

## SPIS TREŚCI NUMERU 1 (356)

Hipoteza Poincarégo?  
*Paweł Strzelecki*

Zadania

Wysokość pływów na Ziemi  
*Mikołaj Korzyński*

Regulamin Konkursu  
Uczniowskich Prac  
z Matematyki

Otoczenie figury  
*Lev Kourliandtchik*

Mała Delta

Kilka słów o zbiorach  
i funkcjach  
*Konrad Pióro*

Karciana sztuczka, rekurencja  
i komputer  
*Dariusz Laskowski*

Aktualności

Klub 44

Patrz w niebo

Styczeń

Gammalimatias

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:  
Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący,  
Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein,  
Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior,  
Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski,  
Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz SitarSKI, Weronika Śliwa,  
Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga,  
Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński,  
Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik,  
Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka      Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.  
Skład systemem  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

**WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS**  
01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.  
W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 122640143**

**WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u**

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68124010531111000004430494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

W następnym numerze:  
LIGO – fale grawitacyjne

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Hipoteza Poincarégo? Paweł STRZELECKI

11 listopada 2002 roku Grigorij Jakowlewicz Perelman, geometra pracujący w Petersburskim Oddziale Instytutu Matematycznego im. Stekłowa przy Fontance 27, udostępnił w Internecie 40-stronicową pracę pod tytułem *Formuła entropii dla potoku Ricciiego i jej zastosowania geometryczne*. Czwartą stroną suchego i najeżonego fachowymi terminami wprowadzenia kończy zdanie: *Wreszcie, w rozdziale 13, podajemy krótki szkic dowodu hipotezy geometryzacyjnej.*

Wspomniana hipoteza pochodzi od Williama Thurstona i dotyczy budowy trójwymiarowych rozmaitości. Jest tak ogólna i potężna, że słynna hipoteza Poincarégo – jeden z siedmiu problemów za milion dolarów z listy Instytutu Claya, patrz *Aktualności, Delta 8/2000* – wypływa z niej jako prosty wniosek.

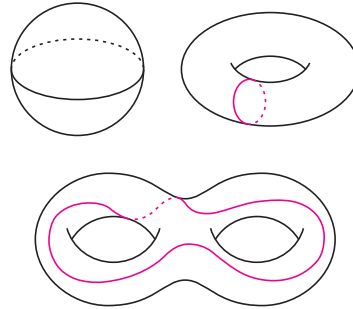
10 marca 2003 roku Perelman udostępnił drugą pracę, *Potok Ricciiego z chirurgią na rozmaitościach trójwymiarowych*. Szkic dowodu z pierwszego preprintu został w niej opisany znacznie dokładniej.

W kwietniu 2003 roku Perelman wygłaszał serie wykładów na kilku znanych uniwersytetach amerykańskich, a w kilku miejscach świata ekipy ekspertów zaczęły podczas wielotygodniowych seminariów brnąć przez jego prace, napisane z bolesną zwięzłością. Pojawiły się niezależne dowody niektórych twierdzeń z obu prac Perelmana, a on sam napisał w lipcu 2003 trzeci preprint, podając uproszczoną wersję swego dowodu tego przypadku hipotezy geometryzacyjnej Thurstona, który wystarcza do wnioskowania o prawdziwości hipotezy Poincarégo. W chwili, gdy piszę te słowa, ostatecznej i zgodnej opinii fachowców jeszcze nie ma, ale wiele osób wyraża nie bez powodu ostrożny optymizm. Cała sprawa wygląda na tyle poważnie, że wypada o niej opowiedzieć Czytelnikom *Delty*.

**1.** Od ponad stu lat znamy listę wszystkich zwartych, orientowalnych rozmaitości dwuwymiarowych, tzn. takich powierzchni, które mają dwie strony, a za to nie mają ani brzegu, ani żadnych nakłuc czy rozcięć, ani powyciąganych nieskończenie daleko odnóg. Jest to lista ponumerowana wszystkimi liczbami naturalnymi; na jej pierwszym miejscu figuruje sfera  $S^2$ , na drugim – torus  $T^2$ , na trzecim – precel, który uzyskujemy wyciąwszy w torusie dwa otwory i dokleiliśmy w to miejsce rurkę itd. Otrzymujemy w ten sposób, jak mówi matematyk, *klasyfikację z dokładnością do homeomorfizmu*: dwie powierzchnie uznajemy za identyczne, jeśli istnieje ciągle i różnowartościowe przekształcenie jednej z nich na drugą. Oznacza to, że powierzchnię symetrycznego torusa obrotowego utożsamiamy z powierzchnią kubka z jednym uchem. (Więcej na temat dwuwymiarowych powierzchni – patrz artykuł J. Górnickiego *Kilka słów o powierzchniach, Delta 6/1995.*)

Zwróćmy uwagę, że wśród tych powierzchni jedynie sfera ma tę własność, że każdą położoną na niej krzywą zamkniętą można w sposób ciągły, bez rozrywania,

zdeformować do punktu. Na torusie i na wszelkich preclach jest masa krzywych, których do punktu bez rozrywania zdeformować się nie da.



Rys. 1. Sfera, torus i precel. Kolorowych krzywych na torusie i preclu nie można w sposób ciągły zdeformować do punktu.

**2.** Rozmaitości trójwymiarowe to *możliwe formy naszej przestrzeni*; więcej informacji – patrz artykuł Zbigniewa Marciniaka pod takim właśnie tytułem w *Delcie 5/1997*. Przykłady zwartych rozmaitości trójwymiarowych to (a) sfera  $S^3$ , czyli zbiór tych punktów  $(x, y, z, w)$  przestrzeni czterowymiarowej, których współrzędne spełniają warunek  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ , (b) torus  $T^3$ , czyli rozmaitość, którą uzyskuje się, sklejąc pary przeciwległych ścian sześciangu, (c) produkt kartezjański okręgu i precla z rysunku 1.

Osobom, które stwierdzą, że nie ma po co myśleć o jakichś tam rozmaitościach, bo przecież przestrzeń wokół nas jest euklidesowa i każdy to widzi, pragnę przypomnieć, że przez setki lat prawie wszyscy „widzieli”, że Ziemia jest płaska.

**3.** W 1904 roku Poincaré wyraził przypuszczenie, że sferę  $S^3$  spośród innych trójwymiarowych rozmaitości zwartych wyróżnia ta sama własność, która charakteryzuje o jeden wymiar niżej jej koleżankę  $S^2$ . Mianowicie,

*jeśli na trójwymiarowej zwartej rozmaitości  $M^3$  (bez brzegu) każdą krzywą zamkniętą można w sposób ciągły zdeformować do punktu, to  $M^3$  jest homeomorficzna ze sferą  $S^3$ .*

To właśnie jest hipoteza Poincarégo. Co ciekawe, jej uogólnienia na rozmaitości wymiaru  $n \geq 4$  zostały już udowodnione.

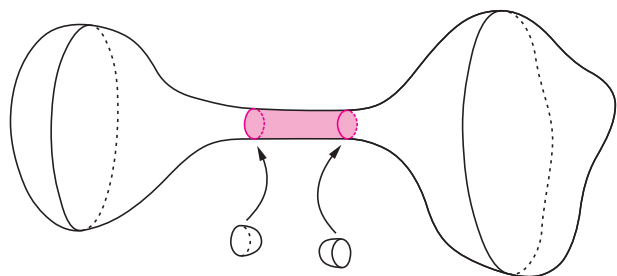
**4.** W końcu lat 70. XX wieku Thurston wysunął dalekosiężną hipotezę, głoszącą, że każdą rozmaitość trójwymiarową można rozciąć – prowadząc (dwuwymiarowe) cięcia wzdłuż sfer  $S^2$  lub torusów  $T^2$  – na skończoną liczbę części, z których każdą można

wyposażyć w jedną z modelowych geometrii. Oznacza to, mówiąc mętnie, że na każdej części można tak określić sposób pomiaru odległości, by inteligentne zielone ludziki wyposażone wyłącznie w taśmę mierniczą nie potrafiły w obrębie danej części odróżnić rozmaitych miejsc przestrzeni, gdyż wszystko wszędzie wygląda identycznie i jeśli nawet pojawiają się jakieś zakrzywienia czy skręcenia przestrzeni, to ich struktura jest w każdym punkcie taka sama. W wymiarze 2 dobre przykłady takiej sytuacji to zwykła płaszczyzna, sfera  $S^2$  i płaszczyzna Łobaczewskiego. Thurston wykazał, że w wymiarze 3 takich eleganckich modelowych geometrii jest dokładnie osiem.

5. Mniej więcej 20 lat temu Hamilton nakreślił śmiały program prac nad hipotezą geometryzacyjną Thurstona. Oto zarys pomysłu: należy wziąć rozmaitość, wyposażyć w jakąkolwiek metrykę, a następnie puścić w ruch, w taki sposób, aby prędkości różnych punktów zależały (w jakiś sposób) od krzywizny w danym miejscu. Po co? Otóż po to, żeby najlepiej cała rozmaitość, albo przynajmniej jej pokaźne fragmenty, nabrały zgrabnego, symetrycznego kształtu.

O prostym przykładzie podobnego ruchu krzywych i powierzchni – tzw. ewolucji krzywiznowej i średniokrzywiznowej – można poczytać w *Delcie* 4/2003. Odsyłam tam po nieco więcej szczegółów; wspomnę tu jedynie, że jeśli prędkość zamkniętej krzywej płaskiej jest równa krzywiznie i skierowana wzdłuż wektora normalnego, to wszelkie fałdki, wklęsłości i zawijasy owej krzywej ulegają stopniowemu wygładzeniu i koniec końców krzywa przypomina idealny okrąg. Zupełnie nie ma znaczenia, jak wyglądała na początku. W przypadku powierzchni jest gorzej – mogą pojawiać się rozmaite osobliwości, gdyż cieniutkie rurki kurczą się znacznie szybciej niż pękate bąble.

W wymiarze 3 należy, po pierwsze – odpowiednio zdefiniować sam „ruch” rozmaitości, po drugie – wykazać istnienie rozwiązań, po trzecie – przewidzieć charakter osobliwości i jak najdokładniej je opisać, po czwarte – nauczyć się zapobiegać występowaniu osobliwości poprzez sprytnie rozcinanie rozmaitości na odpowiednie części w odpowiednich miejscach (patrz rys. 2). Po piąte – trzeba to robić tak, żeby zachować kontrolę nad kształtem i topologią odcinanych fragmentów.



Rys. 2. Wąska rurka kurczy się szybciej niż pozostałe części rozmaitości. Aby zapobiec katastrofie, należy dokonać zapobiegawczej chirurgii: z wczasu wyciąć kolorową część rurki, a dwa otwory zalepić małymi czapeczkami. Rozdzielone części ewoluują dalej osobno.

Łatwo powiedzieć, trudniej zrobić. Hamilton zaproponował, żeby deformować metrykę z prędkością równą minus podwojonej krzywiznie Ricciego, tzn. na danej rozmaitości  $M$  budować taką rodzinę zależnych od czasu  $t$  metryk riemannowskich  $g_{ij}(t)$ , by

$$\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = -2R_{ij}(t),$$

gdzie  $R_{ij}(t)$  jest tensorem Ricciego określonym przez metrykę w chwili  $t$ . Rodzina  $g_{ij}(t)$  to właśnie *potok Ricciego*.

Czytelnik, który nie wie, co to jest metryka riemannowska i krzywizna Ricciego, nie powinien się przejmować, tylko przywołać przed oczy wyimaginowany obraz powyginanej przestrzennej siateczki do pomiaru odległości, pól i objętości, czegoś w rodzaju trójwymiarowego i powykrzywianego odpowiednika papieru milimetrowego (a jeszcze lepiej przezroczystej folii milimetrowej). Należy sobie wyobrazić, że owa siateczka ożywa i zaczyna się poruszać, płynnie zmieniając kształty. Prędkości są w różnych miejscach różne. Co się dzieje z odległościami? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy ustalić w przestrzeni punkt i kierunek, a następnie przeanalizować krzywiznę wszystkich niewielkich dwuwymiarowych „płatków” przestrzeni, które są w tym punkcie styczne do owego kierunku (w zwykłej przestrzeni euklidesowej byłby to pęk płaszczyzn). Jeśli wśród owych płatków przeważają takie, które wyglądają jak fragmenty powierzchni sfery czy elipsoidy, to odległość w danym kierunku się zmniejsza, gdy czas rośnie. Jeśli więcej jest płatków w kształcie siodła, to odległość w danym kierunku rośnie wraz z upływem czasu.

Lokalnie, w tak zwanych normalnych układach współrzędnych, wygląda to *niemal* tak, jakby wszystkie współrzędne metryki spełniały, przy odpowiednim wyborze jednostek czasu, zwykle równanie przewodnictwa cieplnego (patrz *Delta* 12/1998). *Niemal*, gdyż obecne jest nieliniowe zaburzenie, co sprawia, że z owego lokalnego obrazka nie można pochopnie wyciągać globalnych i dalekosiężnych wniosków. Wiadomo jednak, że równanie przewodnictwa cieplnego wygładza wszelkie początkowe nieregularności temperatury (jak się włoży dużą i mocną grzałkę do wiadra, to w końcu cała woda się zagotuje). Stąd nadzieja, że potok Ricciego pomaga nadawać wszelkim rozmaitościom porządną, regularną strukturę geometryczną.

Hamilton wykazał istnienie rozwiązań potoku Ricciego na małych przedziałach czasu. W wielu pracach powstałych w latach 1982–1997 opisał liczne własności tego potoku i jego zachowanie w rozmaitych szczególnych przypadkach. Nie udało mu się jednak opracować odpowiedniego systemu kontroli osobliwości ani wykluczyć pojawiania się osobliwości szczególnie niepożądanych, które w żargonie nazywa się cygarami, z tego względu, że fragment rozmaitości zaczyna wtedy wyglądać mniej więcej tak, jak produkt kartezjański okręgu i powierzchni szalenie długiego i cienkiego czubka cygara. A bez takiego systemu kontroli

nie ma co marzyć o zapobiegawczych chirurgiach i o przedłużaniu potoku Ricciego poza osobliwości.

**6.** Cóż więc zrobił Perelman? Po pierwsze, korzystając z prac Hamiltona o łącznej objętości ponad 400 stron, skonstruował narzędzia, dzięki którym można dostrzegać i w pełni kontrolować nadchodzące osobliwości. Jest to skrajnie trudne dlatego, że osobliwości mogą narastać w różnym tempie, w różnych miejscach i w różnych skalach. Po drugie, opracował taką metodę wyboru chwil, w których dokonuje się zapobiegawczych chirurgii, że po skończonej liczbie cięć wzdłuż sfer i oddzieleniu od wyjściowej różnorodności kawałków o ściśle kontrolowanych kształtach zostaje jeszcze „coś”, w czym można wyróżnić części „grube” i części „cienkie”, posklejane wzdłuż torusów  $T^2$ . To „coś” może być wprawdzie bardzo zawile, ale jego strukturę eksperci od geometrii trójwymiarowych różnorodności rozumieją na tyle dobrze, żeby dokładnie opisać wygląd części grubych i cienkich dla dużych czasów  $t$ . I to (podobno) już wystarczy...

Prace Perelmana są niezwykle bogate. Prócz ogromu wyobraźni geometrycznej są w nich oczywiście równania różniczkowe opisujące, jak z upływem czasu zmienia się metryka, krzywizna, objętości kul itp., jest masa nierówności całkowych, są analogie i intuicje czerpane

z fizyki statystycznej, jest wreszcie pomysłowy funkcjonal entropii, który pozwala wykluczyć pojawianie się niepożądanych cygar. Wszyscy są zgodni, że nawet jeśli gdzieś znajdzie się jeszcze jakaś luka, która spowoduje, że hipoteza Thurstona i hipoteza Poincarégo pozostaną hipotezami, to i tak to, co już zostało sprawdzone, jest wielkim osiągnięciem.

**7.** Uprawianie matematyki często porównuje się do chodzenia po wysokich górach. Nie jest to całkowicie pozbawione sensu, gdyż jedną z możliwych odpowiedzi na pytanie, dlaczego właściwie zajmować się hipotezą Poincarégo, jest odpowiedź moralnego zdobywcy Everestu, Mallory'ego: *w góry chodzi się dlatego, że są.*

Nie wiem, czy Perelman chodzi po górach. Przypomniała mi się jednak z tej okazji *Piosenka o górach* Włodzimierza Wysockiego, w której narrator, wszak również alpinista, miesza pokorę wobec majestatu gór i *śniegów tających imiona poległych* z nutką zawadiackiej dumy z przebytej właśnie nowej drogi. Nieudolnie kartkując wspomniane wyżej preprinty i liczne do nich uzupełnienia i komentarze, wielokrotnie myślałem, że Grisza Perelman miałby pełne prawo tę piosenkę nucić.



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 611.** Wahadło  $OA$  składa się z cienkiego nieważkiego nieprzewodzącego pręta o długości  $l$ , do którego końca przymocowana jest kulka o masie  $m$  i ładunku  $q$  (rys. 1). Druga kulka o ładunku  $-q$  jest umieszczona w punkcie  $C$ , przy czym odcinek  $OB$  ma długość  $l$  i jest pionowy, a odcinek  $BC$  ma taką samą długość i jest poziomy. Znaleźć siłę działającą na punkt zawieszenia wahadła w momencie przechodzenia kulki przez punkt  $B$ . W chwili początkowej prędkość pierwszej kulki była równa zero, a pręt tworzył z pionem kąt  $\alpha = 45^\circ$ . Przyspieszenie grawitacyjne jest równe  $\vec{g}$ .

Rozwiązanie na str. 10

**F 612.** Naładowana kulka o masie  $m$  i ładunku  $q$  jest zawieszona na nierozciągliwej nici o długości  $l$  (rys. 2). Na tej samej wysokości co punkt zawieszenia, w odległości  $2l$  od niego, znajduje się ładunek  $-q$ . Znaleźć minimalną prędkość, którą powinna mieć w dolnym położeniu kulka, aby – poruszając się po okręgu – mogła osiągnąć górnego punktu. Rozmiary kulki zaniebnać.

Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

**M 1048.** Jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia  $\sum_{i=1}^n |a_{i+1} - a_i|$ , gdzie  $a_{n+1} = a_1$ ,  $n \geq 2$  oraz ciąg  $(a_1, \dots, a_n)$  jest permutacją zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ? Ile jest ciągów realizujących to minimum?

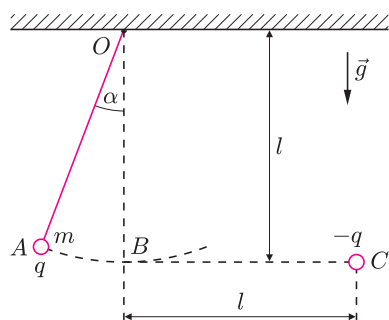
Rozwiązanie na str. 5

**M 1049.** Środek okręgu opisanego na pięciokącie  $A_1A_2A_3A_4A_5$  leży wewnątrz tego pięciokąta. Wykazać, że suma kątów przy wierzchołkach  $A_1$  i  $A_3$  jest mniejsza od  $270^\circ$ .

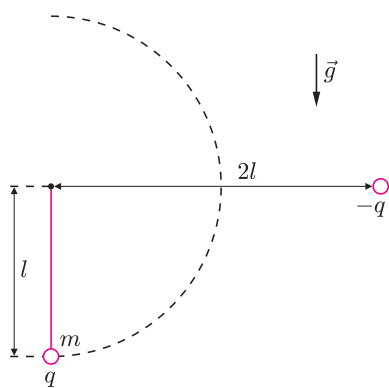
Rozwiązanie na str. 16

**M 1050.** Czy istnieje figura płaska, która nie ma środka symetrii ani osi symetrii, taka że obrót względem pewnego punktu  $P$  o pewien kąt  $0^\circ < \alpha < 360^\circ$  przeprowadza ją na nią samą?

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1



Rys. 2



# Wysokość pływów na Ziemi

Mikołaj KORZYŃSKI

Każdy, kto pamięta jeszcze kurs geografii i fizyki w szkole podstawowej, wie, że zjawisko pływów w oceanach i morzach wywołane jest przez grawitację Księżyca. Lepiej zorientowani, a zwłaszcza ci, którzy przeczytali artykuł z *Małej Delt* w *Delcie* 11/1987, wiedzą, że pewną rolę odgrywa tu też Słońce. Na ile dobrze jednak rozumiemy całe zjawisko i czy jesteśmy w stanie obliczać i przewidywać wysokość fali pływowej?

Najprostsze oszacowanie wielkości pływów na Ziemi, otrzymamy przyjmując model–zabawkę: Ziemię pokrytą w całości oceanami. Obliczenia oprzemy na spostrzeżeniu, że powierzchnia wody w stanie równowagi musi pokrywać się z powierzchnią stałego potencjału grawitacyjnego. W przeciwnym przypadku nierównoważona składowa styczna siły ciężkości elementu płynu (wody) powodowałaby ruch cieczy.

Problem sprowadza się więc do pytania o to, jak powierzchnia ekwipotencjalna zmienia się pod wpływem Księżyca lub innego ciała o dużej masie (rys. 1). Przyjmujemy oznaczenia  $M_Z$  i  $M_K$  – masy odpowiednio Ziemi i Księżyca,  $d$  – odległość obu ciał niebieskich. Zapiszmy potencjał

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = -\frac{GM_Z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{GM_K}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}}$$

Będziemy rozważać potencjał w odległościach rzędu promienia Ziemi  $R$  od środka układu współrzędnych, dużo mniejszych od  $d$ . Dla drugiego członu skorzystamy z przybliżenia Taylora:

$$(2) \quad \frac{GM_K}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} = \varphi_0 - \frac{GM_Z}{d^2} z + \frac{GM_Z}{d^3} (x^2 + y^2 - 2z^2) + \dots$$

Stała  $\varphi_0$  nie ma znaczenia. Wyraz proporcjonalny do  $z$  to po prostu przyspieszenie grawitacyjne Księżyca, odpowiedzialne za ruch całości Ziemi, wraz z oceanami, wokół środka masy układu Ziemia–Księżyc. Drugi wyraz, kwadratowy we współrzędnych  $x$ ,  $y$  i  $z$ , to główny „winowajca” powstawania pływów. Obliczmy jego wpływ na kształt powierzchni ekwipotencjalnej. Zastosujemy przybliżenie liniowe

$$(3) \quad -\frac{GM_Z}{R + \delta x} = -\frac{GM_Z}{R} + \frac{GM_Z}{R^2} \delta x + \dots,$$

pomijając dalsze wyrazy rozwinięcia. Wtedy z warunku równości potencjału w punktach  $A$  i  $B$  dostajemy

$$(4) \quad \frac{GM_K}{d^3} R^2 + \frac{GM_Z}{R^2} \delta x = -\frac{2GM_K}{d^3} R^2 + \frac{GM_Z}{R^2} \delta z,$$

czyli różnica wysokości bezwzględnych  $\delta h = \delta z - \delta x$  wynosi

$$(5) \quad \delta h = \frac{3R^3 M_K}{d^3 M_Z} \cdot R.$$

Podstawiając wreszcie dane liczbowe z podręcznika astronomii, dostajemy około 1 m dla pływów wywołanych przez Księżyc i 0,5 m dla słonecznych.

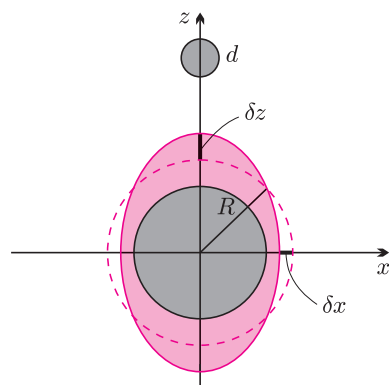
Jak można poprawić ten bardzo uproszczony model? Trzy największe oceany połączone są stosunkowo wąskimi cieśninami, można je więc w przybliżeniu traktować jako niezależne zbiorniki, pokrywające część Ziemi (rys. 2). Różnicę  $\delta h_1 - \delta h_2$  obliczamy podobnie jak poprzednio. Współrzędne punktów  $C$  i  $D$  wynoszą odpowiednio  $(R \sin \alpha_1, 0, R \cos \alpha_1)$  i  $(R \sin \alpha_2, 0, R \cos \alpha_2)$ , więc

$$(6) \quad \frac{GM_Z}{R^2} \delta h_1 + \frac{GM_K}{d^3} R^2 (1 - 3 \cos^2 \alpha_1) = \frac{GM_Z}{R^2} \delta h_2 + \frac{GM_K}{d^3} R^2 (1 - 3 \cos^2 \alpha_2),$$

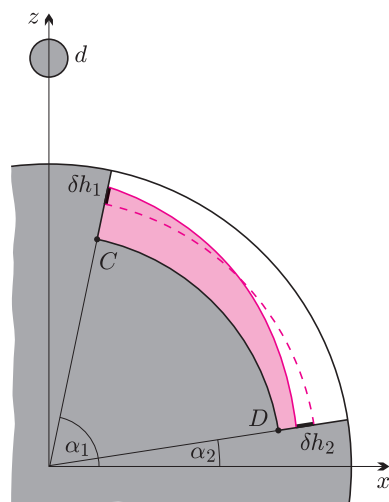
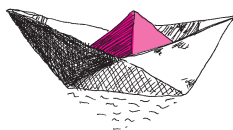
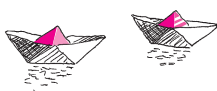
a zatem

$$(7) \quad \delta h_1 - \delta h_2 = \frac{3R^3 M_K}{d^3 M_Z} \cdot R (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2).$$

Zwróćmy uwagę, że jest to różnica w poziomie wody w dwóch różnych punktach w tej samej chwili, a nie różnica między najwyższym a najniższym poziomem wody w danym miejscu. Nie popełniając jednak zbyt dużego błędu, możemy



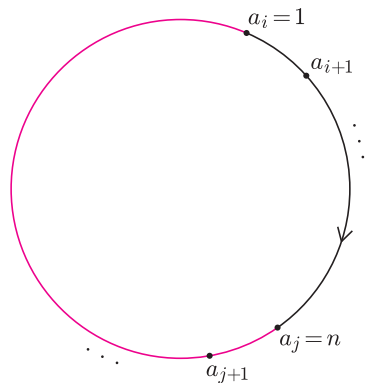
Rys. 1. Ziemia całkowicie pokryta oceanem, stan bez i z siłami pływowymi.



Rys. 2. Ziemia i ocean między kontynentami.



**Rozwiązanie zadania M 1048.**  
Wykażemy, że szukane minimum wynosi  $2n - 2$ . Umieścimy liczby  $a_1, \dots, a_n$  na okręgu.



Niech  $i, j$  będą takie, że  $a_i = 1, a_j = n$ . Z nierówności  $|x + y| \leq |x| + |y|$  wynika, że suma modułów różnic sąsiednich wyrazów występujących na każdym z łuków, czarnym i kolorowym, jest nie mniejsza niż  $n - 1$ . Co więcej, minimum to jest osiągnięte jedynie, jeśli liczby na łuku czarnym i, odpowiednio, kolorowym, występują w porządku rosnącym i, odpowiednio, malejącym. Załóżmy na chwilę, że  $i = 1$ . Wybór liczb z łuku czarnego można zrealizować na tyle sposobów, ile jest podzbiorów zbioru  $\{2, \dots, n - 1\}$ , tj.  $2^{n-2}$ . Wybór ten wyznacza jednoznacznie minimalną konfigurację. Zatem, w ogólności, po odrzuceniu założenia  $i = 1$ , dostajemy odpowiedź:  $n2^{n-2}$ .

Z przyjemnością informujemy, że firma **Wolfram Research, Inc.** za pośrednictwem swego autoryzowanego dystrybutora w Polsce, firmy **GAMBIT COiS, Sp. z o.o.**, postanowiła ufundować dwie nagrody w tegorocznej edycji **Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki**.

Zdobywca pierwszej nagrody otrzyma pakiet „Mathematica for Students”, natomiast jego opiekun naukowy nagrodzony zostanie pakietem „Mathematica Teacher Edition”.

Zarówno „Mathematica for Students”, jak i „Mathematica Teacher Edition” są pełnymi wersjami programu Mathematica bez żadnych merytorycznych ograniczeń. Mathematica jest programem do obliczeń symbolicznych i numerycznych. Pozwala tworzyć interaktywne dokumenty zawierające tekst, wzory matematyczne, rysunki, animacje i dźwięk.

przyjąć, że obie wielkości są tego samego rzędu. Z wyprowadzonego wzoru widać, że w mniejszych zbiornikach wodnych wysokość pływów powinna być jeszcze mniejsza, niż uzyskany wcześniej 1 m. Jak jednak nasz wyidealizowany model ma się do rzeczywistości?

Okazuje się, że w niektórych regionach świata (wybrzeże atlantyckie Francji) różnice wysokości wody między przyływami i odpływami wynoszą ponad 10 m! Autor obserwował w północnej Szkocji pływy rzędu 3–4 m, na Islandii około 1,5 m i niemal niezauważalne na Wyspach Owczych. Miejsca te leżą stosunkowo niedaleko od siebie (około 400 km), więc z punktu widzenia naszego modelu te obserwacje wydają się zagadkowe.

Zjawiskiem, którego nie wzięliśmy pod uwagę, jest ruch mas wody spowodowany „wędrowaniem” maksimum wysokości fali pływowej wraz z wędrówką Księżyca na sferze niebieskiej. Innymi słowy, błędnie założyliśmy, że woda pozostaje przez cały czas w równowadze (bezruchu). Rozpędzona masa wody zaś może spiętrzać się przy zbliżaniu się do wybrzeży, tak, jak fale morskie koło plaży.

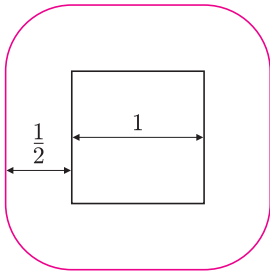
Aby opisać to ilościowo, musielibyśmy rozwiązać równania hydrodynamiki, przyjmując jakiś model linii brzegowej i profilu dna morskiego. Zamiast tego proponuję Czytelnikom małe ćwiczenia rachunkowe: Jak wysokie pływy powstają w kałuży (rozmiar 2 m)? Jak wysokie byłyby pływy, gdyby Ziemia była na miejscu jednego z księżyców Jowisza, np. Io?

## Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

W poniższym artykule opowiem o stosowaniu pojęcia otoczenia figury w rozwiązywaniu zadań. Rozpatrzmy najpierw dwa przykłady geometryczne.

**Zadanie 1.** Do prostokąta o wymiarach  $20 \times 25$  wrzucono 120 kwadratów jednostkowych. Udowodnić, że w prostokącie tym można umieścić koło o promieniu  $\frac{1}{2}$ , które nie ma punktów wspólnych z żadnym kwadratem.



Rys. 1

**Rozwiązanie.** Wyjaśnijmy najpierw, gdzie może znajdować się środek koła o promieniu  $\frac{1}{2}$ , które nie przecina danego kwadratu jednostkowego. Miejszem geometrycznym punktów, oddalonych od kwadratu nie więcej niż o  $\frac{1}{2}$ , jest figura przedstawiona na rysunku 1 (odległością punktu od figury domkniętej nazywamy odległość od najbliższego punktu tej figury). A zatem środek koła o promieniu  $\frac{1}{2}$ , które nie przecina kwadratu, znajduje się poza figurą przedstawioną na rysunku 1, którą nazwiemy  $\frac{1}{2}$ -otoczeniem kwadratu. Zbudujemy  $\frac{1}{2}$ -otoczenie dla każdego z danych 120 kwadratów jednostkowych.

Środek poszukiwanego koła powinien leżeć poza tymi wszystkimi otoczeniami. Oprócz tego, aby koło znajdowało się wewnątrz prostokąta, jego środek musi należeć do mniejszego prostokąta o wymiarach  $19 \times 24$ , który powstanie po przesunięciu każdego boku prostokąta wyjściowego o  $\frac{1}{2}$  do wewnątrz.

Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli uda się wykazać, że 120 zbudowanych otoczeń nie pokrywa całkowicie mniejszego prostokąta.

Oszacujmy pole, które zajmują te otoczenia. Każde otoczenie składa się z kwadratu o boku 1, czterech prostokątów o wymiarach  $1 \times \frac{1}{2}$  i czterech ćwiartek koła o promieniu  $\frac{1}{2}$ . Zatem pole jednego otoczenia wynosi

$$1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 + \frac{\pi}{4}.$$

Wszystkie 120 otoczeń pokrywa obszar, którego pole nie przewyższa wielkości

$$120 \cdot \left(3 + \frac{\pi}{4}\right) = 360 + 30\pi.$$

Z drugiej strony pole prostokąta o wymiarach  $19 \times 24$  wynosi 456. Pozostaje zauważyć, że  $360 + 30\pi < 456$ , ponieważ  $\pi < 3,2$ .

**Zadanie 2.** Płaska figura o polu 1 pokryta jest skończoną liczbą kół. Udowodnić, że z tych kół można wybrać jedno koło lub pewną liczbę kół parami rozłącznych, takich że pole, które one zajmują, wynosi nie mniej niż  $\frac{1}{9}$ .

**Rozwiązanie.** Wśród danych kół wybierzmy największe koło i oznaczmy jego promień przez  $R_1$ . Jeżeli pole tego koła jest nie mniejsze od  $\frac{1}{9}$ , to zadanie jest już rozwiązane. Przypuśćmy więc, że  $\pi R_1^2 < \frac{1}{9}$ . Ponieważ promienie pozostałych kół są nie większe od  $R_1$ , więc środki kół przecinających się z kołem wybranym leżą w  $R_1$ -otoczeniu tego koła. Natomiast same te koła leżą w  $2R_1$ -otoczeniu wybranego koła (rys. 2). Ponieważ pole tego  $2R_1$ -otoczenia, wynoszące  $9\pi R_1^2$ , jest mniejsze od 1, to znajdują się koła, które nie przecinają się z kołem wybranym. Niech  $R_2$  będzie promieniem największego koła wśród takich kół. Jeżeli

$$\pi R_1^2 + \pi R_2^2 \geq \frac{1}{9},$$

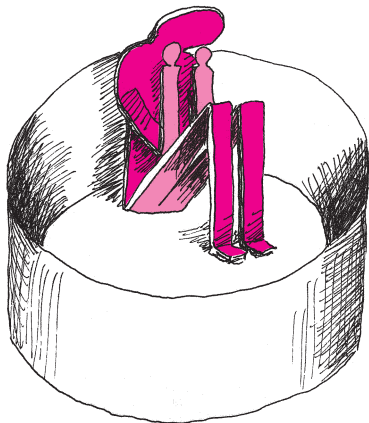
to zadanie jest rozwiązane. Jeżeli zaś

$$\pi R_1^2 + \pi R_2^2 < \frac{1}{9}, \quad \text{to} \quad 9\pi R_1^2 + 9\pi R_2^2 < 1.$$

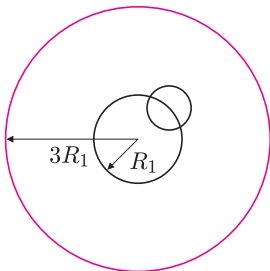
A więc znajdzie się koło, którego środek leży poza  $R_1$ -otoczeniem koła pierwszego i poza  $R_2$ -otoczeniem koła drugiego, i które z tego względu nie przecina się z tymi kołami. Oznaczmy przez  $R_3$  promień największego koła wśród kół, nieprzecinających się z żadnym z dwóch kół wybranych. Jeśli

$$\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi R_3^2 \geq \frac{1}{9},$$

to zadanie jest rozwiązane. W przeciwnym przypadku powyższe rozumowanie powtarzamy. W ten sposób za każdym razem albo znajdujemy pewną liczbę kół parami rozłącznych, dla których suma pól jest niemniejsza od  $\frac{1}{9}$ , albo jeszcze



Rys. 2



jedno koło nieprzecinające się z żadnym z kół znalezionych. Ponieważ kół jest skończona liczba, więc w końcu uzyskamy żądany zbiór kół.

W obu rozpatrzonych przykładach pojęcie otoczenia figury okazało się bardzo wygodne. Zauważmy, że możemy je zdefiniować także następująco.

**Definicja.** Dla dowolnego punktu figury  $F$  umieścimy koło o środku w tym punkcie i promieniu  $\varepsilon$ . Zbiór punktów wszystkich tych kół nazywa się  $\varepsilon$ -otoczeniem figury płaskiej  $F$ .

Pojęcie  $\varepsilon$ -otoczenia można wprowadzić także dla ciał przestrzennych. W tym przypadku zamiast kół trzeba rozpatrywać kule o promieniu  $\varepsilon$  i środkach w punktach ciała.

Wyjaśnijmy teraz, jak wygląda  $\varepsilon$ -otoczenie wielokąta wypukłego. Łatwo jest zrozumieć, że składa się ono z tego wielokąta, prostokątów o wysokości  $\varepsilon$  zbudowanych na jego bokach jak na podstawach i znajdujących się poza wielokątem, oraz wycinków kołowych o promieniu  $\varepsilon$  i środkach w wierzchołkach tego wielokąta (rys. 3). Środkowy kąt wycinka przy każdym wierzchołku wielokąta uzupełnia do  $180^\circ$  wewnętrzny kąt wielokąta znajdujący się przy tym wierzchołku, więc suma wszystkich kątów środkowych wynosi

$$180^\circ n - 180^\circ(n - 2) = 360^\circ,$$

gdzie  $n$  jest liczbą boków wielokąta, a  $180^\circ(n - 2)$  jest sumą jego kątów wewnętrznych. Oznacza to, że rozmieszczając obok siebie bez nałożenia te wycinki ze środkiem w tym samym punkcie, otrzymamy koło o promieniu  $\varepsilon$ . Łatwo obliczyć pole  $\varepsilon$ -otoczenia wielokąta wypukłego. Mianowicie, wynosi ono

$$S + P\varepsilon + \pi\varepsilon^2,$$

gdzie  $S$  oznacza pole wielokąta,  $P$  zaś jego obwód.

Rozpatrzmy jeszcze jedno zadanie, które jest łatwe do rozwiązania, jeśli korzystamy z pojęcia otoczenia figury.

**Zadanie 3.** Punkty  $A, B, C, D$  są rozmieszczone w przestrzeni w taki sposób, że długości odcinków  $AC$  i  $BD$  nie przekraczają 1. Udowodnić, że dla każdego punktu  $M$  odcinka  $AB$  można znaleźć taki punkt  $N$  odcinka  $CD$ , że długość odcinka  $MN$  nie przekracza 1.

**Rozwiązanie.** Stwierdzenie, którego trzeba dowieść, można sformułować w następujący sposób: każdy punkt odcinka  $AB$  znajduje się w odległości nie większej niż 1 od odcinka  $CD$ , a więc należy do 1-otoczenia odcinka  $CD$ . Otoczenie to składa się z walca kołowego o promieniu 1, którego osią jest odcinek  $CD$ , oraz dwóch półkul, znajdujących się poza walcem, o promieniach 1 i środkach w punktach  $C$  i  $D$ , których podstawami są podstawy walca (rys. 4). Z warunków zadania wynika, że punkty  $A$  i  $B$  należą do 1-otoczenia odcinka  $CD$ . A ponieważ otoczenie to jest wypukłe, więc zawiera cały odcinek  $AB$ , co kończy dowód.

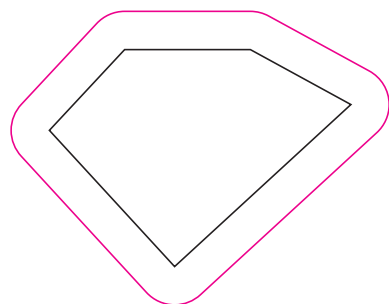
**Zadanie 4.** Udowodnić, że do wielokąta wypukłego o polu  $S$  i obwodzie  $P$  można włożyć koło o promieniu  $\frac{S}{P}$ .

**Rozwiązanie.** Zbudujmy na każdym boku danego wielokąta prostokąt, który będzie się znajdował wewnątrz wielokąta i którego drugi bok będzie długości  $\frac{S}{P}$  (rys. 5).

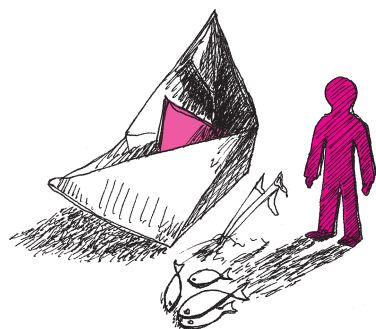
Jest jasne, że suma pól tych prostokątów wynosi  $S$ . A ponieważ prostokąty te przecinają się, więc nie pokrywają one wielokąta w całości. Zatem za żądany okrąg wystarczy wziąć okrąg o promieniu  $\frac{S}{P}$  i środku w punkcie wielokąta, który nie został pokryty zbudowanymi prostokątami.

Na koniec proponuję zadanie do samodzielnego rozwiązania.

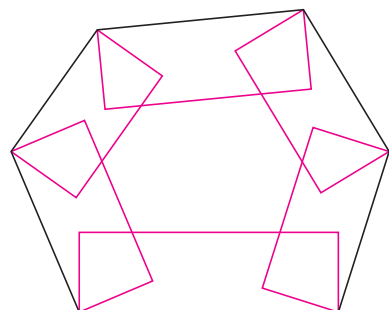
**Zadanie 5.** Na płaszczyźnie rozmieszczono trójkąty równoboczne pokrywające wspólnie obszar o polu równym 1. Udowodnić, że spośród tych trójkątów można wybrać pewną liczbę parami rozłącznych trójkątów, których suma pól jest nie mniejsza od  $\frac{1}{16}$ .



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



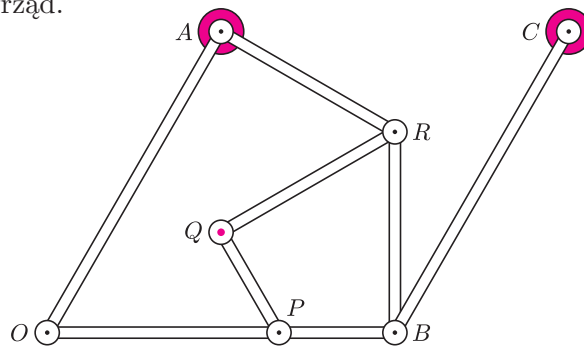


# mała delta

## Jak narysować linię prostą?

Płaski mechanizm przegubowy (będę nazywał go PMP) to urządzenie składające się ze sztywnych prostych prętów leżących na płaszczyźnie i połączonych przegubami, które pozwalają się obracać temu czy innemu prętowi względem innego. Urządzenie takie będzie przymocowywane do płaszczyzny na ogół w dwóch punktach, co utrudni mu poruszanie się, powodując, że poszczególne jego punkty będą poruszały się po krzywych. Okazuje się, że dla dowolnej krzywej algebraicznej (to znaczy opisanej przez wielomian) można zbudować PMP, którego wskazany punkt będzie zakreślał (rysował, gdy go odpowiednio wyposażymy) tę krzywą (Kempe, nawiasem mówiąc prawnik, 1875). Tytuł tego tekstu też jest wzięty z pracy tegoż Kempego – w oryginale brzmiał on *How to draw a straight line* (1877). Bo jeśli można narysować dowolną krzywą, to powinny istnieć PMPy rysujące proste. Prace nad PMPami miały początkowo służyć udoskonaleniu silników parowych.

Oto taki przyrząd.



Przymocowane do podłoża są punkty oznaczone dużymi kolorowymi kółkami (a więc A i C), prostą przy poruszaniu prętami będzie rysować mały kolorowy punkt (a więc Q). Pozostałe kółka to przeguby. Aby PMP działał jak trzeba, pręty OA, OB i BC powinny być tej samej długości i taki powinien też być odstęp punktów zamocowania. Ponadto ma być  $RA = RB = RQ$ , punkt zaś P ma być tak dobrany na OB, aby deltoidy OARB i RBPQ były podobne (czyli  $BP = \frac{BR^2}{BO}$ ).

Dlaczego punkt Q porusza się po prostej? Otóż dlatego, że stale leży na prostopadłej do AC poprowadzonej w punkcie A.

Sprawdźmy, czy istotnie kąt CAQ jest prosty. Oznaczmy  $\alpha = \sphericalangle AOB$ . Wobec tego  $\sphericalangle OBC = 180^\circ - \alpha$ . Oznaczmy  $\beta = \sphericalangle ARB$ . Wówczas

$$\sphericalangle PBR = \frac{1}{2}(360^\circ - \alpha - \beta) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

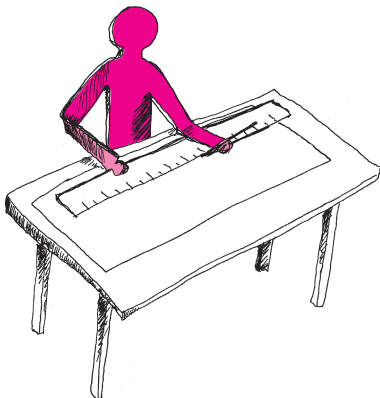
Zatem

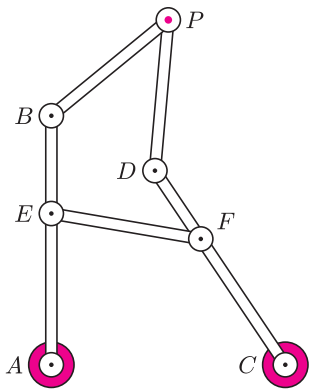
$$\sphericalangle RAC = \sphericalangle RBC = \sphericalangle OBC - \sphericalangle PBR = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Z kolei  $\sphericalangle QRB = \beta - \alpha$ , więc – ponieważ trójkąt ARQ jest równoramienny – mamy

$$\sphericalangle QAR = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta + \alpha) = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

A zatem, jak oczekiwaliśmy,  $\sphericalangle QAR + \sphericalangle RAC = 90^\circ$ .





Przedstawiony PMP do kreślenia prostej składał się z siedmiu prętów. Minimalna liczba prętów potrzebnych do skonstruowania kreślącego prostą PMP to pięć. Obok przedstawiony jest PMP do kreślenia prostej (Hart, 1874), zbudowany z pięciu prętów.

Jak widać zamocowane punkty to  $A$  i  $C$ , a prostą kreśli punkt  $P$ . Aby tak było rzeczywiście, potrzebne są następujące zależności między długościami prętów:

$$(1) \quad \begin{aligned} BE \cdot BA &= BP^2 = EF^2 = DP^2 = DF \cdot DC, \\ AE &= CF, \\ BA &= AC = CD. \end{aligned}$$

Przyrząd więc jest zbudowany symetrycznie, choć przeważnie nie zajmuje symetrycznego położenia. Ale każe się to nam domyślać, dlaczego punkt  $P$  porusza się po prostej: on stale leży na symetralnej odcinka  $AC$ .

O dziwo, dowód tego faktu jest dość pokrętny, choć korzysta tylko z własności trójkątów podobnych.

Oto ten dowód. Mamy

$$\frac{BE}{BP} = \frac{BP}{BA} \quad \frac{DF}{DP} = \frac{DP}{DC},$$

skąd wynika, że

$$\triangle BEP \sim \triangle BPA \quad \text{oraz} \quad \triangle DFP \sim \triangle DPC,$$

bo każda z par trójkątów ma kąt wspólny. Stąd otrzymujemy

$$(2) \quad \frac{EP}{PA} = \frac{BP}{BA} = \frac{DP}{DC} = \frac{FP}{PC}, \quad \text{czyli} \quad \frac{EP}{FP} = \frac{AP}{CP}.$$

Ponadto, podstawiając  $EF$  za  $BP$  i  $DP$  oraz  $AC$  za  $BA$  i  $DC$ , po zamianie „wyrazów środkowych” proporcji mamy także

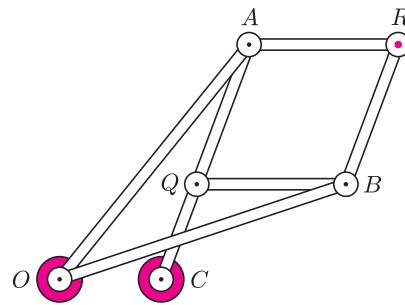
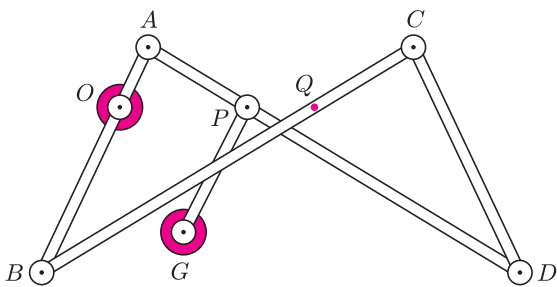
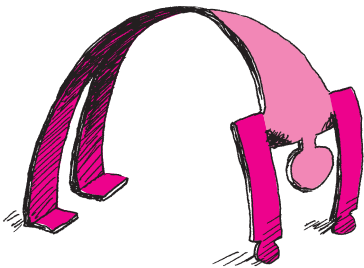
$$\frac{EP}{EF} = \frac{AP}{AC} \quad \text{i} \quad \frac{FP}{EF} = \frac{CP}{AC}.$$

Zatem  $\triangle EFP \sim \triangle ACP$ , skąd

$$\sphericalangle EFP = \sphericalangle APC, \quad \text{co daje} \quad \sphericalangle EPA = \sphericalangle FPC.$$

Ta równość kątów razem z (2) powoduje, że  $\triangle APE \sim \triangle CPF$ , a to, wobec (1), pociąga za sobą  $\triangle APE \cong \triangle CPF$  i w konsekwencji  $AP = CP$ , o co nam chodziło.

Na zakończenie jeszcze dwa PMP rysujące proste. Tu w dowodzie poprawności ich działania istotnie pomaga znajomość pojęcia *inwersja*. Ten z lewej też jest złożony z pięciu prętów (też Hart, 1874). Ten z prawej zaś to najstarszy PMP rysujący proste. Skonstruował go w 1864 roku Peaucellier, oficer francuski.



Musi być  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ , punkty  $O, P, Q$  są obrane na prostej równoległej do  $AC$  (podczas ruchu ta własność się zachowuje),  $OG = PG$ ; uwaga: prostą rysuje punkt  $Q$ , w którym nie ma przegubu!

Tutaj  $OA = OB$ ,  $QA = QB = RA = RB$ , ponadto  $OC = QC$ .

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



**Rozwiązanie zadania F 611.**

Mamy

$$L = AC = l[(1 + \sin \alpha)^2 + (1 - \cos \alpha)^2]^{1/2} = l\sqrt{3}.$$

Druga zasada dynamiki w dolnym punkcie daje:

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg.$$

Z zasady zachowania energii otrzymujemy, że

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L},$$

stąd

$$T = mg(3 - \sqrt{2}) + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

Oczywiście nie możemy wziąć zwykłego dodawania, bo wtedy suma  $1 + 1$  nie byłaby określona. „Nowe” dodawanie oznaczamy w klasyczny sposób, bo innego w tym artykule nie będziemy używać.

Zbiór  $\{0, 1\}$  z tymi dwoma działaniami oznacza się na ogół przez  $\mathbb{Z}_2$ .

Oczywiście w przypadku  $\mathbb{Z}_2$  mamy  $\underline{0} = 0$ .

Oczywiście w przypadku  $\mathbb{Z}_2$  mamy  $\underline{1} = 1$ .

Zacznijmy od następującego klasycznego zadania: Niech  $X$  będzie zbiorem mającym dokładnie  $n$  elementów. Ile jest różnych podzbiorów zbioru  $X$ ? Dla ustalenia uwagi możemy oczywiście założyć, że  $X = \{1, \dots, n\}$ . Wtedy tworząc podzbiór zbioru  $X$  możemy wziąć lub nie brać 1, następnie wziąć lub nie 2, itd.. Za każdym razem mamy dwie możliwości, zatem wszystkich podzbiorów zbioru  $X$  jest  $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ .

Przyjrzyjmy się temu rozwiązaniu. Otóż każdemu podzbiorowi  $A \subseteq X$  przyporządkowaliśmy  $n$ -elementowy ciąg złożony z 0 i 1, taki że na  $i$ -tym miejscu występuje 0, jeśli  $i$  nie należy do  $A$ , i 1 w przeciwnym przypadku. Milcząco założyliśmy (co nie jest specjalnie skomplikowane do pokazania), że dwa różne podzbiory wyznaczają dwa różne ciągi i że każdy ciąg wyznacza jakiś podzbiór. Następnie policzyliśmy, ile jest takich ciągów.

Zauważmy teraz, że powyższą konstrukcję można uogólnić na dowolny (także nieskończony) zbiór  $X$  i jego podzbiory. Dokładniej, dla dowolnego podzbioru  $A \subseteq X$  funkcję  $\chi_A$ , taką że

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in A, \\ 0 & \text{jeśli } x \notin A, \end{cases}$$

nazywamy funkcją charakterystyczną  $A$ .

Przyporządkowując każdemu podzbiorowi zbioru  $X$  jego funkcję charakterystyczną otrzymamy utożsamienie zbioru  $\mathcal{P}(X)$  wszystkich podzbiorów zbioru  $X$  ze zbiorem  $\{0, 1\}^X$  wszystkich funkcji określonych na  $X$  o wartościach 0 i 1. Mówiąc bardziej precyzyjnie, funkcja  $A \mapsto \chi_A$  jest bijekcją ze zbioru  $\mathcal{P}(X)$  na  $\{0, 1\}^X$ . Jeśli weźmiemy dwa różne podzbiory  $A, B \subseteq X$ , to istnieje element  $x_0$  taki, że  $x_0 \in A$  i  $x_0 \notin B$  (lub odwrotnie). Wtedy  $\chi_A(x_0) = 1$  i  $\chi_B(x_0) = 0$  (lub odwrotnie). Zatem nasza funkcja jest różnowartościowa, tzn. dla dowolnych zbiorów  $A, B$

$$(*) \quad A = B \iff \chi_A = \chi_B.$$

Jeśli natomiast weźmiemy funkcję  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  i zbiór  $A = \{x : f(x) = 1\}$ , to łatwo się przekonać, że  $\chi_A = f$ . Zatem nasza funkcja  $A \mapsto \chi_A$  jest również „na”.

Na dwuelementowym zbiorze  $\{0, 1\}$  możemy rozważać zwykłe działanie mnożenia oraz następujące działanie dodawania:

$$\begin{array}{c|c|c} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

Łatwo zauważyć, że  $+$  jest dodawaniem modulo 2, tzn. wynikiem działania  $a + b$  jest reszta z dzielenia przez 2 zwykłej sumy. Łatwo również pokazać, że te działania spełniają następujące warunki (gdzie pod  $a, b, c$  podstawiamy 0 lub 1):

- (1)  $a + b = b + a$  (przemienność dodawania),
- (2)  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (łączność dodawania),
- (3) istnieje element  $\underline{0}$  taki, że  $a + \underline{0} = a$  (element neutralny dodawania),
- (4) dla dowolnego  $a$  istnieje element  $b$  taki, że  $a + b = \underline{0}$ ; taki  $b$  oznaczamy przez  $-a$  (element przeciwny do  $a$ ),
- (5)  $a \cdot b = b \cdot a$  (przemienność mnożenia),
- (6)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (łączność mnożenia),
- (7)  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  (rozdzielność dodawania względem mnożenia),
- (8) istnieje element  $\underline{1}$  taki, że  $a \cdot \underline{1} = \underline{1}$  (element neutralny mnożenia).

Każdy zbiór z dwoma działaniami, które spełniają (1)–(8) (dla dowolnych elementów tego zbioru) nazywamy *pierścieniem przemennym z jedyneką*. Oczywiście liczby całkowite  $\mathbb{Z}$  (jak również wymierne, rzeczywiste i zespolone) z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia również spełniają te warunki.

Pierścienie spełniające (9) nazywamy pierścieniami Boole'a.

Łatwo zauważyć, że  $\mathbb{Z}_2$  spełnia dodatkowo

$$(9) \quad a + a = \underline{0} \text{ i } a \cdot a = a.$$

Przykład  $\mathbb{Z}_2$  pokazuje, że istnieją również pierścienie inne niż liczby całkowite. Ale to nie wszystko. Mając działania na  $\{0, 1\}$  możemy zdefiniować analogiczne działania na zbiorze  $\{0, 1\}^X$  o podobnych własnościach. Dokładniej, niech  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  i  $g : X \rightarrow \{0, 1\}$  będą funkcjami. Wtedy sumę  $f + g$  i iloczyn  $f \cdot g$  definiujemy tak:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ i } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ dla każdego } x \in X.$$

Ponieważ wykonujemy operacje dodawania i mnożenia na wartościach funkcji, więc jest jasne, że tak zdefiniowane operacje także spełniają warunki (1)–(8) i (9). Oczywiście elementem neutralnym dodawania jest funkcja stale równa zero, a elementem neutralnym mnożenia funkcja stale równa jeden. W szczególności mamy kolejny przykład pierścienia przemiennego z jedyneką, a dokładniej całą rodzinę pierścieni (dla różnych zbiorów  $X$  mamy różne pierścienie).

Na marginesie zauważmy, że z definicji dodawania i mnożenia w  $\{0, 1\}^X$  łatwo wynika, że każda równość prawdziwa w  $\mathbb{Z}_2$  jest prawdziwa w  $\{0, 1\}^X$ . Co więcej, jeśli  $X \neq \emptyset$ , to każda równość prawdziwa w  $\{0, 1\}^X$  jest również prawdziwa w  $\mathbb{Z}_2$ . W tym celu wystarczy wziąć funkcje będące elementami neutralnymi dodawania i mnożenia. Te dwie funkcje, ich dodawanie i mnożenie, zachowują się tak samo jak zero i jedynka w  $\mathbb{Z}_2$ .

A czy te teoretyczne rozważania można wykorzystać w praktyce (np. do rozwiązywania zadań)? Ponieważ zbiór  $A$  możemy utożsamiać z jego funkcją charakterystyczną  $\chi_A$ , zastanówmy się najpierw jak mnożenie i dodawanie takich funkcji można przetłumaczyć na zbiory. Oczywiście iloczyn dwóch funkcji charakterystycznych odpowiada funkcji charakterystycznej iloczynu zbiorów:

$$(R.1) \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B \text{ dla dowolnych } A, B \subseteq X.$$

Natomiast suma dwóch funkcji charakterystycznych odpowiada funkcji charakterystycznej różnicy symetrycznej:

$$(R.2) \quad \chi_{A \div B} = \chi_A + \chi_B \text{ dla dowolnych } A, B \subseteq X.$$

Zauważmy teraz, że z tych dwóch równości i (\*) otrzymujemy

$$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C,$$

$$\begin{aligned} \chi_{A \div (B \div C)} &= \chi_A + \chi_{B \div C} = \chi_A + (\chi_B + \chi_C) \stackrel{\text{warunku 2}}{=} (\chi_A + \chi_B) + \chi_C = \\ &= \chi_{A \div B} + \chi_C = \chi_{(A \div B) \div C}. \end{aligned}$$

W podobny sposób (korzystając z (7)) pokazujemy

$$A \cap (B \div C) = ((A \cap B) \div (A \cap C)).$$

Oczywiście w ten sam sposób każde wyrażenie składające się z iloczynów zbiorów i różnic symetrycznych może być przetłumaczone na wyrażenie składające się z iloczynów i sum funkcji charakterystycznych. W szczególności otrzymujemy, że rodzina  $\mathcal{P}(X)$  wszystkich podzbiorów zbioru  $X$  wraz z różnicą symetryczną i iloczynem zbiorów spełnia warunki (1)–(8) (tzn. jest pierścieniem przemienne z jedyneką) oraz dodatkowo warunek (9). Oczywiście elementem neutralnym dodawania (tzn. różnicy symetrycznej) jest zbiór pusty  $\emptyset$ , a elementem neutralnym mnożenia jest cały zbiór  $X$ . Stąd wynika, że rachunki na  $\mathcal{P}(X)$  przy użyciu różnicy symetrycznej  $\div$  i iloczynu zbiorów  $\cap$  układają się dokładnie tak samo jak w zwykłej arytmetyce liczb całkowitych (warunki (1)–(8)) z tym, że można pominąć wszystkie potęgi (druga równość z warunku (9)), a współczynniki redukować modulo 2 (pierwsza równość z (9)), tzn.

$$\underbrace{A \div A \div \dots}_n = \begin{cases} A & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste} \\ \emptyset & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Ponieważ suma zbiorów  $\cup$  i różnica zbiorów  $\setminus$  dają się wyrazić za pomocą  $\div$  i  $\cap$ :

$$A \cup B = A \div B \div (A \cap B) \text{ i } A \setminus B = A \div (A \cap B),$$

to cała algebra zbiorów daje się ująć jako arytmetyka pierścienia  $\mathcal{P}(X)$  z  $\div$  i  $\cap$ .

W ten sposób zanurzyliśmy  $\mathbb{Z}_2$  w pierścien  $\{0, 1\}^X$ .

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\chi_A(x) = 1 \text{ i } \chi_B(x) = 1$$

dla każdego  $x \in X$ .

Z kolei dla  $x \in X$

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) = 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\chi_A(x) = 1 \text{ i } \chi_B(x) = 0$$

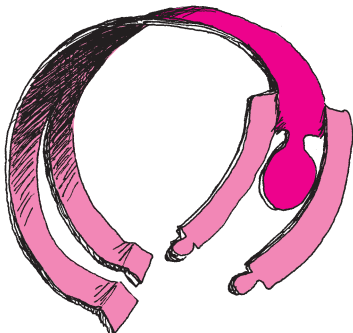
lub

$$\chi_A(x) = 0 \text{ i } \chi_B(x) = 1,$$

czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \div B.$$

Aby w pełni docenić przedstawiony sposób dowodu powyższych dwóch równości, należy teraz przypomnieć sobie (długi) dowód wykorzystujący definicję różnicy symetrycznej oraz dobrze znane fakty o sumie, iloczynie i różnicy zbiorów.







## Płynność nagród

W październiku 2003 roku przyznano kolejne Nagrody Nobla. Nie po raz pierwszy trudno oprzeć się wrażeniu, że przyznający nagrody z poszczególnych dziedzin działali „wspólnie i w porozumieniu”.

Peterowi Agre i Roderickowi MacKinnonowi (obaj Stany Zjednoczone), **za odkrycie kanałów transportu wody i jonów przez błony komórkowe**, przyznano Nagrodę Nobla z Chemii, bo Nagroda Nobla z Fizjologii i Medycyny trafiła do Paula C. Lauterbura (Stany Zjednoczone) i szlachetnego Petera Mansfielda (Wielka Brytania) za „**ich odkrycia, dotyczące obrazowania metodą rezonansu magnetycznego**”. Dostali oni tę właśnie nagrodę, a nie Nagrodę Nobla z Fizyki, bo ta okazała się zarezerwowana dla Alexeia A. Abrikosova (Rosja i Stany Zjednoczone, amerykańska pisownia nazwiska), Vitaly’ego L. Ginzburga (Rosja, pisownia jw.) i Anthony’ego J. Leggetta (Wielka Brytania i Stany Zjednoczone). Przyznano ją za „**pionierski wkład w teorię nadprzewodnictwa i nadciekłości**”.

Wszystkie trzy nagrody dotyczą fizyki płynów, a w pierwszych dwóch przypadkach chodzi po prostu o wodę.

Prace Agre pozwoliły odnaleźć proteiny odpowiedzialne za, poszukiwany od ponad stu lat, mechanizm szybkiego transportu wody przez błony komórkowe. Z kolei MacKinnonowi jako pierwszemu udało się dokładnie odtworzyć przestrzenną strukturę kanału potasowego, odgrywającego kluczową rolę w przewodzeniu nerwowym.

Natomiast panowie Lauterbur i Mansfield doprowadzili technikę jądrowego rezonansu magnetycznego do postaci niezwykle użytecznego obrazowania metodą rezonansu magnetycznego. Po drodze zgubili niewygodny przymiotnik „jądrowy” (i chyba za karę nie dostali Nobla z Fizyki). Gubienie było jak najbardziej świadome. Na początku lat siedemdziesiątych, gdy rozpoczęto rozwijanie metody, przymiotnik ten już „źle się kojarzył”, więc uznano, że lepiej go pominąć. Tymczasem magnetyczny rezonans jądrowy nie ma, jak Czytelnicy *Delta* świetnie wiedzą, nic wspólnego z promieniowaniem jądrowym. Chodzi o oddziaływanie zewnętrznego pola magnetycznego z magnetycznym momentem jądrowym. Wykorzystując odpowiednio modulowane pole magnetyczne można uzyskać mapę gęstości występowania jakiegoś jądra, a więc i zawierającego je atomu. W rozpatrywanej metodzie diagnostycznej chodzi po prostu o wyznaczenie mapy obecności jąder wodoru (protonów) wchodzących w skład cząsteczek wody, z której w siedemdziesięciu procentach składa się ludzkie ciało.

Rutynowe (przynajmniej w bogatych krajach, u nas ciągle raczej „reglamentowane”) stosowanie „rezonansu”, jak w medycznym żargonie nazywa się takie badanie, nie byłoby jednak możliwe bez bardzo silnych, ale stosunkowo niedużych i niedrogich (nie bardzo drogich) magnesów. Te z kolei nie powstałyby bez nadprzewodników. I tu dochodzimy do naprawdę dziwnych płynów.

Wszystko zaczęło się od Duńczyka Heike Onnesa, który w 1908 roku skroplił hel (gaz o najniższej temperaturze skraplania), a w 1911 roku odkrył, że drut rtęciowy,

w temperaturze ciekłego helu, przewodzi prąd bez oporu. Zjawisko to nazwał właśnie nadprzewodnictwem. Już w 1913 roku otrzymał Nagrodę Nobla z Fizyki, ale przyznano mu ją głównie za samo skroplenie helu, które przez wiele lat nikomu się nie udawało. Nadprzewodnictwo było przecież wtedy zjawiskiem całkowicie niezrozumiałym. Były to jednak czasy, gdy dość dosłownie traktowano testament Nobla, który nakazywał nagradzanie użytecznych osiągnięć. Prawdopodobnie spodziewano się po tym odkryciu czegoś równie pożytecznego, jak po wynalazku nagrodzonego rok wcześniej Gustafa Daléna, który rozwiązał problem tak przejmująco opisany w 1882 roku w noweli „Latarnik” (przez noblistę z 1905 roku). Gdybyż tytułowy bohater dysponował był wynalezionym przez Daléna automatycznym włącznikiem światła latarnianych...

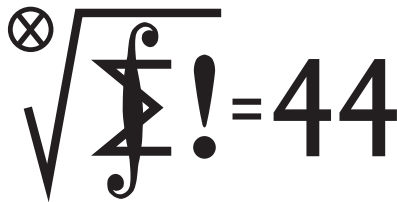
Wróćmy jednak do nadprzewodnictwa. Obecnie wiemy, że jest to jeden z najbardziej spektakularnych makroskopowych efektów kwantowych, który nie daje się opisać na gruncie mechaniki klasycznej. W 1913 roku nie było więc żadnych szans na zrozumienie tego zjawiska. Przecież sama mechanika kwantowa powstała dopiero dekadę później. Na zadowalającą teorię najprostszej wersji nadprzewodnictwa trzeba było poczekać pół wieku, a pełnej teorii wszystkich aspektów tego zjawiska nadal nie ma.

Prześledźmy tę historię. W 1924 roku Einstein pomógł Satyendra’owi Bosemu opublikować pracę, która pokazywała, jak z pierwszych zasad można wyprowadzić widmo promieniowania ciała doskonale czarnego, odgadnięte przez Plancka ćwierć wieku wcześniej. Einstein pogłębił ideę Bosego rozważając cząstki o skończonej masie (zamiast bezmasowych fotonów) i przewidział, że w bardzo niskiej temperaturze część takich cząstek powinna znaleźć się w stanie o najniższej energii i pozostawać w nim, czyli poruszać się bez oporu. Zjawisko to nazwano kondensacją Bosego–Einsteina, a cząstki mogące w nim uczestniczyć *bozonami*. Później okazało się, że cząstki materii, takie jak elektrony, protony i neutrony, podlegają tzw. zakazowi Pauliego zabraniającemu dwóm identycznym cząstkom przebywania w tym samym stanie kwantowym. Cząstki te nazwano *fermionami*. O tym, czy cząstka jest fermionem czy bozonem, decyduje spin, czyli wewnętrzny moment pędu. Jeżeli jest całkowity (w jednostkach  $\hbar$ ), to jest to bozon, a jeżeli połówkowy – to fermion. Układ parzystej liczby fermionów może również zachowywać się jak bozon.

Oczywiście nasi Czytelnicy domyślili się już (jeżeli nie wiedzieli tego uprzednio), że nadprzewodnictwo jest rodzajem kondensacji Bosego–Einsteina. Problemem jest tylko to, że nośnikami prądu w nadprzewodnikach są elektrony, a więc fermiony. Rozwiązanie tego problemu zajęło pół wieku... więc nie ma się co dziwić, że i dokończenie tej historii ukaże się w *Delcie* dopiero za miesiąc<sup>†</sup>...

Piotr ZALEWSKI

<sup>†</sup> dokończenie jest już dostępne w Internecie  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta0204/aktualnosci.html>



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 III 2004

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
**461** ( $WT = 1,92$ ) i **462** ( $WT = 1,49$ )  
z numeru 5/2003

Michał Adamaszek	– Kęty	43,17
Paweł Najman	– Jaworzno	39,72
Marian Łupieżowicz	– Zebrzydowice	37,40
Michał Józwickowski	– Błonie	36,70
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	36,07
Paweł Kubit	– Kraków	35,99
Piotr Kumor	– Olsztyn	35,49

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z matematyki nr 473, 474

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**473.** Trapez  $ABCD$  o równoległych podstawach  $AB$ ,  $CD$  jest wpisany w okrąg  $\Omega$ . Okrąg  $\omega$ , styczny wewnętrznie do  $\Omega$  w punkcie  $T$ , jest też styczny do odcinków  $BC$  i  $CA$ . Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do boku  $AB$  w punkcie  $K$ . Dowieść, że punkty  $D$ ,  $K$ ,  $T$  są współliniowe.

**474.** Dla jakich dodatnich liczb całkowitych  $n$  równanie

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1} = n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ?

Zadanie **474** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2003

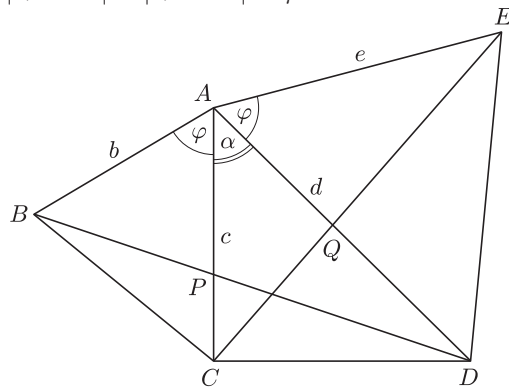
Przypominamy treść zadań:

**465.** Dany jest pięciokąt wypukły  $ABCDE$ , w którym  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD|$ ,  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADE|$ , a pole trójkąta  $ACD$  jest średnią geometryczną pól trójkątów  $ABC$  i  $AED$ . Przekątne  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $P$ ; przekątne  $AD$  i  $CE$  przecinają się w punkcie  $Q$ . Dowieść, że  $|AP| = |AQ|$ .

**466.** Rozwiązać w liczbach całkowitych  $x$ ,  $y$  równanie  $x + 2^y = 2^x$ .

**465.** Przyjmijmy oznaczenia:

$|AB| = b$ ,  $|AC| = c$ ,  $|AD| = d$ ,  $|AE| = e$ ,  $|\sphericalangle CAD| = \alpha$ ,  
 $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD| = \varphi$ .



Z danych w założeniach równości kątów wynika, że trójkąty  $BAC$  i  $EAD$  są podobne, a zatem  $b/c = e/d =: k$ . Warunek wiążący pola trójkątów  $ACD$  oraz  $ABC$  i  $AED$  daje równość  $(cd \sin \alpha)^2 = (bc \sin \varphi)(de \sin \varphi)$ , skąd po podstawieniu  $b = kc$ ,  $e = kd$  dostajemy:  $\sin \alpha = k \sin \varphi$ .

Korzystając z uzyskanych związków, obliczamy:

$$\frac{|AP|}{|AC|} = \frac{\text{pole}(ABD)}{\text{pole}(ABCD)} = \frac{bd \sin(\varphi + \alpha)}{bc \sin \varphi + cd \sin \alpha} =$$

$$= \frac{kcd(\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \cdot k \sin \varphi)}{kc^2 \sin \varphi + cd \cdot k \sin \varphi} =$$

$$= \frac{d(\cos \alpha + k \cos \varphi)}{c + d},$$

czyli

$$|AP| = \frac{cd}{c+d}(\cos \alpha + k \cos \varphi).$$

Otrzymane wyrażenie jest symetryczne względem  $c$ ,  $d$ ; zatem  $|AQ|$  wyraża się tym samym wzorem.

**466.** Załóżmy, że liczby całkowite  $x$ ,  $y$  spełniają podane równanie. Jeśli  $x < 0$ , to  $2^x$  jest liczbą z przedziału  $(0; 1)$ , podczas gdy  $x + 2^y$  jest liczbą całkowitą lub liczbą ujemną. Wobec tego  $x \geq 0$ .

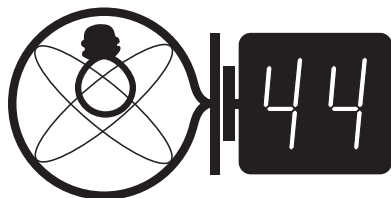
Gdy  $x = 0$ , to  $2^y = 2^x$ , więc  $y = 0$ ; para  $(0, 0)$  jest rozwiązaniem.

Gdy  $x > 0$ , to  $2^y < 2^x$ , więc  $y < x$ , czyli  $y \leq x - 1$ . Wówczas

$$x = 2^x - 2^y \geq 2^x - 2^{x-1} = 2^{x-1}.$$

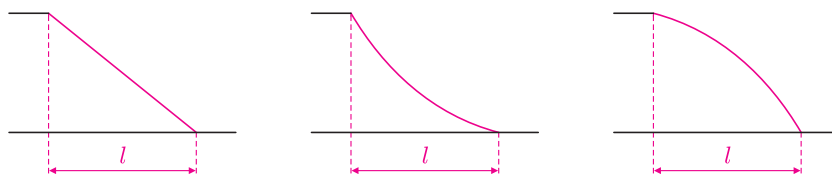
Ale dla każdej liczby całkowitej  $x \geq 1$  zachodzi nierówność  $2^{x-1} \geq x$ , która staje się równością jedynie dla  $x = 1$  oraz  $x = 2$ . Dla tych dwóch wartości  $x$  dostajemy dla  $y$  odpowiednio wartości  $y = 0$  oraz  $y = 1$ .

Istnieją więc trzy pary  $(x, y)$  spełniające równanie:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ .



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 III 2004

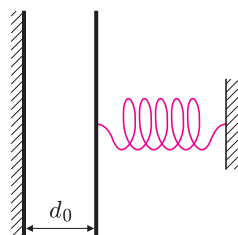
**370.** Górka ma jedno zbocze będące równią pochyłą, drugie zbocze jest wklęsłe, a trzecie – wypukłe (rys. 1), przy czym zarówno wysokość zboczy, jak i długość rzutu na płaszczyznę poziomą są jednakowe.



Rys. 1

Dyzio zjechał sankami ze zbocza prostoliniowego i narzeka: „Marny dzisiaj śnieg, nawet na samym dole nie można się porządnie rozpędzić!”. Czy Dyzio rozpędzi się bardziej, gdy zjedzie z innego zbocza, a jeśli tak, to z którego? Współczynnik tarcia sanek o śnieg jest wszędzie taki sam, a opór powietrza pomijamy. Zabronione jest odpychanie się od podłoża (dotyczy to zwłaszcza zbocza wypukłego, które musi od początku być dostatecznie nachylone, aby sanki ruszyły z miejsca).

**371.** Dwie równoległe płytki przewodzące o powierzchni  $S$  tworzą kondensator powietrzny. Jedna z płytek jest nieruchoma, a drugą przymocowano do sprężynki o stałej sprężystości  $k$ , przy czym dla sprężynki swobodnej odległość między płytkami jest równa  $d_0$  (rys. 2). Jakie jest maksymalne napięcie, które można przyłożyć do takiego kondensatora, aby płytki się nie zetknęły? Jaką maksymalną energię może zmagazynować taki układ? Napięcie wzrasta stopniowo, tak że płytka nie zostanie wprawiona w drgania.



Rys. 2

**Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2003**

Przypominamy treść zadań:

**362.** Stacja kosmiczna o masie  $m = 10$  ton zawiera w objętości  $V = 40 \text{ m}^3$  powietrze pod ciśnieniem  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$  i o temperaturze  $T = 20^\circ \text{ C}$ . Nagle w ścianie stacji powstał otwór o powierzchni  $S = 1 \text{ mm}^2$ .

- a) Po jakim czasie ciśnienie wewnątrz stacji spadnie do wartości  $p_1 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  (jeśli kosmonauci nie podejmą żadnych kroków zaradczych)? Zakładamy, że rozprężenie przebiega izotermicznie.
- b) Jaką prędkość uzyska stacja wskutek odrzutu? Otwór jest tak położony, że odrzut nie spowoduje obrotu stacji.

**363.** W Canberze (Australia) jest fontanna, która wytryskuje wodę na wysokość 150 m. W każdej chwili w powietrzu znajduje się  $6 \text{ m}^3$  wody. Jaka musi być minimalna moc pompy?

**362.** Prędkość  $v$  strumienia gazu wylatującego przez otwór można obliczyć z równania Bernoulliego (tzn. z zasady zachowania energii)

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością gazu, a  $M$  – masą molową. Iloczyn  $v$  przez powierzchnię otworu  $S$  jest objętością (przed rozprężeniem) gazu wypływającego na jednostkę czasu, a po pomnożeniu przez  $p/RT$  otrzymujemy, o ile zmniejszyła się liczba moli

$$dn = -\frac{pS}{RT}v dt = -\frac{pS}{RT}\sqrt{\frac{2RT}{M}} dt.$$

Stąd wynika zmiana ciśnienia

$$dp = -p\frac{S}{V}\sqrt{\frac{2RT}{M}} dt.$$

Całkując, obliczamy szukany czas

$$t = \frac{V}{S}\sqrt{\frac{M}{2RT}} \ln \frac{p_0}{p_1} \approx 67700 \text{ s} = 18,8 \text{ h},$$

gdzie podstawiliśmy masę molową powietrza równą 29 g.

Prędkość  $v_s$  uzyskaną przez stację wyznaczmy z zasady zachowania pędu

$$v_s = v \frac{\Delta m}{m} = vM \frac{\Delta n}{m} = \frac{V(p_0 - p_1)}{m} \sqrt{\frac{2M}{RT}} = 0,98 \text{ m/s}.$$

Ścisłe całkowanie ruchu stacji z uwzględnieniem zmian jej masy nie jest tu konieczne, gdyż te zmiany są niewielkie (wypłynie tylko ok. 24 kg powietrza, tzn. 1/400 masy stacji).

**363.** Pomijając opór powietrza, czas lotu wody w górę i w dół wynosi łącznie

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 11,1 \text{ s}.$$

Na jednostkę czasu wyrzucana jest więc masa wody równa

$$m/t = 6000 \text{ kg}/11,1 \text{ s} = 542 \text{ kg/s},$$

a moc pompy obliczymy ze wzoru

$$P = mgh/t \approx 800 \text{ kW}.$$





## Patrz w niebo

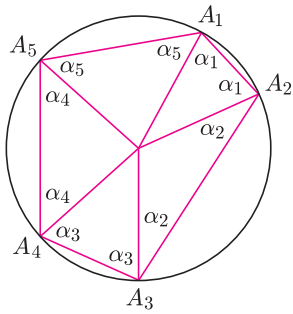
Wyznaczanie fizycznych parametrów gwiazd jest podstawowym obszernym działem astronomii obserwacyjnej. Obserwatorzy często znajdują się w nerwowej sytuacji, wynikającej – paradoksalnie – z różnorodności stosowanych metod. Bo jeżeli jakiś parametr zostanie wyznaczony na dwa sposoby, to chciałoby się, żeby wyniki były jednakowe (powiedzmy, w granicach błędów metod), tymczasem wcale tak nie jest, a przynajmniej nie zawsze.

Jednym z takich bardzo ważnych parametrów jest wiek gwiazd. Wiek pulsarów określa się zazwyczaj na podstawie tempa ich obrotu. Pulsar to gwiazda neutronowa powstała w wyniku zapaści jądra masywnej gwiazdy eksplodującej jako supernowa. Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że jeżeli przed wybuchem gwiazda obracała się, to po wybuchu zapadnięte jądro może obracać się bardzo szybko. Wzmocnione wskutek tej zapaści pole magnetyczne gwiazdy, zmuszone teraz do obracania się wraz z zapadniętym jądrem, będzie omiatać rozprężającą się po wybuchu mgławicę, wywołując w niej błyski, czyli efekt pulsara. Zmierzywszy tempo zwalniania obrotów przez pulsara i przyjąwszy, że młody pulsar nie może wirować szybciej niż 1000 obrotów na sekundę (bo rozerwałoby go przyspieszenie odśrodkowe), można oszacować jego wiek. Tą metodą wiek pulsara B1757-24 w Strzelcu został oceniony na 16 000 lat. Zauważmy, że jest to wiek zawyżony, gdyż pulsar ten w chwili powstania wcale nie musiał wirować tak szybko.

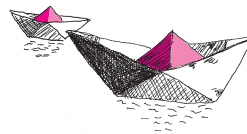
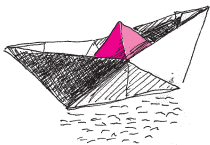
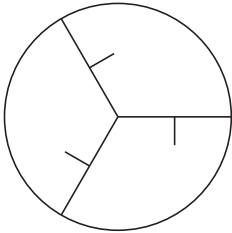
„Niestety”, w ciągu kilku lat zmierzono też ruch tego pulsara względem jego własnej mgławicy, czyli tzw. pozostałości po wybuchu. Ruch ten w ogóle istnieje, ponieważ mgławica doznaje oporu ze strony materii międzygwiazdowej, a pulsar praktycznie nie. Okazało się, że na przebycie drogi ze środka mgławicy do obecnego położenia pulsar powinien zużyć 39 000 lat. Jak widać – nie zgadza się, i to mocno. Mała jest szansa na to, że pulsar B1757-24 i mgławica znalazły się przypadkowo jedno obok drugiego, zatem sprawa ta niewątpliwie będzie badana w przyszłości.

*Tomasz KWAST*

**Rozwiązanie zadania M 1049.**  
Suma kątów przy  $A_1$  i  $A_3$  jest mniejsza niż połowa sumy wszystkich kątów pięciokąta, czyli  $\frac{1}{2}540^\circ = 270^\circ$ .



**Rozwiązanie zadania M 1050.**  
Owszem.



## Styczeń

Zaczyna się kolejny rok, znowu przestępny, czyli luty będzie mieć 29 dni, a cały rok 366. Przypomnijmy sobie: według kalendarza gregoriańskiego, obowiązującego teraz niemal na całym świecie, rokiem przestępnym jest ten, którego numer dzieli się przez 4 – chyba że dzieli się przez 100 i wtedy jest rokiem zwykłym (365 dni) – chyba że dzieli się przez 400, a wtedy jest jednak rokiem przestępnym. Reguła ta zapewnia, że średni rok kalendarzowy jest tak zbliżony do roku zwrotnikowego (tj. okresu powtarzania się pór roku), iż różnica skumuluje się do jednego dnia dopiero po kilku tysiącach lat. Rok 2000 był przestępny, ale 1900 był zwykły. W roku 2004 zobaczymy (choć niekoniecznie z Polski) dwa częściowe zaćmienia Słońca, dwa całkowite zaćmienia Księżyca oraz Wenus na tle tarczy Słońca – to zjawisko akurat będzie w Polsce widać. Kilka słów o tych zjawiskach będzie we właściwym czasie, a wspominam o tym wszystkim już teraz, gdyż może dzięki temu uniknę czegoś podobnego do fatalnego

przeoczenia z sierpnia 2003, gdy zapomniałem zapowiedzieć wielką opozycję Marsa.

Wenus jest w Wodniku, zachodzi wkrótce po zachodzie Słońca, a jej kątowa odległość od Słońca rośnie. Przy niej w odległości około  $1^\circ$  znajdzie się 15 I Uran, ale Urana gołym okiem właściwie nie widać, a dysponując małym teleskopem, niełatwo go rozpoznać. Mars jest w Rybach i widać go w pierwszej połowie nocy. Jowisz jest w Lwie, a Saturn w Bliźniętach, przez co obie te planety widać przez większą część nocy, z tym że gdy Jowisz wieczorem wschodzi, to Saturn jest już dobrze widoczny, gdy zaś o świcie Saturn zachodzi, to Jowisz jeszcze jest na niebie. 4 I Ziemia przechodzi przez perihelium. 17 I można przed wschodem Słońca szukać Merkurego – znajdzie się wtedy  $24^\circ$  na zachód od niego. Pełnia Księżyca wypada 7 I, a now 21 I. Żadnych zakryć jasných obiektów w styczniu nie będzie.

*T. K.*

