarze. W kwietniu natomiast pojawiło się doniesienie innej grupy [1] o zaobserwowaniu nadciekłości w takim układzie.

W tym ostatnim eksperymencie naukowcy uwięzili i oziębili atomy litu-6. Ostateczne oziębienie, standardowo już, odbyło się przez „odparowanie” gorętszych atomów. Zjawisko to jest analogiczne do stygnięcia szklanki herbaty. Żeby to stygnięcie umożliwić, stopniowo zmniejsza się „głębokość” pułapki tak, że najszybsze (a więc najgorętsze) atomy mogą ją opuścić, obniżając średnią temperaturę.

Następnie przystąpiono do sprawdzenia, „czy galaretka już zastygła”. W tym celu na chwilę wyłączono pułapkę, pozwalając próbce gazu się trochę rozprężyć, a następnie ponownie włączono lasery. W ten sposób próbka została wprowadzona w drgania. Częstość drgań i fakt zmniejszania się tłumienia ze zmniejszaniem temperatury świadczą o tym, że rzeczywiście galaretka była nadciekła.

Z badaniami tymi wiąże się nadzieje na lepsze zrozumienie wysokotemperaturowych nadprzewodników i, być może, wynalezienie nadprzewodnika nietracącego swych własności w temperaturze pokojowej (lub przynajmniej suchego lodu).

Charakterystyczną temperaturą układu wielu fermionów jest temperatura Fermiego (trochę to mało oryginalne). Jest to temperatura odpowiadająca wypełnieniu przez fermiony wszystkich najniższych (o najmniejszej energii) miejsc (przypomnijmy, że każdy fermion musi mieć swoje miejsce). Nawet dla wysokotemperaturowych nadprzewodników przejście do stanu nadprzewodzenia zachodzi dopiero, gdy temperaturę obniży się o dwa rzędy wielkości poniżej temperatury Fermiego. W przypadku fermionowych gazów kondensacja zachodzi już przy obniżeniu temperatury o czynnik 5. Jest to związane z silniejszym wiązaniem fermionów niż w przypadku „zwykłych” par Coopera w nadprzewodnikach. Jeżeli udałoby się zaprojektować materiał, w którym elektrony wiązałyby się tak silnie, to nadprzewodników nie trzeba by było chłodzić.

Piotr ZALEWSKI

[1] J. Kinast, S.L. Hemmer, M.E. Gehm, A. Turlapov, J.E. Thomas, *Evidence for Superfluidity in a Resonantly Interacting Fermi Gas*, **cond-mat/0403540**

[2] C.A. Regal, M. Greiner, D.S. Jin, *A molecular Bose-Einstein condensate emerges from a Fermi sea*, **cond-mat/0311172**

[3] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *Bose-Einstein Condensation of Molecules*, *Science* **302**(2003)2101

[4] C.A. Regal, M. Greiner, D.S. Jin, *Observation of resonance condensation of fermionic atom pairs*, **cond-mat/0401554**

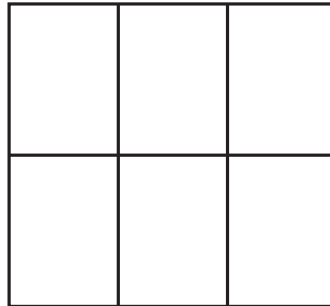


mała delta

Czyszczenie ulic

Od czasu do czasu w mieście trzeba wyczyścić ulice. Służy do tego specjalny pojazd wyposażony w szczotki i natryski. Chodzi o to, by tak zaplanować trasę pojazdu, by wyczyścić wszystkie ulice w mieście, przejechawszy możliwie najmniej i niekoniecznie wracając do punktu wyjścia. W końcu zawsze można wybudować dwie bazy pojazdów czyszczących. U nas miasto będzie prostokątne, a kwartały będą jednakowymi kwadratami, powiedzmy o boku 1 km.

Na przykład na rysunku 1 miasto jest prostokątem 2 na 3 km, a system ulic składa się z siedemnastu jednokilometrowych odcinków dzielących miasto na 6 kwartałów.

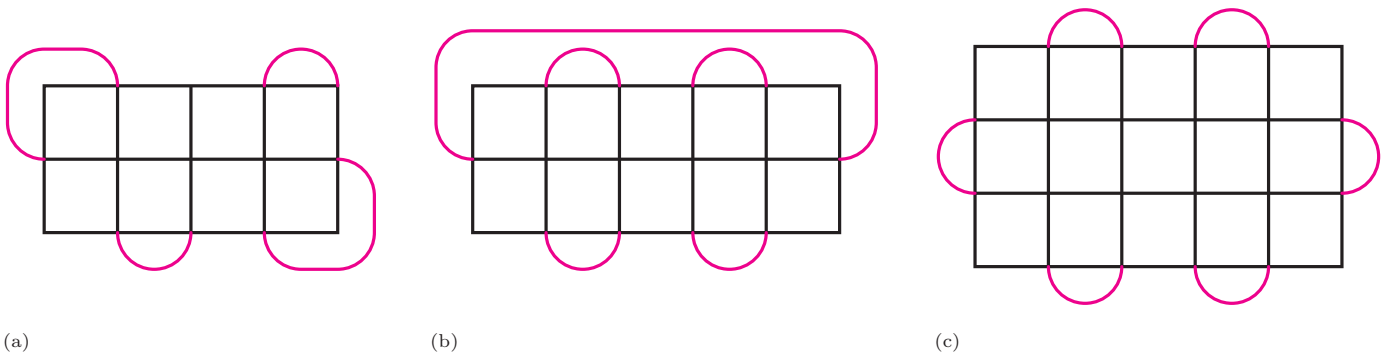


Rys. 1

Zachęcam Czytelnika do samodzielnego wyznaczenia optymalnej trasy. Wcale nie wydaje się to łatwe. Wszystko jednak wyjaśnia się, gdy zastosować trochę matematyki. Po pierwsze, potraktujmy ulice i skrzyżowania jako krawędzie i wierzchołki grafu. Klucz do rozwiązania problemu to stopnie wierzchołków, czyli liczby, które mówią, ile ulic (krawędzi) zbiega się w jednym skrzyżowaniu (wierzchołku). Miasto z rysunku 1 ma 4 wierzchołki stopnia 2, są to wierzchołki prostokąta, 6 wierzchołków stopnia 3 leżących na bokach prostokąta oraz 2 wierzchołki stopnia 4 leżące we wnętrzu prostokąta. Gdyby wszystkie wierzchołki miały stopnie parzyste, to można by wyczyścić wszystkie ulice, każdą przejechawszy dokładnie jeden raz i na koniec znaleźć się w punkcie wyjścia. I na odwrót, taka sztuka może się powieść w grafie jedynie wtedy, gdy wszystkie wierzchołki grafu mają parzyste stopnie. Powyższe dwa zdania stanowią treść twierdzenia Eulera, które nietrudno udowodnić. Widać więc, że w naszym mieście niektóre ulice trzeba będzie wyczyścić co najmniej dwukrotnie. Przypuśćmy, że znamy optymalną trasę pojazdu czyszczącego. Jeśli owa trasa dwukrotnie wiedzie tą samą ulicą, połączmy wierzchołki tej ulicy dodatkową krawędzią. Jeśli trzykrotnie, dodajemy dwie krawędzie itd. Postępujemy tak z każdą ulicą przejeżdżaną wielokrotnie. Nietrudno zauważyć, że tak zmodyfikowaną sieć ulic można objechać bez powtórzeń. Po prostu zamiast powtarzać

wybieramy jedną z dodanych krawędzi. Zatem graf, który otrzymujemy po modyfikacji, ma wyłącznie wierzchołki stopnia parzystego. Stąd nietrudno wydedukować, że liczba dodanych krawędzi to przynajmniej połowa liczby wierzchołków nieparzystego stopnia. W poszukiwaniu optymalnej trasy można odwrócić powyższe rozumowanie. Najpierw dodajmy tyle krawędzi, by każdy wierzchołek był stopnia parzystego, po czym każdą dodaną krawędź zastępujemy możliwie krótką drogą prawdziwymi ulicami miasta. Na szczęście jedną z dodatkowych krawędzi można pominąć, bo pojazd może przecież zacząć czyszczenie w jednym wierzchołku tej krawędzi, a skończyć w drugim. Oczywiście, pomijamy krawędź najdłuższą. Strategia dodawania dodatkowych krawędzi, a zatem również wyznaczania optymalnej trasy, będzie zależała od parzystości wymiarów miasta.

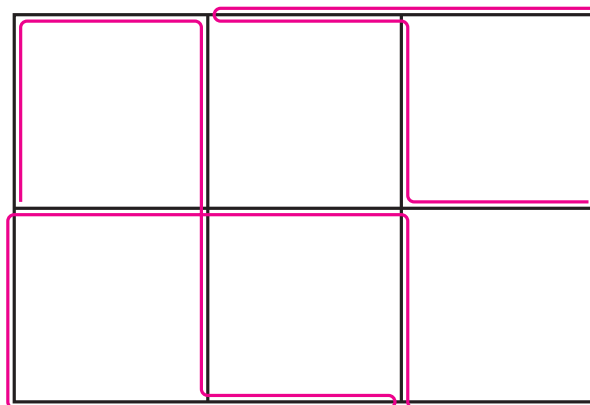
Rysunek 2 pokazuje, co należy zrobić, gdy miasto ma parzystą długość i szerokość (a), jeden wymiar nieparzysty (b) oraz oba wymiary nieparzyste (c).



Rys. 2

Nietrudno przekonać się, że rysunek 2 pokazuje, jak wyznaczyć optymalne trasy poprzez dodanie dodatkowych krawędzi.

W przypadku (a), gdy oba wymiary, powiedzmy n i k , są parzyste, trzeba będzie nadłożyć $n + k - 2$ kilometrów, w przypadku (b), gdy n jest parzyste, a k nieparzyste, nadkładamy $n + k - 3$ kilometrów, a w przypadku (c) $n + k - 1$ kilometrów. Zatem żeby wyczyścić ulice miasta z rysunku 1, potrzeba i wystarczy przejechać 19 km. Rysunek 3 przedstawia jedną z możliwych tras.



Rys. 3

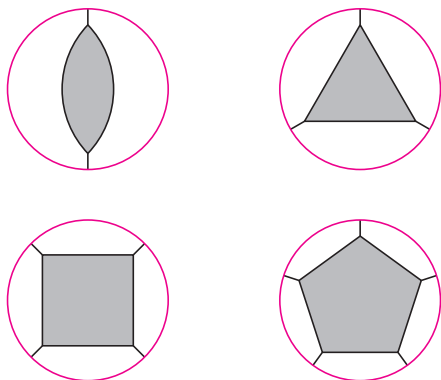
Małą Deltę przygotował Krzysztof PAWŁOWICZ

Cztery barwy wystarczą, czyli o kolorowaniu map

Gdy w październiku 1852 roku Francis Guthrie (były student Augustusa de Morgana) kolorował mapę Anglii, zauważył, że cztery kolory wystarczą, by każde dwa sąsiadujące hrabstwa różniły się barwą. Pomyślał: *Czy cztery barwy wystarczą do pokolorowania dowolnej, nawet najbardziej skomplikowanej mapy?*

Pytaniem zainteresowało się zrazu kilku matematyków, w tym de Morgan i Sir William Rowan Hamilton, a później także Arthur Cayley, lecz pierwszy „dowód” pojawił się dopiero w roku 1879. Przedstawił go Alfred Kempe, londyński prawnik, który studiował z Cayleyem w Cambridge, a później przez wiele lat piastował stanowisko skarbnika Royal Society. Był to zapewne najślynniejszy fałszywy dowód w całej historii matematyki, choć kryło się w nim także kilka dobrych pomysłów. A przebiegał on mniej więcej tak.

Zakładamy, że wszystkie kraje na mapie *poza jednym* pokolorowaliśmy już czterema barwami, po czym pokazujemy, jak rozszerzyć to kolorowanie na ostatni, brakujący kraj. Każdą mapę zawierającą co najwyżej 4 kraje można oczywiście pokolorować czterema barwami zgodnie z regułami sąsiedztwa, zatem taka metoda pozwoliłaby rozszerzyć kolorowanie na 5, 6, 7... krajów, czyli na wszystkie mapy. Otóż łatwo wywnioskować ze wzoru wielościennego Eulera, że *na każdej mapie jest kraj, który ma co najwyżej pięciu sąsiadów*: dwukąt (kraj o dwóch bokach), trójkąt, kwadrat lub pięciokąt. Kempe przeanalizował kolejno każdy z tych przypadków (rys. 1).



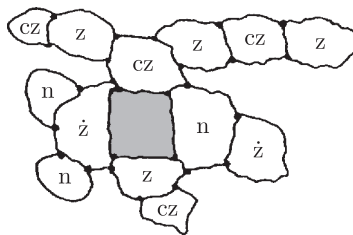
Rys. 1

Jeśli mapa zawiera dwukąt lub trójkąt, ściągamy go do punktu. Mamy wtedy mniej krajów, potrafimy więc pokolorować je czterema barwami. Gdy przywrócimy oryginalną figurę, będzie ona otoczona co najwyżej trzema krajami. Pozostanie zatem wolny kolor, którym możemy pokolorować ów dwukąt lub trójkąt zgodnie z regułami.

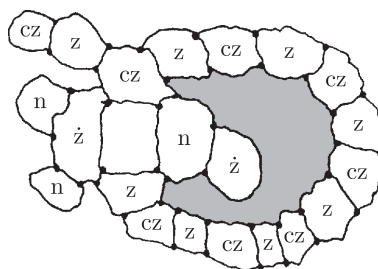
Jeśli na mapie znajduje się kwadrat, popatrzmy – idąc tropem rozumowania Kempego – na dwa tylko kolory, powiedzmy, na *czerwony* kraj bezpośrednio nad kwadratem i *zielony* kraj bezpośrednio pod kwadratem i rozważmy następujące pytanie: czy czerwono-zielona część mapy nad kwadratem jest połączona z czerwono-zieloną częścią mapy pod kwadratem?

Robin WILSON, Wielka Brytania

Jeśli NIE (rysunek 2), to nad kwadratem możemy zamienić kolory czerwony i zielony (czerwone kraje stają się zielone i odwrotnie), w wyniku czego kraje leżące bezpośrednio nad i bezpośrednio pod kwadratem będą oba zielone – a wtedy możemy kwadrat pomalować na czerwono.



Rys. 2



Rys. 3

Jeśli jednak TAK (rysunek 3), to zamiana kolorów w niczym nie pomoże – kwadrat będzie wciąż otoczony czterema barwami. W takim przypadku popatrzmy na niebieski kraj leżący bezpośrednio na prawo i żółty kraj leżący bezpośrednio na lewo od kwadratu. Niebieskie i żółte terytoria po prawej są teraz oddzielone od takich samych terytoriów po lewej, gdyż rozdziela je pierścień czerwono-zielony. Możemy zatem po prawej stronie zamienić niebieski z żółtym bez szkody dla strony lewej, a następnie pokolorować kwadrat na niebiesko.

Wreszcie gdy mamy do czynienia z pięciokątem, Kempe proponuje podobne rozumowanie, wymagające jednak tym razem dwukrotnej zamiany kolorów, w wyniku której pięciokąt okaże się otoczony tylko trzema barwami, a czwarta zostanie dla niego. Tak kończy się dowód twierdzenia o czterech barwach.

Przez 11 lat rozumowanie Kempego było powszechnie akceptowane, m.in. przez Cayleya, więc bomba podrzucona przez Percy'ego Heawooda w 1890 roku wywołała nie lada efekt. Heawood wskazał na fundamentalny błąd w pracy Kempego, wykazując, że nie zawsze można wykonać dwukrotną zamianę kolorów w przypadku pięciokąta. Udało mu się jednak uratować część rozumowania, wystarczającą do udowodnienia, że *każdą mapę można pokolorować pięcioma barwami* – wynik wciąż jeszcze imponujący.

Heawood próbował również uogólnić problem kolorowania na inne powierzchnie. Rzut stereograficzny sfery na płaszczyznę pozwala zauważyć, że kolorowanie map na sferze jest tym samym, co kolorowanie map na płaszczyźnie, ale jak wygląda sprawa z kolorowaniem

map na obwarzanku, czyli torusie? Tu magiczną okazała się liczba 7. Torusowa wersja wzoru wielościennego Eulera prowadzi do wniosku, że siedem barw wystarczy do pokolorowania dowolnej mapy na torusie, a jednocześnie Heawood podał przykład mapy, dla której konieczne jest użycie właśnie tylu kolorów.

Jeśli dopuścimy dziury w powierzchni (takie jak w preclu), to liczba niezbędnych barw wzrośnie. Jak udowodnił Heawood, do pokolorowania każdej mapy na obwarzanku z h dziurami (gdy $h > 1$) potrzeba N barw, przy czym

$$N = \left\lceil \frac{1}{2} \left(7 + \sqrt{1 + 48h} \right) \right\rceil,$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Heawoodowi nie udało się pokazać, że dla każdej powierzchni tego typu istnieje mapa, której nie można pokolorować mniejszą liczbą barw – ale to zajęło następne 78 lat. Okazało się, że dowód tej hipotezy Heawooda wymaga rozpatrzenia 12 zupełnie odmiennych przypadków.

Do 1967 roku niemiecki matematyk Gerhard Ringel i jego amerykański kolega Ted Youngs rozstrzygnęli większość z nich. Korzystając z rocznego urlopu, Ringel pojechał do Kalifornii i po kilku miesiącach wspólnej pracy z Youngsem uzupełnili dowód o brakujące przypadki.

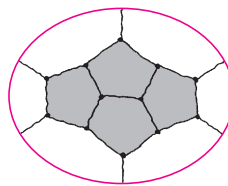
Gdy nieco później Ringel został zatrzymany na kalifornijskiej szosie za przekroczenie prędkości, policjant, spojrzawszy na jego prawo jazdy, zapytał: „Ringel, aha. To Pan jest tym, który rozstrzygnął hipotezę Heawooda?” Okazało się, że jego syn studiował w grupie, w której zajęcia prowadził Ted Youngs. Oczywiście Ringel odjechał bez mandatu, co dowodnie świadczy o przydatności problemu kolorowania map!

Tymczasem praca nad problemem czterech barw dawała efekty dość mierne. Choć trudno było naprawić błąd Kempego, można było jednak wydobyć z jego artykułu dwa pomysły, które miały okazać się przydatne w ostatecznym rozwiązaniu.

Pierwszy z nich to pojęcie *nieuniknionego zbioru konfiguracji*. Jak stwierdziliśmy wyżej, każda mapa zawiera figurę, która jest co najwyżej pięciokątem, zatem wymienione przy tej okazji konfiguracje (dwukąt, trójkąt, kwadrat, pięciokąt) stanowią przykład *nieuniknionego zbioru*: w każdej mapie jedna z nich musi wystąpić, nie można ich unikać. Z pierwszymi trzema umiemy sobie poradzić, trudność sprawia jedynie pięciokąt – spróbujmy więc zastąpić go czymś innym. Można wykazać, że każda mapa niezawierająca dwukąta, trójkąta ani kwadratu, zawiera nie tylko pięciokąt, ale również albo dwa sąsiadujące pięciokąty, albo pięciokąt sąsiadujący z sześciokątem. Mamy zatem nowy nieunikniony zbiór: dwukąt, trójkąt, kwadrat, dwa sąsiadujące pięciokąty, pięciokąt sąsiadujący z sześciokątem.

Widzieliśmy też, że dwukąt, trójkąt lub kwadrat jest konfiguracją *redukowalną*, co oznacza, że każde kolorowanie pozostałej części mapy czterema barwami można rozszerzyć tak, by objęło ono i tę konfigurację – czego nie umiemy zrobić z pięciokątem.

Jednak w 1913 roku amerykański matematyk George Birkhoff wykazał, że redukowalna jest także konfiguracja pokazana na rysunku 4 – co otworzyło drogę do odkrycia tysięcy dalszych redukowalnych konfiguracji.



Rys. 4

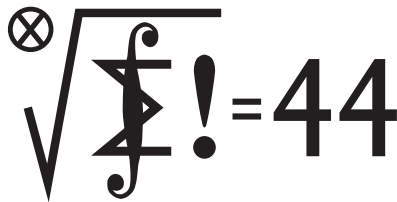
Widać zatem, że w celu udowodnienia, że cztery barwy wystarczą do pokolorowania każdej mapy, należy znaleźć nieunikniony zbiór konfiguracji redukowalnych, a więc taki zbiór konfiguracji, że każda mapa zawiera co najmniej jedną z nich – i ta, którą zawiera, jest redukowalna.

Przez pierwsze dwie trzecie XX wieku poszukiwano albo nieuniknionych zbiorów konfiguracji, albo konfiguracji redukowalnych. Pierwszym, który połączył te dwa pojęcia, był niemiecki matematyk Herman Heesch. Spędził on 40 lat na poszukiwaniach właśnie nieuniknionego zbioru redukowalnych konfiguracji. Wreszcie w 1976 roku pomysł Heescha został zrealizowany przez dwóch matematyków z Uniwersytetu stanu Illinois, Kennetha Apple’a i Wolfganga Hakena, wspomaganym w sprawach komputerowych przez studenta Johna Kocha. Po czterech latach poszukiwań z użyciem najpotężniejszych komputerów owego czasu znaleźli oni nieunikniony zbiór 1936 redukowalnych konfiguracji; po pewnym czasie udało im się go zmniejszyć do 1482 redukowalnych konfiguracji, a uzyskane rozwiązanie opublikowali w 1977 roku

Dowód wspomagany obliczeniami komputerowymi budził wówczas dużą podejrzliwość i rodził wiele filozoficznych pytań. Czy można uznać za poprawny dowód, którego nie możemy sprawdzić ręcznie, nawet jeśli udział komputera sprowadzał się do rutynowego zweryfikowania przypadków? Ale czy rzeczywiście powinniśmy pokładać wiarę w ręczny, ale niezmiernie długi dowód, powiedzmy, twierdzenia Feita–Thompsona o grupach rozwiązalnych, albo w dowód Wileasa dla Wielkiego Twierdzenia Fermata, gdzie możliwość ludzkiego błędu jest ogromna?

W latach 90. XX wieku czterech matematyków: Neil Robertson, Dan Sanders, Paul Seymour i Robin Thomas, przedstawiło bardziej strukturalny dowód twierdzenia o czterech barwach. Zastosowali oni podobne komputerowo wspomaganie podejście co Apple i Haken, ale objęło ono tylko 600 redukowalnych konfiguracji, które można sprawdzić na laptopie w ciągu kilku godzin. Większość matematyków chętnie przyjmuje ten dowód, nawet jeśli mieli wątpliwości wobec dowodu Apple’a–Hakena. Nie mamy jednak, jak dotąd, żadnego dowodu, który obywałby się całkowicie bez komputera.

Tłumaczył Wiktor BARTOL



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VIII 2004

UWAGA!

**ZMIANA ADRESU
DO KORESPONDENCJI!**

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 483, 484

Redaguje Marcin E. KUCZMA

483. Wykonujemy ciąg rzutów symetryczną monetą. Kończymy rzucanie, gdy po serii złożonej z nieparzystej liczby orłów pojawi się reszka. Obliczyć wartość oczekiwaną wykonanej liczby rzutów.

484. Dane są liczby naturalne m, n , przy czym $m \geq n$, oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, \dots, x_m spełniające warunki

$$1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m \geq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq n.$$

Udowodnić nierówność

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2.$$

Zadanie 482 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2004

475. Dane są liczby rzeczywiste a_1, a_2, \dots, a_n , nie wszystkie równe zeru. Wykazać, że równanie

$$\sqrt{1 + a_1 x} + \sqrt{1 + a_2 x} + \dots + \sqrt{1 + a_n x} = n$$

(z niewiadomą x) ma nie więcej niż dwa pierwiastki rzeczywiste.

475. Przekształcamy równanie do kolejno równoważnych postaci:

$$\sum_{i=1}^n (1 - \sqrt{1 + a_i x}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i x}{1 + \sqrt{1 + a_i x}} = 0;$$

$$(*) \quad x \sum_{i=1}^n f_i(x) = 0,$$

gdzie

$$f_i(x) = \frac{a_i}{1 + \sqrt{1 + a_i x}}.$$

Dziedziną funkcji f_i jest pewien przedział J_i (dziedziną równania jest wspólna część przedziałów J_i dla $i = 1, \dots, n$).

Niech $x, y \in J_i$ i niech $x < y$. Wówczas

$$\sqrt{1 + a_i x} - \sqrt{1 + a_i y} \begin{cases} < 0 & \text{gdy } a_i > 0, \\ > 0 & \text{gdy } a_i < 0; \end{cases}$$

$$f_i(x) - f_i(y) \begin{cases} > 0 & \text{gdy } a_i > 0, \\ > 0 & \text{gdy } a_i < 0; \end{cases}$$

a to znaczy, że dla $a_i \neq 0$ funkcja f_i jest ściśle malejąca.

Ponieważ nie wszystkie a_i są zerami, więc także suma $f_1 + \dots + f_n$ jest (w swojej dziedzinie) funkcją ściśle malejącą i może mieć co najwyżej jedno miejsce zerowe.

Równanie (*) ma zatem – oprócz pierwiastka $x_0 = 0$

– jeszcze co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przypominamy treść zadań:

476. Niech A_1, A_2, A_3, \dots będzie nieskończonym ciągiem zbiorów czteroelementowych, z których żadne dwa nie są rozłączne.

Udowodnić, że można znaleźć takie trzy elementy a, b, c , aby każdy ze zbiorów A_i zawierał co najmniej jeden z tych trzech elementów.

476. Prowadzimy dowód, przyjmując jako milczące założenie, że zbiory A_i są różne (żadne dwa nie są identyczne).

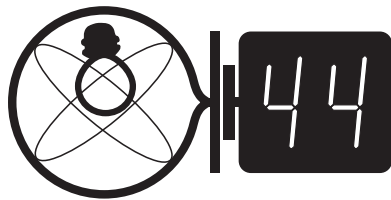
Zbiór A_1 ma wspólny element (elementy) z każdym innym zbiorem A_i ; istnieje więc element $a \in A_1$ należący do nieskończenie wielu zbiorów A_i . Jeśli a należy do wszystkich A_i , to mamy tezę (b i c mogą być wtedy wybrane dowolnie).

Założmy więc, że a nie należy do pewnego zbioru A_k .

Zbiór ten przecina wszystkie inne A_i , wobec czego pewien element $b \in A_k$ należy do nieskończenie wielu spośród tych zbiorów A_i , które zawierają element a (oczywiście $b \neq a$, skoro $a \notin A_k$). Jeżeli wszystkie zbiory A_i zawierają któryś z elementów a, b , to koniec dowodu (c można wybrać dowolnie).

Przyjmijmy w takim razie, że istnieje zbiór A_ℓ , nie zawierający a ani b . Jak poprzednio, pewien element $c \in A_\ell$ należy do nieskończenie wielu zbiorów A_i – takich, które już zawierają a oraz b (i znów: $c \neq a, c \neq b$, bo $a, b \notin A_\ell$).

Trójka $\{a, b, c\}$ jest wówczas tą, o którą chodzi w zadaniu. Gdyby bowiem istniał zbiór A_m , nie zawierający żadnego z elementów a, b, c , to pewien element $d \in A_m$ musiałby należeć do nieskończenie wielu spośród tych zbiorów A_i , które już zawierają całą trójkę $\{a, b, c\}$ ($d \neq a, b, c$). Zatem mielibyśmy nieskończenie wiele zbiorów A_i , identycznych ze zbiorem $\{a, b, c, d\}$, wbrew przyjętej interpretacji treści zadania.



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VIII 2004

UWAGA!

**ZMIANA ADRESU
DO KORESPONDENCJI!**

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
366 (WT = 1,05) i **367** (WT = 3,25)
z numeru 11/2003

Zbigniew Galias	– Kraków	42,38
Marian Łupieżowicz	– Gliwice	22,14
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	18,00
Tomasz Wietecha	– Tarnów	16,08
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	15,15

380. Dwie kulki upuszczono w odstępie czasu t z tej samej wysokości h . Kulki poruszają się wzdłuż prostej pionowej i zderzają się doskonale sprężyście, a dolna odbija się doskonale sprężyście od podłoża. Jeśli masa dolnej kulki wynosi 1, górnej – 0,7, a ich promienie są znacznie mniejsze od h , to jak wybrać t , aby górna kulka wzniosła się jak najwyżej

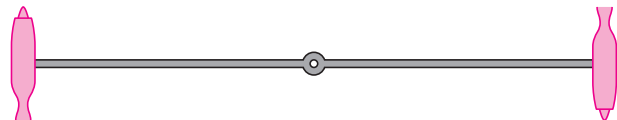
- po pierwszym zderzeniu z dolną kulką?
- po drugim zderzeniu z dolną kulką?
- po trzecim zderzeniu z dolną kulką?

Jaką maksymalną wysokość może osiągnąć górna kulka po dowolnej liczbie zderzeń? Odpowiedzi mogą opierać się na eksperymentach komputerowych (dotyczy to zwłaszcza ostatnich dwóch pytań).

381. Okres połowicznego rozpadu izotopu potasu ^{40}K wynosi $1,26 \cdot 10^9$ lat, przy czym z prawdopodobieństwem 11% następuje wychwyty elektronu i przemiana w ^{40}Ar . Zakładając, że w okresie powstawania Ziemi temperatura była tak wysoka, że gazy szlachetne „wyparowały” (uciekły w przestrzeń kosmiczną) i wiedząc, że obecnie stosunek liczby atomów ^{40}Ar na Ziemi do liczby atomów ^{40}K wynosi 0,9, ocenić wiek Ziemi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2004 Przypominamy treść zadań:

372. Wirnik pewnego silnika jest napędzany silnikami odrzutowymi umieszczonymi na końcach prętów promieniowych („szprych”), wzdłuż których biegają przewody doprowadzające paliwo poprzez oś wirnika.



Ktoś twierdzi, że moc zespołu (odprowadzana w osi, tzn. wirnik obraca jakies urządzenie) jest proporcjonalna do prędkości kątowej wirnika ω , gdyż obliczamy ją mnożąc siłę odrzutu (zależną tylko od tempa zużycia paliwa i prędkości wylotu gazów, ale nie od ω) przez prędkość silników. Zatem dla dowolnie dużych ω otrzymalibyśmy dowolnie dużą moc, co wobec ustalonego tempa zużycia paliwa

372. Błąd polega na tym, że pominięta została energia, jaką trzeba zużyć, aby nadać paliwu oraz powietrzu wchodzącemu do silnika prędkość równą prędkości silnika. Na paliwo płynące wzdłuż szprych działa siła Coriolisa, która hamuje obrót wirnika, a jej pokonanie pochłania część mocy silników. Podobna siła hamująca działa na wlot powietrza w silniku.

Aby obliczyć moc maksymalną, rozważmy najpierw silniki unieruchomione ($\omega = 0$). Wtedy energia pochodząca ze spalania paliwa przechodzi w energię kinetyczną wyrzucanych gazów, a na jednostkę czasu energia ta jest dana wzorem

$$P = \frac{1}{2} k \psi v^2.$$

Gdy silniki się poruszają, część tej energii jest odprowadzana jako moc mechaniczna zespołu, a pozostała część przechodzi w energię kinetyczną gazów. Oczywiście jest, że maksymalna moc jest dana właśnie powyższym wyrażeniem, a osiągnięta jest wtedy, gdy gazy wylotowe są nieruchome względem ziemi ($\omega = v/r$). Ten sam wynik otrzymamy, rozpatrując siły działające na wirnik (siłę odrzutu, siłę związaną z pobieraniem powietrza i siłę Coriolisa). Rachunki liczbowe dają wyniki

$$\omega = 320 \text{ rad/s},$$

$$P = 3,2 \text{ MW}.$$

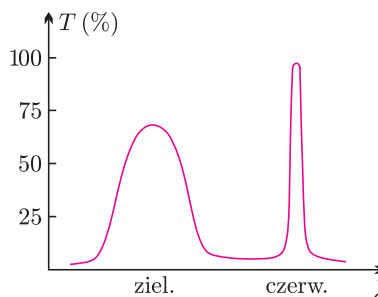
wydać się sprzeczne z zasadą zachowania energii. Wskazać błąd w tym rozumowaniu i obliczyć maksymalną moc zespołu.

Dane: długość szprych $r = 5$ m, tempo zużycia paliwa przez silniki $\psi = 0,5$ kg/s, stosunek masy wyrzucanych gazów do masy paliwa $k = 5$ (pozostała masa to pobierane powietrze), prędkość wylotowa gazów względem silnika $v = 1600$ m/s.

Przy jakiej prędkości kątowej wirnika ω osiągnięta jest maksymalna moc?

373. Po przejściu przez pewien filtr światło białe uzyskuje barwę zieloną. Gdy jednak przepuścić światło białe kolejno przez dużą liczbę takich filtrów, przechodzące światło okazuje się czerwone (jego natężenie jest wtedy bardzo małe). Jak to możliwe?

373. Przyjmijmy, że zależność współczynnika transmisji filtru od długości fali jest opisana wykresem podanym na rysunku.



Ponieważ „okno” w zakresie czerwieni jest bardzo wąskie, więc udział czerwieni w świetle przechodzącym jest mały i przeważa zieleń. Zauważmy jednak, że w tym wąskim zakresie światło czerwone przechodzi przez filtr prawie w całości, a więc złożenie większej liczby filtrów nie zmieni natężenia tej składowej. Światło zielone jest natomiast w znaczącej części pochłaniane i każdy kolejny filtr zmniejsza jego natężenie. Przy odpowiednio dużej liczbie filtrów czerwien zacznie przeważać.

Patrz w niebo

Dokładność pozycyjnych pomiarów prowadzonych z powierzchni Ziemi jest rzędu $0'',01$ – mniejszych kątów nie daje się mierzyć wskutek zakłóceń wprowadzanych przez ziemską atmosferę. Przesunięcie gwiazdy o taki kąt w odległości Słońce-centrum Galaktyki (czyli 8,5 kpc) odpowiadałoby przebyciu przez gwiazdę drogi równej co do rzędu wielkości 0,001 pc. Gdyby droga ta miała być przebyta w ciągu roku, to gwiazda musiałaby poruszać się z prędkością rzędu 1000 km/s. Otóż takie w przybliżeniu prędkości obserwuje się u gwiazd położonych w kątowej odległości $0',1$ od centrum Galaktyki, które wyznacza radioźródło Sagittarius A*. Wobec tego odległość ta to 0,01 pc, czyli 3×10^{14} m. Z braku innych pomysłów można przyjąć, że obserwowane prędkości odpowiadają kołowej prędkości orbitalnej gwiazd obiegających centralny obiekt naszej Galaktyki. Skoro prędkość ta, tj. „pierwsza prędkość kosmiczna”, wynosi $v = \sqrt{GM/r}$, gdzie oczywiście G oznacza stałą grawitacji, a $r = 0,01$ pc, to masę M centralnego obiektu oceniamy na 2 mln mas Słońca.

Rzecz jasna, wynik dostaliśmy mocno przybliżony, jednak jeżeli nawet odbiega on od rzeczywistości o jakies rzędy wielkości, to wniosek pozostaje jeden: w centrum Galaktyki musi znajdować się coś o masie gromady kulistej, ale dużo mniejsze, a więc najprawdopodobniej czarna dziura. Najważniejsze, że świadczą o tym proste obserwacje pozycyjne i proste zjawisko mechaniczne. Grupa astronomów z University of California w Los Angeles pod koniec XX wieku obserwowała przez kilka lat, za pomocą 10 metrowego teleskopu Kecka na Hawajach, ruch kilku gwiazd w pobliżu centrum Galaktyki, otrzymując wspomniane wyniki. Na podstawie położenia tych gwiazd, wyznaczonych w ciągu zaledwie kilku lat, nie da się dokładnie określić ich orbit, nie jest to jednak istotne, bo masa obiektu centralnego niewiele od tego zależy. Zdumiewające jest tu jedno, że mianowicie daje się śledzić ruch kilku wybranych gwiazd w obszarze nieba, gdzie gęstość gwiazd sięga milionów na stopień kwadratowy.

Tomasz KWAST

Czerwiec

Wenus jest wraz ze Słońcem w Byku, więc jej nie widać – chyba że na tle Słońca! I właśnie 8 VI nastąpi jej przejście przed Słońcem: zjawisko zacznie się o godz. 7:14 i trwać będzie do 13:26 czasu letniego. Oby nie było chmur! Wenus w postaci czarnej kropki może być dostrzeżona bez pomocy przyrządów optycznych. Będzie przesuwać się od lewej do prawej krawędzi tarczy Słońca. Oczywiście potrzebny jest jakiś filtr osłabiający blask Słońca, choćby zwykłe okopcone szkło. Nie jest to najlepsze rozwiązanie, bo warstwę sadzy łatwo jest uszkodzić przez byle dotknięcie, w dodatku szkło powinno być w miarę równe, podczas gdy zwykła szyba jest zazwyczaj wyraźnie falista. Zamiast szkła można wykorzystać dowolny zaczerniony film fotograficzny. Szczególną ostrożność należy zachować przy obserwacjach Słońca z użyciem przyrządów – filtr musi być gęstszy i tak zamocowany, by nawet błysk światła słonecznego nie dostał się przez teleskop do oka. Grozi to bowiem trwałym upośledzeniem lub utratą wzroku!

Najmniejsza odległość Wenus od Ziemi jest równa różnicy promieni orbit tych planet, czyli w przybliżeniu 0,3 j.a. = 45 mln km. Z takiej odległości Wenus (zbliżona rozmiarami do Ziemi) ma średnicę kątową rzędu $1'$, a więc w zasadzie może być dostrzeżona gołym okiem, właśnie jako czarna kropka. Nawet w małym teleskopie Wenus będzie widoczna jako czarna tarczka i można pokusić się o powtórzenie obserwacji Łomonosowa. On mianowicie jako pierwszy zauważył (w 1761) wokół tarczy planety – zanim w całości znalazła się na tle Słońca – cienką jasną otoczkę.

Zinterpretował to, i słusznie, jako skutek obecności atmosfery u Wenus.

Wydawało by się, że skoro planety obiegają Słońce w przybliżeniu w jednej płaszczyźnie, to przejścia Merkurego i Wenus przed Słońcem (tj. tranzyty – słowo to spotyka się coraz częściej) nie powinny być niczym osobliwym. Rzecz jednak w tym „przybliżeniu”. Cała geometria orbit planet (czyli rozmiary i nachylenia) dowodzi, że tranzyt Merkurego rzeczywiście zdarza się przynajmniej raz w dziesięcioleciu. Ale Wenus ma orbitę znacznie obszerniejszą, przez co jej tranzyt jest już zjawiskiem raczej rzadkim. Prawdopodobnie jest taka, że zachodzą dwa tranzyty w odstępie 8 lat, po czym następny po ponad stu latach. Po tegorocznym tranzycie Wenus następny będzie w roku 2012, a potem dopiero w 2117 itd. W XX wieku Wenus ani razu nie przeszła przed Słońcem. Zjawiska tego rodzaju stwarzają możliwość niezwykle dokładnego zarejestrowania momentów zetknięcia się tarczy planety z tarczą Słońca, co jest istotne w kontrolowaniu naszej znajomości mechaniki Układu Słonecznego.

A poza tym wszystkim to w czerwcu Mars jest na granicy Bliźniąt i Raka, a Saturn w Bliźniątach i obie te planety wieczorem już zachodzą. Praktycznie jedynie Jowisz, który jest w Lwie, jest dobrze widoczny krótko po zachodzie Słońca. Pełnia Księżyca wypada 3 VI, a nów 17 VI. Żadnych jasnych gwiazd Księżyc w czerwcu nie zakrywa. 21 VI Słońce wchodzi w znak Raka, zaczyna się więc astronomiczne lato. Miłych wakacji!

T. K.

Jest nam bardzo miło powitać Państwa w nowym kąciku na przedostatniej stronie *Delty*. Redakcja postanowiła zmienić nieco zawartość tej części pisma i tak oto przypadł nam zaszczyt opowiadania Państwu o biologii.

Bardzo luźna koncepcja tej kolumny zakłada, że będzie ona zawierać to, co „o biologii każdy wiedzieć powinien”. Liczymy na to, że nasza wizja tego, co Czytelnicy powinni wiedzieć o biologii, będzie na bieżąco modyfikowana przez Czytelników. Zatem zachęcamy do dzielenia się z nami wszelkimi komentarzami związanymi z poszczególnymi odcinkami, a także propozycjami kolejnych tematów. Listy – wyłącznie elektroniczne – prosimy wysyłać pod adresem podanym w stopce.

Dziś i jutro biologii: jak nie utonąć w morzu informacji?

Zawartość GenBanku, bazy danych, w której deponuje się poznane sekwencje DNA, w ciągu ostatnich 12 lat urosła ze 100 milionów do ponad 28 miliardów par zasad. Poznanie całej sekwencji DNA bakterii (kilka milionów par zasad) zajmuje dziś jeden dzień; w przypadku bardziej skomplikowanych genomów (do 3 miliardów par zasad – tyle liczy genom człowieka) zajmuje to od kilku do kilkunastu miesięcy. Proces sekwencjonowania zautomatyzowano – najnowsze maszyny potrafią przeprowadzać ponad 4500 reakcji na dobę (ograniczenia chemiczne reakcji pozwalają poznać na raz najwyżej 800 nukleotydów). Można w tej chwili losowo pociąć ogromny genom na fragmenty tej wielkości i dzięki odpowiedniemu oprogramowaniu ułożyć właściwą sekwencję z milionów krótkich odcinków.

Sama sekwencja, nawet z odnalezionymi w niej genami, to zaledwie początek drogi. W tej chwili liczbę genów człowieka szacuje się na 30–40 tysięcy. Liczba białek jest prawdopodobnie wielokrotnością tej liczby, ponieważ produkt genu może ulegać licznym modyfikacjom – od różnych wariantów „startu” tego samego genu w DNA po przyłączanie cukrów do gotowego białka. Odcinek DNA kodujący pewną sekwencję aminokwasową może dać w ten sposób początek kilku, czy nawet kilkuset wariantom białka, różniących się funkcją, lokalizacją w komórce i aktywnością.

Jednak o tym, jak organizm wygląda i zachowuje się, decyduje nie to, jakie posiada geny, ale przede wszystkim to, które z nich, w jakich komórkach i warunkach uruchamia. Biolodzy dysponują specjalnymi mikroukładami DNA, w których na powierzchni cała kwadratowego zmieszczono sondy pozwalające wykryć aktywność każdego ze znanych genów organizmu (np. drożdży lub człowieka). Porównanie aktywności genów

różnych komórek pozwala wyodrębnić grupę genów, wśród których znajdują się odpowiedzialne za różnice między tymi komórkami. Bada się w ten sposób między innymi reakcję komórek na leki i procesy nowotworowe, szuka genów odpowiedzialnych za różnice międzygatunkowe.

Biolodzy potrafią również na dużą skalę analizować białka. Można rozdzielić na specjalnym żelu niemal wszystkie (kilka tysięcy!) białka mikroorganizmu, a następnie ustalić ich sekwencję aminokwasową za pomocą spektrometrii masowej. W ten sposób, na przykład, spośród około ośmiu tysięcy białek aktywnych w mózgu szympansa i człowieka wyłuskano kilka, które – być może – odpowiadają za różnice między tymi mózgiem.

Wreszcie – prowadzi się badania oddziaływań między białkami oraz między białkami i DNA. Nasze około 300 tysięcy białek tworzy dynamiczny układ, w którym każdy element może wpływać na pewną liczbę pozostałych elementów, a na wiele z nich oddziałuje środowisko. Często trudno przyczynę obserwowanych zjawisk odróżnić od skutku. Wielowymiarową sieć zależności można rozplątywać po kolei – badać, jak białko A oddziałuje z białkiem B, białko B z C, C z D i tak dalej – parami. Nawet przy automatyzacji prac laboratoryjnych, użyciu robotów do klonowania itp. to iście syzyfowa praca, ale dla prostych organizmów, jak drożdże (około 6 tysięcy białek, teoretycznie 36 milionów kombinacji) dzięki tym sposobom systematycznie poznajemy mapę ich oddziaływań, choć do zakończenia prac jeszcze daleko.

Do poznania funkcji badanych genów przydaje się jeszcze jeden sposób. Otóż można dziś stosunkowo prosto wyłączyć dowolny gen w prostym organizmie (jak bakteria, drożdże czy nicień) i sprawdzać, co się dzieje. Część genów na pewno okaże się bardzo istotna do życia danego organizmu – będzie to, na przykład, gen kodujący białko biorące udział w podstawowych procesach metabolicznych komórki lub też gen uczestniczący w rozwoju organizmu. Niektóre geny okażą się istotne tylko w pewnych warunkach środowiska – kiedy kodowane przez nie białka pozwalają np. zneutralizować truciznę dodaną do pożywki. Obecnie trwają projekty wyłączania wszystkich genów (po jednym) drożdży i nicienia (około 19 tysięcy genów). Połączenie tych analiz z mikroukładami DNA czy metodami badań oddziaływań białek daje potężne narzędzie poznawania funkcji genów, ich produktów i funkcjonowania organizmów.

Projekty sekwencjonowania rozpoczęły w biologii epokę, w której na szalkach zamiast podpisu mazakiem umieszcza się kod kreskowy, a problemem staje się nie tyle uzyskanie danych, co ich analiza. Za miesiąc postaramy się pokazać, co taka biologia może przynieść ciekawego.

Anna LORENC, Jarek BRYK