

SPIS TREŚCI NUMERU 5 (360)

Magiczne liczby foremne
Jan M. Aarts

Testy dla liczb pierwszych
o czasie wielomianowym
Ian Stewart

Czy w Unii Europejskiej
mówiono po polsku?
J. Miró, F. Rosselló

Zadania

Planetarium w Kopenhadze
Mogens Niss

Mała Delta: Europejskie
zakupy ze zniżką
Giorgio Busoni

Na ile obszarów krzywa
algebraiczna może dzielić
płaszczyznę?
Themistocles M. Rassias

Przekątna Cantora
Michel Mendès France

Aktualności

Klub 44

Patrz w niebo

Maj

Gammalimatias

Swoich przyjaciół do współpracy
zaprosili:

*Wiktor Bartol,
Krzysztof Ciesielski,
Zbigniew Marciniak,
Damian Niwiński,
Andrzej Palczewski.*

W następnym numerze:

O kolorowaniu map

- „Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.
- str. 1 Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichoński,
Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej
Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński,
Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski,
Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski,
str. 2 Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.
- Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga,
Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński,
Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik,
str. 4 Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nacz.
- Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski
- str. 6 Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”,
ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL
- Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja.
- str. 7 Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

- 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
- str. 8 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena
jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
okresu prenumeraty.
- W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
str.10 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
- Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
- Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
„RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty +
rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane
od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
- Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto:
Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela
„RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana
Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax:
5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
- | | | |
|----------|----------|--------------------------|
| do 5 XII | – na I | kwartał roku następnego, |
| do 5 III | – na II | kwartał roku bieżącego, |
| do 5 VI | – na III | kwartał roku bieżącego, |
| do 5 IX | – na IV | kwartał roku bieżącego. |

Numerzy archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

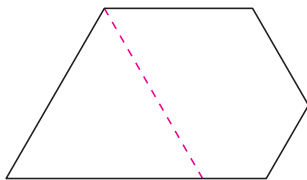
Cena 1 egzemplarza 4 zł

Magiczne liczby foremne

Jan M. AARTS, Holandia

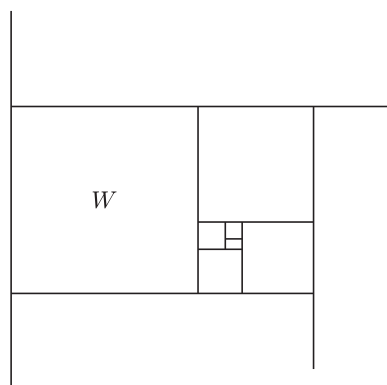


Rys. 1



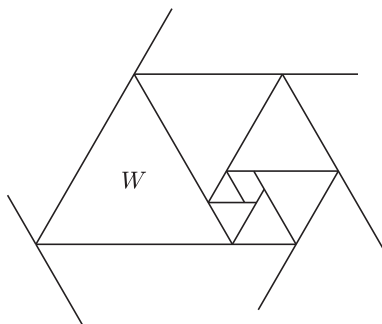
Rys. 2

W czasach nowożytnych francuski architekt Le Corbusier postulował użycie geometrycznej skali opartej na złotej liczbie w projektach architektonicznych.



Rys. 3

Bardziej ogólnie mówimy, że wielokąt W jest **gnomonem** wielokąta V (z którym nie ma wspólnych punktów wewnętrznych), jeśli $W \cup V$ jest wielokątem podobnym do V .



Rys. 4

Hans van der Laan (1904–1991) urodził się w rodzinie holenderskich architektów. W roku 1923 rozpoczął studia architektoniczne na Politechnice w Delft, by po dwóch latach je porzucić i zostać mnichem w zakonie benedyktynów. Odtąd poświęcał swe życie Bogu i architekturze. Kluczową rolę w jego pracach odegrała tzw. **liczba plastyczna** $p = 1,324\dots$ – pierwiastek równania $1 + x = x^3$. Liczba ta to podstawa przenikającej wszystko geometrycznej skali miar $\dots, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2, \dots$. Porównanie skali geometrycznej ze skalą arytmetyczną wyznaczoną przez liczby naturalne prowadzi do równań, w których k i l to pewne liczby naturalne, x zaś jest niewiadomą liczbą rzeczywistą

$$(1) \quad x > 1, \quad x + 1 = x^k, \quad x - 1 = x^{-l}.$$

Liczba rzeczywista x , spełniająca (1) dla pewnych k i l , zwana jest **liczbą foremną**. Łatwo zauważyć, że liczba plastyczna p jest rozwiązaniem (1) dla $k = 3$ oraz $l = 4$, zachodzi bowiem równość

$$x^5 - x^4 - 1 = (x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1).$$

Liczba φ (**złota liczba** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$) spełnia z kolei równość (1) dla $k = 2$ oraz $l = 1$. Holenderski inżynier Kruijtzter podejrzewał, że φ oraz p to jedyne rozwiązania (1), co okazało się prawdą.

Dowód (J.M. Aarts, R. Fokkink, G. Kruijtzter) jest zbyt skomplikowany, by można go było tu zamieścić. Opiera się na wynikach dwóch matematyków z uniwersytetu w Bergen w Norwegii: Selmer udowodnił, że trójmian $x^n - x - 1$ dla $n \geq 3$ jest nierozkładalny, natomiast Tverberg wykazał m.in., że trójmiany $x^m - x^{m-1} - 1$ są dla $m \geq 3$ albo nierozkładalne, albo są iloczynami wielomianu nierozkładalnego i trójmianu $x^2 - x + 1$. (Podobne zagadnienie było tematem zadania 3 Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej w 2002 r.)

Jest wiele podobieństw między liczbą φ oraz liczbą plastyczną p . Złoty prostokąt (czyli prostokąt o bokach 1 oraz φ) ma następującą interesującą własność: jeśli odetniemy od niego kwadrat o boku 1, to pozostanie prostokąt podobny do wyjściowego, zmniejszony o czynnik φ (rys. 1).

Dlatego Gazalé nazywa kwadrat **gnomonem** złotego prostokąta. Srebrny pięciokąt to pięciokąt, którego boki mają długość $1, p, p^2, p^3, p^4$ i którego kąty pomiędzy kolejnymi bokami są równe odpowiednio 120, 120, 120, 60 i 120 stopni. Srebrny pięciokąt ma interesującą własność podobną do opisanej wyżej własności złotego prostokąta: jeśli zostanie z niego wycięty trójkąt równoboczny o boku długości p^3 , to pozostała część będzie podobna do pięciokąta wyjściowego w skali $1/p$ (rys. 2). W ten sposób trójkąt równoboczny jest gnomonem srebrnego pięciokąta. Gazalé podejrzewał, że jeśli wielokąt foremny W jest gnomonem wielokąta V , to albo V jest złotym prostokątem, a W kwadratem, albo V jest srebrnym pięciokątem, a W trójkątem. Oto magia liczb foremnych! Przypuszczenie okazało się słuszne (J. Aarts, R. Fokkink), choć przydałby się pewnie prostszy dowód. Dotychczasowy oparty jest na następującym pomysle. Przypuśćmy, że wielokąt foremny W jest gnomonem wielokąta V . Niech $f : W \cup V \rightarrow V$ będzie podobieństwem (złożeniem translacji, obrotu i jednokładności), które dowodzi, że W jest gnomonem V . Podobieństwo f jest zdefiniowane na całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 i ma punkt stały, powiedzmy punkt q . Wtedy $\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$ jest sumą zbiorów $\{f^n(W) : n \in \mathbb{Z}\}$, tworzących swoisty „parkiet” dla $\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$ (rys. 3 i 4). Wykonując odpowiednie przekształcenia można uzyskać stąd okresowe pokrycie całej płaszczyzny i korzystając z pewnych standardowych w gruncie rzeczy metod można w końcu wykazać, że możliwe są tylko dwa przypadki: jeden odpowiadający złotemu prostokątowi, drugi – srebrnemu pięciokątowi.

Tłumaczył Witold SADOWSKI

Testy dla liczb pierwszych o czasie wielomianowym

Ian STEWART,
Wielka Brytania

W roku 1801 Carl Friedrich Gauss stwierdził (w 329. artykule *Disquisitiones Arithmeticae*), że „problemy odróżniania liczb pierwszych od złożonych i rozkład tych ostatnich na czynniki pierwsze są uznane za jedne z najważniejszych i najbardziej użytecznych w arytmetyce”. Do roku 2001 te same problemy, dzięki wynalazkowi kryptosystemów opartych na faktoryzacji liczb pierwszych, okazały się kluczowe dla rynku w Internecie. Wydaje się zadziwiające, że coś nowego da się powiedzieć o parze tak starożytnych i tak długo badanych problemów. Tymczasem nowe odkrycia piętrzą się! Najnowsze z nich – algorytm, który w czasie wielomianowym rozstrzyga, czy dana liczba jest pierwsza – ma wyjątkowe znaczenie. Autorami tego algorytmu są: Manindra Agrawal, Neeraj Kayal i Nintin Saxena z Politechniki w Kanpur w Indiach.

Powszechnie znany jest fakt, że z dwóch problemów wymienionych przez Gaussa sprawdzanie, czy dana liczba jest pierwsza, jest znacznie łatwiejsze niż rozkład liczby złożonej na czynniki. Najbardziej naturalnym testem, czy dana liczba jest pierwsza, jest próbowanie podzielności przez kolejne możliwe czynniki, co daje wrażenie, że testowanie, czy liczba jest pierwsza, musi opierać się na faktoryzacji. Wydaje się przy tym też, że liczba operacji matematycznych, potrzebnych do przetestowania liczby, wynosi około $10^{n/2}$ dla n -cyfrowej liczby N . Oznacza to, że potrzeba około \sqrt{N} kroków do przetestowania wszystkich możliwych dzielników liczby N , gdyż tylko liczba 2 i liczby (nieparzyste) aż do \sqrt{N} muszą być brane pod uwagę. Ale oba te wrażenia są błędne.

Po pierwsze, jest wiele testów, które dają odpowiedź „tak” lub „nie”, bez znajdowania jakiegokolwiek dzielnika, jeśli odpowiedź brzmi „nie”. Klasyczny taki test opiera się na twierdzeniu Wilsona: N jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy N dzieli liczbę $(N - 1)! + 1$. Test ten nie jest jednak zbyt praktyczny: jeśli N ma 100 cyfr, to obliczenia wymagają pomnożenia 10^{100} liczb. Istnieją jednak także wydajne testy. Wiele z nich wywodzi się z małego twierdzenia Fermata: jeśli p jest liczbą pierwszą i a nie jest wielokrotnością p , to

$$(1) \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Jest szybki sposób na to, by obliczyć $a^{p-1} \pmod{p}$, oparty na powtarzaniu podnoszenia do kwadratu i używaniu dwójkowego rozwinięcia liczby $p - 1$. Na przykład, aby obliczyć $2^{22} \pmod{23}$, obliczamy (zawsze modulo 23) liczby

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^4 \equiv 16 \equiv -7, \quad 2^8 \equiv 49 \equiv 3, \quad 2^{16} \equiv 9.$$

Mamy zatem

$$2^{22} \equiv 2^{16} \cdot 2^4 \cdot 2^2 \equiv 9 \cdot (-7) \cdot 4 \equiv (-17) \cdot 4 \equiv 1,$$

jak tego zresztą oczekiwaliśmy, skoro 23 jest liczbą pierwszą.

Pozytywny wynik testu Fermata jest warunkiem koniecznym tego, by dana liczba była pierwsza, ale nie jest wystarczające. Wiele liczb p , znanych jako liczby Carmichaela, spełnia (1) dla wszystkich a niepodzielnych przez p . Najmniejsza z nich to $p = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Alford, Granville i Pomerance udowodnili, że jest ich nieskończenie wiele. Jednak bardziej wyrafinowane warianty testu Fermata naprawdę weryfikują, czy dana liczba jest pierwsza. Do niedawna najbardziej wydajny był test APR (Adelman–Pomerance–Rumely), którego czas działania był rzędu $(\log N)^{\log \log \log N}$.

Z grubsza biorąc, są dwa rodzaje algorytmów. Wydajne są klasy P , co oznacza, że działają w czasie wielomianowym. Oznacza to, iż dla danych na wejściu N bitów uzyskują odpowiedź po wykonaniu co najwyżej kN^r kroków, gdzie k i r są stałymi. Nieefektywne algorytmy są klasy nie- P i wykonywane są w czasie gorszym niż wielomianowy, przy czym bardzo niewydajne pracują w czasie wykładniczym kr^N lub dłuższym.

Do 2001 roku było wiadomo, że sprawdzanie, czy liczba jest pierwsza może być wykonane w czasie niewiele dłuższym od wielomianowego, tak że w przypadku



Rozwiązanie zadania F 619.

Wysokie ciśnienie lepiej zniszczy gumowy balonik. Jest on elastyczny, więc powiększające się ciśnienie na zewnątrz spowoduje tylko niewielką zmianę objętości wody w środku, ale siły działające na jego powłokę będą się równoważyć. Teoretycznie może on zanurzyć się na dowolnie dużą głębokość.

W wypadku puszki ciśnienie wewnątrz pozostaje podczas zanurzania bez zmian, a ciśnienie na zewnątrz rośnie. Póki siły sprężystości stali równoważą powstałe naprężenie, puszka utrzyma swój kształt, jednak w pewnym momencie zostanie ona zgnieciona.

liczby 200-cyfrowej można to było zupełnie swobodnie wykonać na zwykłym, dobrym komputerze. Z drugiej strony, wydawało się, że rozłożenie na czynniki pierwsze liczby 200-cyfrowej nawet przy użyciu najlepszych metod zajęłoby czas, jaki upłynął od zarania ludzkiej cywilizacji. Jednak nie było i nadal nie ma teoretycznej gwarancji, że faktoryzacja liczby to problem klasy nie- P . Choć więc sądzi się powszechnie, że nie istnieje żaden algorytm faktoryzacji działający w czasie wielomianowym, to może jest inaczej, a my po prostu nie jesteśmy wystarczająco sprytni, żeby go odkryć. Pod koniec roku 2001 nie istniał przecież żaden algorytm sprawdzania, czy dana liczba jest pierwsza, działający w czasie wielomianowym, a tymczasem w 2002 roku już się taki pojawił wraz z wkroczeniem do akcji wspomnianych matematyków indyjskich. Wymyślili oni mianowicie nowy wariant testu Fermata. Zamiast pracować z liczbami, zajęli się wielomianami jednej zmiennej. Punktem wyjścia ich rozważań był fakt, że gdy x to niewiadoma, a p to liczba pierwsza, która nie dzieli liczby całkowitej a , to

$$(x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{p}.$$

Testowanie tej kongruencji nie prowadzi jeszcze do wielomianowego czasu działania algorytmu. Zamiast tego algorytm testuje powyższą nierówność modulo różne proste wielomiany, które dla wygody przyjmuje się w postaci $x^r - 1$ dla pewnego całkowitego r . Jedna iteracja algorytmu sprawdza, czy zachodzą jednocześnie kongruencje

$$(2) \quad \begin{cases} (x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{x^r - 1} \\ (x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{p}. \end{cases}$$

Kongruencje są spełnione dla wszystkich liczb pierwszych p . Dla danego a i r także przez niektóre liczby złożone, ale żadna liczba złożona nie spełnia powyższej kongruencji dla wszystkich a i r . Trik polega więc na tym, by utrzymać złożoność obliczeniową algorytmu, zapewniając jednocześnie, że żadna liczba złożona nie prześlizgnie się przez zastawioną sieć.

Test (2) może być przeprowadzony w czasie rzędu $r^2 \log^3 p$, przy użyciu powtarzalnego podnoszenia do kwadratu lub w czasie $r \log^2 p$, gdy użyjemy szybkiego mnożenia Fouriera. Jest to zatem czas wielomianowy. Zaczynamy od wybrania odpowiedniego r ; powinna to być liczba pierwsza rzędu $\log^6 p$, a $r - 1$ musi mieć dzielnik pierwszy wielkości co najmniej $r^{1/2+d}$ dla pewnego $d > 0$. Takie r istnieje (Fouvry, Baker, Harman). Następnie algorytm sprawdza kongruencje (2) dla małej liczby kandydatów na a (ta mała liczba jest rzędu $r \log p$). I – jak dowiódł zespół hinduskich matematyków – algorytm ten rozstrzyga pierwszość liczby N w czasie rzędu $\log^{12} N$, co jest czasem wielomianowym (oszacowanie to zostało jeszcze poprawione).

Istnienie algorytmu rozstrzygającego w czasie wielomianowym to, czy dana liczba jest pierwsza, zmienia nasze myślenie o całym zagadnieniu. Ale metody tu rozwinięte zdają się nic nie podpowiadać, jak rozwiązać drugi z problemów Gaussa – faktoryzację. Czy istnieje algorytm klasy P znajdujący dzielniki liczby złożonej? Większość ekspertów myśli, że nie, ale teraz nie są już tego tak pewni, jak dotychczas.

Tłumaczył Witold SADOWSKI



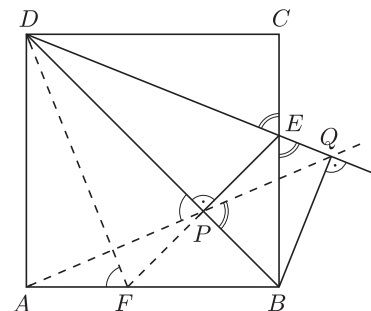
Rozwiązanie zadania M 1060.

Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu E względem prostej DB . Wówczas punkt F leży na odcinku AB i $AF = CE$. Zatem trójkąty AFD i CEB są przystające. Ponieważ

$$\sphericalangle EPB + \sphericalangle EQB = 180^\circ,$$

więc punkty P, E, Q, B leżą na jednym okręgu. Analogicznie stwierdzamy, że punkty A, F, P, D leżą na jednym okręgu. Zatem

$\sphericalangle APD = \sphericalangle AFD = \sphericalangle CED = \sphericalangle BEQ = \sphericalangle BPQ$, skąd wynika, że punkty A, P i Q leżą na jednej prostej.



Czy w Unii Europejskiej mówiono po polsku?

J. MIRÓ, F. ROSSELLÓ, Hiszpania

Niejednego z odwiedzających nas polskich przyjaciół zaskakują graffiti z tekstami w rodzaju *Polacos, esto es España*. (*Polacy, tu jest Hiszpania*.) A kiedy wyjaśniamy im, że ludzie mówiący po katalońsku nierzadko spotykają się z ostrą reprimendą *¡Usted no me hable a mí en polaco!* (*Proszę do mnie nie mówić po polsku!*), przestają cokolwiek rozumieć.

Chodzi o to, że na ogromnym obszarze nad brzegiem Morza Śródziemnego, ogarniającym wschód Hiszpanii i południe Francji, mówimy nie tylko w języku hiszpańskim lub francuskim, ale także w innym języku romańskim, jakim jest kataloński. Często w historii było to powodem pogardliwych żartów ze strony mieszkańców centralnej Hiszpanii, a jednym z typowych żartów jest oskarżenie nas o mówienie... po polsku. Widać ktoś kiedyś uznał język kataloński, znacznie bogatszy w dźwięki od hiszpańskiego, za coś równie dziwnego i trudnego jak język polski.

Można się zastanawiać, czy istnieją podstawy naukowe do tego porównania. Czy kataloński jest rzeczywiście podobny do polskiego? Oczywiście nie, ale można pytać dalej, bardziej realistycznie: czy kataloński jest podobny do polskiego **bardziej** niż hiszpański? Pytanie to może okazać się interesujące dla Czytelników *Delta* nie tylko z powodu ich ojczystego języka, lecz także dlatego, że pozwala wyjaśnić pewne matematyczne narzędzie, bardzo modne w dzisiejszych czasach genomiki.

Poszukując na nie odpowiedzi, porównaliśmy zbiór polskich słów z ich odpowiednikami w językach katalońskim i hiszpańskim. A że mamy do czynienia ze słowami, użyliśmy pojęcia **odległości edycyjnej**, wprowadzonej przez V.I. Levenshteina w 1966 roku. Mając dwa słowa, staramy się przekształcić jedno w drugie za pomocą operacji edycyjnych: wstawienia lub usunięcia litery, lub zastąpienia jednej litery przez inną. Każdej takiej operacji przypisujemy pewien koszt i szukamy przekształcenia, dla którego koszt jest najmniejszy. Ów najmniejszy koszt jest odległością edycyjną danych dwóch słów.

Takie ciągi operacji edycyjnych reprezentuje się zazwyczaj poprzez uliniowienia. **Uliniowieniem** dwóch słów $X = x_1x_2 \dots x_n$ i $Y = y_1y_2 \dots y_m$ jest dwuwierszowa macierz, taka że w górnym wierszu występują kolejne litery X poprzątkane spacjami, w dolnym wierszu zaś litery słowa Y , także, być może, ze spacjami; żądamy jedynie, by żadna kolumna nie składała się wyłącznie ze spacji. Wystąpienie w jednej kolumnie litery x_i ze słowa X i litery y_j ze słowa Y oznacza zastąpienie x_i przez y_j ; kolumna zawierająca w górnym wierszu x_i i w dolnym spację reprezentuje usunięcie x_i , natomiast kolumna z literą y_j w dolnym wierszu i spacją w górnym oznacza wstawienie litery y_j .

Levenshtein nie zaproponował żadnego algorytmu obliczającego odległość edycyjną, lecz lukę tę prędko wypełnili inni autorzy. Wszystkie opisane przez nich algorytmy są dość podobne. Jeden z pierwszych, służący do porównywania białek (patrz *Delta* 10/2002), podali S.B. Needleman i C.D. Wunsch w 1970 roku. Była to jedna z pierwszych prac z biologii obliczeniowej, teoretycznej gałęzi bioinformatyki. Do porównania słów użyliśmy uproszczonej wersji tego algorytmu, opracowanej w 1974 roku przez P.H. Sellersa dla szczególnego przypadku, gdy koszt wstawienia i usunięcia litery jest stały.

Rozpatrujemy słowa nad pewnym ustalonym alfabetem Σ .

Określimy **macierz kosztu**

$$(\sigma(a, b))_{a, b \in \Sigma},$$

w której $\sigma(a, b)$ reprezentuje koszt zamiany litery a na b . Zakładamy, że $\sigma(a, b) = \sigma(b, a)$ oraz $\sigma(a, b) = 0$, gdy $a = b$. Przyjmujemy ponadto stały koszt γ wstawienia lub usunięcia litery. Tak więc koszt uliniowienia dwóch słów

$X = x_1 \dots x_n$ i $Y = y_1 \dots y_m$ powstaje przez dodanie wszystkich wartości $\sigma(x_i, y_j)$ dla każdej kolumny uliniowienia, która łączy x_i z y_j , oraz wartości γ pomnożonej przez liczbę kolumn zawierających spację. Uliniowienie X i Y jest **optymalne**, gdy koszt jest najmniejszy (i to jest właśnie odległość edycyjna między X i Y).

Dla danych dwóch słów $X = x_1 \dots x_n$ i $Y = y_1 \dots y_m$ nad alfabetem Σ , algorytm Needlemana–Wunscha–Sellersa oblicza rekurencyjnie macierz

$$(F(i, j))_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, m}}$$

taką że każdy wyraz $F(i, j)$ jest kosztem optymalnego uliniowienia przedrostków $x_1 \dots x_i$ oraz $y_1 \dots y_j$ słów X i Y , odpowiednio (gdy $i = 0$ lub $j = 0$, przedrostkami są *słowa puste*). W ten sposób wyraz $F(n, m)$ jest odległością edycyjną X i Y .

Koszt uliniowienia uzyskuje się przez dodawanie kolejnych wartości, zatem optymalne uliniowienie dwóch słów można zbudować na podstawie uliniowienia ich przedrostków. Wynika stąd, że jeśli optymalne uliniowienie przedrostków $x_1 \dots x_i$ i $y_1 \dots y_j$ łączy x_i z y_j , to indukuje ono optymalne uliniowienie dla $x_1 \dots x_{i-1}$ i $y_1 \dots y_{j-1}$ i wtedy

$$F(i, j) = F(i - 1, j - 1) + \sigma(x_i, y_j).$$

Podobnie, jeśli optymalne uliniowienie $x_1 \dots x_i$ i $y_1 \dots y_j$ łączy x_i ze spacją, to indukuje ono optymalne uliniowienie $x_1 \dots x_{i-1}$ i $y_1 \dots y_j$, a stąd

$$F(i, j) = F(i - 1, j) + \gamma.$$

Symetrycznie, $F(i, j) = F(i, j - 1) + \gamma$. Tak więc rzeczywista wartość $F(i, j)$ będzie najmniejszą z tych trzech możliwych wartości. Wyznacza to procedurę rekurencyjną, w której $F(i, j)$ oblicza się na podstawie znajomości wcześniej obliczonych wartości

$$F(i - 1, j - 1), \quad F(i - 1, j) \quad \text{i} \quad F(i, j - 1).$$

Z drugiej strony, koszty $F(i, 0)$ i $F(0, i)$ w optymalnym uliniowieniu $x_1 \dots x_i$ oraz $y_1 \dots y_i$ ze słowem pustym, odpowiednio, muszą być równe $i\gamma$.

Powyższe rozważania wykazują w skrócie poprawność następującego algorytmu obliczającego odległość edycyjną dwóch słów:

```

Input  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m$ 
 $F(0, 0) = 0$ 
For  $i = 0, \dots, n$     $F(i, 0) = i\gamma$ 
For  $j = 0, \dots, m$     $F(0, j) = j\gamma$ 
For  $i = 1, \dots, n$ 
    For  $j = 0, \dots, m$ 
         $F(i, j) = \min\{F(i - 1, j - 1) + \sigma(x_i, y_j), F(i - 1, j) + \gamma, F(i, j - 1) + \gamma\}$ 
Output  $F(n, m)$ 

```

Jeśli ponadto zapamiętujemy, która z trzech możliwości została wykorzystana w obliczeniu każdego wyrazu $F(i, j)$ dla $i, j > 0$, możemy z łatwością uzyskać optymalne uliniowienie słów wejściowych.

Do naszych celów przyjęliśmy, że alfabet Σ składa się ze wszystkich liter używanych w języku polskim, katalońskim lub hiszpańskim, łącznie z tymi, które opatrzone są znakami diakrytycznymi. Taki alfabet składa się z 46 elementów. Dla uproszczenia zdefiniowaliśmy macierz kosztów w sposób następujący:

$$\sigma(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a = b \\ 1 & \text{gdy } a \text{ i } b \text{ są różnymi literami, lecz brzmią podobnie} \\ 2 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Pełną wersję macierzy można znaleźć w sieci na stronie bioinfo.uib.es/~joemiro/polcat. Przyjęliśmy także $\gamma = 3$.

Jeśli zastosujemy algorytm do obliczenia odległości między polskim słowem „angielski” a katalońskim odpowiednikiem „anglès”, otrzymamy

następującą macierz (wszystkie litery w tym przykładzie są albo równe, albo różne z różnym brzmieniem):

		a	n	g	i	e	l	s	k	i
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	<u>0</u>	3	6	9	12	15	18	21	24	27
a	1	3	<u>0</u>	3	6	9	12	15	18	21
n	2	6	3	<u>0</u>	3	6	9	12	15	18
g	3	9	6	3	<u>0</u>	3	6	9	12	15
l	4	12	9	6	3	<u>2</u>	5	6	9	12
è	5	15	12	9	6	5	<u>2</u>	<u>5</u>	8	11
s	3	18	15	12	9	8	5	5	<u>5</u>	<u>8</u>
									<u>8</u>	<u>11</u>

Widać stąd, że zgodnie z przyjętą macierzą kosztów, odległość między tymi słowami jest równa 11. Podkreśliliśmy w macierzy ścieżkę, która prowadzi do ostatecznego wyniku: 11 w dolnym prawym rogu bierze się z 8 w sąsiedniej kolumnie, ta wartość pochodzi z kolei od 5 z lewej strony itd. W ten sposób otrzymujemy optymalne uliniowanie (spacje oznaczamy symbolem „ - ”):

a n g i e l s k i
a n g l è - s - -

Zastosowaliśmy ten algorytm do 427 polskich słów, losowo wybranych ze słownika polsko-angielskiego; szczegółowe obliczenia można zobaczyć na wymienionej wcześniej stronie web. W rezultacie okazało się, że średnia odległość między słowami polskimi a katalońskimi jest równa 12,43, podczas gdy średnia odległość między słowami polskimi a hiszpańskimi jest równa 12,31. Jak widać, wyniki dość zbliżone (co zapewne nie jest niespodzianką), ale słowa hiszpańskie są nieco bliższe polskim niż katalońskie. Niektórzy nasi hiszpanojęzyczni koledzy byliby tym mocno zdziwieni! Oczywiście próbka nie była duża ani reprezentatywna, a macierz kosztów można z pewnością ulepszyć. Zachęcamy do dalszych badań w tym kierunku.

Musimy na koniec wspomnieć, że mimo wszystko nasze badania wspierał rząd Hiszpanii w ramach projektu DGES BFM2000-1113-C02-01 MOBIOCO.

Tłumaczył Wiktor BARTOL



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1060. Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$ (rys. 1). Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów E i B na proste BD i DE . Dowiedz, że punkty A , P , Q leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie na str. 3

M 1061. Dane są liczby rzeczywiste $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$. Wykazać, że $abc \geq a + b + c$.

Rozwiązanie na str. 16

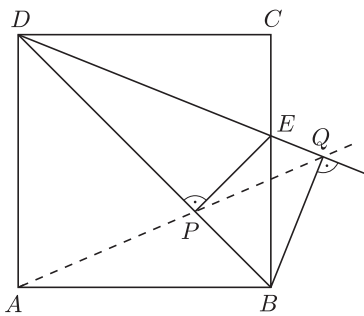
M 1062. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ (rys. 2). Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC . Punkt M jest środkiem boku AB . Wykazać, że trójkąt DEM jest równoboczny.

Rozwiązanie na str. 16

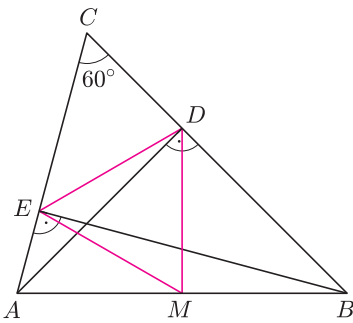
Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 619. W okolicach Rowu Mariańskiego spuszczaemy do wody obciążony gumowy balonik napęczniony wodą oraz obciążoną, wypełnioną powietrzem stalową puszkę. Które z nich wytrzyma większe ciśnienie w głębi Oceanu? Rozwiązanie na str. 2

F 620. Samolot lecąc poziomo osiąga maksymalną prędkość $v_p = 900$ km/h. Czy jest on w stanie przekroczyć prędkość dźwięku w powietrzu $m = 1200$ km/h pikując w dół, jeśli wiemy, że nie jest on w stanie startować pionowo do góry? Zakładamy, że opory ruchu są cały czas proporcjonalne do kwadratu prędkości. Rozwiązanie na str. 12

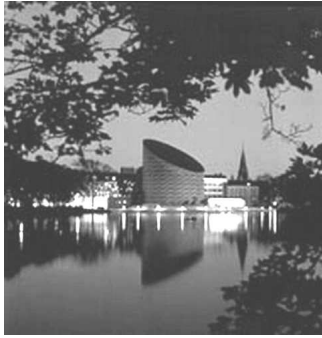


Rys. 1



Rys. 2

Zaprojektowane przez duńskiego architekta, Knuda Munka, Planetarium Kopenhaskie ma kształt, który matematycy określiliby jako prosty walec kołowy ścięty ukośną płaszczyzną.

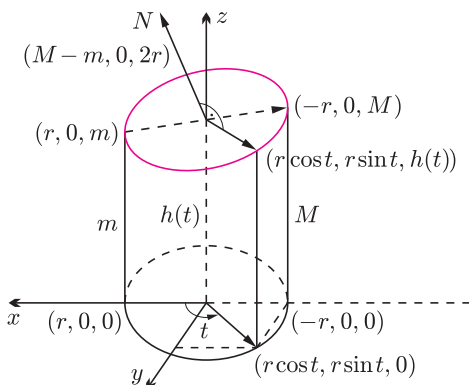


Planetarium im. Tychona Brahego w Kopenhadze.

Pewnego dnia moja żona, również architekt, spytała mnie, jak można najłatwiej zbudować kartonowy model takiego budynku. Dzięki powszechnie używanym programom projektowym typu CAD (*computer aided-design*) można z łatwością zobaczyć obraz budynku na ekranie lub papierze, lecz zazwyczaj nie dają one żadnych wskazówek, jaką krzywą należy narysować na płaskim (i miękkim) kartonie, by po jego rozcięciu wzdłuż tej krzywej i zwinięciu powstał żądany kształt.

Chcę tu wyjaśnić, jak można odpowiedzieć na pytanie mojej żony.

Przyjmijmy, że otrzymany walec (rys. 1) ma promień podstawy równy r , natomiast m jest odległością między najniższym punktem ukośnego, płaskiego dachu i płaszczyzną podstawy. Niech ponadto M oznacza odległość najwyższego punktu dachu od tej płaszczyzny.



Rys. 1

W celu matematycznego opisu sytuacji wprowadźmy trójwymiarowy układ współrzędnych w sposób następujący. Walec umieszczamy na płaszczyźnie xy , tak aby jego oś stanowiła trzecią oś układu, czyli oś Oz , a środek podstawy był tego układu początkiem. Co więcej, zrobmy to tak, by zarówno najniższy, jak i najwyższy punkt dachu leżały w płaszczyźnie xz i miały współrzędne $(r, 0, m)$ i $(-r, 0, M)$, odpowiednio. Takie położenie walca w układzie współrzędnych ma wiele wygodnych konsekwencji.

Pierwszą z nich jest to, że $(-r, 0, M) - (r, 0, m) = (-2r, 0, M - m)$ jest w płaszczyźnie xz wektorem równoległym do dachu, podczas gdy $(M - m, 0, 2r)$ jest (w tej samej płaszczyźnie xz) wektorem normalnym do dachu. Ponadto punkt przecięcia osi Oz z dachem, S , ma współrzędne $(0, 0, \frac{m+M}{2})$.

Punkt $P(t)$ na krzywej wspólnej dla walca i dachu można opisać parametrycznie w postaci $(r \cos t, r \sin t, h(t))$ dla $t \in [0, 2\pi)$. Funkcja h jest właśnie poszukiwaną funkcją, gdyż jej wykres wyznacza cięcie kartonu przed jego zwinięciem.

Aby znaleźć tę funkcję h , zażądamy, by wektor z S do $P(t)$ był prostopadły do wektora normalnego, o którym mowa wyżej. Inaczej mówiąc, h ma być funkcją taką, że iloczyn skalarny tych dwóch wektorów pozostaje stale równy 0 w przedziale $[0, 2\pi)$:

$$\left(r \cos t, r \sin t, h(t) - \frac{m+M}{2} \right) \cdot (M - m, 0, 2r) = 0$$

dla wszystkich $t \in [0, 2\pi)$. Po wymnożeniu otrzymujemy równanie

$$(M - m)r \cos t + 2rh(t) - r(m + M) = 0,$$

gdzie $t \in [0, 2\pi)$, z którego wnosimy, że

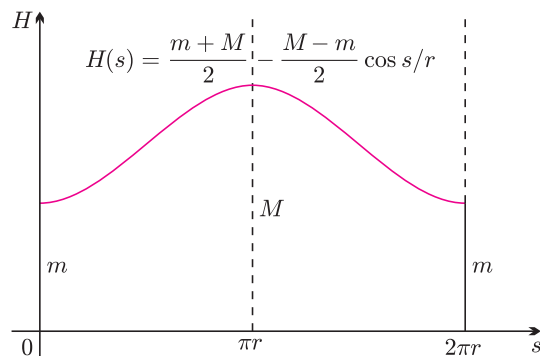
$$h(t) = \frac{m+M}{2} - \frac{M-m}{2} \cos t \quad \text{dla } t \in [0, 2\pi).$$

Zauważmy jednak, że gdy przyjdzie rysować krzywą cięcia na kartonie, łatwiej będzie odwoływać się do długości s odcinka na powierzchni bocznej walca niż do kąta obrotu. Z równości $s = rt$ otrzymujemy funkcję, której wykres powinniśmy narysować na kartonie:

$$H(s) = h(s/r) = \frac{m+M}{2} - \frac{M-m}{2} \cos s/r$$

dla $s \in [0, 2\pi r)$.

Tak wygląda odpowiedź na początkowe pytanie. Wynik widać na rysunku 2.



Rys. 2

Warto dodać, że brzeg dachu jest zawsze elipsą. Do wykazania tego faktu wystarczy rozważyć dowolny punkt $P(t)$ tej krzywej na płaszczyźnie dachu w układzie współrzędnych, w którym S jest początkiem, prosta łącząca najniższy i najwyższy punkt dachu jest pierwszą osią, a prosta normalna przechodząca przez S – drugą osią.

Tłumaczył Wiktor BARTOL



Europejskie zakupy ze zniżką

Giorgio BUSONI, Włochy

Jak wiadomo Unia Europejska składała się dotąd z 15 państw. Są to Belgique, Deutschland, Eire, Ελλάδα, España, Finland, France, Italia, Lëtzebuerg, Nederland, Österreich, Portugal, Danmark, Sverige oraz United Kingdom. Pierwszych dwanaście państw ma wspólną walutę: euro. Siedem banknotów (5; 10; 20; 50; 100; 200; 500 euro) i osiem monet (1; 2; 5; 10; 20; 50 eurocentów; 1; 2 euro) jest obecnie w użyciu. Monety danej wartości mają jedną stronę identyczną we wszystkich krajach, natomiast druga strona jest ilustrowana portretami sławnych osób, pomników, dzieł sztuki, instrumentów, zwierząt czy też roślin charakterystycznych dla danego kraju. Jest więc np. 12 różnych monet wartości 1 euro i 12 różnych monet 5-centowych. W każdym sklepie w 12 wymienionych krajach płaci się w euro.

1. Zdarzyło mi się kiedyś, że kupiłem towary ze zniżką 20, 30 i 40 procent. Oto lista towarów i ich nieobniżonych cen (w euro)

A 1,49; B 0,80; C 6,62; D 2,87; E 7,94; F 0,83; G 2,60; H 16,90.

Zyskałem 0,30 euro na obniżce 20 procent, 8,82 euro na obniżce 30 procent i wreszcie 3,70 euro na obniżce 40 procent. Czy potraficie odgadnąć, jakie produkty kupiłem z jaką zniżką? (Pamiętajcie, że kasy w sklepie zaokrąglały liczby.)

2. Zbieram różne monety. Chciałbym mieć ich wszystkie rodzaje. Teraz mam niemal 79 procent ich wszystkich, przy czym mam wszystkie monety z następujących państw: Deutschland, Eire, España, France, Österreich oraz Italia. Mam dwanaście monet 2 euro, ale niestety nie mam żadnych innych kompletów monet tej samej wartości. Brakuje mi monet na łączną sumę tylko 3,75 euro (głównie monet o małej wartości). Czy możecie wydedukować, ilu monet i jakiej wartości mi brakuje? Żeby nieco pomóc w dociekaniach, powiem tylko, że brakuje mi tyle samo jednocentówek co dwucentówek oraz że gdyby udało mi się dostać trzy właściwe monety, to cała brakująca suma zmniejszyłaby się do 1,25 euro (a ponadto uzyskałbym jeszcze jeden kompletny zestaw monet jednakowej wartości).

Rozwiązania

1. Zauważmy, że 0,30 euro to 20 procent 1,50 euro, 8,82 euro to 30 procent 29,40 euro, a 3,70 euro to 40 procent 9,25 euro. Produkt A kosztuje 1,49 euro, niemal tyle co 1,50 euro; żadna inna możliwa suma cen nie daje nic w pobliżu 1,50 euro; więc produkt A został kupiony z 20 procentową zniżką. Zauważmy teraz, że $6,62 + 2,60 = 9,22$, co daje

niemal 9,25. Inne sumy cen bliskie 9,25 to $6,62 + 2,87 = 9,49$ oraz $7,94 + 0,80 + 0,83 = 9,57$. Różnią się one jednak od 9,25 zbyt mocno. Wreszcie pozostałe ceny dają w sumie 29,34, co jest całkiem bliskie 29,40. Kupione zostały zatem następujące produkty: ze zniżką 20 procent: A; ze zniżką 30 procent: B, D, E, F i H; ze zniżką 40 procent: C oraz G.

2. Wszystkich rodzajów monet jest 96, z czego 79 procent to 76. Brakujące monety mają wartości od 1 centa do 1 euro. Nie tak łatwo podać szybko pełną listę zestawów monet, których łączna wartość daje 3,75 euro. Dodatkowa wskazówka sugeruje, że 2,50 euro to łączna wartość trzech monet, którymi muszą koniecznie być dwie monety o nominałach 1 euro i jedna 50-centówka. A zatem pozostałe 17 brakujących monet mają łączną wartość 1,25 euro. Wśród nich nie może być już monety 1 euro; wyklucza to stwierdzenie, że jedynym kompletnym zbiorem monet jest ten złożony z monet 2 euro. Mamy zatem do rozpatrzenia następujące równania:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e + f = 17, \\ a + 2b + 5c + 10d + 20e + 50f = 125, \\ a = b. \end{cases}$$

Szukamy rozwiązań, które należą do zbioru

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Oczywiście f nie może być równe 3, 4, ..., etc. Jeśli przyjmiemy $f = 2$, to musimy szukać rozwiązań równań

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 15, \\ a + 2b + 5c + 10d + 20e = 25 = V, \end{cases}$$

ale trzeba spostrzec, że drugie równanie (i każde inne reprezentujące całą sumę wartości monet) nie ma rozwiązań, jeśli wielkość V jest mniejsza od sumy współczynników nieznanymi wielkościami: $1 + 2 + 5 + \dots$. Zatem nie ma rozwiązań, gdy $f = 2$. Załóżmy więc, że $f = 1$. Rozważmy równania

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 16, \\ a + 2b + 5c + 10d + 20e = 75. \end{cases}$$

Rozpatrzmy przypadki $e = 3, 2, 1$; nie ma sensu rozważać $e \geq 4$. Uwaga, jaką niedawno przytoczyliśmy, dowodzi, że e nie jest równe 3. Jeśli $e = 2$, to trzeba rozważyć $d = 3, 2, 1$; ale d nie może być równe 3. Jeśli $d = 2$, to trzeba rozważyć $c = 3, 2, 1$; i znów korzystając z poczynionego wcześniej spostrzeżenia, dostrzec, że c nie jest równe ani 3, ani 2. Z równości $a = b$ wynika, że $c = 1$ nie jest szukany rozwiązaniem. Rozumując w sposób powyżej opisany spostrzegamy, że jedyne rozwiązanie to

$$\begin{cases} a = b = 5, \\ c = 2, \\ d = 3, \\ e = f = 1, \end{cases}$$

co odpowiada monetom, jakich mi brakowało (łącznie z 50 centówką i dwiema monetami po 1 euro): pięciu jednocentówkom, pięciu dwucentówkom, dwóm pięciocentówkom, trzem monetom po 10 eurocentów, jednej dwudziestocentówce, dwóm monetom wartości 50 eurocentów i dwóm monetom 1 euro.

Tłumaczył Witold SADOWSKI

Na ile obszarów krzywa algebraiczna może dzielić płaszczyznę?

Themistocles M. RASSIAS, Grecja

Będziemy zajmować się oszacowaniem liczby obszarów, na jakie krzywa algebraiczna dzieli płaszczyznę. Zagadnienie to związane jest z 16. Problemem Hilberta. Problem oszacowania liczby takich obszarów w przypadku wielomianów o większej liczbie zmiennych niż 2 jest wciąż otwarty.

Zacznijmy od spostrzeżenia, że liczba obszarów, na jakie m prostych $l_1, l_2, l_3, \dots, l_m$ dzieli płaszczyznę, jest równa co najwyżej $1 + \frac{m(m+1)}{2}$.

Stwierdzenie to ma dowód indukcyjny, a wymienione wyżej oszacowanie jest najlepsze z możliwych – można je osiągnąć. Okazuje się, że identyczne ograniczenie da się uzyskać w sytuacji, gdy rozważamy krzywą algebraiczną zdefiniowaną przez wielomian stopnia m .

Twierdzenie. Niech $f(x, y)$ będzie wielomianem stopnia m . Wówczas zbiór

$$Z_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

dzieli płaszczyznę na co najwyżej $1 + \frac{m(m+1)}{2}$ obszarów.

Dowód składa się z dwóch części. W pierwszej rozpatruje się wielomian nierozkładalny, w drugiej – rozkładalny. W tym artykule zaprezentujemy jedynie szkic dowodu w pierwszym przypadku.

Jeśli $m = 1$, to Z_f dzieli płaszczyznę na dokładnie dwa obszary. Gdy $m = 2$, to łatwo spostrzec, że Z_f dzieli płaszczyznę na 2 lub 3 obszary. Wystarczy zatem rozważyć problem dla $m > 2$.

Na początek wprowadzimy kilka przydatnych pojęć. Jeśli P jest takim punktem na płaszczyźnie, że $f(P) = 0$, to przez przesunięcie zawsze możemy umieścić punkt P w początku układu współrzędnych. Możemy zatem założyć, że $P = (0, 0)$. Mamy więc $f(0, 0) = 0$ oraz

$$f(x, y) = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \dots,$$

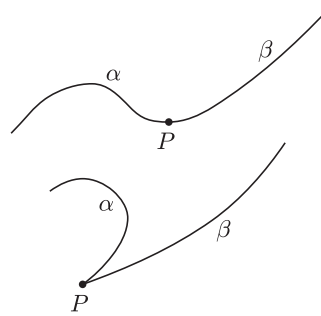
gdzie a, b, c, \dots są liczbami rzeczywistymi. Punkt $(0, 0)$ będzie nazywany **punktem prostym** zbioru Z_f , gdy $a \neq 0$ lub $b \neq 0$. W przeciwnym wypadku punkt P będzie zwany **osobliwym**. (Dopuszczimy sytuację, gdy pewne punkty osobliwe leżą na „prostej w nieskończoność” – l_∞ , czyli są kierunkami.)

Jeśli wielomian f ma postać

$$f(x, y) = f_r(x, y) + f_{r+1}(x, y) + \dots + f_m(x, y),$$

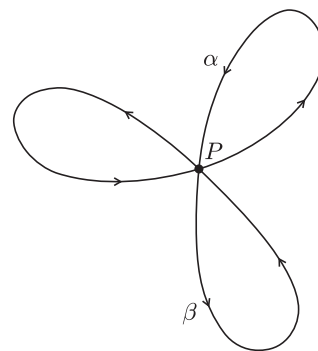
gdzie f_r, f_{r+1}, \dots, f_m są jednorodnymi wielomianami stopnia $r, r + 1, \dots, m$ oraz $f_r \neq 0$, to punkt $(0, 0)$ nazywany jest **punktem r -krotnym**.

Zauważmy teraz, że w każdym nieizolowanym punkcie krzywej spotykają się przynajmniej dwa łuki tworzące gałąź krzywej (rys. 1). Umówmy się, że wchodząc do danego punktu P wzdłuż pewnego łuku α opuszczamy go wzdłuż innego łuku, powiedzmy β .



Rys. 1

Punktów osobliwych i gałęzi przez nie przechodzących jest skończenie wiele, więc ostatecznie wracamy do punktu P po zamkniętej drodze, którą zwać będziemy **cyklem**. Przykładowy cykl przedstawia rysunek 2.



Rys. 2

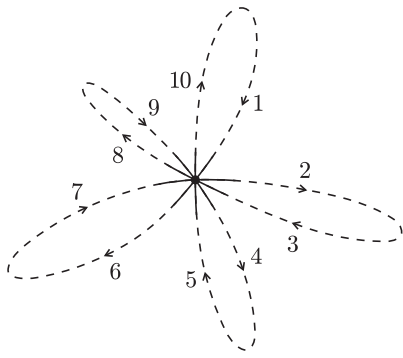
W dalszym ciągu potrzebne będzie nam ogólne twierdzenie, które określa maksymalną liczbę cykli krzywej określonej przez nierozkładalny wielomian f .

Fakt. Każda krzywa określona przez nierozkładalny wielomian stopnia m , do której należy punkt r_1 -krotny, r_2 -krotny, itd., ma nie więcej niż

$$N = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{1}{2} \sum_i r_i(r_i - 1) + 1$$

cykli.

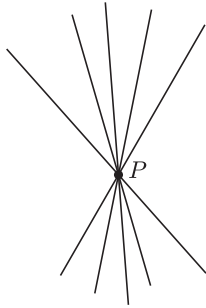
Cykl – jak to widać z rysunku 2 – może się przecinać. W każdym punkcie cyklu spotyka się parzysta liczba łuków, przy czym w punkcie r -krotnym jest ich co najwyżej $2r$. Ponumerujemy teraz łuki wokół punktu P kolejnymi liczbami naturalnymi zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Gdy P jest punktem r -krotnym cyklu, przechodzić będzie przez niego $2s \leq 2r$ łuków. Obejdziemy teraz cały cykl w ten sposób, że idąc do punktu P wzdłuż łuku numer i , wyjdziemy wzdłuż łuku numer $i + s \pmod{2s}$. Przeprowadzamy tę procedurę dla wszystkich punktów osobliwych i wszystkich cykli. Przykładowa droga wygląda więc tak jak na rysunku 3, gdzie w wykropkowanych fragmentach trafiać się mogą punkty osobliwe.



1, 6, 7, 2, 3, 8, 9, 4, 5, 10

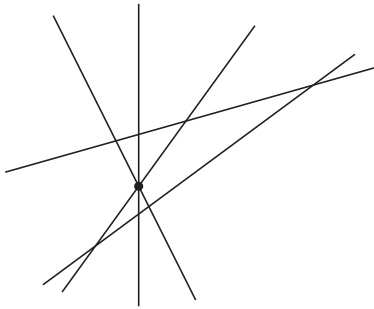
Rys. 3

W ten sposób w małym otoczeniu punktu P sytuacja wygląda tak, jak gdyby przecięty został on przez s prostych (rys. 4).



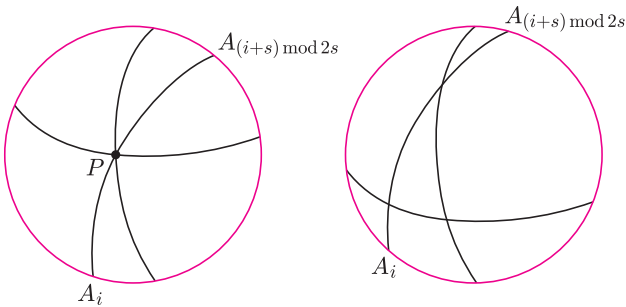
Rys. 4

Jeśli teraz rozsunieśmy nieco te proste (rys. 5), to oczywiście liczba obszarów, na jakie dzielą one płaszczyznę, raczej wzrośnie niż zmaleje.



Rys. 5

Gdyby ktoś miał wątpliwości, może spojrzeć jeszcze na rys. 6a oraz 6b, gdzie na rys. 6a narysowane kółko jest tak małe, że żadne dwie gałęzie nie przecinają się poza punktem P .



Rys. 6a

Rys. 6b

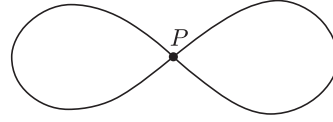
W ten sposób punkt k -krotny zastępujemy przez $\frac{s(s+1)}{2}$ przecięć prostych, gdzie $s \leq r$.

Skorzystamy teraz ze wzoru Eulera dla spójnych grafów na płaszczyźnie:

$$v - e + f = 2,$$

gdzie v to liczba wierzchołków, e – krawędzi, a f – obszarów. Na przykład dla rysunku 7 mamy:

$$v = 1, \quad e = 2, \quad f = 3 \quad \text{i} \quad v - e + f = 1 - 2 + 3 = 2.$$



Rys. 7

W przypadku połączonych cykli zawierających punkt r_1 -krotny, r_2 -krotny, itd., otrzymujemy graf, dla którego zachodzi szacowanie

$$v \leq \frac{1}{2} \sum_i r_i(r_i + 1).$$

Jeśli teraz zastąpimy – zgodnie z przedstawionym wyżej schematem – naszą krzywą przez odpowiednią liczbę zamkniętych dróg z jednokrotnymi przecięciami, to bez trudu wykażemy indukcyjnie, że

$$e = 2v.$$

Stąd ze wzoru Eulera mamy

$$f = 2 + e - v = 2 + 2v - v = 2 + v.$$

Jeśli zatem mamy połączonych N rodzin cykli, to

$$f = 1 + \sum_{i=1}^N (1 + k_i) \leq 1 + N + \sum_{i=1}^N k_i,$$

gdzie k_i jest liczbą wierzchołków w danej rodzinie połączonych cykli. Zauważmy, że w pierwszej sumie składniki mają postać $1 + k_i$ zamiast $2 + k_i$, co wynika z tego, że wszystkie cykle mają wspólny obszar, który dodaliśmy osobno. Mamy ponadto

$$k_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(r_{ij} - 1).$$

Uwzględniając teraz sposób, w jaki krzywa przecina prostą w nieskończoności l_∞ , dodajemy m obszarów i ostatecznie korzystając z Faktu uzyskujemy

$$f \leq \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(r_{ij} - 1) + 1 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(r_{ij} - 1) + m \right\},$$

czyli

$$f \leq \frac{1}{2}(m-1)(m-2) + m + 2 \leq 1 + \frac{1}{2}m(m+1),$$

gdzie ostatnia nierówność zachodzi dla $m \geq 2$. W ten sposób dowód w pierwszym wypadku (nierozkładalnego wielomianu) został zakończony.

Tłumaczył Witold SADOWSKI

Zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} jest przeliczalny, co oznacza, że wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg.

Rozważmy tablicę nieskończoną T , której każdy wiersz przedstawia rozwinięcie dziesiętne pewnej liczby wymiernej z przedziału $(0, 1)$. Przypuśćmy, że zapisaliśmy w ten sposób wszystkie liczby wymierne ze wspomnianego przedziału, a jeśli któraś ma podwójną reprezentację, uwzględniliśmy obie. Tak więc na przykład pewien wiersz tablicy będzie miał postać $1\ 1\ 9\ 9\ 9\ 9\ \dots$, a w innym wierszu pojawi się także $1\ 2\ 0\ 0\ 0\ \dots$. Będziemy pisali

$$T = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

gdzie a_i^j jest jedną z cyfr $0, 1, 2, \dots, 8, 9$.

Twierdzenie 1. Liczba, której cyfry dziesiętne są wzięte z przekątnej $x = 0, a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots$ jest niewymierna.

Dowód. Niech f będzie przekształceniem wzajemnie jednoznaczny zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ w siebie. Przyjmijmy, że f nie ma punktu stałego, tzn. dla każdego $a \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$, $f(a) \neq a$. Na przykład $f(a) = a + 1$ dla $0 \leq a \leq 8$ i $f(9) = 0$. Rozważmy tablicę T' otrzymaną z T przez zastąpienie a_k^k przez $f(a_k^k)$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Wtedy ciąg $f(a_1^1) f(a_2^2) \dots$ nie może być wierszem tablicy T , bo w przeciwnym razie, dla pewnego k byłoby

$$a_k^1 a_k^2 a_k^3 \dots a_k^k \dots = f(a_1^1) f(a_2^2) \dots f(a_k^k) \dots$$

co jest niemożliwe, gdyż oba ciągi różnią się na k -tym miejscu. A zatem ciąg $f(a_1^1) f(a_2^2) f(a_3^3) \dots$ nie należy do zbioru wierszy T , a więc reprezentuje liczbę niewymierną. Nietrudno zauważyć, że, ogólnie, ciąg $f(b_1) f(b_2) f(b_3) \dots$ jest od pewnego miejsca okresowy wtedy i tylko wtedy, gdy własność tę ma ciąg $b_1 b_2 b_3 \dots$.

Stąd wnioskujemy, że również przekątna $a_k^1 a_k^2 a_k^3 \dots$ macierzy T reprezentuje liczbę niewymierną.

QED

Twierdzenie 2. Liczba $x = 0, a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots$ zawiera każdą cyfrę nieskończenie wiele razy.

Dowód. Dla otrzymania sprzeczności przypuśćmy, że cyfra 7 (na przykład) występuje tylko skończenie wiele razy. Niech g będzie przekształceniem zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ w siebie określonym przez $g(7) = 0$ i $g(a) = 7$, dla każdego $a \neq 7$. Jak poprzednio, przekształcenie nie ma punktu stałego, choć tym razem nie jest wzajemnie jednoznaczne. Niech T'' będzie tablicą otrzymaną z T przez zastąpienie a_k^k przez $g(a_k^k)$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Jak poprzednio, liczba $0, g(a_1^1) g(a_2^2) g(a_3^3) \dots$ nie może być wierszem T . Ta liczba powinna zatem być niewymierna. Z drugiej strony, skoro od pewnego miejsca $a_k^k \neq 7$, mamy (od pewnego miejsca) $g(a_k^k) = 7$ i w konsekwencji $0, g(a_1^1) g(a_2^2) g(a_3^3) \dots$ jest wymierna. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że 7 występuje nieskończenie często w rozwinięciu dziesiętnym liczby x .

QED

Uwaga 1. Rozważmy powyższą tablicę T i wszystkie tablice, jakie można otrzymać permutując dowolnie jej wiersze. Zbiór przekątnych wszystkich tych tablic jest więc pewnym zbiorem liczb niewymiernych E . Twierdzenie 2 pokazuje, że na ogół E jest właściwym podzbiorem $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$. Jest jasne, że rozumowania powyższe zachowują swą słuszność dla rozwinięć przy dowolnej podstawie. Niemniej jednak, przy podstawie 2 można wykazać, że $E = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$.

Uwaga 2. Można także zastąpić „liczby wymierne” przez „liczby algebraiczne” i „liczby niewymierne” przez „liczby przestępne”..., a także wyobrazić sobie wiele innych wariantów, choć dowody trzeba będzie zmodyfikować.

Tłumaczył Damian NIWIŃSKI

Już ze szkoły znamy charakterystycję liczb wymiernych: są to dokładnie te liczby, których rozwinięcia (przy dowolnej podstawie większej od 1) są od pewnego miejsca okresowe.



Rozwiązanie zadania F 620.

Jeśli samolot nie może startować pionowo, to maksymalna siła ciągu jego silników musi być mniejsza od jego ciężaru

$$T < mg$$

Podczas lotu poziomego ze stałą prędkością opory ruchu równoważą się z ciągiem

$$\kappa v_p^2 = T$$

a podczas pikowania w dół z ciągiem i ciężarem

$$\kappa v_d^2 = T + mg$$

stąd $\kappa v_d^2 > 2T$ i $v_d > \sqrt{2} v_p \approx 1270$ km/h, czyli więcej niż prędkość dźwięku m .

Należy zaznaczyć, że dla prędkości bliskich m i większych zależność oporu od prędkości jest w rzeczywistości bardziej skomplikowana.

Misja Rosetta

Nazwa *Rosetta Stone* (albo *la pierre de Rosette*) odnosi się do bazaltowej tablicy (prezentowanej w tle tylnej okładki) odnalezionej w lipcu 1799 roku przez oficera armii napoleońskiej Pierre'a Boucharda w pobliżu egipskiej wioski Rosette (Raschid) położonej w zachodniej delcie Nilu. Na tablicy wryta jest ta sama informacja na trzy sposoby: za pomocą hieroglifów (czyli piktograficznego pisma używanego przez starożytnych Egipcjan w oficjalnych i religijnych inskrypcjach), pismem demotycznym (najbardziej uproszczoną wersją pisma używaną przez Egipcjan w ostatnim tysiącleciu p.n.e.) i greką. Pomimo że kamień z Rosetty bardzo szybko wpadł w ręce brytyjskie (od 1801 roku znajduje się w British Museum w Londynie), to jednak Francuz Jean François Champollion zdołał odczytać hieroglify (około roku 1822). Część pracy wykonał w międzyczasie Thomas Young (tak, ten Young). Okazało się, że hieroglify są jednocześnie pismem piktograficznym i alfabetycznym.

Nazwę ROSETTA przyjęła jedna z ciekawszych misji Europejskiej Agencji Kosmicznej ESA (European Space Agency). Jej celem jest pierwsze w historii lądowanie wytworzonego przez człowieka instrumentu na... kometcie. Pierwotnie miała to być kometa 46P/Wirtanen, ale kłopoty z rakieta Ariane 5 spowodowały, że minął czas, w którym można było wysłać sondę na spotkanie z tą kometą. Ostatecznie zdecydowano się na kometę 67P/Churyumov-Gerasimenko. Badania jej ruchu pokazały, że jest to obiekt niedawno schwyty (po dwóch bliskich spotkaniach z Jowiszem w 1840 i 1959 roku) na orbitę o czasie obiegu około 6,6 lat. Naukowcy liczą, że tak jak kamień z Rosetty umożliwił odczytanie pisma starożytnych Egipcjan, tak misja ROSETTA pozwoli na zrozumienie, jak i z czego powstał Układ Słoneczny dzięki zbadaniu „kamienia odrzuconego przez budujących”.

Zasadnicza część misji rozpoczęła się 2 marca 2004 roku wystrzeleniem sondy (zdjęcie na tylnej okładce) za pomocą rakiety Ariane 5 z kosmodromu w Gujanie Francuskiej na okołosłoneczną orbitę. Po dziesięciu latach przygotowań trzeba teraz będzie... poczekać następne 10 lat na sfinalizowanie przedsięwzięcia. Dotarcie do celu jest możliwe tylko dzięki wykorzystaniu planet jako grawitacyjnych przyspieszaczy (patrz zadanie F 620 na stronie 6). Sonda spotka się najpierw z Ziemią w 2005 roku, później z Marsem i Ziemią i jeszcze raz z Ziemią w 2007 r. Dwa lata później po ostatnim przelocie w pobliżu naszej planety sonda podąży na spotkanie komety.

Przy okazji wystrzelenia sondy naukowcy z Europejskiego Obserwatorium Południowego ESO (European Southern Observatory) sfotografowali kometę (zdjęcie na tylnej okładce) za pomocą teleskopu NTT (New Technology Telescope) znajdującego się na górze La Silla w Chile. W tej chwili obiekt zainteresowania znajduje się w odległości około 670 milionów kilometrów od Słońca. Za dziesięć lat, po wykonaniu pełnego obiegu, będzie jeszcze dalej, około 790 milionów kilometrów od centrum Układu Słonecznego. Dokonane obserwacje potwierdzają spodziewaną niską aktywność komety i pozwalają przypuszczać, że manewr spotkania sondy z nią przebiegnie bez zakłóceń.

Spotkanie ma nastąpić w roku 2014. Sonda ma wejść na orbitę o promieniu około 25 km wokół jądra komety. Przeprowadzi jego dokładną kartografię, na podstawie której wybrane zostanie miejsce lądowania 100-kilogramowego lądownika Philae. Zostanie on zrzucony z odległości około kilometra. Ze względu na bardzo małą masę komety lądownik zbliży się do niej z prędkością piechura i zakotwiczy za pomocą harpuna. Philae będzie prowadził badania przez co najmniej tydzień. Na tyle obliczone są jego baterie chemiczne. Będzie działał dłużej, jeżeli jego baterie słoneczne na to pozwolą. Ich działanie nie jest pewne, bo nie wiadomo, jak dużym utrudnieniem będzie gazowa otoczka komety. Sama ROSETTA ma działać przynajmniej do roku 2015 i doczekać „budzenia się” komety.

Jednym z elementów lądownika jest penetrator MUPUS, który w znacznej mierze powstał dzięki pracy polskich naukowców i inżynierów, głównie z Centrum Badań Kosmicznych PAN w Warszawie. Jest to rodzaj ramienia, które wysunie się z lądownika i wbije szpikulec z szeregiem czujników na głębokość 37 cm w grunt komety. Najtrudniejszym zadaniem było właśnie zaprojektowanie i wykonanie tego „kometarnego młotka” (zdjęcie na okładce). Należało zrobić go tak, żeby pracował z minimalnym poborem mocy i żeby nie wyskoczył z gruntu w warunkach mikrogravitacji.

W oficjalnych dokumentach tak misji ROSETTA, jak i samego MUPUSA trudno doszukać się świadectwa znaczącej roli, jaką odegrali polscy naukowcy i inżynierowie. Okazuje się, że weszli do tego przedsięwzięcia jako podwykonawcy. Główny wkład finansowy związany z MUPUSEM ponieśli Niemcy.

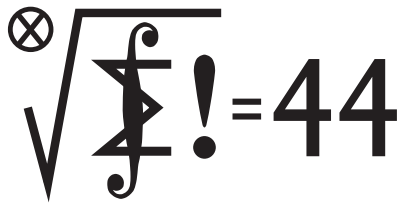
I tu dochodzimy do sedna. W chwili wchodzenia do Unii Europejskiej trudno o bardziej aktualny dla naukowców temat jak sprawa finansowania polskiej nauki. Z jednej strony należy się cieszyć, że Polacy nie tylko są w stanie wykonać coś, czego nikt nie chciał się podjąć, ale jeszcze robią to w znacznej mierze za środki europejskich partnerów. Z drugiej jednak strony nie da się ukryć, że Polska nie jest i w najbliższym czasie nie będzie ani członkiem ESO, ani ESA. Dlatego w tych dziedzinach skazani jesteśmy na przekradanie się na główną scenę za kulisami. Oczywiście można argumentować, że wejście do międzynarodowych organizacji, takich jak ESO czy ESA, to nie jest najefektywniejszy sposób wydawania pieniędzy na naukę. Ale, po pierwsze, większość krajów UE albo już tam jest, albo zamierza tam być, a po drugie – nie oszukujmy się – nie ma żadnego alternatywnego pomysłu na finansowanie tego rodzaju badań w Polsce.

Czy wejście do Unii coś zmieni? Zdanie na ten temat zależy głównie od tego, czy jest się pesymistą, czy optymistą.

Pesymista powie: „jest tak źle, że gorzej być nie może”, na co optymistą z uśmiechem: „może, może!”

Piotr ZALEWSKI

PS. Najstarszą organizacją naukową Europy jest CERN, który w dodatku obchodzi we wrześniu 50-lecie powstania. Napiszemy o tym w numerze sierpniowym.



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VII 2004

UWAGA!

**ZMIANA ADRESU
DO KORESPONDENCJI!**

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
465 ($WT = 2,20$) i **466** ($WT = 1,38$)
z numeru 9/2003

Paweł Najman	– Jaworzno	43,99
Andrzej Józwiak	– Kielce	40,64
Paweł Kubit	– Kraków	38,72
Piotr Kumor	– Olsztyn	38,22
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	36,07

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 481, 482

Redaguje Marcin E. KUCZMA

481. Niech S_p oznacza symetrię płaszczyzny względem prostej p . Scharakteryzować te trójki różnych prostych (k, ℓ, m) , dla których złożenie $f = S_m \circ S_\ell \circ S_k$ jest tym samym przekształceniem, co złożenie $g = S_k \circ S_m \circ S_\ell$.

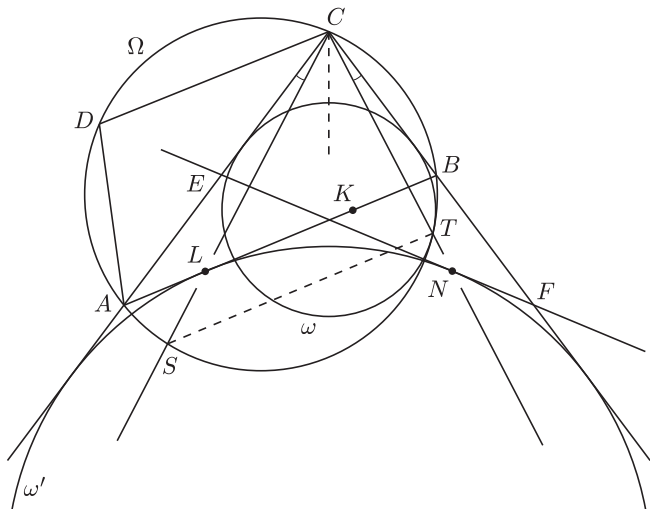
482. Dana jest liczba naturalna $n > 1$. Liczba dodatnia a jest pierwiastkiem wielomianu $x^n - x - 1$; liczba dodatnia b jest pierwiastkiem wielomianu $x^{2n} - x - 3a$. Rozstrzygnąć, w zależności od n , która z liczb a, b jest większa.

Zadanie 482 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2004

473. Trapez $ABCD$ o równoległych podstawach AB, CD jest wpisany w okrąg Ω . Okrąg ω , styczny wewnątrznie do Ω w punkcie T , jest też styczny do odcinków BC i CA . Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie K . Dowieść, że punkty D, K, T są współliniowe.

473. Niech TS będzie cięciwą okręgu Ω , równoległą do AB i CD .



Z równości łuków AS i BT wynika równość kątów ACS i BCT . Okrąg ω' dopisany do trójkąta CAB , styczny do przedłużeń boków CA i CB , jest styczny do boku AB w takim punkcie L , że $|AL| = |BK|$. Symetralna cięciw AB, CD, ST jest osią symetrii, w której punktom D, K, T odpowiadają punkty C, L, S . Wystarczy udowodnić, że te ostatnie trzy punkty są współliniowe.

Na półprostych CA^{\rightarrow} i CB^{\rightarrow} odkładamy odcinki CE i CF o długościach $|CE| = |CB|, |CF| = |CA|$. Trójkąt CFE jest obrazem trójkąta CAB w symetrii, której osią jest dwusieczna kąta BCA ; oba trójkąty mają wspólny okrąg

Przypominamy treść zadań:

474. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n równanie

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1} = n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z ?

dopisany ω' . Obrazem punktu L w tej symetrii jest N – punkt styczności okręgu ω' z bokiem EF ; z równości $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle BCT|$ wynika zaś, że obrazem półprostej CS^{\rightarrow} jest półprosta CT^{\rightarrow} . Teza sprowadza się do wykazania, że punkty C, N, T są współliniowe.

Inwersja o środku C i promieniu $r = \sqrt{|CA| \cdot |CB|}$ przeprowadza punkty A i B odpowiednio na E i F , okrąg ω na prostą EF , a okrąg ω' – na okrąg styczny do prostych CE, CF, EF , położony po przeciwnej stronie prostej EF , niż punkt C – czyli na okrąg ω' . Punkt styczności okręgów Ω i ω (czyli T) przechodzi na punkt styczności prostej EF i okręgu ω' (czyli N). Półprosta CT^{\rightarrow} jest w tej inwersji swoim własnym obrazem. Uzyskujemy współliniowość punktów C, N, T , do której dowodu zostało wcześniej sprowadzone zadanie.

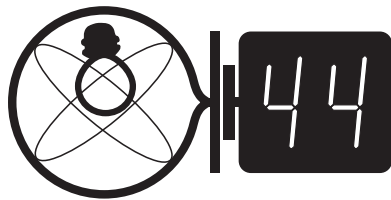
474. Z równości

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

wynika, że jeśli liczby całkowite dodatnie n, x, y, z spełniają podane równanie, to

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = n + 3 - (x + y + z).$$

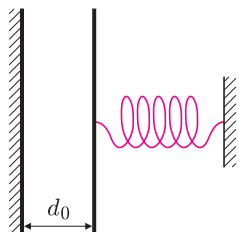
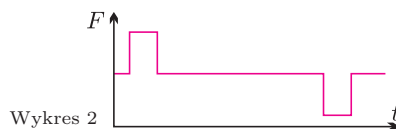
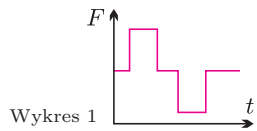
Prawa strona jest liczbą całkowitą. Lewa strona jest liczbą dodatnią, nie większą niż $\frac{3}{2}$. Musi więc to być liczba 1. Istnieją trzy przedstawienia jedynek jako sumy ułamków egipskich: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Zatem trójka (x, y, z) jest, z dokładnością do permutacji, jedną z trzech trójek: $(2, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 2, 5)$. Wartości n wynoszą, odpowiednio, 4, 5, 6 i są to jedyne wartości n , spełniające postawiony warunek.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2004

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!



Rys. 2

370. Podzielmy pochylnię na małe odcinki, a analizę ruchu sanek przeprowadźmy na razie bez uwzględniania roli siły odśrodkowej. Wtedy przyspieszenie sanek będzie takie, jak dla równi pochyłej, tzn.

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

gdzie α jest kątem nachylenia danego odcinka do poziomu, a f – współczynnikiem tarcia. Według wzorów opisujących ruch przyspieszony prędkość uzyskana w wyniku zjazdu z równi o długości dl , wysokości dh i długości rzutu na płaszczyznę poziomą ds wynosi

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2adl},$$

a po podstawieniu a

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(dh - fds)},$$

gdzie v_0 jest prędkością początkową. Dodając przyrosty wielkości v^2 na poszczególnych odcinkach i podstawiając prędkość na początku zjazdu równą zeru wyznaczamy prędkość końcową

$$v_k = \sqrt{2g(h - fs)}.$$

Zgodnie z treścią zadania tak obliczona prędkość końcowa nie zależałaby od wyboru zбочca. O ostatecznej odpowiedzi decyduje zatem pominięty wpływ działania siły odśrodkowej. Oczywiście jest, że dla pochylni wklęsłej siła ta dociska sanki do podłoża i – wskutek tarcia – hamuje je, a dla pochylni wypukłej efekt jest odwrotny. Dyzio rozpędzi się silniej po zjechaniu z wypukłego zбочca.

371. Jeśli odległość między płytkami wyniesie d , to natężenie pola elektrycznego między nimi stanie się równe

$$E = U/d,$$

ładunek na płytkach

$$Q = \epsilon_0 ES = \epsilon_0 US/d,$$

a siła ich wzajemnego przyciągania

$$F = \frac{1}{2}QE = \frac{1}{2}\epsilon_0 S \left(\frac{U}{d}\right)^2$$

(czynnik $\frac{1}{2}$ wynika stąd, że natężenie pola jednej płytki jest równe $\frac{E}{2}$). W stanie równowagi tę siłę należy przyrównać do siły sprężystości, czyli do $k(d_0 - d)$. Otrzymaliśmy równanie trzeciego stopnia, a graficznie mamy do czynienia z punktem przecięcia wykresów funkcji

$$y = A/x^2 \quad \text{ i } \quad y = B - Cx.$$

Maksymalna wartość A , dla której istnieje rozwiązanie dodatnie, odpowiada sytuacji, kiedy oba wykresy są styczne. Przyrównując pochodne znajdujemy

$$A_{\max} = \frac{4B^3}{27C^2},$$

a po niezbędnych podstawieniach otrzymujemy maksymalną wartość napięcia

$$U_{\max} = \left(\frac{k}{\epsilon_0 S}\right)^{1/2} \left(\frac{2d_0}{3}\right)^{3/2}.$$

Odnotujemy, że gdy U osiąga wartość maksymalną, odległość płytek d staje się równa $\frac{2}{3}d_0$. Energia układu składa się z energii kondensatora $E_k = \frac{1}{2}CU^2$ oraz energii sprężystości $E_s = \frac{1}{2}k(d - d_0)^2$. Łatwo sprawdzić, że maksymalna wartość każdego ze składników występuje wtedy, gdy napięcie jest maksymalne. Przekształcając wyrażenia dochodzimy do wyniku

$$E_{\max} = \frac{5}{18}kd_0^2.$$

378. Człowiek stoi w windzie na wadze sprężynowej. Kiedy winda przejechała jedno piętro w górę, wskazania wagi zmieniały się według wykresu 1. Ile pięter przejedzie winda, jeśli przebieg wskazań wagi będzie opisany wykresem 2?

379. Pewna cienka soczewka ma w powietrzu ogniskową $f = 30$ cm, a w wodzie (współczynnik załamania $n_1 = 1,33$) – ogniskową $f_1 = 100$ cm.

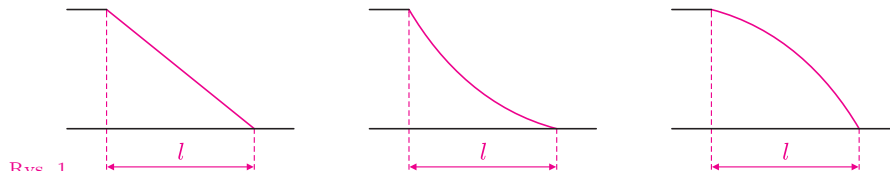
a) Ile wynosi ogniskowa tej soczewki w oleju o współczynniku załamania $n_2 = 1,45$?

b) Czy otrzymany wynik jest poprawny również wtedy, gdy soczewka jest w rzeczywistości zestawem sklejonych soczewek?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2004

Przypominamy treść zadań:

370. Górka ma jedno zбочce będące równią pochyłą, drugie zбочce jest wklęsłe, a trzecie – wypukłe (rys. 1), przy czym zarówno wysokość zбочcy, jak i długość rzutu na płaszczyznę poziomą są jednakowe.



Rys. 1

Dyzio zjechał sankami ze zбочca prostoliniowego i narzeka: „Marny dzisiaj śnieg, nawet na samym dole nie można się porządnie rozpędzić!”. Czy Dyzio rozpędzi się bardziej, gdy zjedzie z innego zбочca, a jeśli tak, to z którego? Współczynnik tarcia sanek o śnieg jest wszędzie taki sam, a opór powietrza pomijamy. Zabronione jest odpychanie się od podłoża.

371. Dwie równoległe płytki przewodzące o powierzchni S tworzą kondensator powietrzny. Jedna z płytek jest nieruchoma, a drugą przymocowano do sprężynki o stałej sprężystości k , przy czym dla sprężynki swobodnej odległość między płytkami jest równa d_0 (rys. 2). Jakie jest maksymalne napięcie, które można przyłożyć do takiego kondensatora, aby płytki się nie zetknęły? Jaką maksymalną energię może zgromadzić taki układ? Napięcie wzrasta stopniowo, tak że płytka nie zostanie wprawiona w drgania.

Patrz w niebo

Tytan, największy satelita Saturna, od dawna był znany jako jedyny w Układzie Słonecznym satelita mający „porządną” atmosferę. Stopniowo gromadzą się obserwacje, na podstawie których można wyrobić sobie wyobrażenie o pogodzie na Tytanie. Satelita w całości spowity jest w pomarańczową mgłę. Odpowiedzialna za to jest zawiesina kropelek różnych związków organicznych w atmosferze, której głównym składnikiem jest azot. Przypomina więc to bardzo gęsty smog nad miastem, wskutek czego nawet Voyager 1, który ponad 20 lat temu przeleciał w pobliżu Tytana, nie zaobserwował ani skrawka powierzchni satelity. Prowadzone z Ziemi obserwacje w podczerwieni dowodzą obecności metanowych chmur pokrywających najwyżej 1% powierzchni Tytana (bardzo rzadko więcej) i zmieniających się z godziny na godzinę. Unoszą się one na wysokości około 15 km, co świadczyłoby o intensywnej konwekcji w atmosferze, podobnie jak na Ziemi.

Trzeba jednak pamiętać, że Saturn z Tytanem znajdują się w przybliżeniu dziesięć razy dalej od Słońca niż Ziemia, zatem jednostka powierzchni dostaje tam sto razy mniej słonecznej energii. Przy tak słabym ogrzewaniu gruntu Tytana należałoby oczekiwać konwekcji również bardzo słabej. Grupa amerykańskich badaczy wysunęła więc hipotezę, że ciepło, utrzymujące metanowe chmury wysoko w atmosferze, jest ciepłem skraplania metanu. Na Ziemi podobne zjawisko czasami przejawia się w obszarach burzowych, przy czym – rzecz jasna – uwalniane jest wtedy ciepło skraplania wody. Małe rozmiary chmur i ich szybkozmiennosc sugerują, że w następstwie metanowego deszczu giną całkowicie i odradzają się gdzie indziej. Nie wiadomo, czy ten deszcz dociera do powierzchni Tytana, czy może krople wyparowują przed osiągnięciem gruntu. W tym roku do Saturna dotrze sonda Cassini i próbnik Huygens ma lądować na Tytanie w listopadzie. Zaprojektowany jest tak, aby wytrzymał zarówno lądowanie na twardym gruncie, jak i „wodowanie” w spodziewanym tam metanowym oceanie.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 1061.

Z zależności

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \leq \leq \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 1,$$

uzyskujemy $abc \geq a + b + c$, co kończy rozwiązanie zadania.

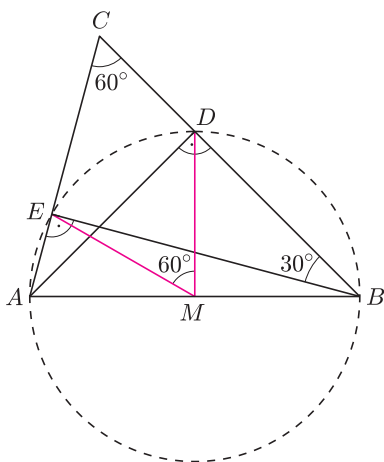


Rozwiązanie zadania M 1062.

Ponieważ

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = 90^\circ,$$

więc na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg, którego środkiem jest punkt M .



Stąd wynika, że $MD = ME$. Ponadto

$$\sphericalangle EMD = 2 \cdot \sphericalangle EBD = 60^\circ,$$

gdyż

$$\sphericalangle EBC = 90^\circ - \sphericalangle ACB = 60^\circ.$$

Zatem trójkąt DEM jest równoboczny.

Maj

Łuk, wyznaczony przez lekko wygięty ogon Wielkiej Niedźwiedzicy, trafia w jedną z najjaśniejszych gwiazd wiosennego i letniego nieba, Arktura, alfę Wolarza. Arktur jest pomarańczowym olbrzymem o temperaturze 4000 K, a więc chłodniejszym od Słońca, ale o rozmiarach 26 razy większych od słonecznych, przez co świeci ponad 100 razy silniej niż Słońce. Widzimy go jako gwiazdę bardzo jasną, ponieważ znajduje się stosunkowo blisko nas, w odległości 11 pc. Również dzięki temu Halley w 1717 roku odkrył jego ruch własny, mianowicie na podstawie porównania aktualnego jego położenia z położeniem określonym przez Hipparcha. Warto wiedzieć, że w czasach Halleya nie znano jeszcze odległości żadnej gwiazdy; pierwsze odległości wyznaczono ponad sto lat później. Na początku stycznia z północnej części Wolarza wybiega rój meteorów nazwanych Kwadrantydami, ponieważ obszar ten był dawniej niezależnym gwiazdozbiorem i nosił nazwę Kwadrantu.

Wenus znajduje się w Byku i jako Gwiazda Wieczorna osiąga 2 V swoją maksymalną jasność. Niedaleko ku wschodowi widać w Bliźniętach Marsa i Saturna, a jeszcze dalej – w Lwie – Jowisza. Merkury natomiast 14 V znajdzie się najdalej kątowno od Słońca, ale ku zachodowi, dlatego szukać go na niebie należy przed wschodem Słońca. Pełnia Księżyca wypada 4 V i nastąpi wtedy całkowite jego zaćmienie. Środek zaćmienia będzie około godz. 23 czasu letniego, a więc zjawisko będzie doskonale w Polsce widoczne. Nów Księżyca nastąpi 19 V, a 21 V Księżyc zakryje Wenus, ale u nas będzie wtedy niemal środek dnia. Warto jeszcze wspomnieć, że 24 V Mars i Saturn znajdują się we wzajemnej odległości około półtora stopnia.

T. K.

7,11

Z okazji Gammalimatiasu 7 · 11 pragnę przypomnieć konkurs 7,11, który ogłoszony został w *Delcie* 120 (12/1983). Obecna *Delta* ma numer trzykrotnie większy.

Zadanie w skrócie brzmiało następująco:

John Smith wybrał z obficie zaopatrzonych półek sklepu 7,11 cztery produkty i niemal natychmiast usłyszał głos kasjera.

– *Placi pan 7,11.*

– *Co? Za to? — zapytał.*

– *7 dolarów i 11 centów za zakupione towary. Po prostu odnotowałem ceny poszczególnych towarów, pomnożyłem i wyszło 7,11 — wyjaśnił kasjer.*

– *Panie, toż to trzeba dodać, a nie pomnożyć!*

– *Istotnie, przepraszam — palce kasjera znów zastukały w klawisze podręcznego komputerka — płaci pan 7,11.*

– *To są kpiny! — oburzył się John.*

– *Ależ skąd, proszę sprawdzić.*

Zadanie polegało na wyznaczeniu cen poszczególnych produktów zakupionych przez Johna Smitha. Tymi cenami były: 1,20, 1,25, 1,50 oraz 3,16.

Kiedy we wrześniu 2003 roku w Poznaniu Marek Kordos przypomniał mi ten problem z pytaniem, czy aby liczba 7,11 nie jest tu jakąś wyjątkową liczbą, odparłem w ciemno, że pewnie takich liczb jest bez liku, ale dopiero w domu mogłem to rzetelnie sprawdzić.

Szukamy rozwiązań równania

$$a + b + c + d = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

w liczbach dodatnich będących wielokrotnościami 0,01.

Łatwiejsza wersja zadania, w której występują tylko dwa produkty, ma 13 istotnie różnych rozwiązań: 4,00 = 2,00 * 2,00, 4,05 = 1,80 * 2,25, 4,50 = 1,50 * 3,00, 4,90 = 1,40 * 3,50, 6,25 = 1,25 * 5,00, 7,20 = 1,20 * 6,00, 8,41 = 1,16 * 7,25, 12,10 = 1,10 * 11,00, 14,58 = 1,08 * 13,50, 22,05 = 1,05 * 21,00, 27,04 = 1,04 * 26,00, 52,02 = 1,02 * 51,00, 102,01 = 1,01 * 101,00, gdzie $N = a * b$ oznacza $N = a + b = a \cdot b$.

W przypadku trzech produktów szukamy rozwiązań równania $a + b + c = a \cdot b \cdot c$ w liczbach dodatnich $a \leq b \leq c$ będących wielokrotnościami 0,01. Rozwiązań takich jest 622. W dwóch rozwiązaniach ceny pewnych dwóch produktów są równe. Rozwiązaniami tymi są 6,75 = 0,75 * 3,00 * 3,00 oraz 5,40 = 1,50 * 1,50 * 2,40. Najtańsze zakupy można zrobić za 5,25 = 1,50 * 1,75 * 2,00, a najdroższe za 1 000 300,02 = 0,01 * 100,01 * 1 000 200,00. Istnieją 23 kwoty zakupów, dla których zadanie ma dokładnie 2 rozwiązania, najmniejszą jest 6,60 = 0,80 * 2,50 * 3,30 = 1,10 * 1,50 * 4,00. Ponadto istnieją 3 kwoty zakupów, dla których zadanie ma dokładnie 3 rozwiązania, są to: 17,22 = 0,25 * 6,72 * 10,25 = 0,35 * 3,75 * 13,12 = 0,82 * 1,40 * 15,00, 23,10 = 0,20 * 7,50 * 15,40 = 0,25 * 5,25 * 17,60 = 1,00 * 1,10 * 21,00 oraz 35,91 = 0,21 * 5,70 * 30,00 = 0,50 * 2,16 * 33,25 = 0,76 * 1,40 * 33,75.

I wreszcie wyjściowe równanie $a + b + c + d = a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Ma ono 22640 istotnie różnych rozwiązań. Jednak kwota zakupów może przyjmować tylko 18960 różnych wartości, gdyż zadanie często ma więcej niż jedno rozwiązanie, co pokazuje poniższa tabela, z której odczytujemy na przykład, że istnieją 403 kwoty zakupów, przy których zadanie ma dokładnie 3 rozwiązania.

16709	1
1519	2
403	3
150	4
92	5
43	6
19	7
9	8
5	9
8	10
2	11
1	14

Zadanie ma 14 rozwiązań dla zakupów na łączną kwotę

$$\begin{aligned} 22,05 &= 0,07 * 4,48 * 6,25 * 11,25 = \\ &= 0,10 * 2,45 * 7,50 * 12,00 = \\ &= 0,10 * 2,50 * 7,20 * 12,25 = \\ &= 0,10 * 3,75 * 4,20 * 14,00 = \\ &= 0,15 * 1,40 * 10,00 * 10,50 = \\ &= 0,15 * 2,00 * 4,90 * 15,00 = \\ &= 0,25 * 0,80 * 10,50 * 10,50 = \\ &= 0,25 * 1,50 * 3,50 * 16,80 = \\ &= 0,30 * 0,75 * 7,00 * 14,00 = \\ &= 0,30 * 0,80 * 6,25 * 14,70 = \\ &= 0,35 * 0,70 * 6,00 * 15,00 = \\ &= 0,35 * 1,20 * 3,00 * 17,50 = \\ &= 0,40 * 1,00 * 3,15 * 17,50 = \\ &= 0,70 * 1,20 * 1,40 * 18,75. \end{aligned}$$

W 747 rozwiązaniach ceny pewnych dwóch produktów są równe. Nie ma rozwiązań z trzema produktami w jednej cenie, ani rozwiązań z dwiema parami produktów w jednej cenie.

Zakupy za 9,60 można zrobić na trzy sposoby, ale za każdym razem trzeba wziąć dwa produkty o takiej samej cenie: 9,60 = 0,60 * 1,00 * 4,00 * 4,00 = 0,80 * 0,80 * 3,00 * 5,00 = 1,00 * 1,00 * 1,60 * 6,00.

Z kolei przy zakupach za 31,50 w trzech z sześciu przypadków towary mają różne ceny: 31,50 = 0,05 * 3,20 * 12,50 * 15,75 = 0,10 * 1,40 * 15,00 * 15,00 = 0,20 * 1,05 * 6,25 * 24,00 = 0,35 * 0,40 * 12,00 * 18,75 = 0,50 * 1,50 * 1,50 * 28,00 = 0,75 * 0,75 * 2,00 * 28,00.

Najtańsze zakupy można zrobić za 6,44 = 1,25 * 1,60 * 1,75 * 1,84, podczas gdy zakup 5 produktów to wydatek co najmniej 7,59 = 1,25 * 1,25 * 1,60 * 1,65 * 1,84.

Jedno z rozwiązań może posłużyć do sformułowania następującej wersji zadania:

Bill Gates wybrał z obficie zaopatrzonych półek sklepu cztery produkty i niemal natychmiast usłyszał głos kasjera.

– *Placi pan 10 000 040 000,03.*

– *Co? Za to? — zapytał,*

– *10 miliardów 40 tysięcy dolarów i 3 centy za zakupione towary. Po prostu odnotowałem ceny poszczególnych towarów, pomnożyłem i wyszło 10 000 040 000,03 — wyjaśnił kasjer.*

– *Panie, toż to trzeba dodać, a nie pomnożyć!*

– *Istotnie, przepraszam — palce kasjera znów zastukały w klawisze podręcznego komputerka — płaci pan 10 000 040 000,03.*

– *To są kpiny! — oburzył się Bill.*

– *Ależ skąd, proszę sprawdzić.*

I TO JUŻ KONIEC...

To już ostatni numer Gammalimatiasu.

Wszystkim Czytelnikom, którzy wytrwali tak długo, składam serdeczne podziękowania.

Korespondencję do *Gamma*-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl