

## SPIS TREŚCI NUMERU 4 (359)

O niedefiniowalności <i>Andrzej Grzegorzczak</i>	str. 1
Kiedy Darwin spotka Mendla? Teoria gier w genetyce <i>Jacek Miękiś</i>	str. 4
Jak się mierzy objętość nitką? <i>Piotr Hajłasz, Paweł Strzelecki</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Elektronowy bilard <i>Agnieszka Maria Marcinkowska</i>	str.10
Zadania	str.12
Aktualności	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Kwiecień	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski  
 Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa.

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numerzy archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:

Europa

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Anegdota ta zachowała się w pismach pisarza greckiego Diogenesa Laertiosa, które zawierają szereg anegdot historycznych oraz ważne przekazy poglądów wcześniejszych greckich filozofów.

Najpierw wstęp anegdotyczno-historyczny. Już starożytni Grecy wiedzieli, że aby dowieść niedefiniowalności jakiegoś pojęcia za pomocą pewnej wybranej aparatury pojęciowej, trzeba wskazać przedmiot, który spełnia warunki definicji, a najwyraźniej nie jest tym, co chcieliśmy zdefiniować. Tak więc, gdy jeden mądry Grek (chyba Platon) powiedział, że człowieka można zdefiniować jako *dwunóg bezpióry*, to drugi mądry Grek przyprowadził mu oskubanego koguta i pokazał, że zgodnie z definicją tego pierwszego Greka, to też jest człowiek. Wszyscy wówczas uznali, że definicja Platona jest zła, bo przecież człowiek i kogut to dwa bardzo różne przedmioty, jeśli więc oba spełniają tę formułę, którą miał spełniać tylko człowiek, to formuła ta nie może służyć za definicję pojęcia *człowiek*.

Współczesna metodologia nauk dedukcyjnych ten sposób postępowania doskonalili i uogólnili. Można uważać, że uogólnienie zostało spowodowane w znacznym stopniu tym, że mamy obecnie dużo papieru i piszemy na nim dużo różnych formuł. Wobec tego potrafimy sobie też wyobrazić, że różnego rodzaju formuł jest nieskończenie wiele i tworzą logiczne systemy. Możemy na ich temat snuć rozważania, tak jak starożytni Grecy na temat figur geometrycznych, które znali z rysunku i budownictwa.

Mówimy więc dziś ogólnie następująco.

*Jeśli  $X$  jest zbiorem zdań zapisanych za pomocą pojęć  $A, B, C, D$  i istnieją przedmioty:  $A, B, C, D_1$  i  $D_2$ , takie że:*

- a) przedmioty  $A, B, C, D_1$  spełniają zdania zbioru  $X$  (przy rozumieniu pojęć  $A, B, C, D$  jako nazw dla przedmiotów  $A, B, C, D_1$ ) oraz
- b) przedmioty  $A, B, C, D_2$  również spełniają zdania zbioru  $X$  (przy rozumieniu pojęć  $A, B, C, D$  jako nazw dla przedmiotów  $A, B, C, D_2$ ) i przy tym
- c) przedmioty  $D_1$  i  $D_2$  są różne:  $D_1 \neq D_2$ ,

wówczas pojęcie  $D$  nie jest definiowalne za pomocą pojęć  $A, B, C$  w oparciu o zdania zbioru  $X$ .

Do wyrażenia tej prawdy lubimy dziś używać słowa *model*. Mówimy wówczas, że:

**Twierdzenie 1.** Jeśli istnieją dwa modele  $\langle A, B, C, D_1 \rangle$  i  $\langle A, B, C, D_2 \rangle$  dla zdań zbioru  $X$ , takie że  $D_1 \neq D_2$ , to pojęcie  $D$  nie jest definiowalne za pomocą pojęć  $A, B, C$  w oparciu o zdania zbioru  $X$ .

Dowód tej zależności uważa się dziś w logice za trywialny. Gdyby bowiem istniała definicja pojęcia  $D$ , logicznie wynikająca ze zbioru zdań  $X$ , to znaczy, że istniałaby formuła definiująca. Na przykład gdyby  $D$  było relacją dwuargumentową, to byłaby to formuła w postaci równoważności:

$$(1) \quad D(x, y) \equiv \dots A, B, C, \dots x, y, \dots,$$

w której po prawej stronie (w tzw. definiensie) występowałyby tylko pojęcia  $A, B, C$ .

Otóż w takiej sytuacji moglibyśmy dowieść, że  $D_1 = D_2$ . W takiej bowiem sytuacji zgodnie z punktami a) i b) musiałyby być prawdziwe zdania o postaci dającej się schematycznie zapisać następująco:

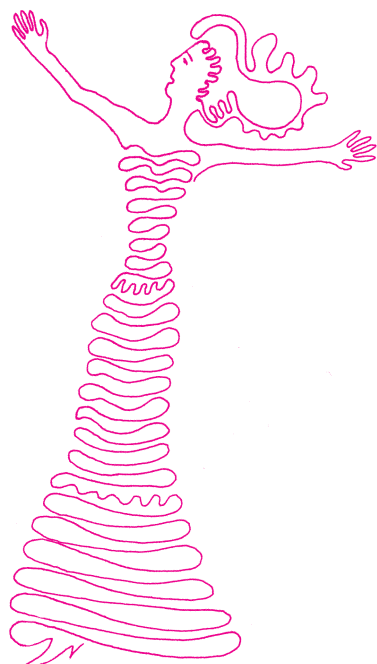
$$(2) \quad D_1(x, y) \equiv \dots A, B, C, \dots x, y, \dots$$

oraz

$$(3) \quad D_2(x, y) \equiv \dots A, B, C, \dots x, y, \dots$$

Ze zdań (2) i (3) na mocy przechodności spójnika równoważności logicznej wynika, że  $D_1(x, y) \equiv D_2(x, y)$ , czyli że  $D_1 = D_2$ .

Twierdzenie 1 wypowiada się też czasem z użyciem pojęcia *interpretacja*, mówiąc: *jeśli istnieją dwie interpretacje teorii  $X$ , takie że pojęcia  $A, B, C$  przy obu interpretacjach interpretują się tak samo, a pojęcie  $D$  interpretowane jest w każdej z nich inaczej, wówczas pojęcie  $D$  nie jest definiowalne za pomocą pojęć  $A, B, C$  na gruncie teorii  $X$ .*



Przykład prosty, ale pouczający.

**Twierdzenie 2.** W elementarnej arytmetyce liczb naturalnych relacja mniejszości  $<$  nie jest definiowalna przez pojęcia *zero* i *następnik*.

Dowód. Opisujemy najpierw zbiór zdań, na których się opieramy. Opieramy się mianowicie na zdaniach, które mogą służyć za aksjomaty dla pojęć *zero*, *następnik*, *mniejszość*. Są to zdania:

- |   |  |
|---|--|
| $A_0)$ $x \neq 0 \implies \exists y (x = S(y))$   | $A_4)$ $x < y \implies \neg(y < x)$          |
| $A_1)$ $0 \neq S(x)$  | $A_5)$ $(x < y \wedge y < z) \implies x < z$ |
| $A_2)$ $S(x) = S(y) \implies x = y$   | $A_6)$ $x < y \vee y < x \vee x = y$         |
| $A_{3k})$ $x \neq \underbrace{S(\dots S(x) \dots)}_{k \text{ znaków następnika, } k > 0}$ | $A_7)$ $x < S(y) \equiv (x < y \vee x = y)$  |
| (nieskończony ciąg aksjomatów)  | $A_8)$ $0 < S(x)$                            |
|   | $A_9)$ $x < y \equiv S(x) < S(y)$ .          |

Aksjomaty  $A_0$ – $A_{3k}$  dają zupełną aksjomatykę dla pojęć *zero* i *następnik*.

Jeśli mamy wykazać, że z aksjomatów  $A_0$ – $A_9$  nie można wyprowadzić zdania, które mogłoby być definicją równoważnościową relacji mniejszości, to musimy, zgodnie z opisaną wyżej metodą dowodzenia niedefiniowalności, znaleźć taki model dla zera i następnika, który dopuszczałby dwie różne interpretacje dla mniejszości, tak aby w obu przypadkach wszystkie aksjomaty  $A_0$ – $A_9$  były spełnione.

Pierwsza ważna refleksja to zauważenie, że modelem tym nie mogą być prawdziwe liczby naturalne z prawdziwym zerem i następnikiem. W nim bowiem jest tylko jedna taka relacja, która spełnia aksjomaty  $A_0$ – $A_9$ . Jest nią prawdziwa relacja mniejszości wśród liczb naturalnych. Z tego, że jest jedna jedyna, wcale nie wynika, że musi być definiowalna. Musimy więc szukać modelu, który nie jest izomorficzny ze zbiorem liczb naturalnych. Takie modele są zwane **modelami niestandardowymi**. Warto się przyjrzeć, jaka jest struktura modeli niestandardowych dla arytmetyki liczb naturalnych.

Modele takie łatwo sobie wyobrazić. Składają się one z części początkowej, która jest standardowa, a następnie z części, która jest izomorficzna ze zbiorem wszystkich liczb całkowitych, ewentualnie powtórzonej jeszcze jakąś ilość razy. Dla rozważań o następniku i mniejszości wystarczą dwie takie części. Na osi liczb rzeczywistych model taki łatwo narysować i oznaczyć liczbami wymiernymi. Zajmiemy się jednym z nich.

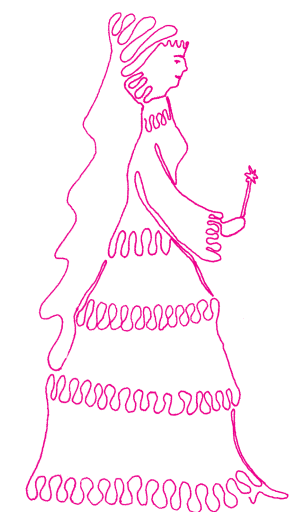
Model opisywany składa się z trzech zbiorów liczb wymiernych:  $N$ ,  $X$ ,  $Y$ . Mogą być one określone np. następująco:

$$(4) \quad N = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}, \quad X = \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} \right\} \cup \left\{ 2 + \frac{n}{n+1} \right\}, \quad Y = \left\{ 3 + \frac{1}{n+1} \right\} \cup \left\{ 4 + \frac{n}{n+1} \right\}.$$

Przyjmujemy, że  $n$  przebiega liczby naturalne (całkowite nieujemne).

Pod względem relacji mniejszości zbiór ułamków  $N$  jest izomorficzny ze zbiorem liczb naturalnych. Ma element najmniejszy 0, a wszystkie inne mają poprzedni i następny. Ciąg zaczynający się od 0 wyczerpuje zbiór  $N$ . Natomiast zbiory  $X$  i  $Y$  są izomorficzne ze zbiorem liczb całkowitych (nie mają elementu najmniejszego, ani największego).

Model, który wykazuje niedefiniowalność *mniejszości* przez *następnik* i *zero*, określamy, ustalając zbiór wszystkich elementów modelu (nazwijmy go  $M$ ) oraz ustalając interpretacje pojęć pierwotnych teorii:



- 1) Zbiór  $M$  określamy jako sumę zbiorów wyżej opisanych:  $M = N \cup X \cup Y$ .
- 2) Zero interpretujemy jako liczbę wymierną 0.
- 3) Następnikiem liczby wymiernej  $r \in M$  nazywamy liczbę zbioru  $M$ , która jest najmniejszą (w sensie relacji mniejszości wśród liczb wymiernych) spośród większych od  $r$  i należących do zbioru  $M$ . Liczbę tę oznaczmy przez  $s(r)$ .
- 4) Natomiast relację mniejszości będziemy interpretować dwojako. Przyjmijmy, że  $<$  oznacza prawdziwą

mniejszość wśród liczb wymiernych tworzących zbiór  $M$ . Dwie interpretacje pojęcia mniejszości z teorii  $A_0$ – $A_9$  oznaczmy przez  $<_1$  oraz  $<_2$ . Definiujemy je następująco:

$$4a) \quad r <_1 s \equiv r < s \text{ dla wszelkich } r, s \in M.$$

Na temat relacji  $<_2$  umawiamy się tak:

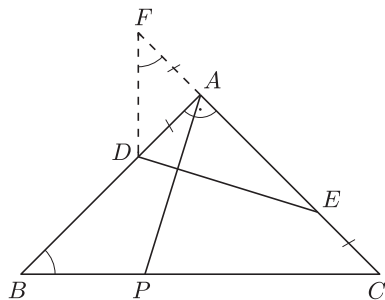
$$4b) \quad \text{jeśli } r \notin Y, \text{ to } r <_2 s \equiv r < s,$$

$$4c) \quad \text{jeśli } r \in Y, \text{ to}$$

$$r <_2 s \equiv ((r < s \wedge s \in Y) \vee s \in X).$$

**Rozwiązanie zadania M 1058.**

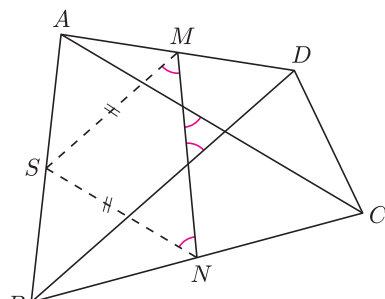
Niech  $F$  będzie takim punktem półprostej  $CA^{\rightarrow}$ , leżącym poza odcinkiem  $AC$ , że  $AF = AD$ .



Wówczas  $\sphericalangle DFE = 45^\circ = \sphericalangle PBA$ . Ponadto  $\sphericalangle FED = \sphericalangle BAP$  oraz  $EF = AC = AB$ . Z równości tych wynika, że trójkąty  $DEF$  i  $PAB$  są przystające. Zatem  $AP = DE$ .

**Rozwiązanie zadania M 1059.**

Niech  $S$  będzie środkiem boku  $AB$ .



Wówczas  $MS = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = NS$ . Z równości tych wynika, że prosta  $MN$  tworzy równe kąty z prostymi  $MS$  i  $NS$ . To w połączeniu z zależnościami  $MS \parallel BD$  i  $NS \parallel AC$  – prawdziwymi na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa – daje tezę.

Nie jest to zupełna aksjomatyka dodawania. Zupełna aksjomatyka wraz z dowodem zupełności opisana jest również w cytowanej książce s. 239 i nast. Dla zupełnej dowód niedefiniowalności będzie trudniejszy.

Z określenia 4a) widać, że  $<_1$  jest mniejszością wśród liczb wymiernych. Natomiast z określeń 4b) i 4c) wynika, że mniejszość  $<_2$  pokrywa się z mniejszością wśród liczb wymiernych tylko wtedy, gdy  $r$  i  $s$  razem należą do  $N \cup X$  lub razem należą do  $N \cup Y$ . Natomiast gdy  $r \in X$  i  $s \in Y$ , to wówczas zgodnie z (4) i 4b) nie zachodzi  $s <_1 r$ , ale zgodnie z 4c) zachodzi  $s <_2 r$ .

Związek między relacjami  $<_1$  i  $<_2$  można opisać też tak: Wewnątrz zbiorów  $N, X, Y, N \cup X, N \cup Y$  relacje te pokrywają się ze sobą i z relacją mniejszości wśród liczb wymiernych. Natomiast gdy  $s \in Y$ , a  $r \in X$ , to wówczas zachodzi  $s <_2 r$  zgodnie z 4c), a nie zachodzi  $s <_1 r$  zgodnie z 4a), ponieważ wszystkie liczby wymierne zbioru  $Y$  są większe od liczb zbioru  $X$  w sensie relacji  $<$  zgodnie z określeniami (4) tych zbiorów.

Można powiedzieć, że przechodząc od relacji  $<_1$  do relacji  $<_2$ , cały zbiór  $Y$  przesuwamy przed zbiór  $X$  między zbiór  $N$  i zbiór  $X$ , nie zmieniając pozostałych związków mniejszości między elementami zbioru  $M$ . Można to schematycznie narysować tak:  $N <_1 X <_1 Y, N <_2 Y <_2 X$ . W szczególności mamy więc, że:  $2 <_1 4$  i  $4 <_2 2$ . Relacje  $<_1$  i  $<_2$  są więc różne. Natomiast łatwo jest sprawdzić, że obie spełniają wszystkie aksjomaty  $A_0$ – $A_9$ . Zgodnie z Twierdzeniem 1 dowodzi to, że z aksjomatów tych nie może wynikać żadna formuła elementarna (czyli nie odwołująca się do pojęcia zbioru), która mogłaby być definicją mniejszości sformułowaną za pomocą zera i następnika.

Ze spełnianiem aksjomatów następnika w modelu niestandardowym można się pogodzić, jeśli sobie uświadomimy różnicę między częścią standardową  $N$  tego modelu oraz pozostałą częścią  $X \cup Y$ , którą możemy nazwać niestandardowym ogonem tego modelu. W części standardowej  $N$  wszystko jest w dobrym porządku. Natomiast ogon przypomina bardzo dalekie od zera kawałki części standardowej  $N$ . Każdy element zbioru  $N$  możemy wyraźnie opisać za pomocą funkcji interpretującej następnik. Na zbiór  $N$  składają się elementy ciągu

$$\{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), s(s(s(s(0))))\}, \text{ itd.}$$

Tylko gdy mówimy o elementach generowanych przez 0 i funkcję  $s$ , to mamy pewność, że mówimy tylko o elementach standardowych modelu. Natomiast dla każdej właściwości, którą posiada nieskończenie wiele elementów ciągu  $N$ , a więc dla właściwości, która nie może być opisana przez wskazanie wszystkich elementów ją posiadających, istnieją również w tym ogonie dalsze elementy zbioru  $M$ , nieodróżnialne za pomocą żadnej formuły od tych elementów, które należą do  $N$  i posiadają tę właściwość.

Istnienie modeli niestandardowych dla arytmetyki stanowi fakt dla matematyków poniekąd przykry. Pokazuje on, że teoretyczne narzędzia, którymi dysponujemy w badaniu matematycznym, czyli budowanie teorii i dowodzenie twierdzeń, nie gwarantują, że będziemy dobrze charakteryzować to i tylko to, co chcemy. Zawsze ktoś pokaże, że to, co twierdzimy, odnosi się też do jakiejś dziwnej rzeczywistości, której wcale opisywać nie chcieliśmy. Ale dla tych, co są zainteresowani też naszym ludzkim poznawaniem świata, spostrzeżenie to jest interesujące, chociaż pokazuje raczej pewną ograniczoność naszej wiedzy. Jeśli dodamy pojęcie zbioru, wówczas za pomocą samego następnika i pojęcia zbioru możemy zdefiniować wszystkie funkcje czy relacje arytmetyczne, które zechcemy. Ale wówczas logicy potrafią wskazać, że samo pojęcie zbioru ma wiele interpretacji, których może nie chcieliśmy.

Na zakończenie dwa zadania, które wykonać można również, zajmując się niestandardowymi modelami arytmetyki:

1. Dowieść, że dodawanie nie jest definiowalne przez zero, następnik i mniejszość. (Dodając np. do aksjomatów powyższych jeszcze dwa indukcyjne warunki dla dodawania:  $x + 0 = x$ , oraz  $x + S(y) = S(x + y)$ .)
2. Dowieść, że mnożenie nie jest definiowalne przez dodawanie. Fakt ten jest znany jako konsekwencja tego, że arytmetyka dodawania jest rozstrzygalna, a dodawania i mnożenia nie jest rozstrzygalna, ale pokazanie niedefiniowalności na modelach mogłoby być interesujące.

# Kiedy Darwin spotka Mendla? Teoria gier w genetyce

Jacek MIEKISZ

**Charles Darwin** (1809–1882) – student medycyny, prawa i teologii. Zaproszony w 1831 roku przez kapitana statku Beagle do towarzyszenia mu w pięcioletniej wyprawie dookoła świata. Wnioski ze swoich obserwacji zamieścił 28 lat później w epokowym dziele „O powstawaniu gatunków”.

A oto darwinowska teoria ewolucji w pigułce:

*przypadkowa mutacja doprowadza do powstania nielicznych osobników lepiej przystosowanych do otoczenia, co powoduje, że mają więcej potomstwa, które dziedziczy nowe cechy. Powoli z generacji na generację nowy gatunek zaczyna wypierać stary.*

**Gregor Mendel** (1822–1884) – nauczyciel, zakonnik, ogrodnik, uprawiał groszek, krzyżował różne jego odmiany. Swoje wnioski opublikował w 1866 roku.

Następujące krótkie wprowadzenie do genetyki podsumowuje jego wielkie dzieło.

*Każda nasza komórka (oprócz rozrodczych) zawiera 23 pary chromosomów, na których są rozmieszczone geny, nasz plan na przyszłość. Załóżmy, nieco upraszczając, że na odpowiednim miejscu na chromosomie może znajdować się jedna z wielu odmian genu odpowiedzialnego za określony fenotyp – cechę organizmu, taką jak kolor oczu lub jego zachowanie. W przypadku dwóch takich odmian A i a (zwanymi allelami) na dwóch chromosomach możliwe są cztery genotypy: AA, Aa, aA i aa. W procesie mejozy powstają komórki rozrodcze mające tylko po jednym chromosomie z każdej pary, czyli tylko połowę materiału genetycznego. Każdy z nas w momencie poczęcia, przy połączeniu komórek rozrodczych, otrzymuje połowę genów od matki i połowę od ojca. Przykładowo genotyp aa odpowiada oczom niebieskim, pozostałe trzy genotypy Aa, aA, AA odpowiadają oczom brązowym. Mówimy wtedy, że allel a jest genem recesywnym, a fenotyp oczu niebieskie fenotypem recesywnym.*

Wróćmy do Darwina i Mendla. Nigdy się nie spotkali, a ich teorie dotyczące dziedziczenia były całkowicie odmienne. Wykonali takie same doświadczenia (Mendel na groszku, Darwin na lwich paszczach), otrzymali takie same wyniki. Mendel stał się ojcem genetyki i pierwszym biologiem matematycznym, Darwin pozostał „tylko” twórcą teorii ewolucji (czyżby dlatego, że nie cierpiał matematyki, jak sam o tym wspominał?).

## Ewolucja genotypowa

– prawo Hardy’ego–Weinberga

Pewien krytyk mendelianizmu w Wielkiej Brytanii twierdził, że jeśli teoria Mendla jest poprawna, to biorąc po uwagę, że krótkie palce są cechą dominującą, a normalne recesywną, nie powinno już być ludzi z normalnymi palcami. Pewnego dnia 1908 roku, podczas lunchu w klubie pracowniczym Uniwersytetu Cambridge, młody genetyk opowiedział o tym problemie wielkiemu matematykowi Godfreyowi Hardy’emu. Hardy stwierdził, że problem jest niezwykle prosty i rozwiązał go na serwetce. Wykazał, że częstość genów nie powinna się zmieniać w czasie, jeżeli tylko nie zachodzi naturalna selekcja Darwina. A oto zawartość tej historycznej serwetki.

Niech  $x_1, \dots, x_n$  będą częstościami występowania alleli  $A_1, \dots, A_n$  w populacji, a  $x_{ij}$  częstościami odpowiednich genotypów  $A_i A_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Każdy allel z jednakowym prawdopodobieństwem  $1/2$  może pochodzić od matki lub od ojca i w związku z tym mamy

$$(1) \quad x_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_{ji}.$$

Zakładając, że komórki rozrodcze łączą się w sposób zupełnie losowy, otrzymujemy częstość genotypów  $A_i A_j$  w czasie  $t + 1$  jako funkcję częstości alleli w czasie  $t$

$$(2) \quad x_{ij}(t + 1) = x_i(t)x_j(t).$$

Obliczmy teraz częstości alleli w czasie  $t + 1$ .

$$(3) \quad x_i(t + 1) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_{ij}(t + 1) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_{ji}(t + 1) = \sum_{j=1}^n x_i(t)x_j(t) = x_i(t),$$

co kończy dowód Hardy’ego.

Ale przecież nie wszystkie genotypy są jednakowo przystosowane do środowiska. Niech  $w_{ij}$  oznacza prawdopodobieństwo tego, że genotyp  $A_i A_j$  przetrwa do wieku rozrodczego (zakładamy, że  $w_{ij} = w_{ji}$ ). Poprosimy teraz ambitnego Czytelnika, aby wyprowadził następujące równanie różnicowe:

$$(4) \quad x_i(t + 1) = x_i(t) \frac{\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(t)}{\sum_{i,j=1}^n w_{ij} x_i(t) x_j(t)}.$$

Jest to **podstawowe równanie genetyki populacyjnej**. Wielkość występująca w mianowniku nazywana jest **średnim przystosowaniem populacji**. Oznaczmy ją przez  $W(t)$ .

**Fundamentalne twierdzenie naturalnej selekcji** mówi nam, że **średnie przystosowanie wzrasta zgodnie ze wzorem (4)**:  $W(t + 1) \geq W(t)$ .

## Ewolucja fenotypowa – równanie replikatorowe teorii gier

Do tej pory zajmowaliśmy się analizą ewolucji częstości genów w populacji, ale przecież teoria Darwina opisuje zmianę cech populacji, czyli jej fenotypów. Ujmijmy ten problem na gruncie teorii gier.

Wyobraźmy sobie dwóch osobników, których celem jest zdobycie pewnego terytorium o wartości  $V$ . Każdy z nich ma do wyboru dwie strategie: agresywną strategię jastrzębia ( $J$ ) i uległą strategię gołębia ( $G$ ). Dwa jastrzębie będą walczyć ze sobą, ponosząc koszty walki (czyli obniżając wartość terytorium o  $C$ ), a następnie każdy z nich obejmie w posiadanie swoją połowę terytorium. Gołąb, spotkawszy jastrzębia, oddaje mu bez walki całe terytorium. Gdy spotykają się dwa gołębie, to dzielą między siebie terytorium. Jak widzimy, wypłata każdego gracza zależy od jego strategii i od strategii oponenta. Wypłaty możemy więc zapisać w postaci macierzy  $2 \times 2$ , której element  $u_{ij}$  jest wypłatą gracza pierwszego (wierszowego) grającego strategią  $i$ , podczas gdy gracz drugi (kolumnowy) gra strategią  $j$ . W naszym przypadku, zakładając że  $V = 4$  i  $C = 6$ , otrzymujemy:

$$U = \begin{matrix} & J & G \\ J & -1 & 4 \\ G & 0 & 2 \end{matrix}$$

Gra jest symetryczna, co oznacza, że wypłaty gracza drugiego dane są przez macierz transponowaną do  $U$ . Gra jest rozgrywana w ten sposób, że gracze jednocześnie ogłaszają swoje strategie i dostają odpowiednie wypłaty.

Wyobraźmy sobie teraz, że mamy dużą populację jastrzębi i gołębi, które łączą się w pary i rozgrywają powyższą grę. Oznaczmy przez  $r_J$  i  $r_G$  liczbę osobników grających w danej chwili odpowiednio strategią  $J$  i  $G$ ,  $r = r_J + r_G$  jest całkowitą liczbą osobników, a  $x = r_J/r$  jest procentową częstością jastrzębi w populacji. Wypłaty graczy to liczba potomstwa w następnej generacji. Dzieci dziedziczą fenotypy, to jest zachowanie swoich przodków. Zapisujemy to w następującym równaniu, gdzie wypłaty podzieliliśmy przez całkowitą liczbę graczy (czyli tak naprawdę napisaliśmy równanie na średnie – gracz trafia z prawdopodobieństwem  $x$  na jastrzębia i z prawdopodobieństwem  $1 - x$  na gołębia,  $U_J(x) = -x + 4(1 - x)$  jest więc średnią wypłatą jastrzębia, a  $U_G(x) = 0 \cdot x + 2(1 - x)$  gołębia):

$$(6) \quad r_J(t+1) = r_J(t) + r_J(t)(-x(t) + 4(1 - x(t))),$$

$$(7) \quad r_G(t+1) = r_G(t) + r_G(t)(0 \cdot x(t) + 2(1 - x(t))).$$

Sumując stronami równania (6) i (7), uzyskujemy

$$(8) \quad r(t+1) = r(t) + r(t)\bar{U}(x(t)),$$

gdzie

$$\bar{U}(x(t)) = x(t)U_J(x(t)) + (1 - x(t))U_G(x(t))$$

jest średnią wypłatą w populacji. Dzielic (6) przez (8), uzyskujemy

$$(9) \quad x(t+1) = x(t) \frac{1 + U_J(x(t))}{1 + \bar{U}(x(t))}.$$

Jest to jedno z głównych równań teorii gier ewolucyjnych – **różnicowe równanie replikatorowe**. Opisuje ono zmianę w czasie częstości strategii w populacji. Zauważmy, że jeżeli rozpoczniemy ewolucję w punktach  $x = 0$  lub  $x = 1$ , to zawsze w nich pozostaniemy – są to punkty stacjonarne powyższego równania. Punktem takim jest również  $x_m = 2/3$ , dla którego  $U_J(x) = U_G(x)$ . Można się przekonać, że przeprowadzając prosty eksperyment numeryczny, że jeżeli wystartujemy z każdego niestacjonarnego punktu, to będziemy się zbliżać do  $x_m$ . Jest to kalkulatorowy „dowód” zbieżności

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_m.$$

Mówimy, że  $x_m$  jest asymptotycznie **stabilnym punktem równowagi**.

W miarę upływu czasu populacja będzie się zbliżać do stabilnego stanu, w którym  $2/3$  osobników gra strategią jastrzębia, a  $1/3$  gołębia.

## Ewolucja genotypowo-fenotypowa

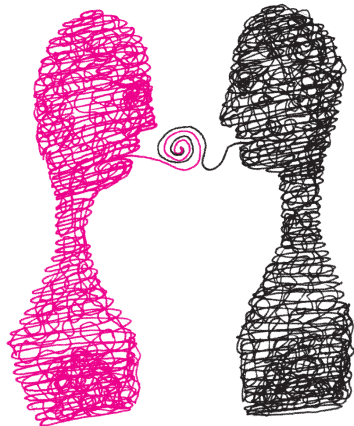
Genetyka nakłada na powyższy obraz ewolucji pewne ograniczenia. Punktem asymptotycznie stabilnym nie może być stan populacji, w którym wszyscy osobnicy mają taki sam fenotyp (czyli grają taką samą strategią) odpowiadający heterozygotycznemu genotypowi (typu  $Aa$  lub  $aA$ ). Podczas połączenia genów od matki i ojca mogą powstawać również genotypy homozygotyczne (typu  $AA$  lub  $aa$ ) odpowiadające innym fenotypom. Połączmy równanie selekcji (4) i równanie replikatorowe (9). Niech  $w_{ij}$  w (4) zależy od częstości występowania poszczególnych genotypów w następujący sposób. Niech genotyp  $A_i A_j$  odpowiada fenotypowi  $F_{ij}$ ,  $w_{ij} = U(F_{ij}, q)$  będzie średnią wypłatą ze strategii  $F_{ij}$ , gdzie  $q = \sum_{i,j} x_{ij} F_{ij}$  jest średnią strategią w populacji.

Założmy teraz, na przykład, że fenotyp gołębia odpowiada genotypowi  $A_1 A_1$ , a jastrzębia pozostałym trzem genotypom. Możemy wtedy napisać i następnie zbadać odpowiednie równanie różnicowe. Pozostawiamy to zadanie ambitnym Czytelnikom.

Jak już wiemy, genetyczne uwarunkowania mogą nie pozwolić na osiągnięcie fenotypowo najlepszego przystosowania do środowiska. Chyba że pozwolimy ewoluować również układowi genetycznemu. Tramwajowa teoria ewolucji mówi, że dość szybko ewoluujemy do najlepszego przystosowania w ramach ograniczeń genetycznych. Dojeżdżamy do przystanku, gdzie musimy poczekać na mutację genetyczną, aż wreszcie po wielu przystankach dojedziemy do zajezdni największego przystosowania, tam gdzie Charles Darwin spotka wreszcie Gregora Mendla.

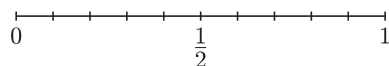
# Jak się mierzy objętość nitką?

Piotr HAJŁASZ, Paweł STRZELECKI

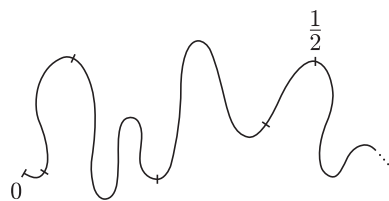


Czy przyszło Wam kiedyś do głowy, drodzy Czytelnicy, zmierzyć nitką objętość? Albo pole? Nie chodzi nam tu o czyjeś mgliste domysły w rodzaju *Ta paczka musi być olbrzymia, skoro Ciocia Hela zmarnowała trzy kłębki sznurka, żeby ją obwiązać*. Nie zadowala nas również odpowiedź *Oczywiście – mogę wymierzyć nitką mój pokój; jest to prostokąt o bokach 3 i 4 m, więc jego pole jest równe 12 m<sup>2</sup>*. Chodzi nam o swoistą czarną skrzynkę, która pozwoliłaby określać objętość wszelkich rozsądnych przedmiotów poprzez odczytywanie długości pewnych odcinków.

Oto zarys pomysłu: spróbujmy przez chwilę pomarzyć i wyobraźmy sobie idealną, doskonale elastyczną i nieskończenie cienką nitkę, na której naniesiono podziałkę do mierzenia długości. Wyobraźmy sobie następnie, że owa nitka zostaje bardzo gęsto upakowana we wnętrzu sześcianu – jakiś Dzielny Krawczyk, skądinąd znacznie dzielniejszy niż bohater znanej baśni braci Grimm, rozciąga ją do woli (wraz z podziałką!) i, wywijając igłą, układa przemyślnie w coraz dziwniejsze esy-floresy, w taki sposób, że koniec końców powykręcana nitka przechodzi przez każdą drobinę wnętrza sześcianu, przez każdy milimetr i nanometr sześciennej, o którym Czytelnik w ogóle zdoła pomyśleć. Objętość mierzymy w następujący sposób: jeśli pewna część sześcianu jest wypełniona, powiedzmy, czerwonym barwnikiem, to trzeba odczytać z podziałki, jaka była łączna długość (uwaga: wyjściowa długość, *przed* rozciąganiem!) zabarwionych na czerwono kawałków nitki – i ta łączna długość jest równa objętości czerwonego barwnika. W ogóle nie jest ważne, gdzie się barwnik znajduje, ile go jest i jaki kształt ma wypełniona przezeń część sześcianu. Brzmi to zaskakująco, niemal magicznie, a mimo to jest możliwe, w tym samym abstrakcyjnym i całkowicie niefizycznym sensie, w jakim możliwych jest tak wiele cudownych rzeczy w matematyce.



Rys. 1



Rys. 2

Oto nieco dokładniejszy, rysunkowy opis sposobu, w jaki mierzy się objętość dowolnych podzbiorów sześcianu za pomocą nitki.

Na rysunku 1 przedstawiona jest elastyczna nitka z podziałką. Nitka to po prostu odcinek długości 1.

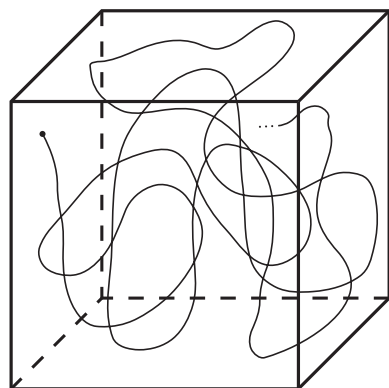
Rozciągamy nitkę (rys. 2); podziałka rozciąga się wtedy nierównomiernie. W istocie jeden z końców nitki rozciągamy tak bardzo, że nitka staje się nieskończenie długa.

Rozciągniętą nitkę w odpowiednio przemyślany sposób gęsto upychamy w sześcianie (rys. 3). Teraz wyobraźmy sobie, że chcemy zmierzyć objętość pewnej – skądinąd całkowicie dowolnej i być może bardzo nieregularnej części sześcianu.

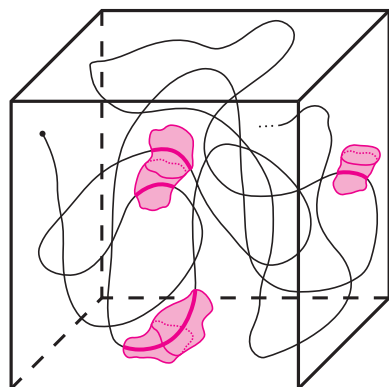
Nie ruszając nici wypełniamy tę część, której objętość chcemy zmierzyć, barwnikiem (rys. 4). Fragmenty nitki znajdujące się w obszarach wypełnionych barwnikiem zabarwią się.

Następnie wyciągamy z sześcianu pobrudzoną barwnikiem nić i obkurczamy do pierwotnego wymiaru. Zabarwione części i rozciągnięta podziałka też się obkurczą. Teraz, już po obkurczeniu, mierzymy łączną długość zabarwionej części nici. Wynik jest równy objętości obszaru wypełnionego barwnikiem – a ułożenie nici było tak przemyślane, że zupełnie nie ma znaczenia, jaki kształt miał ów obszar!

Zanim Czytelnicy zaczną twierdzić, że zupełnie postradaliśmy zmysły, porzućmy przerośnięte i potoczne opisy, by sformułować czysto matematyczne pytanie, co pozwoli uniknąć nieporozumień i błędnych interpretacji. Pytamy mianowicie, czy istnieje ciągle i różnowartościowe odwzorowanie  $\varphi: [0, 1] \rightarrow Q$ , gdzie  $Q$  oznacza wnętrze sześcianu o krawędzi 1 w przestrzeni trójwymiarowej, o następującej własności: dla dowolnego otwartego podzbioru  $A \subset Q$  długość  $|\varphi^{-1}(A)|$



Rys. 3



Rys. 4

przeciwobrazu  $\varphi^{-1}(A)$  jest równa objętości  $A$ . Dwa akapity wyżej zbiór  $A$  był opisany jako część sześcianu wypełniona czerwonym barwnikiem. Odwzorowanie  $\varphi$  to nasza idealna nić; wymóg, by  $\varphi$  było różnowartościowe, jest naturalny: wszak prawdziwa nitka nie ma samoprzecięć. Wreszcie, „wyjściowa długość zabarwionych kawałków nitki” to właśnie liczba  $|\varphi^{-1}(A)|$ .

Odpowiedź na tak postawione pytanie jest, jak się okazuje, twierdząca.

**Twierdzenie o nitce.** Istnieje ciągle i różnowartościowe przekształcenie

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow (0, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3,$$

takie że liczba  $|\varphi^{-1}(A)|$  jest równa objętości zbioru  $A$  dla każdego otwartego  $A \subset (0, 1)^3$ .

Wymiar 3 można zastąpić dowolnym innym wymiarem  $n \geq 2$ ; teza twierdzenia pozostanie prawdziwa (trzeba tylko oczywiście zastąpić zwykłą objętość objętością  $n$ -wymiarową).

Twierdzenie o nitce jest dość prostym i bezpośrednim wnioskiem ze starego, pięknego twierdzenia, które w 1941 roku udowodnili John von Neumann, John Oxtoby i Stanisław Ulam. Dla Czytelników, którzy mają za sobą podstawowy wykład teorii miary i całki Lebesgue’a, przytaczamy niżej drobnym drukiem sformułowanie tego wyniku. Pozostali Czytelnicy muszą, niestety, zadowolić się następującą niezbyt precyzyjną interpretacją fizyczną: jeśli sześcian jednostkowy  $Q$  jest wypełniony plastyczną substancją o całkowitej masie 1, w taki sposób, że masa substancji znajdującej się w dowolnym otwartym podzbiórze sześcianu jest dodatnia, a masa dowolnego pojedynczego punktu jest równa zero, to można ową substancję w sposób ciągle i różnowartościowo zdeformować tak, by po deformacji gęstość substancji była stała i równa 1. O początkowej gęstości celowo nie wspominamy: cały dowcip i siła twierdzenia von Neumanna, Oxtoby’ego i Ulama polega na tym, że substancja może być rozłożona w sześcianie w tak dziwny i zawiły sposób, że gęstości rozkładu masy w ogóle nie można rozsądnie określić. I właśnie dlatego zachodzi twierdzenie o nitce.

**Twierdzenie (von Neumann, Oxtoby, Ulam).** Niech  $\mu$  będzie miarą borelowską na  $n$ -wymiarowej kostce jednostkowej  $Q$ , taką że  $\mu(Q) = 1$ ,  $\mu(\{x\}) = 0$  dla wszystkich punktów  $x \in Q$ ,  $\mu(\partial Q) = 0$  i wreszcie  $\mu(U) > 0$  dla wszystkich zbiorów otwartych  $U \subset Q$ . Istnieje wówczas homeomorfizm  $h : Q \rightarrow Q$ , taki że  $n$ -wymiarowa miara Lebesgue’a  $\mathcal{L}^n(A) = \mu(h(A))$  dla każdego zbioru borelowskiego  $A \subset Q$ . Ponadto,  $h|_{\partial Q} = \text{id}$ .

My zadowolimy się stwierdzeniem, że istnienie „nitki do pomiaru objętości” jest jeszcze jednym, jakże dobitnym, świadectwem wielkiej subtelności najbardziej podstawowych pojęć współczesnej analizy matematycznej: liczby rzeczywistej, ciągłości, miary. Pojęć, bez których nie do pomyślenia jest nie tylko owa nitka, ale i daleko praktyczniejsze i poważniejsze sprawy: teoria sprężystości, mechanika ośrodków ciągłych, przetwarzanie oraz kompresja obrazów i inne, bardzo różnorodne, zastosowania analizy matematycznej.

\* \* \*

### Stanisław Ulam, 1909–1984

Jeden z młodszych przedstawicieli przedwojennej Polskiej Szkoły Matematycznej; doktorat uzyskał w 1933 roku we Lwowie, pod opieką Stefana Banacha.

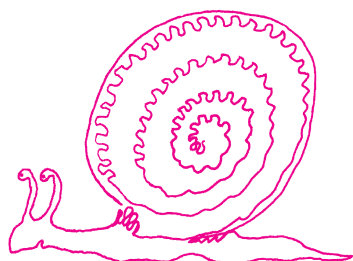
Z Polski wyjechał na stałe w sierpniu 1939 roku; w 1943 roku przyjął obywatelstwo amerykańskie. W USA wykładał m.in. na uniwersytetach Harvarda, Wisconsin i Południowej Kalifornii. Najpowszechniej jest jednak znana jego praca w Laboratorium Narodowym w Los Alamos, gdzie wspólnie z fizykiem Edwardem Tellerem rozkładał kluczowe kwestie, umożliwiające budowę bomby wodorowej. Ulam jest także autorem metody Monte Carlo, szeroko wykorzystywanej w analizie numerycznej.

Wspólną pracę z Oxtobym uważał za jedno ze swych najbardziej wartościowych osiągnięć.

Kto chciałby o Ulamie wiedzieć więcej, powinien przeczytać jego *Przygody matematyka*, wydane po polsku w 1996 roku.

Jeśli  $\varphi$  jest przekształceniem, o którym mowa w twierdzeniu o nitce, to zbiór  $\varphi^{-1}(A)$  jest sumą nieskończenie wielu rozłącznych odcinków otwartych; liczba  $|\varphi^{-1}(A)|$  jest sumą długości wszystkich tych odcinków, a jej wartość nie zależy od kolejności składników.

Uwaga dla dorosłych: jest jasne, że teza twierdzenia zachodzi nie tylko dla otwartych  $A$ , ale dla wszystkich borelowskich  $A \subset Q$ ; *objętość* trzeba tylko zastąpić *miarą Lebesgue’a*.



Zainteresowani odnajdą dowód np. w książce C. Goffmana, T. Nishiury i D. Watermana zatytułowanej *Homeomorphisms in analysis* i wydanej przez Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne w 1997 roku. Wersję elektroniczną można znaleźć na stronie <http://www.ams.org/books>.

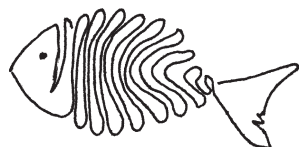
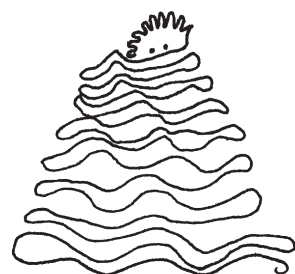
A oto idea wykorzystania powyższego twierdzenia do dowodu twierdzenia o nitce. Bierze się *jakiegokolwiek* ciągle i różnowartościowe odwzorowanie  $\psi : [0, 1] \rightarrow (0, 1)^3$ , które ma tę dodatkową własność, że obraz  $\psi([0, 1])$  odcinka  $[0, 1]$  jest gęstym podzbiorem sześcianu (np. zawiera wszystkie punkty o trzech współrzędnych wymiernych). Oczywiście przypadkowo wybrane  $\psi$  nie musi spełniać tezy twierdzenia o nitce. Można jednak bez trudu każde takie  $\psi$  poprawić, stosując twierdzenie von Neumanna, Oxtoby’ego i Ulama. Do jakiej miary? I jak poprawiać  $\psi$  – składać  $\psi$  z homeomorfizmem  $h$  czy może z  $h^{-1}$ ? Na te pytania zainteresowani Czytelnicy zechcą odpowiedzieć samodzielnie.





# mała delta

## Zodiak



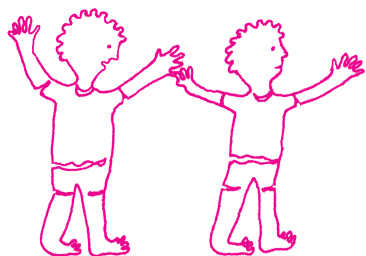
♈ Baran	♎ Waga
♉ Byk	♏ Skorpion
♊ Bliźnięta	♐ Strzelec
♋ Rak	♑ Koziorożec
♌ Lew	♒ Wodnik
♍ Panna	♓ Ryby

Wprowadzenie gwiazdozbiorów przez starożytnych astronomów greckich było zapewne próbą stworzenia systemu orientowania się na niebie. Skoro na niebie, to nazwy układów gwiazd nie mogły być byle jakie. Stąd mamy tam tyle nazw pochodzących od herosów i bóstw, a jeżeli nawet od zwierząt, to od takich, z którymi związany jest jakiś mit. Starożytni astronomowie dostrzegli przy tym, że szczególnie wiele dzieje się w pobliżu rocznej drogi Słońca. Nawiasem mówiąc, odtworzenie jego drogi na tle gwiazd mogłoby dla niejednego współczesnego „badacza” być problemem, gdyż kiedy widać Słońce, to nie widać gwiazd i odwrotnie. W każdym razie ta roczna droga Słońca to tzw. ekliptyka. O ile większość sfery niebieskiej pokrywają niezmiennie układy gwiazd, to w pobliżu ekliptyki zawsze znajduje się kilka ciał wędrujących, często po dość zawitych torach, ale nigdy nieoddalających się od ekliptyki dalej niż na  $8^\circ$ . Ten pas o szerokości  $16^\circ$  nazwano zodiakiem, gdyż większość gwiazdozbiorów, przez które przechodzi, ma nazwy pochodzące od zwierząt (ze starogr. ζώδιον – zwierzątko). Dziś wiemy, że te ciała błądzące to planety (ze starogr. πλανήτω – błądzą), a trzymają się stale zodiaku, ponieważ Układ Słoneczny, czyli Słońce z dziewięcioma planetami, jest układem bardzo płaskim: płaszczyzny orbit wszystkich planet niewiele się różnią.

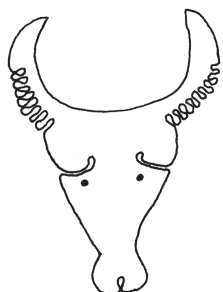
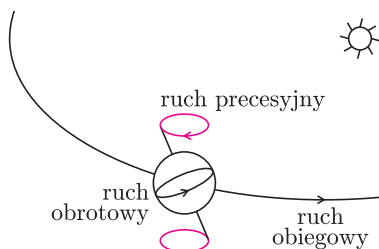
Ekliptyka przechodzi przez kilkanaście gwiazdozbiorów. Jej łuki na obszarach tych gwiazdozbiorów są bardzo nierówne. W wyniku tradycji uznajemy, że gwiazdozbiorów zodiakalnych jest 12, choć niektóre może nie zasługiwałyby, aby do tej dwunastki należeć. Oto one (z reguły ich wyliczanie zaczyna się od gwiazdozbioru, w którym w starożytności Słońce znajdowało się na początku wiosny): Baran, Byk, Bliźnięta, Rak, Lew, Panna, Waga, Skorpion, Strzelec, Koziorożec, Wodnik i Ryby. Przejrzawszy atlas nieba, można zauważyć, że pokaźny łuk ekliptyki przechodzi przez Wężownika, a jednak jego do zodiaku nie zalicza się.

Hipparch (180–125 p.n.e.) wprowadził na ekliptyce 12 tzw. znaków zodiaku. Zaproponował mianowicie podział ekliptyki na 12 równych łuków (po  $30^\circ$ ), z których pierwszy zaczynałby się, a ostatni kończyłby się na punkcie równonocy wiosennej. Ponieważ w jego czasach punkt równonocy wiosennej znajdował się w Baranie, pierwszym znakiem zodiaku jest tradycyjnie znak Barana. Wejście Słońca w znak Barana (około 21 III) oznacza początek astronomicznej wiosny. Pojęcie znaków zodiaku zdomowało się w astronomii jako jej nieco romantyczny fragmencik, choć właściwie można by się bez nich obyć. Co prawda, z bliżej nieznanym powodów niektórzy przywiązują wielką wagę do faktu, w jakim znaku było Słońce w chwili ich narodzin, ale to ich problem.

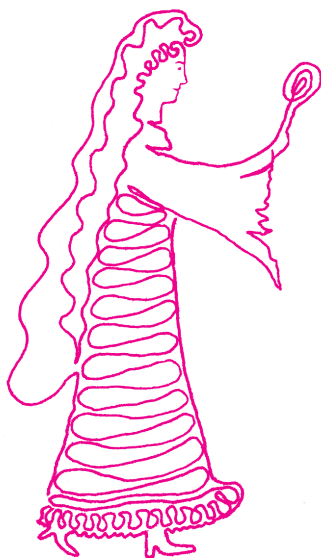
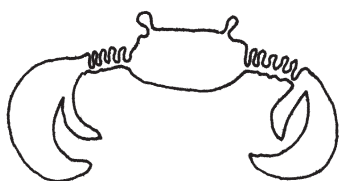
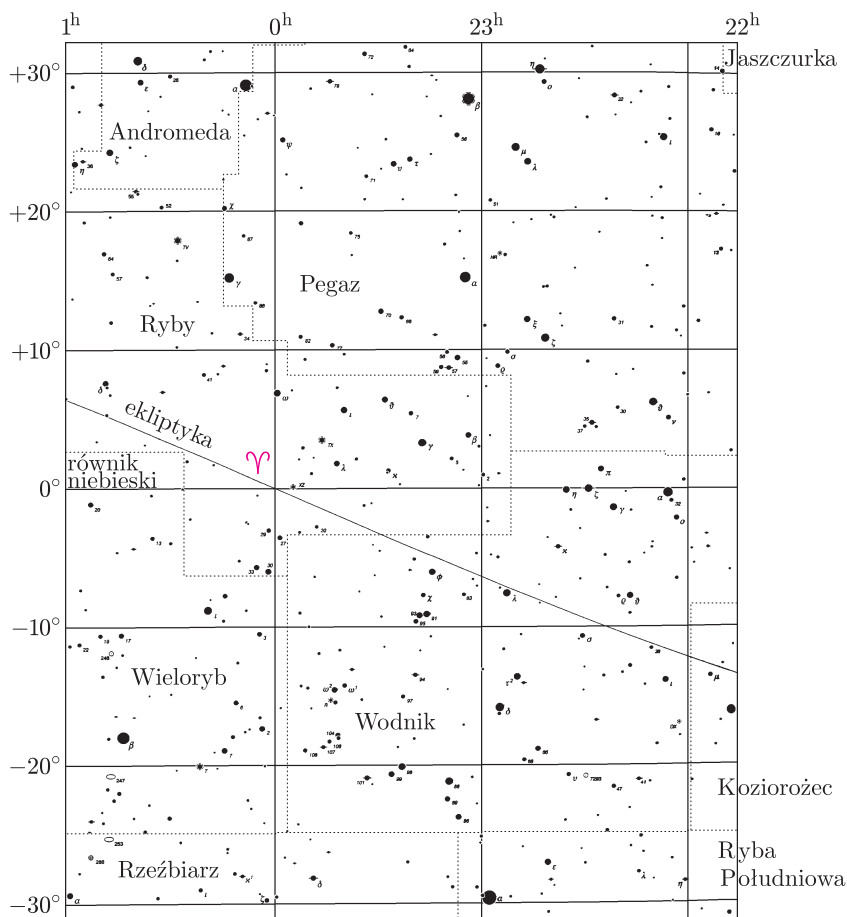
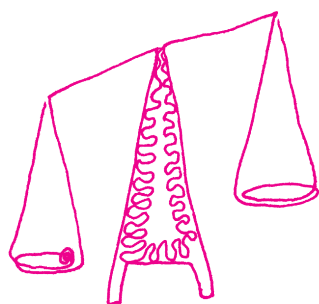
Słowa poprzedniego akapitu „w jego czasach” oraz jeszcze wcześniejszego „w starożytności” zostały użyte nie bez powodu. Okazało się bowiem, że wprawdzie ekliptyka leży na tle gwiazd nieruchomo, lecz punkty równonocy wiosennej (Barana) i jesiennej (Wagi) nie. Są one punktami



przecięcia ekliptyki z równikiem niebieskim, który jest jakby cieniem na niebie równika ziemskiego. On z kolei pomału zmienia orientację w przestrzeni, gdyż wskutek oddziaływania grawitacyjnego ze strony Księżyca i Słońca Ziemia zatacza się jak wirujący na podłodze bąk. Zjawisko to nazywa się precesją, a jeden okres tego zataczania się wynosi prawie 26 000 lat. Odpowiada to przesuwaniu się punktów równonocy (po ekliptyce) z prędkością  $50''/25$  na rok przeciwnie do rocznego ruchu Słońca.



Nic więc dziwnego, że od czasów Hipparcha punkt równonocy wiosennej zdążył przesunąć się o jeden znak zodiaku i nie zmieniawszy nazwy (punkt Barana) teraz znajduje się w Rybach, co też można zobaczyć w atlasie nieba. W konsekwencji wszystkie znaki zodiaku wypadają obecnie nie w „swoich” gwiazdozbiorach.



Skoro znak Barana znajduje się – mniej więcej – w Rybach, to znak Byka musi leżeć w Baranie, znak Bliźniąt w Byku itd. Oś Ziemi, jako prostopadła do płaszczyzny równika, celuje teraz w przybliżeniu w Gwiazdę Polarną. Czy potrafimy przewidzieć, jaka gwiazda będzie gwiazdą biegunową za 13 000 lat?

*Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST*

Grając w bilard staramy się uderzyć kulę kijem bilardowym tak, by trafiła w inną lub wpadła do luzu. Aby jednak mieć szansę na zwycięstwo musimy za każdym razem starać się przewidzieć zachowanie bili i uderzyć z jak największą precyzją. Ścisłym opisem poruszających się ciał, na podstawie którego możemy wyznaczyć ich trajektorie, zajmuje się mechanika. W XVII wieku Newton sformułował jej podstawowe zasady wprowadzając uporządkowany, deterministyczny obraz Wszechświata. Za Laplacem zaczęto twierdzić, iż „Powinniśmy traktować obecny stan świata jako skutek tego, co minęło, i jako przyczynę tego, co nastąpi”.

Czemu więc naszej bili zdarza się wylądować w zupełnie innym miejscu stołu, niż to wynikałoby z naszych kalkulacji? Odpowiedzi na to pytanie udzielono dopiero w XX wieku, kiedy zdano sobie sprawę z istotnego problemu, jaki napotykamy stosując wspomniane reguły. Otóż nie jesteśmy w stanie wyznaczyć początkowych prędkości i położeń z dowolną dokładnością, tak jak nie potrafimy uderzyć w dokładnie wybrany punkt bili z określoną siłą. Niewielkie wahanie tych wartości może kosztować wygraną. Problem polega na tym, że wiele układów newtonowskich wykazuje niestabilność, czyli niezwykle dużą wrażliwość na warunki początkowe.

Choć w takim chaotycznym układzie ruch można nadal opisywać za pomocą reguł klasycznych, to wszelkie prognozy są krótkoterminowe – i tak w bilardzie możemy przewidzieć tor ruchu kuli po najwyżej kilku zderzeniach. Położenie bili po kolejnych odbiciach będzie obciążone szybko rosnącym błędem, którego nie potrafimy wyeliminować przy pomiarze początkowych parametrów układu.

Równań ruchu w układach chaotycznych nie udaje się w ogólnym przypadku rozwiązać ściśle, dlatego polega się na przybliżonych metodach numerycznych. Dzięki komputerom o dużej mocy obliczeniowej jesteśmy w stanie przeprowadzać symulacje zachowania się takich układów.

Wróćmy jednak do bilardu. Czy tak wymyślna gra stanowi tylko kolejną ekstrawagancję Francuzów obok 365 gatunków sera? Niekoniecznie – okazuje się, że nauka również interesuje się bilardem.

Teoretyczne „wariacje” na temat bilardu nazywamy bilardami Sinaia, rosyjskiego matematyka, który w 1972 roku wykazał, że ruch cząstki w tego typu układzie jest chaotyczny. Są to modele bili poruszającej się po eliptycznym stole, bądź odbijającej się od umieszczonej na środku stołu kolistej tarczy. Modele te doczekały się w ostatniej dekadzie wielu realizacji w fizyce ciała stałego, gdzie rolę stołu bilardowego spełnia kryształ, elektrony zaś to bile.

Jak to możliwe? Przyjrzyjmy się światu kryształów. Wśród rzędów atomów odległych od siebie o kilka angstromów ( $10^{-10}$  m) swobodnie przelatuje elektron.

Jak na razie mamy więc bilę poruszającą się we wszystkich trzech wymiarach. Przed nami stoi nie lada problem: należy ograniczyć ruch elektronu do dwóch wymiarów, aby zachowywał się jak kula bilardowa tocząca się po płaskim stole. Ograniczenie dla elektronu w kryształach stanowią tzw. bariery potencjału. Elektron byłby w stanie je pokonać zwiększwszy swoją energię. Jeśli takie ściany ograniczają ruch elektronu w górę i w dół (wzdłuż osi  $z$ ), to swobodny ruch dopuszczalny jest jedynie w płaszczyźnie  $xy$ , niczym po płaskim stole bilardowym.

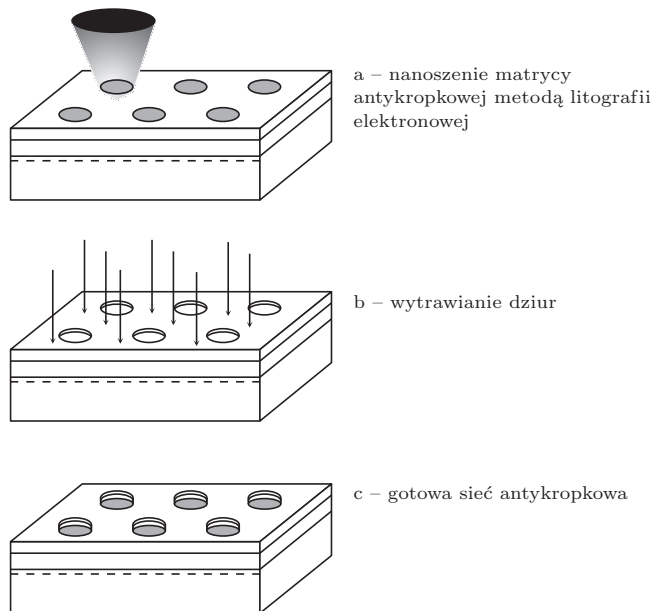
W rzeczywistości problem jest nieco bardziej skomplikowany, jako że w języku mechaniki kwantowej elektron nie przypomina kuli, lecz jest opisany tzw. funkcją falową, określającą prawdopodobieństwo znalezienia go w danym obszarze. Elektron w kryształach, uwięziony pomiędzy ścianami potencjału o skończonej wysokości, może przebywać między nimi, ale istnieje również niezerowe prawdopodobieństwo znalezienia go w obszarze bariery. Kiedy zbliżamy do siebie bariery, prawdopodobieństwo to rośnie. My obejdziemy ten problem i zajmujemy się układami, w których bariery potencjału będą blisko siebie, ale nie na tyle, aby elektron był w stanie wymknąć się z obszaru pomiędzy nimi (prawdopodobieństwo takiego zdarzenia będzie pomijalnie małe).

Jak praktycznie zrealizować barierę potencjału dla elektronu poruszającego się w kryształach? Otóż bierzemy kryształy  $A$  i  $B$  o zbliżonej strukturze krystalicznej i robimy z nich kanapkę, czyli przekładamy kolejno warstwy  $ABA\dots$ . Bułka z masłem, tyle że technika wytwarzania tej kanapki jest bardziej zaawansowana. Struktury kanapkowe hoduje się w komorze próżniowej, gdzie na odpowiednio ogrzane podłoże napyla się kolejne warstwy atomów  $A$  i  $B$ . Ten mozolny proces może trwać całą dobę.

Kryształy  $A$  i  $B$  można dobrać tak, aby swobodne elektrony znajdujące się w warstwie  $A$  przy próbie przedostania się do którejś z warstw  $B$  napotykały barierę potencjału. Jeśli przy tym warstwa  $A$  będzie bardzo cienka, elektron będzie mógł poruszać się swobodnie w płaszczyźnie warstwy, ale nie w kierunku prostopadłym do warstwy. Najczęściej do wytworzenia elektronów ograniczonych do dwóch wymiarów, czyli tzw. dwuwymiarowego gazu elektronowego stosuje się kryształy GaAs i GaAlAs. Elektrony są uwięzione w cienkiej warstwie GaAs.

Załóżmy, że stół bilardowy jest gotowy. Zależy nam jednak na tym, aby zrealizować jeden z wcześniej wspomnianych modeli Sinaia. Wybierzmy ten, w którym bila odbija się od umieszczonej na środku stołu kolistej tarczy.

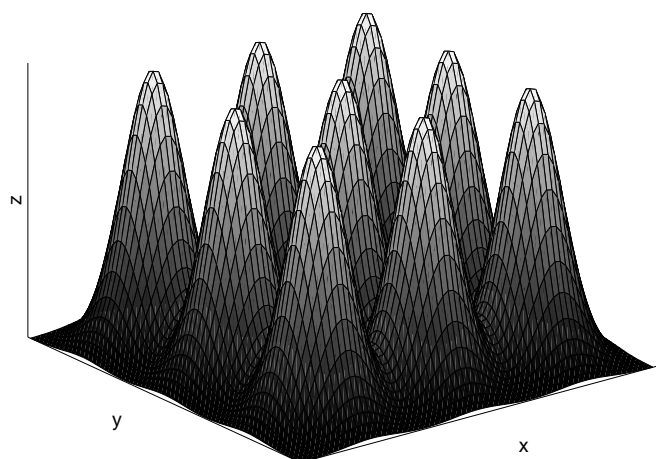
Taką tarczę uzyskamy, stosując techniki polegające na wytrawieniu w naszym stole zagłębienia o rozmiarach rzędu nanometra, czyli tzw. antykropki (rys. 1).



Rys. 1.

Ale czemu mielibyśmy poprzestać na jednej kropce, skoro potrafimy wytworzyć całą ich sieć.

Krajobraz kształtującego się w obszarze tak potraktowanej struktury potencjału przypomina pudełko na jajka.



Rys. 2. Kształt potencjału.

Elektron ma więc na swej drodze szereg przeszkód w postaci słupków potencjału, od których się odbija. Jeśli zadbamy o to, by temperatura była dostatecznie niska, to takie zderzenia będą zachodziły bez strat energii, balistycznie.

W ten oto sposób zbudowaliśmy niskowymiarowy stół bilardowy z przeszkodami.

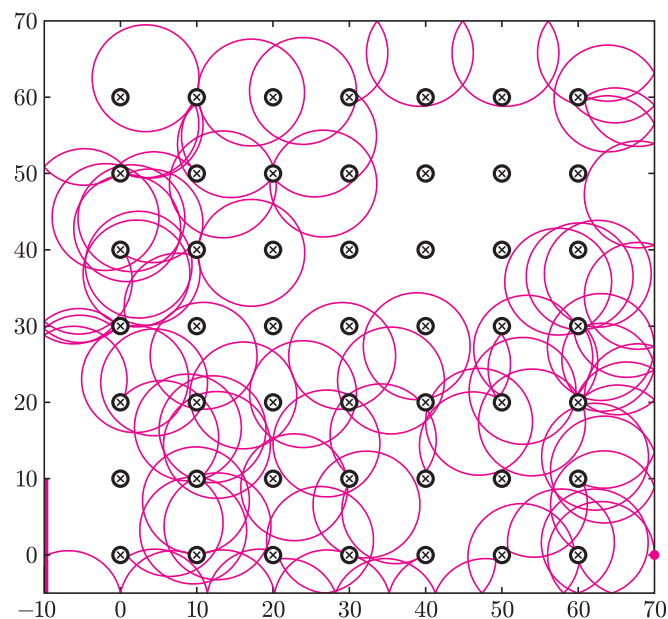
Zadziwiający może być fakt, że na taki układ patrzymy z perspektywy mechaniki klasycznej. Formalnie takie podejście musi być uzasadnione poprzez przybliżanie badanego układu zespołami klasycznymi, do czego stosuje się teorię macierzy losowo wybieranych (RMT) (w przypadku układów z polem magnetycznym wymagana jest pewna modyfikacja tej teorii, wynikająca z występowania oddziaływań elektron-elektron) – takie

podejście nazywa się modelem półklasycznym. Pomimo tak złowrogo brzmiących terminów bilardowy elektronowie cieszą się dużym zainteresowaniem, stanowią bowiem rzadką okazję do badań nad tego typu chaosem.

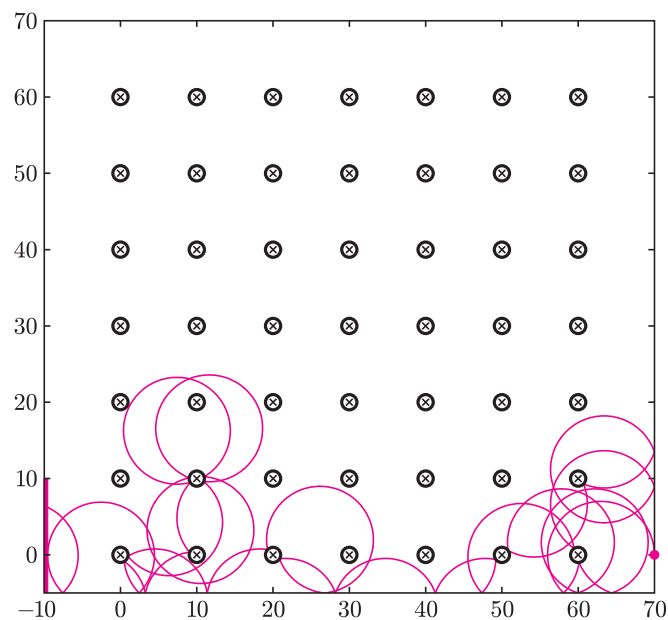
Elektron traktujemy jak klasyczną cząstkę punktową, którą wrzucamy w obszar regularnie rozłożonych pagórków, od których odbija się sprężysto w trakcie swojego chaotycznego ruchu.

Tak jak w klasycznym bilardzie, odbicia kul zachodzą według reguły „kąta odbicia równy jest kątowi padania” i każde odbicie od antykropki przyczynia się do rozbiegania się trajektorii.

Rysunki 3 i 4 przedstawiają jak to wygląda w praktyce.



Rys. 3



Rys. 4

Do wytworzonej sieci antykropkowej prowadzi wlot. Elektron ma za zadanie dotrzeć do przeciwnego

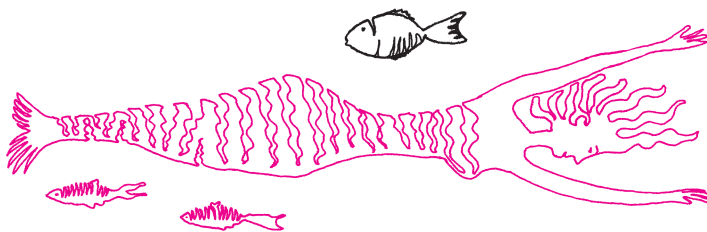
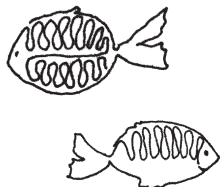
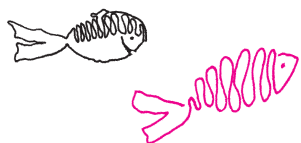
drenu. Dla urozmaicenia włączamy pole magnetyczne, aby siła Lorentza zakrzywiała tor elektronu.

W pierwszej sytuacji elektron wykonał 113 odbić od antykropek zanim udało mu się wydostać z sieci antykropkowej. Po zmianie początkowego położenia cząstki o 0,0000000001 jednostki, elektronowi wystarczyło zaledwie 29 ruchów.

Konstruując podobne układy możemy manipulować parametrami sieci, począwszy od odległości między kropkami po dowolne kształty antykropek, póki starcza

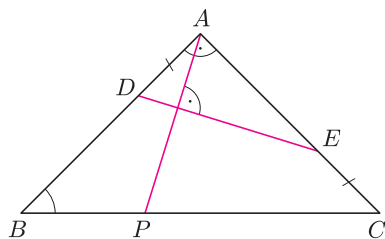
fantazji i możliwości technologicznych. Fantazji musi być w tym wiele, skoro niektórzy eksperymenciatorzy twierdzą, iż tędy wiedzie droga do zbudowania komputera kwantowego.

Tego typu badania z pewnością torują drogę do odkrywania nowych zjawisk fizycznych, bowiem tak jak nieprzewidywalny jest ruch chaotyczny, tak nie możemy przewidzieć, jak zaskakujące okażą się wyniki badań i, co bardziej intryguje, jakie zrodzą się nowe pytania.



## Zadania

Redaguje Waldemar POMPE



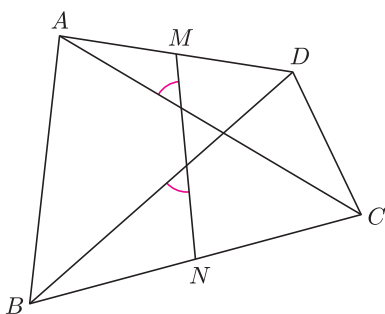
Rys. 1

**M 1057.** Rozstrzygnąć, czy dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 3$  istnieje  $n$  punktów na płaszczyźnie o następującej własności: odległość między dowolnymi dwoma danymi punktami jest liczbą niewymierną, zaś pole dowolnego trójkąta o wierzchołkach w danych punktach jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie na str. 16

**M 1058.** Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $AB = AC$  oraz  $\sphericalangle A = 90^\circ$  (rys. 1). Punkty  $D$  i  $E$  leżą odpowiednio na bokach  $AB$  i  $AC$ , przy czym  $AD = CE$ . Prosta przechodząca przez punkt  $A$  i prostopadła do prostej  $DE$  przecina prostą  $BC$  w punkcie  $P$ . Wykazać, że  $AP = DE$ .

Rozwiązanie na str. 3

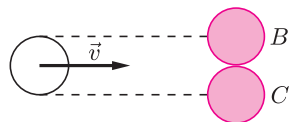


Rys. 2

**M 1059.** W czworokącie wypukłym  $ABCD$  przekątne  $AC$  i  $BD$  są równej długości (rys. 2). Punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami boków  $AD$  i  $BC$ . Wykazać, że prosta  $MN$  tworzy równe kąty z przekątnymi  $AC$  i  $BD$ .

Rozwiązanie na str. 3

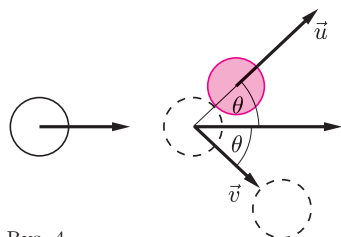
Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI



Rys. 3

**F 617.** Biała bila uderza z prędkością  $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  w dwie identyczne bile  $B$  i  $C$  (o tej samej masie i promieniu, co biała) stykające się (rys. 3). Obliczyć końcową prędkość bil zakładając, że zderzenie jest idealnie sprężyste, bez tarcia, i następuje najpierw z bilą  $B$  (np. dlatego, że jest ona minimalnie przesunięta w stosunku do  $C$ ). Jak zmieniłaby się sytuacja, gdyby zderzenie nastąpiło najpierw z bilą  $C$ ?

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 4

**F 618.** Bila uderza w nieruchomą, identyczną bilę (rys. 4). Jaki musi być kąt  $\theta$ , aby po zderzeniu bile rozbiegły się pod tym samym kątem w stosunku do prędkości początkowej  $\vec{v}$ ?

Rozwiązanie na str. 16

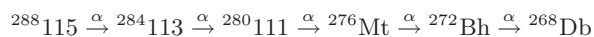
## Kolejne prawdopodobne odkrycie w Dubnej

W lutym ukazała się praca [1] zespołu kierowanego przez Yurii Oganessiana, w której przedstawione jest prawdopodobne odkrycie pierwiastków o liczbie atomowej 115 i 113. Przypomnijmy, że wcześniej, w latach 1999–2002, ten sam zespół donosił o prawdopodobnych odkryciach w Zjednoczonym Instytucie Badań Jądrowych w Dubnej (pod Moskwą) pierwiastków 114, 116 oraz o wykryciu łańcucha rozpadów niesprzecznego z produkcją pierwiastka 118. Jeszcze wcześniej odkryto tam pierwiastek 112.

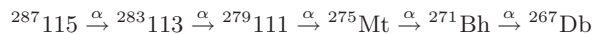
Wszystkie prace, począwszy od wytworzenia pierwiastka 114, polegały na bombardowaniu radioaktywnych tarcz plutonu  $^{244}\text{Pu}$ , kiuru  $^{248}\text{Cm}$  (pierwiastek 116), kalifornu  $^{249}\text{Cf}$  (przypuszczalnie pierwiastek 118) oraz ameryku  $^{243}\text{Am}$  (pierwiastek 115 i jego produkt rozpadu: 113) wiązką jonów wapnia  $^{48}\text{Ca}$ .

Za każdym razem obserwowano pojedyncze przypadki łańcucha rozpadów wykrywane poprzez następującą sekwencję zdarzeń: sygnał implementacji superciężkiego jądra po przejściu przez spektrometr masowy, sekwencja rozpadów z każdorazową emisją cząstki  $\alpha$ , a następnie sygnał spontanicznego rozszczepienia, wszystko w tym samym miejscu detektora co implementacja.

W przypadku jądra 115 zaobserwowano trzy przypadki bardzo podobnych rozpadów (podobne czasy życia, energie cząstek  $\alpha$  i energie rozszczepień) przy energii wiązki 248 MeV, interpretowanych jako sekwencja



oraz jeden przypadek przy energii 253 MeV, interpretowany jako sekwencja



W pierwszym przypadku jądro początkowe miałooby powstawać z jądra wzbudzonego  $^{291}_{115}$ , tworzonego w wyniku połączenia jąder tarczy i pocisku, poprzez emisję trzech neutronów, a w drugim czterech.

Przeprowadzony eksperyment był bardzo trudny. Cztery wyselekcjonowane przypadki zostały wybrane spośród miliardów kandydatów. Do pełni szczęścia potrzebne byłoby jednak powtórzenie przynajmniej jednej z odkrytych reakcji przez inną grupę eksperymentalną. Niestety, nie wydaje się to możliwe w najbliższej przyszłości, gdyż Dubna jest jedynym miejscem, w którym dopuszcza się używanie radioaktywnych tarcz. Być może grupa z Darmsztadu będzie mogła powtórzyć wcześniej badaną reakcję syntezy pierwiastka 112. Jest to o tyle ważne, że nie ma niezależnego, doświadczalnego potwierdzenia wartości prawdopodobieństwa produkcji w kanale z emisją wielu neutronów. Konkurencyjnym procesem jest natychmiastowe spontaniczne rozszczepienie. Drugim problemem jest fakt, że wszystkie obserwowane w Dubnej łańcuchy rozpadów (począwszy od syntezy pierwiastka 114 w 1999 roku) nie zawierają znanych wcześniej jąder – powstające izotopy nie były nigdy wcześniej obserwowane, więc nie można ich użyć jako potwierdzających odkrycie znaczników. Wzajemną konsystencję wyników poprawia co prawda to, że łańcuch

rozpadów pierwiastka 116 zawiera sekwencję rozpadów pierwiastka 114, ale nadal są to wyniki tylko jednego eksperymentu. Po historii z odwoływaniem odkryć pierwiastków 118, 116 i 114 przez grupę z Berkeley wszyscy wolą dmuchać na zimne.

## Ciało nadstałe?

Tak można przetłumaczyć angielski termin *supersolid*. Chodzi o kolejną zadziwiającą własność zimnej materii odkrytą przez naukowców z Pennsylvania State University [2]. Mały dysk został najpierw wypełniony porowatym krzemem (Vycorem  $\text{®}$ ), a następnie nasączony ciekłym helem. Całość została oziębiona do temperatury 2 K i poddana ciśnieniu 63 atmosfer, co spowodowało zestalenie helu. W ten sposób otrzymane ciało stałe poddano oscylacjom i mierzono częstość rezonansową. Przy dalszym oziębianiu okazało się, że częstość ta gwałtownie obniża się po przekroczeniu temperatury 175 mK.

Narzucającą się interpretacją zjawiska jest uznanie, że zaobserwowano nadciekłość zestalonego helu. Tylko jak ciało stałe może być nadciekłe? Z teoretycznego punktu widzenia nie jest to niemożliwe. Odpowiednio zimne atomy, nawet jeżeli tworzą kryształ, zaczynają mieć kwantowe rozmiary porównywalne z rozmiarami kryształu. Jednocześnie są przecież nierozróżnialne. To wystarcza, żeby mogła zajść kondensacja Bosego-Einsteina. Tym bardziej że tworzony kryształ jest „dziurawy” ze względu na szkielet z porowatego materiału.

Naukowcy sprawdzali tę interpretację na wiele sposobów. Między innymi przeprowadzając kontrolne doświadczenie z helem 3, dla którego zwykła kondensacja B-E nie jest możliwa. I rzeczywiście, zmiany częstości rezonansowej w tym przypadku nie zaobserwowano.

Przeciwnicy tej interpretacji twierdzą jednak, że zmniejszenie częstości rezonansowej może być powodowane niecałkowitym zestaleniem helu.

Na ostateczne rozwiązanie trzeba jeszcze poczekać.

Piotr ZALEWSKI

[1] Yu. Ts. Oganessian i inni, *Experiments on the synthesis of element 115 in the reaction  $^{243}\text{Am}(^{48}\text{Ca}, xn)^{291-x}_{115}$* , Phys. Rev. **C 69** 021601(R) (2004)

[2] E. Kim i M.H.W. Chan, *Probable observation of a supersolid helium phase*, Nature, 15 stycznia 2004

## Sprostowanie

W styczniowych aktualnościach, nie dość że pozbawiłem Heike Kamerlingh-Onnesa pierwszego członka nazwiska, to jeszcze nazwałem go Duńczykiem, podczas gdy był on Holendrem. . . Dziękuję za zwrócenie mi uwagi na ten błąd profesorowi Andrzejowi Kajetanowi Wróblewskiemu.

Za mój błąd bardzo przepraszam Czytelników. Przypomnę tylko jeszcze, że Kamerlingh-Onnes dostał w 1913 roku Nagrodę Nobla z Fizyki za skroplenie helu, którego dokonał w stworzonym przez siebie laboratorium kriogenicznym w Lejdzie, zasłużenie uważanym przez współczesnych za najlepsze na świecie. Był również odkrywcą nadprzewodnictwa.



## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Termin nadsyłania rozwiązań:

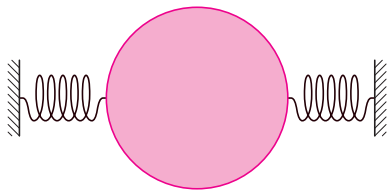
30 VI 2004

## UWAGA!

### ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

## Zadania z fizyki nr 376, 377

**376.** Do jednorodnej płytki o kształcie koła doczepiono dwie sprężynki w przeciwległych punktach obwodu, napięto sprężynki pewną siłą, a drugie ich końce zamocowano, tak że w położeniu równowagi długość każdej sprężynki jest równa promieniowi koła (rysunek).



Jeśli w ruchu postępowym płytki wzdłuż osi pionowej okres małych drgań jest równy  $T$ , to ile wynosi okres

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

małych drgań dla ruchu obrotowego:

- wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek koła,
- wokół pionowej osi przechodzącej przez środek koła?

**377.** Obwód składa się z  $n$  węzłów połączonych każdy z każdym opornikami o oporze  $r$ .

- Obliczyć opór zastępczy między dwoma węzłami sieci ( $n \geq 2$ ).
- Zwarto dwa węzły tego obwodu. Obliczyć opór zastępczy między tymi dwoma węzłami a dowolnym innym ( $n \geq 3$ ).
- Zwarto dwa węzły tego obwodu. Obliczyć opór zastępczy między dwoma innymi węzłami ( $n \geq 4$ ).

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2003

Przypominamy treść zadań:

**368.** Dyzio strasznie dzisiaj dokazywał, gdy wyszedł na spacer na zewnątrz stacji kosmicznej krążącej wokół Ziemi. Zamiast pilnować swojej piłki, rzucił ją gdzieś i zanim ktokolwiek się zorientował, już jej nie było. „Dyzio, nie zaśmiecaj Kosmosu,” – upomniął go tata – „każdy swobodnie lecący przedmiot może być przyczyną katastrofy innych stacji!”. „Jak to dobrze, że przynajmniej nam nic z tego powodu nie grozi!” – odpowiedział niegrzeczny chłopiec. „Żałuję tylko, że mi zginęła, będę się rozglądał, czy kiedyś nie przeleci obok, może ją złapie”.

Czy piłka może w przyszłości stanowić zagrożenie dla tej stacji? Czy Dyzio ma realną szansę ją odzyskać? Zakładamy, że stacja i piłka poruszają się tylko pod wpływem grawitacji ziemskiej, a Ziemia przyciąga tak, jak punkt materialny. Rozważaj przypadki stacji poruszającej się po orbicie kołowej i eliptycznej.

**369.** Silnik raketowy spala łącznie 100 g wodoru i tlenu na sekundę, a temperatura w komorze spalania wynosi 1000 K. Obliczyć przybliżoną wartość siły ciągu silnika.

**368.** Ruch stacji i piłki zachodzi po krzywej zamkniętej (elipsie), a niewielka zmiana warunków początkowych wynikająca z rzutu wykonanego przez Dyzia oznacza niewielką zmianę orbity piłki w porównaniu z orbitą stacji. Orbity te mają jeden lub dwa wspólne punkty, przy czym w przestrzeni trójwymiarowej drugi przypadek jest mało prawdopodobny (wymaga to odpowiedniego dobrania kierunku rzutu piłką). Jeśli spotkanie nastąpi w punkcie początkowym, to względna prędkość obu ciał będzie taka sama, jak na początku – a więc równa prędkości rzutu (i całkowicie niegroźna dla bezpieczeństwa lotu). W drugim przypadku zasada zachowania energii mówi nam, że

$$(\vec{v}_1 + \vec{w}_1)^2 - (\vec{v}_0 + \vec{w}_0)^2 = v_1^2 - v_0^2,$$

gdzie  $w$  jest prędkością względną, a indeksy 0 i 1 odnoszą się do dwóch punktów przecięcia orbit. Ponieważ  $w$  jest znacznie mniejsze od  $v$ , więc w przybliżeniu  $\vec{v}_0 \cdot \vec{w}_0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1$ . Zatem składowa prędkości względnej wzdłuż wektora prędkości orbitalnej stacji może być w drugim punkcie przecięcia kilkakrotnie większa albo mniejsza od jej wartości początkowej, w stosunku odwrotnym do tego, jak zmieni się sama prędkość orbitalna. Podobny wniosek wynika z zasady zachowania momentu pędu w odniesieniu do prostopadłych do wektora wodzącego  $\vec{r}$  składowych prędkości względnej. Ostatecznie nic szczególnego nie grozi stacji ze strony piłki, chyba że orbita stacji jest **bardzo** wydłużona (np. jeśli prędkość orbitalna zmienia się o czynnik rzędu tysiąca...).

Nie rozpatrujemy szczegółowo kwestii, czy stacja i piłka miną punkt przecięcia ich orbit jednocześnie. Na ogół okresy obiegu orbit będą niewspółmierne, czyli spotkanie wymaga bardzo szczególnego zbiegu okoliczności. Wygląda na to, że Dyzio będzie potrzebował wiele szczęścia, żeby schwytać piłkę!

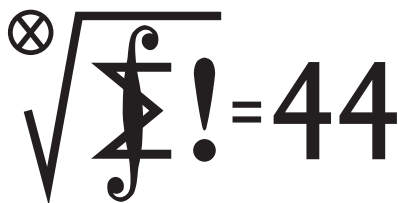
**369.** W temperaturze 1000 K średnia kwadratowa prędkość cząsteczek wody wynosi

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1180 \text{ m/s.}$$

Prędkość wyrzucanych gazów może się zbliżyć do tej wartości – jeśli przyjmiemy, że są równe, to z drugiej zasady dynamiki w postaci

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v$$

obliczymy siłę ciągu  $F = 118 \text{ N}$ . Dla realnego silnika wynik ten należy uważać jedynie za górne ograniczenie.



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 VI 2004

**UWAGA!**

**ZMIANA ADRESU  
DO KORESPONDENCJI!**

## Zadania z matematyki nr 479, 480

Redaguje Marcin E. KUCZMA

479. Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

480. Czy istnieje dodatnia liczba całkowita  $a$  mająca tę własność, że dla każdej trójki dodatnich liczb całkowitych  $k, \ell, m$  iloczyn

$$a^k(a+1)^\ell(a+2)^m$$

da się przedstawić jako suma dwóch kwadratów liczb całkowitych?

Zadanie 480 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kęt.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2003

Przypominamy treść zadań:

471. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste pierwiastki równania  $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1) = 210x^5$ .

472. Czy istnieje nieskończony ciąg liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, a_3, \dots$  taki, że szereg  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  jest zbieżny, a szereg  $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots$  jest rozbieżny?

471. Niech  $x$  będzie jednym z szukanych pierwiastków; oczywiście  $x \neq 0$ . Wymnażając czynniki lewej strony oraz dzieląc równanie stronami przez  $x^5$  mamy

$$x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2 + 2x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} = 210.$$

Przyjmijmy  $x + x^{-1} = t$  oraz skorzystajmy z tego, że sumy postaci  $x^k + x^{-k}$  wyrażają się wielomianowo przez  $t$ :

$$\begin{aligned} x^2 + x^{-2} &= t^2 - 2, & x^3 + x^{-3} &= t^3 - 3t, \\ x^4 + x^{-4} &= t^4 - 4t^2 + 2, & x^5 + x^{-5} &= t^5 - 5t^3 + 5t. \end{aligned}$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do naszego równania otrzymujemy

$$t^5 + t^4 - 4t^3 - 2t^2 + 4t = 210,$$

czyli

$$(t-3)(t^4 + 4t^3 + 8t^2 + 22t + 70) = 0.$$

Wielomian w drugim nawiasie daje się zapisać jako

$$\left(t^2 + 2t\right)^2 + 4\left(t + \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{159}{4},$$

przyjmuje więc tylko wartości dodatnie. Zatem  $t = 3$  i mamy odpowiedź: jedynymi pierwiastkami rzeczywistymi rozważanego równania (stopnia 10) są dwa pierwiastki równania kwadratowego  $x + x^{-1} = 3$ , czyli liczby  $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ .

472. Istnieją szeregi  $\sum a_n$  mające podaną własność. Przykłady nietrudno wskazać, korzystając z takiego faktu:

Jeżeli  $(x_n)$  jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do zera, to szereg

$$(*) \quad x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 + x_8 - 2x_9 + \dots$$

jest zbieżny.

Uzasadnienie: oznaczając  $n$ -tą sumę częściową szeregu  $(*)$  przez  $S_n$  wykazujemy, że ciąg  $(S_{3n})$  jest rosnący i ograniczony z góry:

$$S_{3n} - S_{3n-3} = (x_{3n-2} - x_{3n}) + (x_{3n-1} - x_{3n}) > 0;$$

$$S_{3n} = x_1 + x_2 + \sum_{i=1}^n ((x_{3i+1} - x_{3i}) + (x_{3i+2} - x_{3i})) - x_{3n+1} - x_{3n+2} < x_1 + x_2;$$

stąd zbieżność ciągu  $(S_{3n})$ , więc i ciągu  $(S_n)$ , skoro  $x_n \rightarrow 0$ . (Natychmiastowe uzasadnienie przytoczonego „faktu” możemy także otrzymać, powołując się na kryterium Dirichleta zbieżności szeregów).

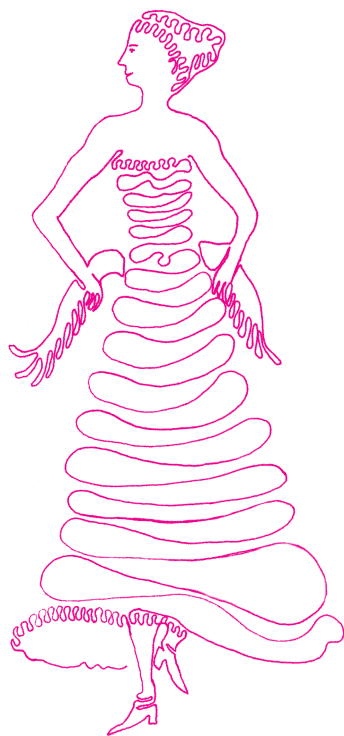
A zatem zbieżny jest, na przykład, każdy z szeregów  $\sum a_n, \sum b_n$ , gdzie

$$a_n = \begin{cases} \sqrt[3]{1/n} & \text{dla } n = 3k \pm 1, \\ -2\sqrt[3]{1/n} & \text{dla } n = 3k, \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 1/n & \text{dla } n = 3k \pm 1, \\ -2/n & \text{dla } n = 3k. \end{cases}$$

Przy tym

$$b_n = \begin{cases} a_n^3 & \text{dla } n = 3k \pm 1, \\ a_n^3 + \frac{6}{n} & \text{dla } n = 3k. \end{cases}$$

Ze zbieżności szeregu  $\sum b_n$  oraz rozbieżności szeregu  $\sum 1/k$  wynika więc rozbieżność szeregu  $\sum a_n^3$  i mamy przykład szeregu  $\sum a_n$ , o jaki chodziło.



Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 F

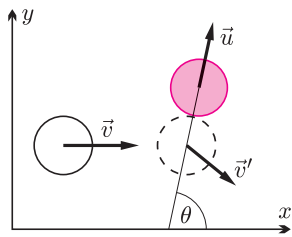
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
364 (WT = 1,00) i 365 (WT = 2,20)  
z numeru 10/2003

Marian Łupieżowicz – Gliwice 21,09  
Andrzej Idzik – Bolesławiec 15,32  
Tomasz Wietecha – Tarnów 15,03





### Rozwiązanie zadania F 617.



Z zasady zachowania pędu i energii oraz z założenia, że nie ma tarcia, mamy związek między prędkością początkową białej i prędkościami biał po zderzeniu

$$\begin{aligned} v'_x &= \sin \theta (v_x \sin \theta - v_y \cos \theta), \\ v'_y &= \cos \theta (v_y \cos \theta - v_x \sin \theta), \\ u &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta. \end{aligned}$$

Po zastosowaniu do naszej sytuacji (rys.) obliczamy, że po uderzeniu w bilę B

$$v'_x = 10, \quad v'_y = -10\sqrt{3} \approx -17$$

i prędkość biał B  $u = 20\sqrt{3} \approx 35$ .

Chwilę potem biała bila uderza w bilę C, w wyniku czego uzyskuje ona prędkość  $w = 10\sqrt{3} \approx 17$ , a biała

$$v''_x = -5 \quad \text{i} \quad v''_y = 5\sqrt{3} \approx 9,$$

wszystkie wyniki w  $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Gdyby najpierw nastąpiło zderzenie z bilą C, to właśnie ona miałaby na koniec 2 razy większą prędkość niż B. Jest to przykład sytuacji, gdzie bardzo drobna zmiana warunków początkowych mocno zmienia dalsze zachowanie układu.



### Rozwiązanie zadania F 618.

Korzystając z wzorów wyprowadzonych w poprzednim zadaniu: sytuacja taka zajdzie, gdy

$$\frac{u_y}{u_x} = \text{tg} \theta = -\frac{v'_y}{v'_x} = \text{ctg} \theta$$

czyli  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



### Rozwiązanie zadania M 1057.

Takie punkty istnieją dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 3$ . Są nimi na przykład punkty  $(k, k^2)$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ . Istotnie: pole trójkąta o wierzchołkach  $(a, a^2)$ ,  $(b, b^2)$ ,  $(c, c^2)$  wynosi

$$\frac{1}{2} |(a-b)(b-c)(c-a)|,$$

co jest liczbą wymierną, jeśli  $a, b, c$  są liczbami całkowitymi. Z kolei odległość między punktami  $(a, a^2)$ ,  $(b, b^2)$  jest równa

$$|a-b| \sqrt{(a+b)^2 + 1},$$

co jest liczbą niewymierną, jeśli  $a, b$  są różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi.

## Patrz w niebo

Do końca XX wieku (lub jak kto woli, do końca drugiego tysiąclecia) sondy kosmiczne sfotografowały trzy satelity planetoid: 951 Gaspra (to zrobiła sonda Galileo w 1991), 243 Idy (też Galileo) i 253 Mathildy (sonda NEAR, od *Near Earth Asteroid Rendezvous*). Pierwsze sygnały, że niektóre planetoidy mogą mieć satelity pojawiły się pod koniec lat 1970. Wydawało się mianowicie czasami, że gwiazda, przed którą planetoida przechodzi, jest wtedy zakrywana przez coś jeszcze. Doniesienia te zostały jednak przyjęte z rezerwą. Dalsze argumenty za obecnością satelitów pochodziły z fotometrii samych planetoid. Okresowe zmiany jasności planetoidy dowodzą przede wszystkim jej rotacji. Ale w 1994 r. stwierdzono, że planetoida 1994 AW1 oprócz zmian jasności z okresem 2,5 h przygasa też co 11,2 h. Z charakteru tych zaćmień wywnioskowano zresztą, że satelita ma rozmiary w przybliżeniu połowy planetoidy i obiega ją w okresie 22,4 h, a to co się obserwuje, to naprzemienne zakrycia planetoidy przez satelitę i satelity przez planetoidę. Podobną rzecz odkryto w 1997 r. u planetoidy 1991 VH (zmiany jasności w okresie 2,6 h i przygaśnięcia co 33 h) oraz u 3671 Dionysusa (okres rotacji 2,7 h i zaćmienia co 28 h).

Pierwszego satelitę planetoidy zobaczono (dosłownie) z powierzchni Ziemi przy 45 Eugenii w 1998 r. Dostatecznie ostry obraz planetoidy z satelitą uzyskano za pomocą 3,6 m kanadyjsko-francuskiego teleskopu na Hawajach, gdyż jego główne lustro można w ułamkach sekund tak deformować, żeby skompensowane zostały zniekształcenia obrazu powodowane przez ziemską atmosferę (nazywa się to optyka adaptacyjną). Satelitę nazwano Mały Książę. Za pomocą tego teleskopu zobaczono też w 2000 r. satelitę planetoidy 762 Pulcova, a za pomocą 10-metrowego teleskopu Keck II (również stojącego na Hawajach i mającego również te możliwości) satelitę 90 Antiope. Z roku 2000 są też pierwsze doniesienia o analogicznym odkryciu dokonany metodą radarową. Ale dość tych wyliczanek! Jak widać technik obserwacyjnych jest sporo i wyników obserwacji też, co więcej – w wielu przypadkach można nie tylko stwierdzić sam fakt istnienia satelity, ale określić jego orbitę i oszacować rozmiary, czasem nawet gęstość. Skoro tyle planetoid ma satelity, to aż dziwne, że Merkury i Wenus ich nie mają.

Tomasz KWAŚT

## Kwiecień

W kwietniowe wieczory niemal w zenicie widać Wielką Niedźwiedzicę, a na południu Lwa. Zarówno między tymi dwoma gwiazdozbiorami, jak i od Lwa ku horyzontowi, brak jest jasnych gwiazd, a obecne tam gwiazdozbiory są małe i niepozorne. Wprawdzie Hydra, leżąca na południe od Lwa, jest najdłuższym gwiazdozbiorem całego nieba, ale również nie zawiera jasnych gwiazd, przez co bardzo trudno ją zlokalizować. Dwa z tych małych gwiazdozbiorów, Małego Lwa (na północ od Lwa) i Sekstant (na południe), wprowadził na niebo Heweliusz w 1690 r. Gwiazdozbiory te z mitologią nie mają nic wspólnego, natomiast Hydra ma przedstawiać jednego z najpaskudniejszych potworów w całej mitologii. Obszary tych gwiazdozbiorów, jako położone daleko od Drogi Mlecznej, obfitują w galaktyki i ich gromady, ale są to obiekty dostępne tylko dla wielkich teleskopów. Najjaśniejsza gwiazda Lwa (Regulus) i najjaśniejsza Sekstantu leżą niemal dokładnie na jednym południku niebieskim, z czego pierwsza na ekliptyce, a druga na równiku niebieskim.

Wenus i Mars są w Byku i wieczorem chylą się ku zachodowi. Saturn jest w Bliźniętach i dobrze go widać w zachodniej części nieba, a Jowisz w Lwie, przez co widać go praktycznie przez całą noc. Pełnia Księżyca wypada 5 IV, a nów 19 IV. W dniu nowiu nastąpi częściowe zaćmienie Słońca, widoczne jednak tylko na Antarktydzie i jej okolicach. Poza Słońcem żadnych jasnych gwiazd w kwietniu Księżyc nie zakryje, jedynie 23 IV przejdzie w pobliżu Wenus (w odległości  $1;5$ ), ale w ciągu dnia, oraz wieczorem w odległości  $2^\circ$  od Marsa.

T. K.

## PIĄTA KOLUMNA

Instytut Badań Niepoważnych ufundował stypendium dla młodego naukowca. Poproszono Cię o wstępną selekcję kandydatów.

Kandydaci przychodzą do Ciebie w losowej kolejności na rozmowę kwalifikacyjną. Ty jesteś w stanie porównać kwalifikacje dwóch kandydatów, którzy jeden po drugim przyszedli na rozmowę, jednak porównanie kwalifikacji kandydatów, z którymi rozmawiałeś w większym odstępie czasu, jest dla Ciebie niewykonalne. Przy tym żadnych dwóch kandydatów nie ma dokładnie takich samych umiejętności, zawsze któryś jest, choćby nieznacznie, lepszy. I ty to bezbłędnie wychwycisz, o ile między nimi nie będziesz rozmawiał z innym kandydatem.

Ponieważ ma to być tylko wstępna selekcja, z każdym porozmawiasz tylko raz. Zapisujesz na kartce nazwisko pierwszego kandydata. Jeśli drugi jest od niego lepszy, zapisujesz je pod nazwiskiem pierwszego, jeśli gorszy, zapisujesz jego nazwisko w drugiej kolumnie.

Tak samo postępujesz z każdym kolejnym kandydatem, zapisujesz jego nazwisko pod nazwiskiem poprzednika, jeśli jest od tego poprzednika lepszy. Jeśli zaś jest gorszy od poprzednika, zapisujesz jego nazwisko w nowej kolumnie. W ten sposób cała zebrana przez Ciebie wiedza o kandydatach odzwierciedlona jest w układzie ich nazwisk.

Jeśli na przykład kolejno wchodzili na rozmowę panowie: Aber, Baber, Czaber, Daber, Ezaber i Faber, to zapis:

Aber    Daber    Ezaber  
Baber                  Faber  
Czaber

oznacza, że Baber jest lepszy od Abera, a jeszcze lepszy od Babera jest Czaber. Z kolei Daber jest gorszy od Czabera, ale lepszy od Ezabera. Faber wypadł natomiast lepiej niż Ezaber.

W miarę jak przychodzą kolejni kandydaci, zaczyna być trochę nudnawo, więc część swojej uwagi kierujesz na następujące zagadnienie:

### Jaka jest wartość oczekiwana liczby kandydatów zapisanych w pierwszej kolumnie?

Nietrudno obliczyć, że w przypadku  $n$  kandydatów, wartość oczekiwana liczby nazwisk zapisanych w pierwszej kolumnie jest równa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

co dla dużych  $n$  jest w przybliżeniu równe

$$e - 1 \approx 1,718281828.$$

A jaka jest wartość oczekiwana liczby nazwisk zapisanych w drugiej kolumnie?

To już trochę trudniejsze pytanie. Okazuje się jednak, że w przypadku  $n$  kandydatów jest ona równa

$$\frac{1}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{11}{4!} + \dots + \frac{2^n - n - 1}{n!},$$

co przy  $n$  dążącym do nieskończoności dąży do  $e^2 - 2e \approx 1,952492442$ .

Widzimy więc, że w drugiej kolumnie średnio pojawi się więcej nazwisk niż w pierwszej, przy czym zjawisko to można będzie zaobserwować już przy 5 kandydatach!

Dlaczego średnia długość drugiej kolumny jest większa niż pierwszej? Po prostu pierwszy kandydat w pierwszej kolumnie jest zupełnie przeciętny (czy raczej: doskonale losowo wybrany), podczas gdy drugiej zapewne nie otwiera supergeniusz, bo w końcu okazał się słabszy od swego poprzednika. Skoro drugą kolumnę rozpoczyna kandydat statystycznie słabszy, nic dziwnego, że ma szansę się w niej znaleźć więcej nazwisk.

A jaka jest oczekiwana średnia długość trzeciej kolumny?

Już dla  $n = 9$  jest ona dłuższa niż druga kolumna, jej średnia długość przy  $n$  dążącym do nieskończoności wynosi

$$e^3 - 3e^2 + \frac{3}{2}e \approx 1,995791369.$$

Z kolei czwarta kolumna jest średnio dłuższa od trzeciej począwszy od  $n = 13$ , a jej graniczna długość to

$$e^4 - 4e^3 + 4e^2 - \frac{2}{3}e \approx 2,00003885.$$

Piąta kolumna natomiast jest średnio dłuższa od czwartej dla  $n \geq 20$  i ma graniczną długość

$$e^5 - 5e^4 + \frac{15}{2}e^3 - \frac{10}{3}e^2 + \frac{5}{24}e \approx 2,000057579.$$

Przyznaję uczciwie, że robi się to nudne. Każda następna kolumna jest średnio dłuższa od poprzedniej dla dużych  $n$ , a jej graniczna długość dana jest jakimś wzorkiem z  $e$ .

Średnia długość szóstej kolumny jest w granicy równa

$$e^6 - 6e^5 + 12e^4 - 9e^3 + 2e^2 - \frac{e}{20} \approx 2,000005073$$

9	$2 - 5,157 \cdot 10^{-9}$
10	$2 + 1,206 \cdot 10^{-9}$
11	$2 + 1,937 \cdot 10^{-10}$
12	$2 - 9,085 \cdot 10^{-14}$
13	$2 - 2,978 \cdot 10^{-12}$
14	$2 - 2,810 \cdot 10^{-13}$
15	$2 + 1,904 \cdot 10^{-14}$
16	$2 + 6,113 \cdot 10^{-15}$
17	$2 + 2,871 \cdot 10^{-16}$
18	$2 - 6,653 \cdot 10^{-17}$
19	$2 - 1,070 \cdot 10^{-17}$
20	$2 + 5,949 \cdot 10^{-21}$
21	$2 + 1,647 \cdot 10^{-19}$
22	$2 + 1,551 \cdot 10^{-20}$
23	$2 - 1,056 \cdot 10^{-21}$
24	$2 - 3,380 \cdot 10^{-22}$
24	$2 - 1,582 \cdot 10^{-23}$

i jest **mniejsza** od długości piątej kolumny!

**Piąta kolumna jest średnio najdłuższa ze wszystkich!**

I to począwszy od  $n = 20$ .

Siódma kolumna jest średnio krótsza od szóstej i ma graniczną długość 1,9999996401.

Z kolei ósma jest średnio dłuższa od siódmej dla  $n \geq 31$  i jej długość dąży do 1,9999998889.

Graniczne długości średnie kolejnych kolumn podane są w tabeli obok. Jak widać, są one bardzo bliskie 2.

Korespondencję do Γ-limatiās prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl