

## SPIS TREŚCI NUMERU 10 (353)

Zbiory rozmyte dla początkujących <i>Piotr Dworniczak</i>	str. 1
Zadania <i>Piotr Dworniczak</i>	str. 3
Prawdopodobieństwo warunkowe <i>Jacek Jakubowski</i> <i>Rafał Sztencel</i>	str. 4
Kłopoty z regułą Bayesa <i>Marcin Sterkowicz</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Pileczka w szklance wody <i>Andrzej Hryczuk</i> <i>Robert Żak</i>	str.10
Pozorna trudność <i>Marek Kordos</i>	str.12
Aktualności	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Październik	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichoński – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hryniewicz, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na I kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiwi.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wybór artykułów *Małej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

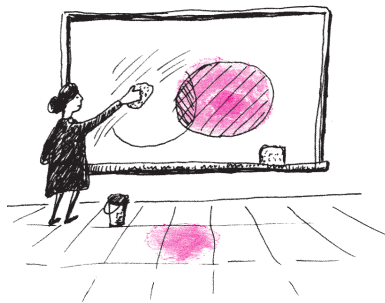
Cena 1 egzemplarza 4 zł

**W następnym numerze:**

Wyobraź sobie wzór

# Zbiory rozmyte dla początkujących

Piotr DWORNICZAK

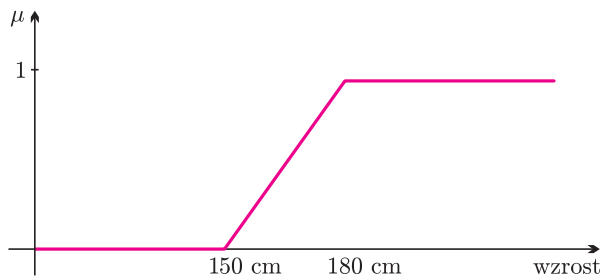


Czy matematyka jest nauką ścisłą? Większość odpowiada na takie pytanie twierdząco. A czy jest przydatna w życiu, w innych naukach? Na to pytanie odpowiedzi mogą być bardziej zróżnicowane. Może w technice, gdzie wymagane są dokładne obliczenia i precyzja, ale np. w biologii czy medycynie? Dawno już wyśmiane zostały zalecenia mówiące o tym, że należy dziennie spożywać np. 57 g białka, 189 g węglowodanów itp. Obecnie wskazuje się, że zapotrzebowanie organizmu to około tyle i tyle przy umiarkowanych warunkach klimatycznych i ciężkiej pracy fizycznej. Gdzie tu ścisła matematyka? Otóż pojawiła się i tu, choć co prawda, jak na czas jej rozwoju, stosunkowo niedawno wraz z opisaniem tzw. zbiorów rozmytych.

Zbiór (klasyczny) jest tzw. pojęciem pierwotnym, tzn. pojęciem, którego nie można zdefiniować za pomocą pojęć prostszych. Zakłada się przy tym, że dowolny element do zbioru albo należy, albo nie należy.

W języku naturalnym często występują jednak określenia zbiorów, dla których właściwie niezbędne jest wprowadzenie pośrednich stopni przynależności elementów. Popularnym przykładem takiego zbioru jest zbiór  $W$  ludzi wysokich. Czy człowiek, mający 170 cm wzrostu, jest wysoki? A 169 cm? A 168 cm? Gdzie leży granica między „wysokimi”, a „nie wysokimi” ludźmi? Próba ustalenia takiej granicy jest śmieszna i nie może skończyć się zadowalającym rezultatem, usiłujemy bowiem przejść w tym miejscu z wygodnego, naturalnego opisu świata za pomocą pojęć jakościowych do opisu za pomocą pojęć ilościowych.

Nie należy tego problemu porzucać, lecz przyjąć, że każdy człowiek jest wysoki, ale w pewnym stopniu! Stopień ten jest podany za pomocą liczby z przedziału  $[0, 1]$ . Może to wyglądać następująco: ludzi o wzroście poniżej 150 cm nie uważamy za wysokich, więc przypisujemy im stopień 0 przynależności do zbioru  $W$  ludzi wysokich, natomiast ludzi o wzroście powyżej 180 cm za wysokich uważamy – przypisujemy im stopień przynależności równy 1. Osoby o wzroście między 150 a 180 cm mogą być również uznane za „wysokie”, przy czym stopień przynależności jest pośredni – między 0 a 1. Można to przedstawić graficznie jak na rysunku 1.



Rys. 1. Funkcja przynależności zbioru rozmytego ludzi „wysokich”.

Z punktu widzenia matematyki jest to wykres pewnej funkcji. Wartość  $\mu(x)$  w danym punkcie  $x$

(tzn. dla danego wzrostu  $x$ ) interpretowana jest jako stopień, w jakim osoba o wzroście  $x$  należy do zbioru  $W$  ludzi wysokich.

Tego typu koncepcję opisu nieostro określonych zbiorów podał po raz pierwszy w artykule „Fuzzy sets” w czasopiśmie *Information and Control* w 1965 roku Lofti A. Zadeh, nazywając je zbiorami rozmytymi (*fuzzy sets*).

Formalnie zbiór rozmyty  $A$  określony w pewnej przestrzeni  $X$  to zbiór

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\},$$

gdzie  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$  jest funkcją nazywaną funkcją przynależności zbioru rozmytego  $A$ .

Wartość  $\mu_A(x)$  jest więc liczbą z przedziału  $[0, 1]$ , a nazywana jest stopniem przynależności elementu  $x$  do zbioru  $A$ . Podanie zbioru rozmytego jest, inaczej mówiąc, podaniem klasycznego zbioru elementów, których przynależność rozważamy, wraz z ich stopniami przynależności. Zbiór  $X$  nazywany jest przestrzenią albo uniwersum, na którym określamy zbiór rozmyty. W przykładzie o „wysokich” osobach uniwersum to zbiór ludzi (dokładniej – wzrostu ludzi). Mamy tu pierwszą osobliwość zbiorów rozmytych:

funkcja przynależności, tzn. funkcja określająca zbiór rozmyty, jest subiektywna (!), podawana przez człowieka.

Rozważmy inny przykład. Mamy cztery pralki oznaczone  $p, r, s, t$ , o podanych cenach 1000 zł, 1100 zł, 1300 zł, 1700 zł i klasach energetycznych  $D, C2, B, C1$ . Zbiór  $T$  tanich pralek może być określony następująco:

$$T = \{(p; 1), (r; 0,9), (s; 0,7), (t; 0,4)\},$$

co oznacza, że pralkę  $p$  uznajemy za taną w stopniu 1, pralkę  $r$  w stopniu 0,9 itd. Inaczej zbiór  $T$  zapisuje się w postaci

$$T = \{p/1, r/0,9, s/0,7, t/0,4\}.$$

W tym przypadku uniwersum to zbiór tylko tych czterech rozważanych pralek. Jest to zbiór skończony i dlatego wygodnie zapisywać zbiór rozmyty w jednej z powyższych postaci.

Określmy jeszcze (np. na podstawie pewnych danych fabrycznych) zbiór pralek energooszczędnych

$$E = \{p/0,3, r/0,5, s/0,7, t/0,4\}.$$

Pojawia się teraz naturalne pytanie o wybór pralki, która będzie tania i energooszczędna. Z punktu widzenia algebry zbiorów chodzi o wyznaczenie części wspólnej dwóch zbiorów rozmytych. Najczęściej stosowane podejście zostało wprowadzone przez Zadeha. Stopniem przynależności danego elementu  $x$  do zbioru  $A \cap B$  jest minimum ze stopni przynależności do zbioru  $A$  i do zbioru  $B$ . W przykładzie z pralkami

$$T \cap E = \{p/0,3, r/0,5, s/0,7, t/0,4\}.$$

Zatem najbardziej „tania i energooszczędna” pralka to  $s$ .

Widać w tym momencie przewagę zbiorów rozmytych nad klasycznymi. Przy wyborach na podstawie kilku kryteriów w przypadku zbiorów klasycznych najczęściej dochodzi się do wniosku, że nie ma elementu spełniającego jednocześnie wszystkie postulowane warunki. W przypadku stosowania zbiorów rozmytych każdy (!) element spełnia wszystkie warunki, aczkolwiek w pewnym stopniu. Należy następnie znaleźć taki, dla którego stopień ten jest największy. Wybory podobne do wyboru naszych pralek mogą dotyczyć wielu poważnych zagadnień.

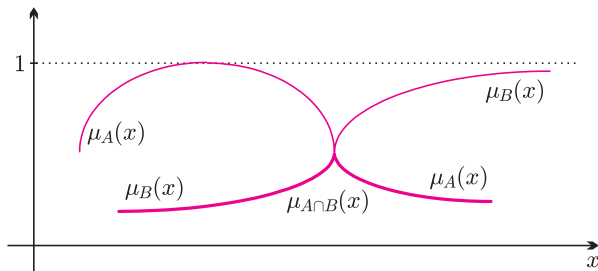
Powyżej przedstawione wyznaczenie iloczynu zbiorów nie jest jednoznaczne. Najczęściej stopień przynależności określany jest formułą

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Innym sposobem wyznaczenia tego stopnia jest tzw. iloczyn algebraiczny lub probabilistyczny

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Nie można podać jednoznacznego sposobu wyznaczenia iloczynu zbiorów rozmytych. Funkcję przynależności iloczynu typu minimum wyznaczyć można łatwo jak na rysunku 2.



Rys. 2. Funkcja przynależności (typu minimum) iloczynu zbiorów rozmytych  $A$  i  $B$ .

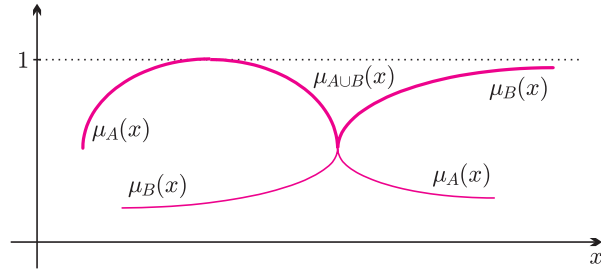
Podobne jak przy iloczynie problemy występują przy wyznaczaniu sumy zbiorów rozmytych. Najczęściej stopień przynależności wyznaczany jest formułą podaną przez Zadeha

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Innym sposobem wyznaczenia tego stopnia jest tzw. suma algebraiczna lub probabilistyczna

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Nie można podać jednoznacznego sposobu wyznaczenia sumy zbiorów rozmytych. Łatwo można graficznie pokazać wyznaczenie sumy postaci maksimum jak na rysunku 3.



Rys. 3. Funkcja przynależności (typu maksimum) sumy zbiorów rozmytych  $A$  i  $B$ .

Oprócz sumy i iloczynu zbiorów podstawowym pojęciem jest także dopełnienie zbioru rozmytego. Dla danego zbioru rozmytego  $A$  określonego przez funkcję przynależności  $\mu_A$  dopełnienie  $A'$  określone jest przez funkcję przynależności

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

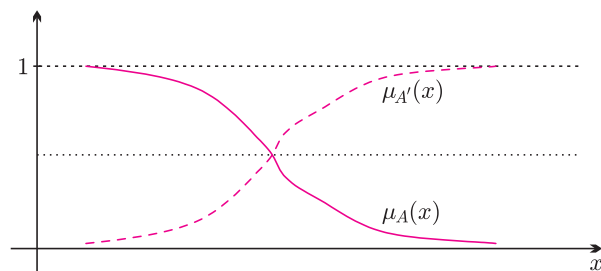
Przykładowo, gdy w przestrzeni  $X = \{a, b, c, d\}$  określimy zbiór  $A$  postaci

$$A = \{a/0,4, b/0,5, c/1, d/0,1\},$$

to

$$A' = \{a/0,6, b/0,5, c/0, d/0,9\}.$$

Dopełnienie można też zobrazować graficznie jak na rysunku 4.



Rys. 4. Funkcja przynależności dopełnienia zbioru rozmytego  $A$ .

W większości źródeł nie podaje się innego sposobu wyznaczenia dopełnienia zbioru rozmytego. Nie znaczy to jednak, że jest to niemożliwe. Ogólnie dopełnienie związane jest z operatorem logicznym negacji, nie można go jednak wyznaczyć jednoznacznie. Mamy zatem drugą osobliwość zbiorów rozmytych:

*część wspólna i suma zbiorów rozmytych oraz dopełnienie zbioru rozmytego mogą być określone poprawnie na różne sposoby (!).*

W klasycznym rachunku zbiorów występuje jeszcze różnica zbiorów  $A - B$ , ale ponieważ zachodzi równość  $A - B = A \cap B'$ , więc korzysta się z niej również w rachunku zbiorów rozmytych, wykorzystując oczywiście różne określenia części wspólnej i dopełnienia.

Przy definicji i działaniach na zbiorach rozmytych podstawową sprawą jest określenie funkcji

przynależności. Zazwyczaj funkcje te określane są przez człowieka-eksperta, przy uwzględnieniu jego doświadczenia i wiedzy oraz danych opisujących rozważane obiekty. Jest to kolejna osobliwość:

*określenie funkcji przynależności zbiorów rozmytych i adekwatnych działań na nich jest wielką sztuką, bo nie jest jednoznaczne.*

Czy wobec różnorodnych trudności i osobliwości warto stosować zbiory rozmyte i je badać? No cóż, na co dzień świetnie dajemy sobie radę z rozumieniem i przetwarzaniem informacji typu „przyjdź *około* czwartej na spotkanie w gronie *najbliższych* znajomych i przynieś *trochę* tych *dobrych* kiełbasek do grilowania”. Skoro więc często operujemy nieprecyzyjnymi jakościowymi ludzkimi określeniami, to – być może – należy również przetwarzać je na „ludzki” sposób.

Niezależnie od wad i zalet teoria zbiorów rozmytych rozwija się i jest stosowana. Największą osobliwością jest, moim zdaniem, właśnie to, że to wszystko działa w praktyce! Zbiory rozmyte są z powodzeniem stosowane w technice i przynoszą wymierne, konkretne

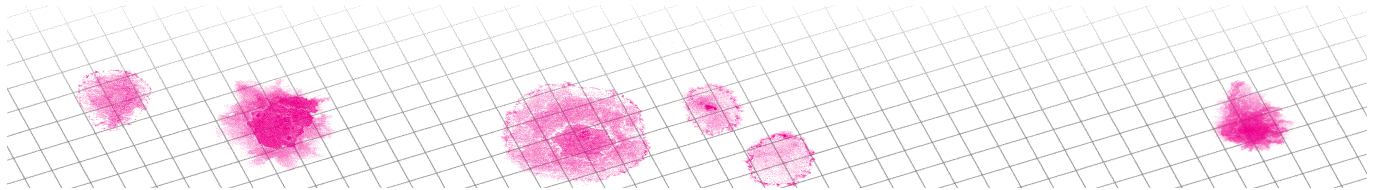
i zupełnie nierozmyte korzyści. Coraz częściej spotykamy na urządzeniach napis fuzy lub fuzy logic – FL. Tak jest, na przykład, w przypadku dostępnych na naszym rynku pralek: Candy – ACS 1040, ACS 840, CSBL100PL, Hoover – AI 1040, AI 120, AL 120, Miele – W 487 WPS, W 433E, Elektrolux – EW 1220N, EW 1267F, Siemens – WIQ 1430, chłodziarko-zamrażarek: Haier – HRF 348A, HRF 368A, HRF 368/2, kamer video: Sanyo, Sony (w tych kamerach chodzi o optymalizację ostrości oraz kompensację przypadkowych poruszeń kamery związanych z drganiem ręki i umiejętności odróżnienia ich od ruchu filmowanego obiektu i ruchu kamery przy robieniu panoramy – dzięki FL zapobiega się „beźmyślnemu” działaniu stabilizatora obrazu).

Zainteresowanym zbiorami rozmytymi polecam literaturę (tu tylko wybrane pozycje po polsku):

J. Kacprzyk: *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*. WNT, Warszawa 2001.

A. Łachwa: *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów i decyzji*. AOW EXIT, Warszawa 2001.

A. Piegat: *Modelowanie i sterowanie rozmyte*. AOW EXIT, Warszawa 1999.



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 605.** Do belki o równych ramionach przymocowane są dwa ciężary o jednakowej masie. Każdy z nich jest zanurzony w cieczy o gęstości  $\rho_1$  i  $\rho_2$ , odpowiednio. Znaleźć stosunek gęstości ciężarów, dla którego waga znajduje się w równowadze.

Rozwiązanie na str. 4

**F 606.** Dwie kulki o jednakowym promieniu  $R = 1$  cm, jedna z aluminium, druga z drewna, połączone długą nicią, są w całości zanurzone w wodzie, poruszając się ze stałą pionową prędkością. Znaleźć siłę oporu wody działającą na każdą z kulek. Gęstość aluminium  $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, drewna  $\rho_2 = 0,5 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, wody  $\rho_0 = 1 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Przyjąć, że przyspieszenie ziemskie wynosi  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

$[x]$  i  $\{x\} = x - [x]$  oznaczają, odpowiednio, część całkowitą i część ułamkową liczby  $x \in \mathbb{R}$ .

**M 1039.** Niech  $a_n = \left[ \frac{n}{\sqrt{n}} \right]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dla jakich liczb naturalnych  $n$  zachodzi nierówność  $a_{n+1} < a_n$ ?

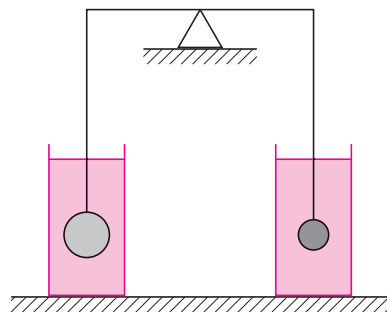
Rozwiązanie na str. 12

**M 1040.** Udowodnić, że jeśli  $[\sqrt{n} + \frac{3}{2}] = [\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}]$  dla  $n \in \mathbb{N}$ , to  $n = a^2 + a$ , dla pewnego  $a \in \mathbb{N}$ .

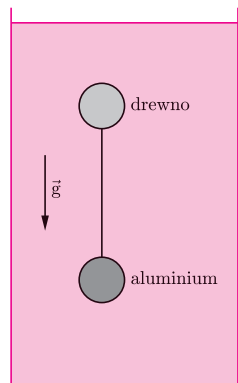
Rozwiązanie na str. 12

**M 1041.** Udowodnić, że  $[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{8n+3}] = [\sqrt[3]{27n+1}]$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1



Rys. 2



# Prawdopodobieństwo warunkowe

Jacek JAKUBOWSKI, Rafał SZTENCEL

W tym artykule pokażemy trzy przykłady, z których widać, że prawdopodobieństwo warunkowe ma, mimo prostej definicji, zaskakujące własności. Zaczniemy od przykładu, który można spotkać w prawie każdym podręczniku, następnie podamy przykład związany z grami losowymi, a zakończymy przykładem z medycyny.

## Przykład 1

Losujemy jedną rodzinę spośród rodzin z dwojgiem dzieci. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiemy, że w tej rodzinie:

- starsze dziecko jest chłopcem,
- jest co najmniej jeden chłopiec.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  składa się z czterech jednakowo prawdopodobnych par:

$$\{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\},$$

gdzie pierwszy element pary oznacza młodszego dziecko, a drugi – starsze.

W punkcie a) spodziewamy się odpowiedzi  $1/2$  i rzeczywiście

$$P(\{(c, c)\} | \{(c, c), (d, c)\}) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Natomiast odpowiedź na pytanie b) może być niespodzianką:

$$P(\{(c, c)\} | \{(c, c), (d, c), (c, d)\}) = \frac{1}{3}.$$

Drugi przykład dotyczy oceny szans w grze wywołującej wiele emocji zarówno wśród uczestników, jak i widzów w USA w latach 90. ubiegłego wieku. Jeszcze więcej emocji wzbudziło rozwiązanie.

## Przykład 2

Po dojściu do ostatniego etapu teleturnieju uczestnik ma wybrać jedne drzwi spośród trojga. Wie, że za jednym jest samochód, a za pozostałymi żywe gęsi. Dokonuje wyboru. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że grający wybrał drzwi nr 1. Wtedy prowadzący (który wie, gdzie co jest) otwiera jedno z pozostałych, a mianowicie te, za którymi jest gęś. Niech to będą drzwi nr 2. Teraz uczestnik może pozostać przy swoim wyborze lub zmienić go, czyli wybrać drzwi nr 3. Co powinien zrobić?

Rozwiązanie. Wynikiem tego doświadczenia jest sposób rozmieszczenia obiektów i, co nie mniej ważne, podpowiedź prowadzącego. Zatem

$$\Omega = \{(AGG, 2), (AGG, 3), (GAG, 3), (GGA, 2)\},$$

przy czym pierwsza trójka wskazuje, gdzie jest auto (A), a gdzie gęś (G), a liczba mówi, które drzwi wskazał prowadzący. W sytuacji (AGG) prowadzący może wybrać drzwi, które otwiera. Jego strategię opisuje prawdopodobieństwo otwarcia drzwi nr 2, czyli liczba  $p \in [0, 1]$ .

Wtedy

$$P(\{(AGG, 2)\}) = p/3 = 1 - P(\{(AGG, 3)\}).$$

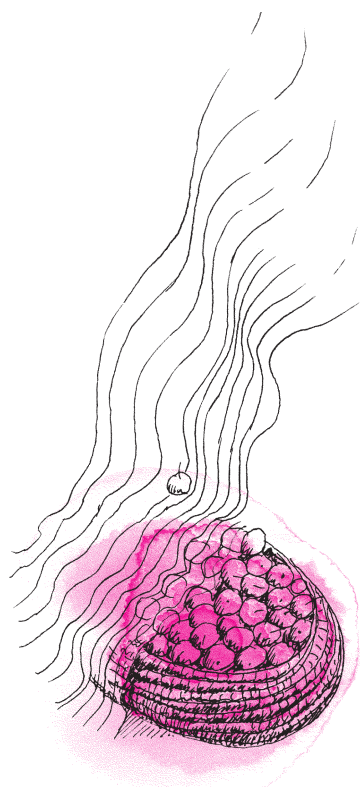
W pozostałych przypadkach prowadzący nie ma wyboru, tzn.

$$P(\{(GAG, 3)\}) = 1/3 = P(\{(GGA, 2)\}).$$

Wobec tego, gdy zdarzenie  $W$  oznacza wygraną przy zmianie decyzji,  $D_2$  – wskazanie przez prowadzącego drzwi nr 2, to

$$P(W|D_2) = \frac{P(W \cap D_2)}{P(D_2)} = \frac{P(\{(GGA, 2)\})}{P(\{(GGA, 2), (AGG, 2)\})} = \frac{1/3}{p/3 + 1/3} = \frac{1}{1+p}.$$

Ponieważ  $\frac{1}{1+p} \geq 1/2$  dla  $p \in [0, 1]$ , więc zawsze lepiej zmienić wybór, bowiem szansa wygranej, gdy gracz pozostaje przy pierwotnym wyborze, jest równa  $1/3$ .



### Rozwiązanie zadania F 605.

Warunek równowagi daje:

$$\rho_1 g \frac{m}{\rho_1'} - mg = \rho_2 g \frac{m}{\rho_2'} - mg,$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{\rho_1'}{\rho_2'} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Trzeci przykład dotyczy testów diagnostycznych. Rozwiązanie wymaga zastosowania wzoru Bayesa, w którym z pozoru proste rachunki dają nieoczekiwane wyniki.

### Przykład 3

Lekarze używają dwóch wskaźników jakości testu. Czulość testu jest zdefiniowana jako odsetek chorych, u których test daje wynik dodatni. Swoistość testu to odsetek zdrowych, u których test daje wynik ujemny.

i) Test na rzadką i groźną chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje fałszywy wynik dodatni u 10% zdrowych (u chorego daje zawsze wynik dodatni). Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał wynik dodatni, jest faktycznie chora? Zakładamy, że nic nie wiemy o innych możliwych objawach u badanej osoby.

Niech zdarzenie  $A$  oznacza wynik dodatni,  $H_1$  – chorego,  $H_2$  – zdrowego. Ze wzoru Bayesa obliczamy

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{1000}}{1 \cdot \frac{1}{1000} + \frac{1}{10} \cdot \frac{999}{1000}} = \frac{10}{1009} \approx 0,0099.$$

Jest to około 1%.

Test omawiany w tym przykładzie ma czulość 100% i swoistość 90%. Gdy swoistość testu wzrośnie do 95%, to obliczane prawdopodobieństwo wzrasta do 2%. Mimo tak doskonałych wskaźników wynik dodatni w tym teście znaczy niewiele, i co najwyżej sugeruje konieczność dalszych badań.

ii) Czulość i swoistość testu są prawdopodobieństwami warunkowymi, co widać bezpośrednio z definicji. Zbadamy teraz jakość pewnego testu, powszechnie stosowanego w celu stwierdzenia, czy pacjent ma chorobę wieńcową. Jest to próba wysiłkowa, której czulość wynosi 65%, swoistość zaś 85% (dane za: Robert L. Bratton, Sprawdziany testowe z medycyny rodzinnej. Wiedza Medyczna, Centrum Medyczne Kształcenia Podyplomowego, Warszawa 2001).

Założmy, że jest 10% chorych na chorobę wieńcową. Obliczyć

- prawdopodobieństwo tego, że próba wysiłkowa doprowadzi do prawidłowej diagnozy;
- prawdopodobieństwo tego, że pacjent z wynikiem dodatnim jest chory;
- prawdopodobieństwo tego, że pacjent z wynikiem ujemnym jest zdrowy.

Rozwiązanie. Oznaczmy zdarzenia następująco:

$C$  – pacjent chory,  
 $Z$  – pacjent zdrowy,  
 $D$  – dodatni wynik testu,  
 $U$  – ujemny wynik testu.

Z warunków zadania wynika, że

$$P(C) = 0,1, \\ P(Z) = 0,9, \\ P(D|C) = 0,65 \text{ (jest to czulość testu)}, \\ P(U|Z) = 0,85 \text{ (swoistość testu)}.$$

a) Prawdopodobieństwo prawidłowej diagnozy jest równe

$$P((D \cap C) \cup (U \cap Z)) = P(D \cap C) + P(U \cap Z) = \\ = P(D|C)P(C) + P(U|Z)P(Z) = \\ = 0,65 \cdot 0,1 + 0,85 \cdot 0,9 = 0,83.$$

Otrzymaliśmy średnią ważoną obu wskaźników; 83% jest całkiem przyzwoitą wiarygodnością.

b) Prawdopodobieństwo tego, że osoba z dodatnim wynikiem jest chora

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|C)P(C) + P(D|Z)P(Z)} = \\ = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|C)P(C) + (1 - P(U|Z))P(Z)} = \\ = \frac{0,65 \cdot 0,1}{0,65 \cdot 0,1 + 0,15 \cdot 0,9} = \frac{65}{65 + 135} = 0,325.$$

Tak nieduże prawdopodobieństwo nie powinno jednak uspokajać osoby z wynikiem dodatnim. Nie może ona uważać się za losowo wybraną z całej populacji, bo jeśli już zgłosiła się do lekarza, to pewnie miała jakieś powody.

Zresztą w przypadku choroby wieńcowej decydujące znaczenie dla oceny szans chorego ma płeć, której w ogóle nie wzięliśmy pod uwagę!

c) Prawdopodobieństwo tego, że osoba z ujemnym wynikiem jest zdrowa, wynosi

$$P(Z|U) = \frac{P(U|Z)P(Z)}{P(U|Z)P(Z) + P(U|C)P(C)} = \\ = \frac{P(U|Z)P(Z)}{P(U|Z)P(Z) + (1 - P(D|C))P(C)} = \\ = \frac{0,85 \cdot 0,9}{0,85 \cdot 0,9 + 0,35 \cdot 0,1} = \frac{765}{765 + 35} \approx 0,956.$$

I tu rzeczywiście test się sprawdził.

Jeśli Czytelnik jest zaskoczony wynikami, niech narysuje zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  w postaci prostokąta i niech zadba o to, by pola figur, reprezentujących zdarzenia, były zgodne z danymi. Wtedy okaże się, że wszystkie odpowiedzi są oczywiste. Cóż, jesteśmy wzrokowcami, a rachunkami zajmujemy się (jako gatunek) zaledwie od paru, może parunastu tysięcy lat.

Nie zdziwiłoby mnie zaskoczenie niektórych Czytelników tytułem poniższego tekstu. Jakież kłopoty sprawiać może twierdzenie Bayesa? Trudno chyba o stwierdzenie bardziej jasne i niekontrowersyjne. Poniżej sformułuję je w sposób nieco specyficzny; rozpatrzmy bowiem pewne nietypowe zdarzenie „losowe”.

*H: Pierwszy mistrz świata w szachach był Angielką/Anglikiem.*

W istocie losowości trudno się tu doszukać: pierwszy mistrz świata w szachach albo był Anglikiem, albo nie był – możemy to ustalić na podstawie danych historycznych. Jednakże każdy z Czytelników może samodzielnie ustalić swoje własne (subiektywne) „prawdopodobieństwo” prawdziwości powyższej hipotezy, przy całej swojej osobistej wiedzy. Ale jak wpłynie na opinie Czytelników dodatkowa informacja, że pierwszym mistrzem świata w szachach był urodzony w Pradze Wilhelm Steinitz?

Oznaczmy dane dodatkowe symbolem  $D$  oraz niech  $P(H)$  oznacza naszą wstępną opinię na temat prawdziwości hipotezy  $H$ . Zatem twierdzenie Bayesa możemy wyrazić następująco:

$$P(H|D) = P(D|H)P(H)/P(D),$$

gdzie:

$P(D)$  – prawdopodobieństwo tego, że zachodzi  $D$  (zanim otrzymaliśmy informację o  $D$ ),

$P(H|D)$  – prawdopodobieństwo prawdziwości hipotezy z uwzględnieniem dodatkowej informacji  $D$ ,

$P(D|H)$  – prawdopodobieństwo tego, że zachodzi  $D$ , przy założeniu prawdziwości hipotezy  $H$ .

Co ważne, twierdzenie Bayesa stanowi normatywnie optymalną regułę w procesie wnioskowania. Możemy stosunkowo łatwo eksperymentalnie sprawdzić, czy ludzie popełniają systematyczne błędy w procesie wnioskowania bayesowskiego i temu poświęcony jest poniższy tekst. Jak się okaże, intuicja w tego typu sytuacjach bardzo nas zawodzi, ale, uprzedzę, nie musimy rwać włosów z głowy: istnieje wiele innych przypadków, gdy żadne twierdzenia nie zastąpią intuicji i zdrowego rozsądku.

**1. Farmer czy bibliotekarz?** Spójrzmy na poniższy opis pewnej osoby.

*Stefan jest bardzo nieśmiały i zamknięty w sobie, niezmiernie życzliwy i pomocny, lecz przy tym niezbyt zainteresowany ludźmi i rzeczywistością. Łagodna i czysta dusza, ma silną potrzebę porządku, systematyczności i zamięłowanie do detali.*

Badane osoby zapytano, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Stefan zajmuje się konkretnym zawodem (np. jest farmerem, sprzedawcą, pilotem, bibliotekarzem lub fizykiem). Okazało się, że badani najczęściej wskazywali na możliwość, że Stefan

jest bibliotekarzem. Najwyraźniej nie brali pod uwagę faktu, że w społeczeństwie odsetek bibliotekarzy jest znikomy, podczas gdy ogromna jest ilość np. farmerów. Badani najwyraźniej mylili podobieństwo z prawdopodobieństwem lub, innymi słowy, stosowali heurystykę podobieństwa. W swoim wnioskowaniu niemal całkowicie pomijali prawdopodobieństwo  $P(H)$ , tj. prawdopodobieństwo tego, że Stefan jest bibliotekarzem, przy braku jakiegokolwiek opisu. Trzeba jednak przyznać, że w tym przypadku nie dostali żadnej wskazówki, by skorzystać z tej wstępnej informacji. Jednakże okazuje się, że wyraźne wskazówki niewiele pomagają, jak pokazują wyniki następnego eksperymentu.

**2. Inżynier czy prawnik?** Badanym przedstawiono krótkie opisy osób rzekomo wylosowanych z próbki stu osób: inżynierów i prawników. Zadaniem badanych było oszacowanie, przy użyciu otrzymanego opisu, prawdopodobieństwa prawdziwości hipotezy  $H$ , że wylosowana osoba jest inżynierem. Eksperyment prowadzono w dwu grupach: część badanych została poinformowana, że wśród stu osób było 70 inżynierów i 30 prawników, druga grupa dowiedziała się, że losowano spośród 30 inżynierów i 70 prawników. Stosując regułę Bayesa, możemy ustalić, jaki powinien być iloraz szacowanych w obu grupach prawdopodobieństw.

W pierwszej grupie:  $P_1(H|D) = P(D|H) \cdot 0,7/P(D)$ ,  
w drugiej grupie:  $P_2(H|D) = P(D|H) \cdot 0,3/P(D)$ ,  
a zatem:

$$P_1(H|D)/P_2(H|D) = 7/3.$$

Okazało się jednak, że oszacowania prawdopodobieństwa w obu grupach były niemal jednakowe, co sugeruje, że badani ignorowali bazowe prawdopodobieństwa  $P(H)$  (używali ich tylko wtedy, gdy nie otrzymali żadnej dodatkowej informacji, a ignorowali nawet wtedy, gdy dodatkowy opis nie niósł ze sobą żadnej istotnej informacji – typową odpowiedzią było w tych przypadkach  $P(H|D) = 0,5$ ). Badania te wielokrotnie powtarzano, używając różnorodnych bodźców zachęcających do jak najdokładniejszego szacowania.

**3. Konserwatyzm.** Poniższy eksperyment będzie ilustracją całkiem odmiennego zjawiska. Rozważmy następujące zadanie: mamy dwie urny, w jednej z nich 70% kul jest czerwonych i 30% niebieskich, natomiast w drugiej proporcja jest odwrotna. Losujemy jedną z tych urn i pobieramy 10 kul (ze zwracaniem), z których sześć okazuje się być czerwonych, a cztery – niebieskie. Proszę powiedzieć: jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybraną urną była ta, która zawierała więcej kul czerwonych?

Zabierzmy się do tego zadania w sposób systematyczny. Hipotezą naszą jest więc  $H$ : wylosowaliśmy urnę zawierającą 70% kul czerwonych, a bazowe prawdopodobieństwo wynosi  $P(H) = 0,5$ .

Dodatkową informacją jest  $D$ : wylosowaliśmy 6 kul czerwonych i 4 niebieskie, a zadaniem jest ustalenie prawdopodobieństwa  $P(H|D)$ . Zgodnie z regułą Bayesa mamy

$$P(H|D) = P(D|H)P(H)/P(D),$$

a ponadto wiemy, że

$$P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|\text{nie}H)P(\text{nie}H).$$

Losowanie kul ze zwracaniem możemy traktować jak schemat Bernoulliego, więc

$$P(D|H) = 10!/(6!4!) \cdot 0,7^6 \cdot 0,3^4 \approx 0,20012$$

oraz

$$P(D|\text{nie}H) = 10!/(6!4!) \cdot 0,3^6 \cdot 0,7^4 \approx 0,03676.$$

Zatem  $P(H|D) \approx 0,84$ . Właśnie takie zadanie postawiono wielu osobom badanym i okazało się, że intuicja bardzo je zawodziła: typowe odpowiedzi zawierały się w przedziale 0,6–0,7, co znacznie odbiega od wyniku, który otrzymaliśmy wyżej, stosując regułę Bayesa. Podobny wynik uzyskiwano w wielu analogicznych badaniach, a efekt ten określono mianem konserwatyizmu: badane osoby nie były skłonne zbyt „oddalić się” od prawdopodobieństwa bazowego (tu: 0,5).

#### 4. Reguła Bayesa a rzeczywistość (warunkowa zależność i niepewne dane).

Powyższe eksperymenty pokazują, jak poważne trudności sprawia nam praktyczne użycie tak nieskomplikowanego twierdzenia jak reguła Bayesa. Jednakże – choć matematycznie proste – okazuje się ono całkiem „nieintuicyjne” i zupełnie nieprzystające do zdolności, jakie posiada człowiek, a ściślej – jego mózg. Niemniej wykazano, że można znacznie poprawić prawidłowość procesu wnioskowania bayesowskiego, sugerując badanym odpowiednie ustrukturalizowanie problemu (może to oznaczać, że początkowo badani mieli w swych umysłach niewłaściwą strukturę problemu). Najbardziej oczywistym przykładem strukturyzacji problemu jest akapit tego tekstu zaczynający się od słów „zabierzmy się do tego problemu w sposób systematyczny”. Badania pokazały, że najlepsze wyniki we wnioskowaniu bayesowskim osiągamy, jeśli dwie informacje wydają się jednakowo istotne, natomiast kłopoty w ich zagregowaniu powstają, jeśli jedna wydaje się znacznie ważniejsza od drugiej. To może wyjaśniać kłopoty w zadaniu „inżynier czy prawnik”: bazowe prawdopodobieństwo 0,7 lub 0,3 to „tylko” liczba i może wydawać się niczym w porównaniu z pisemnym, żywym opisem człowieka.

W świetle przedstawionych informacji zasadne wydaje się pytanie, jak istotne są konsekwencje tak znaczących ograniczeń w naszych zdolnościach. Na pewno nie są one bez znaczenia, jednakże ważne jest, że w naszym codziennym życiu stosunkowo rzadko zdarza się nam napotykać problemy „laboratoryjne”, tj. wymagające tej właśnie metody wnioskowania. W szczególności wiele problemów dotyczy danych niepewnych (np. dostajemy

informację, że „Kowalski usłyszał od Nowaka, że  $D$ ” czy też „wielce możliwe, że urodził się w Pradze”) oraz danych, pomiędzy którymi występują zależności warunkowe (przy danej hipotezie). Dane określamy jako warunkowo niezależne, jeżeli zachodzi:

$$P(D_i|H) = P(D_i|H \text{ oraz } D_j),$$

dla wszystkich  $i, j$  (tj. dla wszystkich możliwych danych). Warunek ten spełniony jest bardzo rzadko – głównie właśnie w warunkach laboratoryjnych – i z tego też powodu niezmiernie rzadko reguła Bayesa jest właściwą metodą w procesie wnioskowania. Właściwa metoda jest zwykle znacznie bardziej skomplikowana, a może w tych sytuacjach ludzka intuicja sprawuje się lepiej? Może po prostu do twierdzenia Bayesa człowiek nie zdążył się „przyzwyczaić” w swym codziennym życiu, a za to ma więcej praktyki i wycucia w bardziej skomplikowanych zagadnieniach?

Dla zilustrowania zależności warunkowej rozpatrzmy następujące dane oraz hipotezę:

$D_1$ : Osoba była urodzona w Pradze.

$D_2$ : Osoba nazywa się Wilhelm Steinitz.

$H$ : Osoba jest Anglikiem/Angielką i jednocześnie pierwszym mistrzem świata w szachach.

Czy zachodzi  $P(D_1|H) = P(D_1|H \text{ oraz } D_2)$ ? Prawdopodobieństwo tego, że Anglik urodził się w Pradze, jest stosunkowo niewielkie. Jednakże prawdopodobieństwo, że Anglik nazwiskiem Steinitz urodził się w Pradze, zdaje się znacznie większe: nazwisko „Steinitz” angielskie raczej nie jest, więc możemy uznać, że wzrasta prawdopodobieństwo urodzenia poza granicami Anglii. W rozumowaniu tym pominąłem drugą część hipotezy  $H$ , co jednak nie zmienia faktu, że  $P(D_1|H) \neq P(D_1|H \text{ oraz } D_2)$ .

**Podsumowanie.** Powyższe eksperymenty wskazują na istotne trudności, jakie sprawia człowiekowi zastosowanie prostych reguł wnioskowania. Z drugiej strony pojawia się spostrzeżenie, że człowiek rzadko styka się w swym życiu z problemami wymagającymi zastosowania reguły Bayesa w czystej postaci, co może nas nieco usprawiedliwiać. Czy zasadne jest jednak przypuszczenie, że z bardziej złożonymi – a zarazem częściej spotykanymi – problemami radzimy sobie lepiej? Właśnie gra w szachy, pasja Wilhelma Steinitza, zdaje się stanowić ważny argument za tą tezą: człowiek w tej grze wciąż pozostaje bezkonkurencyjny i komputery wyposażone w coraz to potężniejsze reguły wnioskowania mają ogromne kłopoty, szczególnie w grze pozycyjnej, gdzie ogromne moce obliczeniowe komputerów tracą na znaczeniu, a górę bierze intuicja szachisty–człowieka. A Steinitz, który studiował matematykę w Wiedniu, lecz porzucił twierdzenia na rzecz szachowych heurystyk, był urodzonym w Pradze szachistą austriackim, angielskim, a wreszcie amerykańskim żydowskiego pochodzenia. A zatem Anglikiem był, choć stosunkowo krótko.

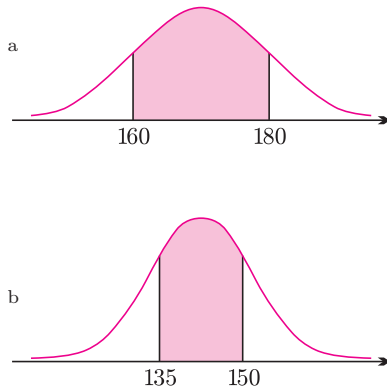


# 5

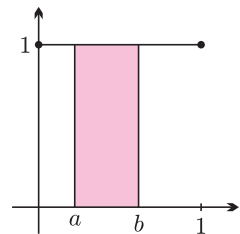
# mała delta

## Piłkarz idealny

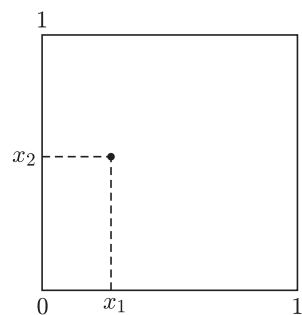
Przeglądając dane statystyczne dotyczące rozmaitych zjawisk, trafiamy dość często na obrazki jak z rysunku 1. Dlaczego obrazki te mają tak podobny kształt? Dlaczego przypominają mniej lub bardziej spłaszczony dzwon? Czy musi tak być zawsze? Czy różne dzwony dają się na siebie nałożyć po odpowiednim przeskalowaniu? To ciekawe pytania, ale odpowiedzi na nie są trudne, więc ich nie udzielimy. Poniżej spróbujemy tylko naszkicować pewien mechanizm, który „proste wykresy wygina w dzwony”. Rzecz dotyczyć będzie futbolu.



Rys. 1 Pole pod całym wykresem na obu obrazkach jest równe 1. Pole kolorowej części to – powiedzmy – procent czytelników o wzroście pomiędzy 160 cm i 180 cm (rys. a) oraz procent czytelników o ilorazie inteligencji między 135 a 150 (rys. b).



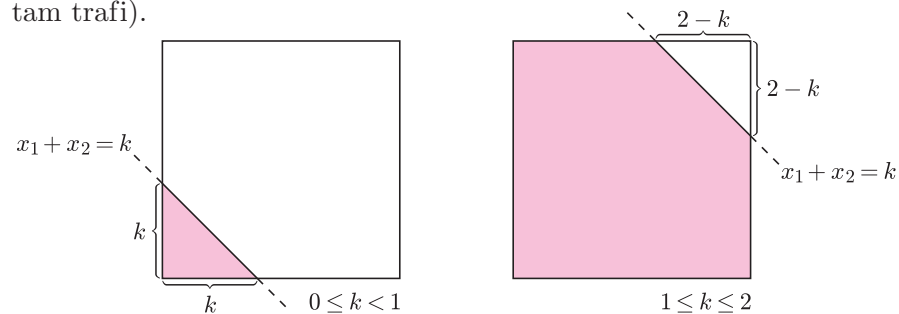
Rys. 2. Pole kolorowej części to szansa, że losowo wybrany piłkarz przyjmuje piłkę na ocenę z przedziału (a,b).



Rys. 3. Ocena za przyjęcie piłki to  $x_1$ , a za podanie –  $x_2$ .

Bardzo dobry piłkarz powinien wykazywać się przynajmniej trzema umiejętnościami: 1) przyjęcia piłki 2) podania piłki 3) myślenia na boisku. Każdą z tych umiejętności ocenimy w skali od 0 do 1, tak że najbardziej beznadziejny futbolista – tu wstrzymamy się od podania przykładów – otrzyma ocenę zero, a Roberto Carlos, Raul czy też Mirek Szymkowiak ocenę 1. Założymy, że poszczególne zdolności są równomiernie rozłożone między piłkarzy, tzn. szansa, że losowo wybrany piłkarz otrzyma za daną umiejętność ocenę z przedziału  $(a, b) \subset [0, 1]$ , jest równa długości tego przedziału. W takim razie wykres opisujący np. rozkład umiejętności przyjęcia piłki wygląda jak na rysunku 2. Wykres jest zatem całkiem płaski i żadnego dzwonu, jak na razie, nie widać. Zobaczmy jednak, co się stanie, gdy dodamy ocenę za podanie i przyjęcie.

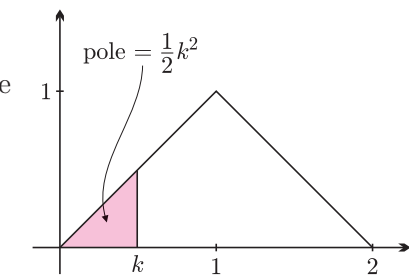
Maksymalna nota – 2, minimalna – 0. Zauważmy, że ocenę obu umiejętności możemy przedstawić jako punkt w kwadracie (rys. 3). O całej sprawie możemy zatem myśleć, jak o losowaniu punktu z kwadratu o boku 1. Suma ocen będzie mniejsza od  $k$ , gdy suma współrzędnych punktu będzie mniejsza od  $k$ . Spoglądając na rysunki poniżej widzimy, że szansa na to jest równa  $\frac{1}{2}k^2$  dla  $k$  między 0 i 1 oraz  $1 - \frac{1}{2}(2 - k)^2$  dla  $k$  między 1 a 2, gdyż szansa na to, że losowo wybrany punkt będzie należał do pewnego obszaru kwadratu jednostkowego, jest równa polu tego obszaru (im większe pole, tym większa szansa, że punkt tam trafi).



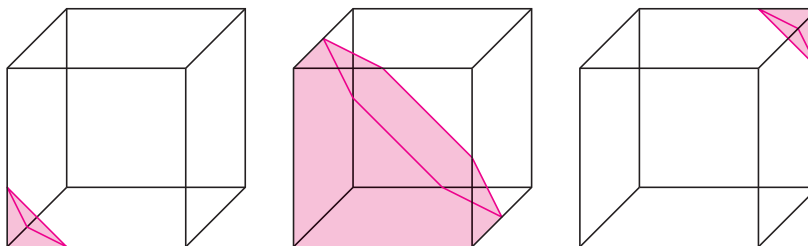
Rys. 4.

Przedstawiając wynik na wykresie, otrzymujemy rysunek 5. Widać już, że wykres nieco się wygiął, może nawet przypomina trochę dzwon, ale jest strasznie kanciasty.

Zobaczmy zatem, co się zdarzy, gdy dodamy trzy oceny: za przyjęcie, za podanie i za myślenie.

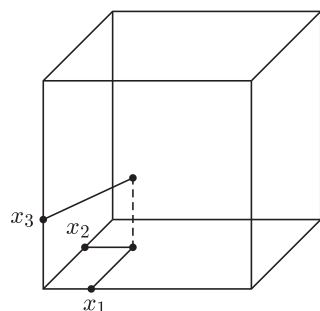


Rys. 5

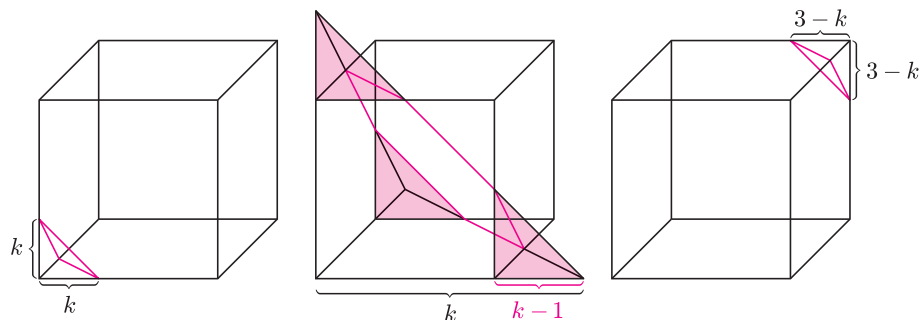


Rys. 6

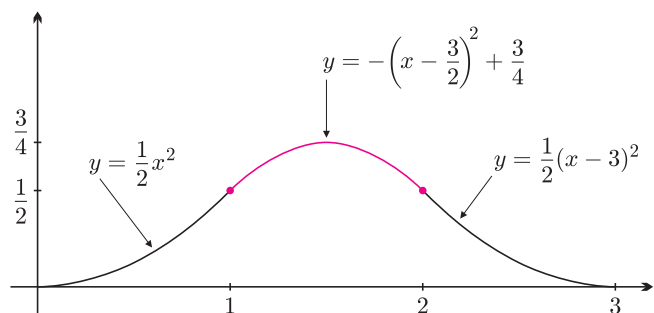
Maksymalna nota – 3, minimalna – 0. Zauważmy, że łączną ocenę możemy przedstawić jako punkt w sześcianie. Jaka jest szansa, że suma ocen tzn. suma współrzędnych wylosowanego punktu w sześcianie jest mniejsza od  $k$ ? Na powyższych rysunkach zaznaczone są kolorem obszary, w których punkty mają sumę współrzędnych mniejszą od  $k$ . Wystarczy zatem obliczyć objętości kolorowych obszarów. Spoglądając na kolejną serię rysunków,



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

zauważamy, iż szansa na to, że suma ocen jest mniejsza od  $k$ , wynosi (rys. 8)

- $\frac{1}{6}k^3$  dla  $k \in [0, 1]$ ;
- $\frac{1}{6}k^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}(k-1)^3$  dla  $k \in [1, 2]$ ;
- $1 - \frac{1}{6}(3-k)^3$  dla  $k \in [2, 3]$ .

Wynik ten można przedstawić na wykresie z rysunku 9.

Czytelnik, który chciałby przekonać się, czy go nie oszukaliśmy, może sprawdzić poprawność wykresu, stosując wzór na pole kolorowego obszaru z rysunku 10.

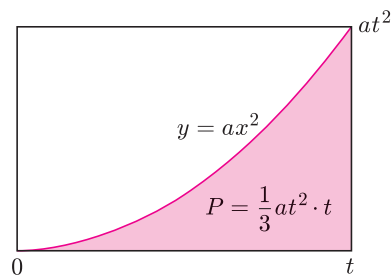
Podsumujmy nasze rozważania. Choć rozkład poszczególnych umiejętności był płaski, to ich suma miała już wykres bardzo przypominający dzwon! Kluczowe było tu jednak założenie, że poszczególne umiejętności są niezależne. To właśnie ta niezależność wyginała wykres w dzwon.

Jakkolwiek zdolność przyjęcia piłki jest związana z myśleniem w sposób dość luźny, to jednak niezależność ocen przyjęcia i podania jest już niestety bardziej problematyczna.

Polecamy też Czytelnikowi obliczenie, jaka jest szansa, że losowo wybrany piłkarz ma łączną ocenę trzech umiejętności w przedziale

- $[1,4; 1,6]$ ,
- $[2,8; 3]$ .

Wynik obliczeń powinien przekonać, że trudno być doskonałym...



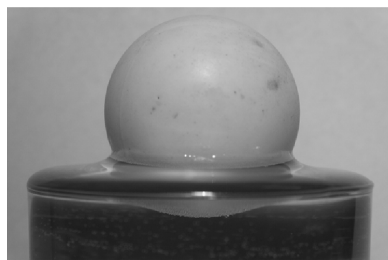
Rys. 10

*Małą Deltę przygotował Witold SADOWSKI*

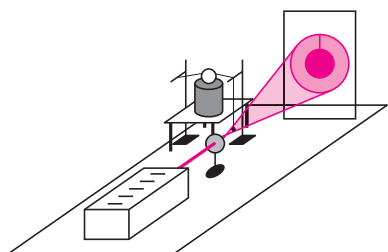
# Piłeczka w szklance wody

Andrzej HRYCZUK, Robert ŻAK

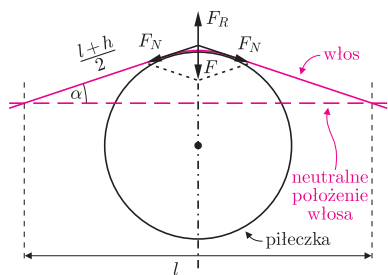
Na pytanie, jaki kształt ma powierzchnia wody w naczyniu, większość ludzi z pewnością odpowiedziałaby, że jest ona płaska. Dla szerokich naczyń rzeczywiście byłoby to dobre przybliżenie, lecz wystarczy przypomnieć sobie rurki kapilarne, by odpowiedź ta przestała być oczywista. Przecież w takich przypadkach napięcie powierzchniowe sprawia, że kształt powierzchni wody przybliży się nie do płaszczyzny, lecz do wycinka sfery! Ten prosty fakt pozwala nam sobie uświadomić, że w rzeczywistości nawet dla szerszych naczyń powierzchnia wody jest lekko wykrzywiona, co może prowadzić do zaobserwowania różnych interesujących efektów. W niniejszym artykule chcielibyśmy się zająć jednym z takich zjawisk, a mianowicie zachowaniem się piłeczki pingpongowej w szklance wody.



Fot. 1

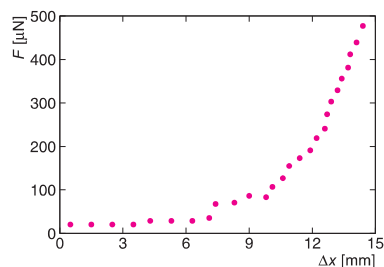


Rys. 2. Schemat układu pomiarowego.



Rys. 3. Związek między siłą  $F_R$ , z jaką piłeczka działa na włos, a wysokością  $h$ , na jaką podniesie się kuleczka plastelinowa.  $F_R = F = 2F_N \sin \alpha$ , ale  $\cos \alpha = \frac{l}{l+h}$ , więc

$$F_R = \frac{2mg\sqrt{h^2 + 2hl}}{h+l}.$$



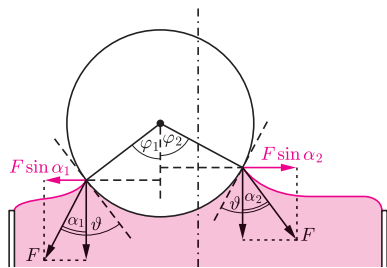
Rys. 4. Zależność wartości siły działającej na piłeczkę od jej położenia.

Wpierw nalejmy do szklanki trochę wody i włóżmy do niej piłeczkę. Zamiast stać w miejscu, zbliży się ona i przylegnie do ścianki szklanki. Dolejmy wody, tak by powstał menisk wypukły. Teraz dla odmiany łatwo zaobserwujemy, że po chwili zatrzyma się ona na samym środku szklanki (fot. 1). Co więcej, po drobnym wychyleniu z położenia równowagi zaczyna ona poruszać się ruchem drgającym o gasnącej amplitudzie. Zbadajmy zachowanie piłeczki w tym drugim przypadku.

Pierwszym jakościowym wnioskiem, jaki możemy wyciągnąć, jest to, że w środku szklanki piłeczka osiąga położenie równowagi stabilnej, czyli energia potencjalna układu przyjmuje wartość minimalną. Oczywiście, pełny, ilościowy opis zależności energii potencjalnej od położenia piłeczki wystarczyłoby do znalezienia jej ruchu i zbadania stabilności położenia równowagi. Jak jednak go uzyskać? Nasuwającą się od razu metodą jest zmierzenie siły wypadkowej działającej na piłeczkę w zależności od położenia. Wtedy wyznaczenie funkcji energii potencjalnej nie przedstawiałoby żadnych trudności. Powstaje jednak problem, jak zbudować na tyle czuły układ pomiarowy, dysponując jedynie prostym sprzętem. Zaproponujemy tutaj metodę wykorzystującą układ optyczny (rys. 2). Szklankę z piłeczką umieszczamy na wypoziomowanej, osłoniętej platformie. Na dwóch statywach rozpinamy cienki włos z przyczepioną u jednego końca kuleczką z plasteliny o masie 20 miligramów i umieszczamy go tak, by stykał się z piłeczką na wysokości jej środka. Następnie ustawiamy soczewkę skupiającą i przepuszczamy przez nią wiązkę lasera tak, by padała ona na wiszącą kuleczkę. Na ekranie oddalonym o pięć metrów obserwujemy obraz kuleczki powiększony około dwustu razy (wartość ta została zmierzona poprzez dokładny pomiar rzeczywistego rozmiaru kuleczki i szerokości obrazu). Zastanówmy się, co się stanie, gdy tak przesuniemy szklankę, by piłeczka nie mogła ustawić się na jej środku z powodu reakcji rozpiętego włosa. Skoro piłeczka pozostaje w równowadze, to z trzeciej zasady dynamiki wynika, że siły na nią działające muszą się równoważyć. Oznacza to, że siła reakcji włosa jest co do wartości równa poszukiwanej przez nas sile, z jaką woda działa na piłeczkę. Natomiast tę siłę reakcji możemy wyznaczyć wiedząc, że siła naprężenia włosa wynosi  $mg$ , gdzie  $m$  – masa kuleczki plastelinowej (patrz rys. 3).

Dzięki znacznemu powiększeniu jesteśmy w stanie zmierzyć, o ile podnosi się plastelinowa kuleczka. Następnie powtarzamy pomiar dla różnych położenia piłeczki na powierzchni wody, co pozwala nam wyznaczyć szukaną zależność. Wyniki otrzymane w naszym eksperymencie przedstawione są w postaci wykresu (rys. 4).

Zauważmy, że otrzymane wartości sił są bardzo małe, rzędu  $10^{-4}$  N. Przybliży nas to do wyjaśnienia zagadki ruchu piłeczki, gdyż potwierdza nasze



Rys. 5. Siły działające na piłeczkę.



Rys. 6. Kształt menisku w zależności od położenia piłeczki.

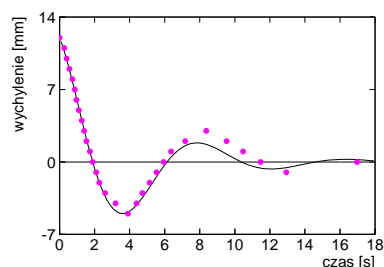
przypuszczenia, że spowodowany jest on siłami napięcia powierzchniowego. Na rysunku 5 przedstawione są siły działające na piłeczkę z uwzględnieniem sił napięcia powierzchniowego (możemy dla uproszczenia rozpatrywać sytuację dwuwymiarową, ze względu na symetrię układu). Ponieważ kąt zwilżania zależy tylko od granicy faz, to widzimy, że różnice w poziomej składowej napięcia powierzchniowego z prawej i lewej strony piłeczki muszą wynikać z różnicy kątów  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . W rzeczywistości występuje różnica w wysokości punktów styku piłeczki z wodą po przeciwnych stronach piłeczki, co wpływa na wartości tych kątów (jak widzimy na rysunku 5:  $\alpha_i = \varphi_i + \vartheta - \frac{\pi}{2}$ , skąd  $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$ ). Zaobserwować ją można, robiąc zdjęcia już z kilkukrotnym powiększeniem. Na podstawie takich zdjęć wyznaczone zostały kształty menisków, poprzez odczytanie piksel po pikselu punktów na powierzchni wody. Wyniki te zostały umieszczone na rysunku 6, gdzie kolejne krzywe przedstawiają kształt powierzchni wody dla różnych położenia piłeczki. Dodajmy jeszcze, że do problemu można podejść, używając zamiast pojęcia siły pojęcia ciśnienia. Wtedy różnica ciśnień po przeciwnych stronach piłeczki spowodowana będzie innymi wartościami promienia krzywizny powierzchni wody.

Niestety, przedstawiona teoria nie pozwala na wyznaczenie analitycznie zależności siły wypadkowej od położenia w prosty sposób, a jedynie daje jakościowe wyjaśnienie obserwowanego zjawiska. Jednakże popatrzmy jeszcze raz na empirycznie otrzymaną zależność (rys. 4). Uderzający jest jej wygląd dla małych wychyleń piłeczki z położenia równowagi, gdyż wydaje się, jakby mogła być przybliżona linią prostą. Nasuwa to podejrzenie, że obserwowane drgania dadzą się opisać równaniem tłumionego oscylatora harmonicznego. Jeśli jest tak w istocie, to powinniśmy zaobserwować charakterystyczny ruch piłeczki w zależności od czasu. By się o tym przekonać, wykonaliśmy kolejne doświadczenie. Szklanka umieszczona na wypoziomowanej i osłoniętej platformie znajdowała się tym razem pod szybką z naniesioną kratką z podziałką milimetrową. Wychylając piłeczkę z położenia równowagi i filmując z góry jej ruch, otrzymaliśmy materiał filmowy, z którego odczytaliśmy położenie w zależności od czasu. Zależność tę przedstawiliśmy na wykresie (rys. 7). Do uzyskanych punktów dopasowaliśmy, zgodnie z naszymi założeniami, funkcję postaci

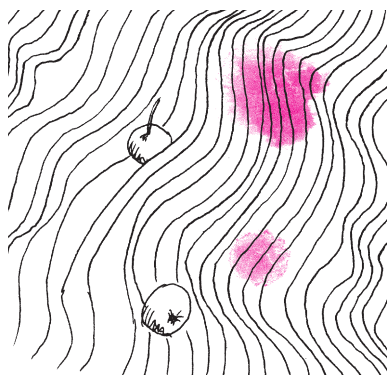
$$x(t) = Ae^{-kt} \cos(\omega t + \varphi), \text{ gdzie } \begin{aligned} A &= 12,2 \pm 0,4 \text{ [mm]}, \\ k &= 0,24 \pm 0,1 \text{ [1/s]}, \\ \omega &= 0,74 \pm 0,1 \text{ [1/s]}, \\ \varphi &= 0,17 \pm 0,4 \text{ [rad]}, \end{aligned}$$

stanowiącą rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego. Otrzymaliśmy potwierdzenie faktu, iż dla małych wychyleń z położenia równowagi siła działająca na piłeczkę zmienia się liniowo wraz z położeniem, czyli że energia potencjalna da się opisać funkcją kwadratową, z minimum w środku szklanki. Stanowi to poszukiwany dowód ilościowy na obserwowany fakt, iż w środku szklanki piłeczka osiąga stan równowagi stabilnej.

Można teraz postawić pytanie: od jakich parametrów zależy stabilność tej równowagi? Jak już wspomnieliśmy we wstępie, ogromne znaczenie ma zarówno szerokość naczynia, jak i jego kształt (bardzo zajmujące może być wykonanie powyższych eksperymentów dla naczynia o przekroju w kształcie prostokąta bądź elipsy). Szerokim polem badań jest także rozszerzenie problemu na inne ciecze. Inne wartości lepkości czy napięcia powierzchniowego w znaczący sposób zmieniają charakter zachowania się piłeczki. Na koniec chcielibyśmy zadać pytanie. Co byśmy zaobserwowali, gdyby woda nie zwilżała piłeczki (czyli pomiędzy piłeczką a wodą byłby menisk wypukły)? Czy można przeprowadzić ukazujące to doświadczenie?



Rys. 7. Drgania piłeczki w zależności od czasu.





## Pozorna trudność

Oto zadanie:

Trójkąt  $ABC$  jest równoboczny i ma bok o długości 1. Jaką figurę tworzą punkty  $P$  opisane przez warunek

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2?$$

Zadanie to może być trudne, gdy patrzy się na nie z osobna. Nawet nie pomaga wskazówka, że jest to okrąg. Ani nawet, że jest to okrąg opisany na trójkącie  $ABC$ . Bo jak to udowodnić?

Natomiast rzecz staje się łatwa, gdy staniemy przed pozornie znacznie bardziej skomplikowanym zadaniem:

Udowodnić, że na płaszczyźnie figura, którą tworzą punkty  $P$  opisane równaniem

$$\alpha_1 \cdot A_1 P^2 + \alpha_2 \cdot A_2 P^2 + \dots + \alpha_n \cdot A_n P^2 = \lambda$$

niezależnie od położenia punktów  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , jest

- okręgiem, punktem lub zbiorem pustym, gdy  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ ,
- płaszczyzną, prostą lub zbiorem pustym, gdy  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$ .

Zostawiając na chwilę problem dowodu, widzimy, że w naszym początkowym zadaniu rzeczywiście otrzymujemy okrąg opisany, bo każdy z punktów  $A, B, C$  należy do tej figury (mamy wtedy  $1^2 + 1^2 = 2$ ), a suma współczynników jest  $1 + 1 + 1 \neq 0$ .

Ale dlaczego dowód tego ogólnego twierdzenia należy uznać za łatwy? Dlatego, że wiedząc, jak ogólna jest to prawidłowość, odpowiednio dobieramy środki dowodowe. Nie może być to np. nic związanego z położeniem danych punktów itd. I wtedy jedyne, co nam pozostaje, to jakaś prawidłowość algebraiczna, a więc stosownym środkiem będzie użycie do rozwiązania współrzędnych. Od tego momentu wszystko już idzie łatwo. Każde z sumowanych wyrażeń jest postaci

$$\alpha_i((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2),$$

gdzie  $P = (x, y)$  i  $A_i = (x_i, y_i)$ , czyli postaci

$$\alpha_i(x^2 + y^2) + \gamma_i x + \delta_i y + \theta_i,$$

przy czym dokładną wartość  $\gamma_i, \delta_i$  i  $\theta_i$  można łatwo obliczyć (choć nie warto). Interesująca nas suma to

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x^2 + y^2) + \sum_{i=1}^n \gamma_i x + \sum_{i=1}^n \delta_i y + \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

I teraz, gdy suma  $\alpha_i$  jest różna od zera, możemy przez nią podzielić dowodzoną równość, otrzymując równość postaci

$$x^2 + y^2 + \Gamma x + \Delta y + \Theta = \Lambda,$$

gdzie łatwo obliczyć wartości  $\Gamma, \Delta, \Theta$  i  $\Lambda$  (ale też nie warto). Powyższą równość można zapisać jako

$$(*) \quad \left(x + \frac{1}{2}\Gamma\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\Delta\right)^2 = \Lambda - \Theta + \frac{1}{4}\Gamma^2 + \frac{1}{4}\Delta^2.$$

Oznaczmy prawą stronę równości przez  $\Xi$ . Jeśli  $\Xi > 0$ , to równanie  $(*)$  przedstawia okrąg o środku  $(-\frac{1}{2}\Gamma, -\frac{1}{2}\Delta)$  i promieniu  $\sqrt{\Xi}$ . Gdy  $\Xi = 0$ , okrąg ma promień zerowy, czyli jest punktem. Wreszcie dla  $\Xi < 0$  otrzymujemy zbiór pusty. Z kolei gdy suma  $\alpha_i$  jest zerowa, mamy równanie postaci

$$\Upsilon x + \Phi y = \Psi,$$

(wartości  $\Upsilon, \Phi$  i  $\Psi$  znów łatwo obliczyć i znów nie warto), które dla  $\Upsilon = \Phi = 0$  przedstawia płaszczyznę, gdy  $\Psi = 0$ , lub zbiór pusty, gdy  $\Psi \neq 0$ . W pozostałych przypadkach jest to równanie stopnia 1, czyli równanie prostej.

Oczywiście, korzystając z tej ogólnej prawidłowości można ułożyć wiele konkretnych zadań, takich jak to, od którego zaczęliśmy. Przez swoją szczegółowość mogą one niejednemu sprawić sporo kłopotów.

Marek KORDOS



### Rozwiązanie zadania M 1039.

Jeśli

$$[\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}],$$

to

$$\frac{n+1}{[\sqrt{n+1}]} > \frac{n}{[\sqrt{n}]},$$

więc  $a_{n+1} > a_n$ . Mamy

$$[\sqrt{n+1}] > [\sqrt{n}] \iff n+1 = m^2$$

dla pewnego  $m \in \mathbb{N}$ . Jeśli  $n+1 = m^2$ , to

$$a_{n+1} = \left[\frac{m^2}{m}\right] = m$$

oraz

$$a_n = \left[\frac{m^2-1}{m-1}\right] = m+1.$$

Szukanymi liczbami są zatem liczby postaci  $m^2 - 1$ .



### Rozwiązanie zadania M 1040.

Dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  mamy

$$\left[\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$$

lub

$$\left[\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n} + \frac{3}{2}\right].$$

Drugi przypadek zachodzi wtedy, gdy  $\{\sqrt{n+1}\} > \frac{1}{2}$  oraz  $\{\sqrt{n}\} < \frac{1}{2}$ . To oznacza, że

$$\sqrt{n+1} > [\sqrt{n+1}] + \frac{1}{2} = a + \frac{1}{2}$$

oraz

$$(*) \quad \sqrt{n} < [\sqrt{n}] + \frac{1}{2} = a + \frac{1}{2},$$

( $a \equiv [\sqrt{n+1}]$ ), gdyż jeśli

$$[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] - 1,$$

to

$$n = a^2 - 1,$$

ale wówczas

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 - 1} \not\leq [\sqrt{n}] + \frac{1}{2} = a - \frac{1}{2}$$

dla  $a \geq 2$ . Nierówności  $(*)$  możemy zapisać w postaci

$$n+1 > a^2 + a + \frac{1}{4}$$

oraz

$$n < a^2 + a + \frac{1}{4},$$

czyli  $n = a^2 + a$ , c.n.d.

## Spis powszechny ciemnej materii

Ludzie to nie jedyna populacja, której „spis powszechny” można przeprowadzić. W miarę pojawiania się możliwości technicznych liczba katalogowanych zbiorów wzbogaca się o coraz ciekawsze pozycje. Najlepiej znanym współczesnym przykładem jest chyba sekwencjonowanie genomu ludzkiego. Jednak samo skompletowanie takiej bazy danych nie powoduje automatycznie jej użyteczności porównywalnej do włożonej pracy. Prawdziwą sztuką jawi się dopiero umiejętność wyciągania z takiego katalogu nowych informacji.

Wśród spisywanych obiektów nie mogło, oczywiście, zabraknąć ciał niebieskich. Jednym z najbardziej ambitnych programów badawczych tego typu jest Sloan Digital Sky Survey, czyli Cyfrowy Przegląd Nieba Fundacji Alfreda P. Sloana (fundacja ta została założona w 1934 roku przez filantropa, którego imię nosi, m.in. ówczesnego prezydenta General Motors). Przegląd ten jest dokonywany za pomocą 2,5 metrowego teleskopu umieszczonego w Obserwatorium Apache Point w Górach Sacramento w Nowym Meksyku. Celem przeglądu jest uzyskanie wysokiej rozdzielczości zdjęć jednej czwartej całego nieba w pięciu kolorach. Na podstawie tych zdjęć będzie możliwe określenie jasności, koloru i kształtu milionów obiektów astronomicznych, takich jak galaktyki, kwazary, gwiazdy, asteroidy oraz różne obiekty egzotyczne. Wybrane galaktyki i kwazary badane są również za pomocą spektrografu umożliwiającego pomiar ich przesunięć ku czerwieni (zobacz tylną okładkę). Zbierane dane będą sukcesywnie udostępniane wszystkim chętnym [1]. Postępowanie takie staje się standardem we współczesnej astronomii. Zespoły badawcze zdają sobie sprawę, że z jednej strony nie są w stanie w pełni wykorzystać bogactwa zbieranych danych, a z drugiej strony, poprzez wzajemne udostępnianie informacji, otwierają sobie drogę do badań łączących unikalne możliwości różnych instrumentów.

Jednym z głównych celów omawianego przeglądu jest badanie rozkładu ciemnej materii. Historycznie pierwszą przesłanką za istnieniem nieświecącej materii o nieznanym charakterze były pomiary krzywych rotacyjnych galaktyk, czyli zależności prędkości gwiazd od ich odległości od centrum galaktyk. Gdyby świecąca materia stanowiła większość masy, to prędkość ta powinna spadać wraz z odległością, podobnie jak spadają prędkości planet w Układzie Słonecznym. Zamiast tego obserwuje się, że średnia prędkość orbitowania gwiazd ustala się na poziomie około 150 km/s. Można to wyjaśnić, przyjmując, że każda galaktyka jest zanurzona w, z grubsza sferycznie symetrycznym, halo ciemnej materii.

Nie jest to jednak jedyne możliwe wytłumaczenie. Konkurencyjnym może być np. MOND. Jest to skrót od *MOdified Newtonian Dynamics*, czyli „zmodyfikowanej dynamiki Newtona” zaproponowanej przez Moti Milgroma w 1983 roku [2]. Zmiana miałaby dotyczyć postaci prawa powszechnego ciężenia dla bardzo małych natężeń pola grawitacyjnego, którą można rozumieć jako odstępstwo od zasady równoważności utożsamiającej masę bezwładną i grawitacyjną. Choć na zasadzie tej opiera się Ogólna Teoria Względności, to MOND może współistnieć z OTW,

gdyż dotyczy przeciwnego zakresu natężeń pola do weryfikowalnego doświadczalnie w ramach OTW. Współistnienie takie, choć „filozoficznie” mało atrakcyjne, do niedawna nie było doświadczalnie wykluczone. MOND jest pomyślany tak, aby wyjaśnić krzywe rotacyjne galaktyk, a więc w tym samym celu, w którym wprowadzono do kosmologii ciemną materię. Z pozostałymi danymi modele te już powinny sobie radzić bez dalszych modyfikacji. W przypadku ciemnej materii dowolność polega na wyborze modelu opisującego własności cząstek ją tworzących, natomiast MOND dopuszcza jedynie wybór postaci funkcji modyfikującej prawo grawitacji. Wybrana postać powinna dawać zgodność z wszelkimi obserwacjami.

Odrzucenie hipotezy MOND byłoby możliwe, gdyby udało się zbadać przyspieszenia grawitacyjne w pobliżu galaktyk, czyli w odległości od kilkudziesięciu do kilkuset kiloparseków od centrum galaktyk. Aby tego dokonać należy zmierzyć prędkości względne małych galaktyk satelitalnych, takich jak towarzyszące Drozdzie Mlecznej Obłoki Magellana. Wszystkie obecne na rynku modele ciemnej materii przewidują stopniowy spadek średniej prędkości takich towarzyszy z odległością, a MOND sugeruje ich niezmiennosc. Do niedawna wydawało się, że wbrew modelom ciemnej materii, prędkości te nie spadają z odległością. W ten sposób krzywe rotacyjne galaktyk, które spowodowały powstanie hipotezy ciemnej materii, zaczęły, paradoksalnie, dostarczać dowodów przeciwko tej hipotezie! Jednak ostatnio przeprowadzona analiza [3], oparta na danych Sloan DSS, dowodzi zmniejszania się omawianych prędkości z odległością i to w sposób przewidywany przez modele ciemnej materii, które w tym przypadku są wyjątkowo zgodne. Oprócz znacznego zwiększenia statystyki (przebadano 250 tysięcy galaktyk znajdujących około 3 tysiące galaktyk towarzyszących) kluczowym elementem było statystyczne wykluczenie intruzów: małych galaktyk nie związanych grawitacyjnie z dużymi, a znajdujących się blisko nich jedynie „przez przypadek”. Wykorzystano fakt, że przewidywany rozkład tych ostatnich jest równomierny w przestrzeni, podczas gdy gęstość galaktyk związanych powinna w określony sposób zmniejszać się z odległością.

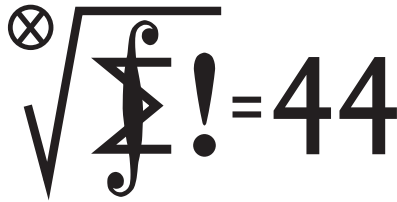
Otrzymany wynik sprawia, że ciemna materia nabiera coraz realniejszego kształtu, przynajmniej jeżeli chodzi o jej przestrzenny rozkład. Teraz należałoby wreszcie dowiedzieć się, z czego się ona składa, ale to zupełnie inna historia, która, być może, znajdzie rozwiązanie już w obecnej dekadzie dzięki fizyce cząstek elementarnych.

Piotr ZALEWSKI

[1] *The First Data Release of the Sloan Digital Sky Survey*, Zespół SDSS, K. Abazajian i inni, astro-ph/0305492

[2] *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*, M. Milgrom, Ap. J. **270**(1983)365; <http://www.astro.umd.edu/ssm/mond>

[3] *Sloan Digital Sky Survey Probes Dark Matter Theory*, <http://www.sdss.org/news/releases/20030521.darkmatter.html>, 23 maja 2003; *Observing the dark matter density profile of isolated galaxies*, F. Prada i inni, astro-ph/0301360



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 XII 2003

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

## Zadania z matematyki nr 467, 468

**467.** Czy istnieje wielomian  $P(x, y)$  dwóch zmiennych rzeczywistych, o współczynnikach rzeczywistych, którego zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb dodatnich?

**468.** W niemalejącym ciągu  $a_1, a_2, a_3, \dots$  o wyrazach naturalnych każda liczba naturalna  $k$  występuje

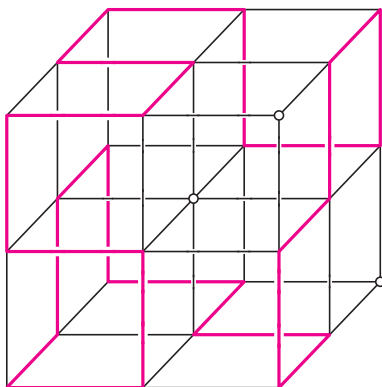
## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2003

**463.** Wyznaczyć największą możliwą długość linii łamanej zamkniętej o następujących własnościach:

- wierzchołki łamanej są różnymi punktami przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , których współrzędne należą do zbioru  $\{0, 1, 2\}$ ;
- każde dwa sąsiednie boki łamanej są prostopadłe i mają długość 1.

**463.** Punkty o współrzędnych równych 0 lub 2 są wierzchołkami sześcianu  $Q$  o krawędzi długości 2. Na każdej z dwunastu krawędzi tego sześcianu może leżeć co najwyżej jeden bok rozważanej łamanej  $L$  (co wynika z warunku prostopadłości sąsiednich boków). Każdy wierzchołek sześcianu  $Q$ , który jest wierzchołkiem łamanej  $L$ , jest końcem dwóch jej boków leżących na krawędziach sześcianu  $Q$ . Stąd wniosek, że łamana  $L$  może przechodzić przez co najwyżej sześć wierzchołków sześcianu  $Q$ , omijając co najmniej dwa z nich.

To pokazuje, że spośród 27 punktów o współrzędnych 0, 1, 2 nie więcej niż 25 punktów może być wierzchołkami łamanej  $L$ . Każdy jej bok łączy dwa punkty, z których jeden ma sumę współrzędnych parzystą, a drugi nieparzystą. Liczba boków (czyli długość  $L$ ) musi zatem być parzysta, skoro łamana jest zamknięta. Tak więc długość łamanej  $L$  nie przekracza 24.



14

Redaguje Marcin E. KUCZMA

dokładnie  $k$  razy. Podać wzór jawny, przedstawiający  $n$ -ty wyraz  $a_n$  jako funkcję zmiennej  $n$ , wyrażającą się przez działania arytmetyczne, potęgi/pierwiastki oraz symbol  $[x]$  (część całkowita liczby  $x$ ).

Zadanie **468** zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Przypominamy treść zadań:

**464.** Punkt  $P$  leży wewnątrz trójkąta  $ABC$ , a proste  $AP, BP, CP$  przecinają boki  $BC, CA, AB$  odpowiednio w punktach  $D, E, F$ . Dowieść, że

$$|AP| \cdot |BP| \cdot |CP| \geq 8 \cdot |PD| \cdot |PE| \cdot |PF|.$$

Jest to szukane maksimum, bowiem istnieje łamana o długości 24, spełniająca postawione warunki. Przykład jest pokazany na rysunku.

**464.** Oznaczmy pola trójkątów  $ABC, PBC, PCA, PAB$  odpowiednio przez  $S, S_a, S_b, S_c$  oraz przyjmijmy

$$x = \frac{S_a}{S}, \quad y = \frac{S_b}{S}, \quad z = \frac{S_c}{S};$$

$$x + y + z = 1;$$

liczby  $x, y, z$  to współrzędne barycentryczne punktu  $P$  w trójkącie  $ABC$ . Ich średnia harmoniczna nie przekracza średniej arytmetycznej, równej  $1/3$ . Zatem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9.$$

Zachodzą proporcje:

$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AD| - |PD|}{|PD|} = \frac{|AD|}{|PD|} - 1 = \frac{S}{S_a} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

i analogicznie

$$\frac{|BP|}{|PE|} = \frac{1-y}{y}, \quad \frac{|CP|}{|PF|} = \frac{1-z}{z}.$$

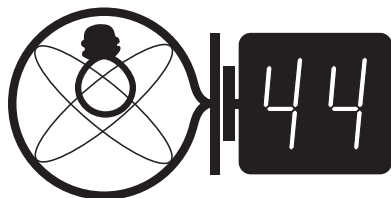
Wobec tego

$$\frac{|AP|}{|PD|} \cdot \frac{|BP|}{|PE|} \cdot \frac{|CP|}{|PF|} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz} =$$

$$= \frac{1 - (x+y+z) + (yz+zx+xy) - xyz}{xyz} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 \geq 8$$

i mamy dowodzoną tezę.



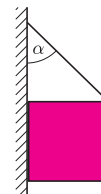
Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 XII 2003

Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
455 (WT = 1,66) i 456 (WT = 2,97)  
z numeru 2/2003

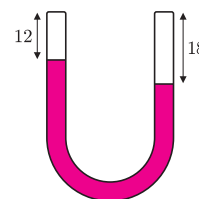
Marian Łupieżowicz – Zebrzydowice 37,40  
Michał Adamaszek – Kęty 33,39  
Michał Józwickowski – Błonie 33,32

**364.** Jednorodny sześcian wisi na nici, dotykając ściany (rys. 1). Nici tworzy ze ścianą kąt  $\alpha$ . Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia statycznego sześcianu o ścianę, aby było to możliwe?



Rys. 1

**365.** Rurka o kształcie litery U o obu końcach zatopionych zawiera rtęć oraz dwie objętości gazu (rys. 2). W pozycji pionowej (gdy gaz był na górze), długości słupów gazu wynosiły 12 cm i 18 cm. Gdy rurkę odwrócono o  $180^\circ$  bez zmiany temperatury, długość pierwszego słupa gazu spadła do 6 cm, przy czym słup rtęci nie uległ przerwaniu.



Rys. 2

- Ile wyniosą długości słupów gazu, jeśli rurkę położyć poziomo, a temperatura pozostanie niezmienną?
- Ile wyniosą długości słupów gazu, jeśli rurka pozostanie w pozycji wyjściowej, a temperatura wzrośnie z początkowej wartości  $20^\circ\text{C}$  do  $80^\circ\text{C}$ ?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2003

**360.** Ocenic orientacyjnie maksymalną prędkość łodzi o długości 10 m, szerokości 2 m i masie 2 t, jeśli napędzający ją silnik rozwija moc 50 kW.

**361.** Według ogólnej teorii względności gwiazda odchyła przebiegające w jej pobliżu promienie świetlne. Odchylenie to można analizować, przyjmując, że na zewnątrz gwiazdy o masie  $M$

**360.** Oznaczmy przez  $N$  siłę nośną działającą na łódź wskutek odrzucania w dół strumienia wody. Ciężar łodzi należy przyrównać do sumy  $N$  i siły wyporu, równej iloczynowi gęstości wody  $\rho$  przez przyspieszenie ziemskie, długość łodzi i pole pionowego przekroju części zanurzonej  $S$ . Po podstawieniu wartości liczbowych w układzie SI otrzymujemy równanie

$$2 \cdot 10^4 = N + 10^5 \cdot S.$$

Praca silnika przechodzi w energię kinetyczną wody – częściowo „rozpychanej” przez kadłub łodzi, a częściowo odrzucanej do tyłu i wprawianej w ruch wirowy przez śrubę. Załóżmy, że te części są równe, a więc połowę mocy silnika przyrównamy do  $\frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v_w^2$ , gdzie  $v_w$  jest prędkością wody „rozpychanej” przez łódź. Przyjmijmy, że ta prędkość jest równa  $1/3$  prędkości łodzi  $v$ , natomiast  $\frac{dm}{dt}$  przyrównamy do iloczynu  $\rho S v$ . Podstawienie wartości liczbowych daje drugie równanie

$$S v^3 = 450.$$

Aby oszacować siłę nośną, przyjmijmy, że daje do niej wkład połowa rozpatrywanej wyżej ilości wody (czyli połowa jest odrzucana przez łódź w dół). Zatem

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} v \frac{dm}{dt} = 167 v^2 S.$$

Po wyeliminowaniu  $N$  i  $S$  z układu równań otrzymujemy równanie trzeciego stopnia

$$0,2 = \frac{0,75}{v} + \frac{450}{v^3}.$$

Otrzymana wartość prędkości  $v$  wynosi  $14,5 \text{ m/s} \approx 15 \text{ m/s}$ . Oznacza to, że 26% ciężaru łodzi jest równoważone przez siłę nośną, a 74% – przez siłę wyporu. Pominięcie siły nośnej zmniejszyłoby obliczoną prędkość do  $13,1 \text{ m/s}$ . Podana szerokość łodzi nie odegrała w powyższych obliczeniach istotnej roli.

Przypominamy treść zadań:

w odległości  $r$  od jej środka współczynnik załamania przestrzeni wynosi  $n = 1 + \frac{2a}{r}$ , gdzie  $a = GM/c^2$  ( $M$  – masa gwiazdy,  $G$  – stała grawitacji). Obliczyć kąt odchylenia promienia przebiegającego tuż obok Słońca. Jeśli źródło światła jest bardzo odległe, to czy czas zwłoki (nadwyżka czasu przejścia promienia, wynikająca z jego spowolnienia w polu grawitacyjnym) ma skończoną wartość? Masa Słońca wynosi  $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ , średnica  $1,4 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

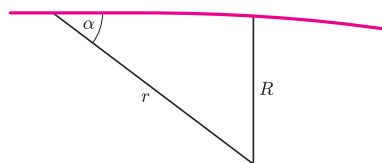
**361.** Różniczkując prawo załamania, stwierdzamy, że promień przechodzący od ośrodka o współczynniku załamania  $n$  do ośrodka o współczynniku załamania  $n + dn$  i padający na powierzchnię graniczną pod kątem  $\alpha$  zmienia kierunek o

$$d\alpha = (dn/n) \operatorname{tg} \alpha.$$

Ponieważ odchylenie promienia jest bardzo małe, więc wartość kąta  $\alpha$  w tym wzorze możemy podstawić tak, jakby promień biegł po prostej (rysunek), tzn.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

( $R$  – odległość największego zbliżenia, czyli promień Słońca).



Podstawiamy

$$n \approx 1, \quad dn = \frac{2\alpha}{r^2} dr$$

(mniejsza o znaki, oczywiście promień odchyła się w stronę Słońca) i obliczamy całkę

$$\Delta\alpha = 2 \int_R^\infty \frac{d\alpha}{dr} dr = 4\alpha R \int_R^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{4\alpha}{R} = 1,75''.$$

Czas zwłoki na drodze  $ds$  wynosi

$$dt = (ds/c)(n - 1) = \frac{dr}{c \cos \alpha} (n - 1)$$

i nietrudno sprawdzić, że całka jest rozbieżna w nieskończoności.





**Rozwiązanie zadania F 606.**

Z warunku równowagi sił działających na układ kulek mamy:

$$F = \frac{2}{3} \pi R^3 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_0)g = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ N.}$$



**Rozwiązanie zadania M 1041.**

Z równości  $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$  wynika, że

$$\sqrt[3]{8n+3} - 2\sqrt[3]{n} < \frac{3}{12\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{4}n^{-2/3}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{8n+3})^3 &< \left(3\sqrt[3]{n} + \frac{1}{4}n^{-2/3}\right)^3 \leq \\ &\leq 27n + \frac{27}{4} + \frac{9}{16n} + \frac{1}{64} < 27n + 8. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, stosując wzór

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b),$$

widzimy że

$$27n + 3 < (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{8n+3})^3.$$

Łatwo można sprawdzić, że  $m^3$ , dla  $m \in \mathbb{Z}$ , może dać tylko reszty 0, 1 lub 8 z dzielenia przez 9. Zatem żadna z liczb  $27n + 2, 27n + 3, \dots, 27n + 7$  nie jest sześcianem liczby całkowitej. Dlatego liczby  $27n + 1$  oraz  $(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{8n+3})^3$  leżą pomiędzy tymi samymi sześcianami dwóch kolejnych liczb naturalnych, więc ich pierwiastki stopnia 3 mają tę samą część całkowitą.

Piłka tenisowa o masie – dla prostoty rachunku – 0,1 kg lecąc z prędkością 30 m/s, ma energię około 50 J. Trudno uwierzyć, ale takie energie (rzędu  $10^{20}$  eV) sporadycznie obserwuje się u cząstek promieniowania kosmicznego, którymi zapewne są – uwaga! – pojedyncze protony. Trzeba przyznać, że jest to zjawisko bardzo rzadkie – naziemne detektory promieniowania kosmicznego zarejestrowały dotychczas około 25 takich przypadków. Nie jest jasne, jaki mechanizm powoduje przyspieszanie cząstek elementarnych do tak fantastycznych energii. Eksplozje supernowych, które zapewne mają swój wkład w obecność promieniowania kosmicznego, są zbyt słabe. Większe energie mogłyby cząstki uzyskiwać w pobliżu np. czarnej dziury stanowiącej jądro aktywnej galaktyki. Niestety, aktywne galaktyki są na ogół bardzo odległe, a po drodze szybkie protony musiałyby zostać wyhamowane wskutek zderzeń z kwantami mikrofalowego promieniowania tła. Przypuszcza się, że rozpędzanie cząstek odbywa się w wyniku ich zderzeń z ruchomymi obłokami plazmy, obdarzonymi polem magnetycznym. To właśnie pola magnetyczne grałyby rolę „rakiet” odbijających piłkę i nadających jej w kolejnych uderzeniach coraz większą energię.

Oczywiście, kierunek ruchu cząstki wpadającej do detektora nie ma wiele wspólnego z kierunkiem na źródło, z którego cząstka pochodzi – i to nawet, jeżeli pole magnetyczne nie bierze udziału w rozpędzaniu cząstek. Bowiem cząstka, poruszając się nawet w słabym międzygalaktycznym polu magnetycznym, musi odchylić swój tor od pierwotnego kierunku, chyba że ma olbrzymią energię, a źródło jest stosunkowo blisko. Dlatego uwzględnienie hipotetycznego rozkładu pola magnetycznego naszej Galaktyki doprowadziło niektórych badaczy do wniosku, że superszybkie cząstki pochodzą z aktywnej radiogalaktyki M87 w Pannie, odległej o 20 Mpc. Jest to olbrzymia galaktyka eliptyczna, z której centrum, zawierającego najprawdopodobniej masywną czarną dziurę, wystrzeliwiają z przyświelnymi prędkościami dwie strugi materii. Trzeba przyznać, że takie wytłumaczenie pochodzenia superszybkich cząstek nie jest powszechnie uznane, a hipotezy konkurencyjne rozważają nawet możliwość, że cząstki te są produktami rozpadów nieznanymi supermasywnych cząstek powstałych we wczesnych fazach życia Wszechświata.

*Tomasz KWAST*



**Październik**

Wybuch gwiazdy nowej to termojądrowa eksplozja wodoru osiadającego na powierzchni białego karła. Źródłem tego wodoru jest czerwony olbrzym stanowiący wraz z białym karłem układ podwójny. Czerwony olbrzym traci własną materię, gdy jego zewnętrzne warstwy zostaną tak rozdęte, że zaczną tracić więź z własną gwiazdą, a wtedy możliwy staje się przepływ materii na białego karła. Jest on jednak gwiazdą bardzo gorącą, dlatego wodór nie może osiadać na nim dowolnie długo. Gdy zbierze się go dostatecznie dużo, musi nastąpić eksplozja, w której biały karzeł pozbywa się nadmiaru materii i po kilkuset lub kilku tysiącach lat zjawisko może się powtórzyć. Podczas wybuchu gwiazda nowa świeci z mocą nawet miliona Słońc. Nowe wybuchają przypadkowo w różnych miejscach dysku naszej Galaktyki, ale tak się złożyło, że stosunkowo niedawno trzy wybuchły w małym niepozornym gwiazdozbiore Jaszczurki. Ten widoczny wieczorem wysoko na

październikowym niebie gwiazdozbiór został wyróżniony przez Heweliusza. Gwiazdy nowe wybuchły w nim w latach 1910, 1936 i 1950.

Wenus jest w Pannie, a więc za blisko Słońca, by można było ją zobaczyć. Mars jest w Wodniku i widać go dobrze w pierwszej połowie nocy. Jowisz jest w Lwie i wschodzi dopiero nad ranem, a praktycznie przez całą noc widać Saturna, który w październiku jest w Bliźniętach. Pełnia Księżyca wypada 10 X, a nów 25 X. Księżyc zakryje Marsa 6 X, a zjawisko to będzie widać na Tasmanii, Nowej Zelandii i Antarktydzie. 26 X Księżyc zakryje Wenus, ale oba te ciała i tak będą wtedy niemal na jednej prostej ze Słońcem, więc tego zjawiska nikt nie zobaczy. Będzie tam też Merkury, w sumie więc 25–26 X zgrupują się ciasno cztery ciała: Słońce, Księżyc, Merkury i Wenus. Aż szkoda, że tego nie zobaczymy.

*T. K.*

Z okazji  $\Gamma$ -limitiasu numer  $\binom{8}{4}$  podajemy  $\binom{6}{3} + \binom{4}{2} + \binom{2}{1} + \binom{0}{0}$  własności liczb postaci  $\binom{2n}{n}$ , gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą dodatnią.

$\binom{0}{0}$ . Liczba  $\binom{2n}{n}$  jest parzysta. Ponadto jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  nie jest potęgą dwójki.

$\binom{2}{1}$ . Liczba  $\binom{2n}{n}$  jest podzielna przez  $n + 1$ .

3. Liczba  $\binom{2n}{n}$  bardzo często ma cyfrę jedności 0. Dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie piątkowym liczby  $n$  występuje co najmniej jedna cyfra 3 lub 4. Warunek ten spełniają wszystkie liczby  $n$  poniżej 1000 ze 161 wyjątkami. Poniżej 1000000 takich wyjątków jest tylko 19682.

4. Liczba  $\binom{2n}{n}$  bardzo rzadko ma cyfrę jedności 8. Dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie piątkowym liczby  $n$  występują tylko cyfry 0, 1 i 2, przy czym liczba jedynek przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Są tylko 32 takie liczby  $n$  mniejsze od 1000, najmniejszymi są: 31, 131, 151, 155, 157.

5. Liczba  $\binom{2n}{n}$  jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie trójkowym liczby  $n$  występuje co najmniej jedna cyfra 2.

$\binom{4}{2}$ . Ogólnie, liczba  $\binom{2n}{n}$  jest podzielna przez nieparzystą liczbę pierwszą  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie liczby  $n$  przy podstawie  $p$  występuje co najmniej jedna cyfra większa od  $p/2$ .

7. Dla dowolnej takiej liczby pierwszej  $p$ , że  $n < p < 2n$ , liczba  $\binom{2n}{n}$  jest podzielna przez  $p$ .

8. Każdy dzielnik liczby  $\binom{2n}{n}$  będący potęgą liczby pierwszej, jest nie większy od  $2n$ .

9. Jeżeli liczba  $n$  jest parzysta, a  $p = 2n + 1$  jest liczbą pierwszą, to liczba  $\binom{2n}{n} - 1$  jest podzielna przez  $p$ .

10. Jeżeli liczba  $n$  jest nieparzysta, a  $p = 2n + 1$  jest liczbą pierwszą, to liczba  $\binom{2n}{n} + 1$  jest podzielna przez  $p$ .

11. Jeżeli liczba  $n$  jest parzysta, a  $p = 2n - 1$  jest liczbą pierwszą, to liczba  $\binom{2n}{n} + 4p$  jest podzielna przez  $p^2$ .

12. Jeżeli liczba  $n$  jest nieparzysta, a  $p = 2n - 1$  jest liczbą pierwszą, to liczba  $\binom{2n}{n} - 4p$  jest podzielna przez  $p^2$ .

13. Liczba  $\binom{2n}{n}$  jest podzielna przez  $2n - 1$ .

14. Dla  $n < 58$  liczba  $\binom{2n}{n}$  przy dzieleniu przez 7 daje resztę różną od 3.

15. Dla  $n < 183$  liczba  $\binom{2n}{n}$  przy dzieleniu przez 13 daje resztę różną od 8 i od 11.

16. Dla  $n < 330$  liczba  $\binom{2n}{n}$  przy dzieleniu przez 17 daje resztę różną od 10.

17. Dla  $n < 1735$  liczba  $\binom{2n}{n}$  przy dzieleniu przez 41 daje resztę różną od 28.

18. Zachodzi nierówność  $\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{(n+1/4)\pi}}$ .

19. Dla  $n > 30$  zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{\sqrt{(n+0,251)\pi}}$$

$\binom{6}{3}$ . Zachodzi równość

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2.$$

21. Liczba  $\binom{2n}{n}$  nie jest podzielna przez żadną z liczb 3, 5, 7 dla następujących czternastu wartości  $n$ : 1, 10, 756, 757, 3160, 3186, 3187, 3250, 7560, 7561, 7651, 20007, 59548377, 59548401. Są to wszystkie liczby  $n < 10^{10}$  o tej własności.

22. Jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą większą od 3, to liczba  $\binom{2p}{p}$  przy dzieleniu przez  $p^3$  daje resztę 2.

23. Jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą większą od 3, to liczba  $\binom{2p^2}{p^2} - \binom{2p}{p}$  jest podzielna przez  $p^6$ .

24. Jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą większą od 3, to liczba  $\binom{2p^3}{p^3} - \binom{2p^2}{p^2}$  jest podzielna przez  $p^9$ .

25. Jeżeli  $p$  i  $q = p + 2$  są liczbami pierwszymi bliźniaczymi, to liczba  $\binom{2pq}{pq} - 6q$  jest podzielna przez  $pq$ .

26. Niech  $p < 200$  będzie nieparzystą liczbą pierwszą i niech  $n = \frac{p(p+1)}{2}$ . Wówczas liczba  $\binom{2n}{n}$  jest podzielna przez  $n$ , o ile  $p$  nie jest jedną z liczb 79, 83, 89, 199.

27. Liczba  $\binom{100}{50}$  jest podzielna przez  $\binom{20}{10}$ .

28. Dla  $n$  parzystych zachodzi równość

$$\text{NWD} \left( \binom{2n}{n}, \binom{2n+2}{n+1} \right) = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2 \cdot (2n+1)}.$$

29. Dla  $n$  nieparzystych zachodzi równość

$$\text{NWD} \left( \binom{2n}{n}, \binom{2n+2}{n+1} \right) = \frac{2 \cdot \binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2n+1}.$$

Korespondencję do  $\Gamma$ -limitiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl