

SPIS TREŚCI NUMERU 8 (351)

O kilku twierdzeniach
elementarnej teorii liczb, czyli
o tym, skąd się biorą grupy

Czesław Bagiński
Edmund R. Puczyłowski

str. 1

Niebieski las
Robert Żak

Andrzej Hryczuk

str. 4

Graniastosłup spotyka
płaszczyznę

Zbigniew Marciniak

str. 6

Paradoks Roberta
Korzeniowskiego
Andrzej Dragan

str. 8

Duża Mała Delta

Zadania

str. 9

Dalsze wariacje na melodię
„Tnijmy graniastosłup”
Michał Szurek

str.10

Aktualności

str.13

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Sierpień

str.16

Gammalimatias

str.17

W poprzednim, 7(350)/2003, numerze *Delty* został zmieniony, bez porozumienia z Autorem, tytuł artykułu profesora Marka Berezowskiego. Właściwy tytuł to *Fraktalne obrazy reaktora chemicznego*. Także kolorystyka związanych z artykułem fraktali, przedstawionych na tylnej stronie okładki, znacząco odbiega od oryginału. Wyrażamy z tego powodu głębokie ubolewanie i za zwinione przez nas uchybienia gorąco przepraszamy Autora i Czytelników.

Redakcja *Delty*

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichoński – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hrynkiewicz, Tadeusz Jarzembowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nacz.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiwi.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wybór artykułów *Małej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Festiwal Nauki

O kilku twierdzeniach elementarnej teorii liczb, czyli o tym, skąd się biorą grupy

Czesław BAGIŃSKI, Edmund R. PUCZYŁOWSKI

Pojęcie grupy funkcjonuje w matematyce od prawie 200 lat, a od pewnego czasu jest w niej wszechobecne. Praktycznie w każdym dziale matematyki jest wykorzystywane albo do klasyfikacji, albo do opisu strukturalnych własności obiektów, którymi się ten dział zajmuje. Samo narodzenie pojęcia grupy jest związane ze spektakularnym zastosowaniem go do ostatecznego wyjaśnienia kwestii rozwiązalności przez pierwiastniki równań postaci

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

gdzie a_1, a_2, \dots, a_{n-1} są liczbami wymiernymi. Dokonał tego zaledwie dwudziestoletni Evariste Galois w 1832 roku. Przez kilkanaście lat osiągnięcie Galois było niedostrzeżone i niedocenione. Nie znaleziono również zadowalającego sposobu przejrzystego przedstawienia rezultatu Galois w krótkim artykule adresowanym do szerokiego audytorium. W tym artykule my również tego nie zrobimy. Chcemy natomiast opowiedzieć o kilku podstawowych twierdzeniach teorii liczb, a właściwie ich dowodach, z których pojęcie grupy (co prawda tylko abelowej) w naturalny sposób samo się wyłania. Odkrycie tych twierdzeń na wiele lat poprzedziło wyniki Galois i mogły się one wydać współczesnym jako obserwacje z pogranicza magii i świata rzeczywistego. Omówimy te wyniki, zanim zdefiniujemy pojęcie grupy.

Wszystkie dalej rozpatrywane liczby są całkowite, natomiast napis $a | b$ oznacza, że $a \neq 0$ i a jest dzielnikiem liczby b .

W drugiej połowie osiemnastego wieku John Wilson (matematyk angielski, 1741–1793) zauważył następującą zależność, nazwaną potem twierdzeniem Wilsona. (Uważa się, że tę zależność znał wiele lat wcześniej W.G. Leibniz, 1646–1716.)

Twierdzenie Wilsona.

Dla dowolnej liczby pierwszej p

$$p \mid (p-1)! + 1.$$

Twierdzenie zostało opublikowane po raz pierwszy przez E. Waringa, ale ani Waring, ani Wilson nie znali jego dowodu. Pierwszy dowód został podany przez J.L. Lagrange'a w 1773 roku.

Lagrange udowodnił również twierdzenie odwrotne: *Jeżeli $m > 1$ jest dzielnikiem liczby $(m-1)! + 1$, to m jest liczbą pierwszą.*

Ponad sto lat wcześniej P. Fermat poczynił nie mniej interesującą obserwację:

Małe Twierdzenie Fermata.

Dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnej liczby całkowitej n

$$p \mid n^p - n.$$

Aby udowodnić twierdzenie Wilsona, należy wykazać, że reszta z dzielenia $(p-1)!$ przez p jest równa $p-1$. Z kolei w przypadku twierdzenia Fermata wystarczy

wykazać, iż dla dowolnej liczby a , takiej że $1 \leq a \leq p-1$, reszta z dzielenia a^{p-1} przez p jest równa 1. W dowodach obu faktów wykorzystamy działanie \odot – iloczyn w kółku, jakie wprowadzamy w zbiorze liczb

$$\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}.$$

Przyjmujemy mianowicie, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}_p^*$

$$a \odot b = \text{reszta z dzielenia } a \cdot b \text{ przez } p.$$

Nietrudno zauważyć, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{Z}_p^*$,

$$\text{i) } 1 \odot a = a,$$

$$\text{ii) } a \odot b = b \odot a,$$

$$\text{iii) } (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c).$$

Trzecia z tych własności pozwala opuszczać nawiasy w wyrażeniach, które są iloczynami w kółku liczb naturalnych mniejszych od p , natomiast druga – przedstawiać ich kolejność.

Zajmiemy się najpierw twierdzeniem Wilsona dla $p = 11$. Mamy wykazać, że $1 \odot 2 \odot 3 \odot \dots \odot 10 = 10$. Moglibyśmy liczyć kolejno: $1 \odot 2 = 2$, $2 \odot 3 = 6$, $6 \odot 4 = 2$, itd. Wygodniej jest jednak zauważyć, że $1 \odot 2 \odot 3 \odot \dots \odot 10 =$

$$= 1 \odot (2 \odot 6) \odot (3 \odot 4) \odot (5 \odot 9) \odot (7 \odot 8) \odot 10,$$

i że wyrażenia w nawiasach są równe 1. Stąd natychmiast otrzymujemy, że $1 \odot 2 \odot 3 \odot \dots \odot 10 = 10$ i dowód jest zakończony.

Podobną metodę można zastosować dla dowolnego p .

Zauważmy, że jeśli $1 \leq i < j \leq p-1$, to dla dowolnego a , jeśli $1 \leq a \leq p-1$, to liczba $a(j-i)$ nie jest podzielna przez p . Wynika stąd, że $a \odot i \neq a \odot j$. Zatem, jeśli i przebiega wszystkie liczby od 1 do $p-1$, to również $a \odot i$ przebiega te liczby (tyle że dla $a \neq 1$ w innej kolejności). W efekcie:

$$\text{iv) dla dowolnego } a, \text{ jeśli } 1 \leq a \leq p-1, \\ \text{to istnieje } a', \text{ takie że } 1 \leq a' \leq p-1 \\ \text{oraz } a \odot a' = 1.$$

Takie a' jest tylko jedno. Istotnie, jeśli $a \odot a'' = 1$, to $a'' = a'' \odot 1 = a'' \odot (a \odot a') = (a'' \odot a) \odot a' = 1 \odot a' = a'$. Zauważmy ponadto, że $a \odot a = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \mid a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$. Zatem $a \odot a = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$ lub $a = p-1$. Wynika stąd, że podobnie, jak dla $p = 11$, zbiór $\{2, 3, \dots, p-2\}$ można rozbić na pary różnych liczb w ten sposób, że dla dowolnej z par a, b , $a \odot b = 1$. W rezultacie otrzymujemy $1 \odot 2 \odot 3 \odot \dots \odot (p-1) = p-1$ i twierdzenie Wilsona zostało udowodnione.

Niech teraz a będzie dowolną liczbą naturalną mniejszą od p . Jak zauważyliśmy,

$$\{a \odot 1, a \odot 2, \dots, a \odot (p-1)\} = \{1, 2, \dots, p-1\}.$$

Zatem

$$\underbrace{(a \odot a \odot \dots \odot a)}_{p-1 \text{ razy}} \odot (1 \odot 2 \odot \dots \odot (p-1)) = \\ = (a \odot 1) \odot (a \odot 2) \odot \dots \odot (a \odot (p-1)) = \\ = 1 \odot 2 \odot \dots \odot (p-1)$$

i dalej, korzystając z twierdzenia Wilsona, otrzymujemy

$$\underbrace{(a \odot a \odot \dots \odot a)}_{p-1 \text{ razy}} \odot (p-1) = p-1,$$

co z kolei po obustronnym pomnożeniu tej równości przez $p-1$ daje

$$\underbrace{(a \odot a \odot \dots \odot a)}_{p-1 \text{ razy}} \odot (p-1) \odot (p-1) = \\ = (p-1) \odot (p-1) = 1.$$

Zatem reszta z dzielenia a^{p-1} przez p jest równa 1, co dowodzi Małego Twierdzenia Fermata.

Pierwszy pełny dowód Małego Twierdzenia Fermata przedstawił L. Euler (1707–1783), czyniąc znacznie ogólniejszą obserwację, której dowód można przeprowadzić tak samo, jak dowód twierdzenia Fermata z dokładnością do pewnych szczegółów. Niech mianowicie m będzie dowolną liczbą naturalną, $m \geq 2$. Niech ponadto \mathbb{Z}_m^* będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych mniejszych od m i względnie pierwszych z m , np.

$$\mathbb{Z}_6^* = \{1, 5\}, \quad \mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}, \quad \mathbb{Z}_9^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}.$$

Na koniec, niech $\varphi(m)$ będzie liczbą elementów zbioru \mathbb{Z}_m^* .

Wartości funkcji φ dla małych m są podane w poniższej tabeli.

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(m)$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Wówczas zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie Eulera.

Dla dowolnej liczby naturalnej a względnie pierwszej z m

$$m \mid a^{\varphi(m)} - 1.$$

Zauważmy, że Małe Twierdzenie Fermata jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Eulera. Jeśli bowiem założymy, że $m = p$ jest liczbą pierwszą, to $\varphi(p) = p - 1$ (bo przecież $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, 3, \dots, p - 1\}$) i otrzymujemy dokładnie treść Małego Twierdzenia Fermata.

Aby udowodnić twierdzenie Eulera, wprowadzimy w zbiorze \mathbb{Z}_m^* działanie, które dla wygody oznaczymy tak samo, jak działanie rozważane wyżej.

Dla różnych wartości m definiowane działania są różne, dlatego bardziej właściwe byłoby oznaczenie go symbolem \odot_m .

Przyjmijmy mianowicie, że

$$a \odot b = \text{reszta z dzielenia } a \cdot b \text{ przez } m,$$

dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}_m^*$.

Można łatwo sprawdzić, a jeszcze łatwiej uwierzyć, że to działanie również spełnia warunki i)–iii).

Podobnie jak wyżej, sprawdzimy, że spełnia ono także warunek iv). Niech mianowicie $a \in \mathbb{Z}_m^*$. Powtarzając rozumowanie przeprowadzone dla $m = p$, otrzymujemy, że dla $i, j \in \mathbb{Z}_m^*$, $i \neq j$ mamy $a \odot i \neq a \odot j$. Jeżeli zatem $\mathbb{Z}_m^* = \{b_1, \dots, b_{\varphi(m)}\}$, to

$$\{a \odot b_1, \dots, a \odot b_{\varphi(m)}\} = \{b_1, \dots, b_{\varphi(m)}\}.$$

Stąd wynika więc, że istnieje takie $b \in \mathbb{Z}_m^*$, że $a \odot b = 1$, tzn. spełniony jest warunek iv).

Mamy ponadto

$$\underbrace{a \odot a \odot \dots \odot a}_{\varphi(m) \text{ razy}} \odot (b_1 \odot b_2 \odot \dots \odot b_{\varphi(m)}) = \\ = (b \odot b_1) \odot (b \odot b_2) \odot \dots \odot (b \odot b_{\varphi(m)}) = \\ = b_1 \odot b_2 \odot \dots \odot b_{\varphi(m)}.$$

Teraz będziemy rozumowali nieco ogólniej niż w dowodzie twierdzenia Fermata. Oznaczmy, mianowicie, przez b prawą stronę ostatniej równości. Mamy więc

$$\underbrace{(a \odot a \odot \dots \odot a)}_{\varphi(m) \text{ razy}} \odot b = b$$

Na podstawie własności iv) istnieje takie $c \in \mathbb{Z}_m^*$, że $b \odot c = 1$. Jeżeli zatem pomnożymy ostatnią równość stronami przez c , to otrzymamy:

$$\underbrace{(a \odot a \odot \dots \odot a)}_{\varphi(m) \text{ razy}} \odot (b \odot c) = b \odot c = 1.$$

Zatem reszta z dzielenia $a^{\varphi(m)}$ przez p jest równa 1, co dowodzi twierdzenia Eulera.

Powróćmy na chwilę do twierdzenia Wilsona. Jest ono równoważne temu, że iloczyn w kółku wszystkich elementów z \mathbb{Z}_p^* jest równy $p - 1$. Nie jest to prawda, jeśli zastąpimy p dowolną liczbą naturalną m .

Rzeczywiście w $\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ mamy

$$1 \odot 2 \odot 4 \odot 7 \odot 8 \odot 11 \odot 13 \odot 14 = \\ = (2 \odot 8) \odot (4 \odot 11 \odot 14) \odot (7 \odot 13) = 1.$$

Przyczyną tego jest fakt, że na ogół w \mathbb{Z}_m^* oprócz 1 i $m - 1$ istnieją jeszcze inne elementy spełniające warunek $a \odot a = 1$. W \mathbb{Z}_{15}^* są nimi liczby 4 i 11.

Zauważmy jednak, że jeśli $\mathbb{Z}_m^* = \{b_1, \dots, b_{\varphi(m)}\}$, to

$$(b_1 \odot b_2 \odot \dots \odot b_{\varphi(m)}) \odot (b_1 \odot b_2 \odot \dots \odot b_{\varphi(m)}) = 1.$$

Istotnie, każdy element z wyrażenia w lewym nawiasie można zestawić z elementem z prawego nawiasu tak, aby w iloczynie z nim otrzymać 1. Z tego otrzymujemy

Twierdzenie.

Niech $m > 1$ będzie dowolną liczbą naturalną, natomiast a niech będzie iloczynem wszystkich liczb względnie pierwszych z liczbą m , mniejszych od m . Wówczas

$$m \mid a^2 - 1.$$

Z rozważanych przykładów widać przydatność mnożenia w kółku przy odkrywaniu wielu interesujących własności liczb naturalnych

i ogólniej, całkowitych. Naturalnie, pojawiają się też różne pytania. Oto kilka przykładów.

- (a) Dla jakich liczb naturalnych $n \geq 2$ wszystkie elementy zbioru \mathbb{Z}_n^* spełniają warunek $a \odot a = 1$?

Jest to jedno z 36 zadań-kandydatów wyselekcjonowanych do XLI Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej.

- (b) Udowodnić, że dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{Z}_{16}^*$ $a \odot a \odot a \odot a = 1$.

Odpowiedzi na te pytania wraz z Małym Twierdzeniem Fermata oraz pewnymi dodatkowymi argumentami pozwalają wyprowadzić następujące własności liczb naturalnych:

- Niech m będzie taką liczbą naturalną, że $m \mid a^2 - 1$ dla dowolnej liczby naturalnej a względnie pierwszej z liczbą m . Wówczas m jest dzielnikiem liczby 24.
- Jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 5, to $240 \mid p^4 - 1$.

Zachęcamy Czytelników do udowodnienia tych własności.

Elementy zbioru \mathbb{Z}_m^* reprezentują wszystkie liczby całkowite względnie pierwsze z m , są w jakimś sensie „cieniami” tych liczb. Działanie mnożenia w kółku, którego własności i)–iv) wykorzystywaliśmy wyżej, jest w pewnym sensie „cieniem” zwykłej operacji mnożenia liczb całkowitych. Własności zbioru i tego działania ujawniają pewną ogólną strukturalną własność zbioru liczb całkowitych i poszczególnych liczb. Zbiór \mathbb{Z}_m^* wraz z działaniem \odot jest przykładem grupy.

Mówiąc ogólnie, **grupę** można zdefiniować jako niepusty zbiór G z działaniem \circ , spełniającym warunki

łączności:

$$(1) \quad \forall_{x,y,z \in G} (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z);$$

istnienia elementu neutralnego:

$$(2) \quad \exists_{e \in G} \forall_{x \in G} e \circ x = x \circ e = x;$$

odwracalności każdego elementu:

$$(3) \quad \forall_{x \in G} \exists_{y \in G} x \circ y = y \circ x = e.$$

Jeżeli do tych warunków dorzucimy jeszcze

przemienność działania:

$$(4) \quad \forall_{x,y \in G} x \circ y = y \circ x;$$

otrzymamy grupę nazywaną **grupą abelową** albo przemienne. Zbiór \mathbb{Z}_p^* z działaniem \odot jest właśnie grupą przemienne.

Najprostszymi przykładami grup abelowych są:

- zbiór \mathbb{Z} liczb całkowitych ze zwykłym działaniem dodawania;

- dla dowolnej liczby naturalnej n zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ z działaniem $a \oplus_n b = \text{reszta z dzielenia } a + b \text{ przez } n$.

Nieco trudniejszą do zauważenia jest obserwacja, że grupą abelową jest również zbiór wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru X z działaniem

$$A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Grupa jest obiektem o bardzo regularnej strukturze wewnętrznej, dlatego stwierdzenie, że jakieś działanie wprowadza w ustalonym zbiorze strukturę grupy, niesie istotną informację, której odkrycie metodami elementarnymi bywa trudne.

* * *

Nasze rozważania kończymy kilkoma zadaniami, wśród których można znaleźć i takie, które powyższe zagadnienia ilustrują.

- Udowodnić Małe Twierdzenie Fermata przez indukcję ze względu na n i wyprowadzić stąd, w inny sposób, niż przedstawiono w artykule, że dla dowolnej liczby pierwszej p , zbiór \mathbb{Z}_p^* jest grupą ze względu na działanie \odot .

- Udowodnić, że niepusty podzbiór X zbioru \mathbb{Z} jest grupą ze względu na dodawanie wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej n , mamy

$$X = \{n \cdot x : x \in \mathbb{Z}\}.$$

- a) Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n zbiór

$$\{n \cdot x + m \cdot y : x, y \in \mathbb{Z}\}$$

jest grupą ze względu na dodawanie.

- Na podstawie zadania 2 udowodnić, że istnieją takie liczby całkowite x, y , że $n \cdot x + m \cdot y$ jest największym wspólnym dzielnikiem liczb m i n .

- Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n > 1$.

- Udowodnić, że zbiór

$$\{a \in \mathbb{Z}_n^* : n \mid a^2 - 1\}$$

jest grupą ze względu na działanie \odot_n .

Udowodnić, że liczba elementów tej grupy jest potęgą liczby 2.

- Udowodnić analogiczne fakty dla elementów zbioru \mathbb{Z}_n^* spełniających warunek

$$n \mid a^3 - 1.$$

- (VI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna)

- Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których

$$7 \mid 2^n - 1.$$

- Udowodnić, że nie istnieje liczba naturalna n , dla której

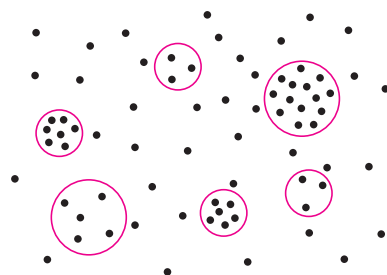
$$7 \mid 2^n + 1.$$

Niebieski las

Robert ŻAK

Andrzej HRYCZUK

Kiedy obserwujemy nasze otoczenie, zwykle nie zwracamy uwagi na zjawiska, do których przywykliśmy. Niebieski kolor odległych obiektów, błękitny kolor nieba czy czerwony kolor zachodzącego słońca są dla nas naturalne. Tak naturalne, że nie zastanawiamy się nawet nad ich złożonością. Fotografia na pierwszej stronie okładki przedstawia Wielki Kanion – widzimy, jak kolejne szczyty stają się coraz bardziej niebieskie. Między innymi ten właśnie efekt wykorzystujemy do oceny odległości do bardzo odległych obiektów. Na tym zdjęciu widzimy także podobieństwo między niebieskim kolorem wzgórz a niebieską barwą nieba. I to podobieństwo nie jest przypadkowe. Nie możemy mówić o niebieskiej barwie lasu, nie rozważając niebieskiego koloru nieba.



Rys. 1. Fluktuacja gęstości powietrza.

Dlaczego więc niebo wydaje się niebieskie? Jest to spowodowane rozpraszaniem światła, czyli odchyleniem biegu promieni świetlnych na wszystkie strony względem kierunku pierwotnego. Istnieje kilka powodów, dla których światło jest rozpraszane. Po pierwsze, kiedy w przezroczystym ośrodku znajdują się przezroczyste cząstki o innym współczynniku załamania światła. Po drugie, gdy w przezroczystym ośrodku znajdują się nieprzezroczyste molekuly odbijające i absorbujące światło i wreszcie, kiedy w powietrzu znajdują się kropelki wody.

W 1899 roku John Rayleigh pokazał, że natężenie rozproszonego światła jest odwrotnie proporcjonalne do czwartej potęgi długości fali. Może to posłużyć do wyjaśnienia niebieskiego koloru nieba. Łatwo obliczyć, że światło niebieskie – o długości fali około 450 nm – jest rozpraszane ponad czterokrotnie silniej niż światło czerwone (około 650 nm). Dlaczego jednak nie obserwujemy nieba fioletowego, skoro odpowiadają mu fale jeszcze krótsze? Są dwie przyczyny: natężenie światła fioletowego, docierającego do Ziemi, jest małe w porównaniu z natężeniem światła o dłuższych falach oraz nasze oko jest ponad stokrotnie mniej wrażliwe na światło fioletowe, niż na światło niebieskie.

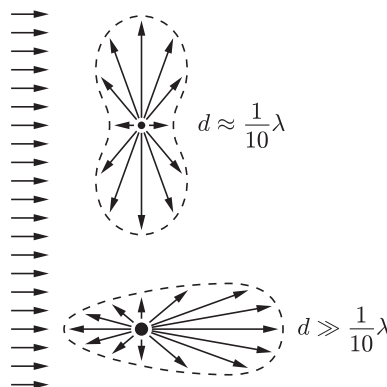
Rayleigh zaproponował także metodę obliczania natężenia rozproszonego światła. Rozważał molekuly jako dipole, które pod wpływem padającej na nie fali elektromagnetycznej są pobudzone do drgań i wypromieniowują energię we wszystkich kierunkach.

Kilka lat później Smoluchowski i niezależnie Einstein wyjaśnili niebieski kolor nieba za pomocą fluktuacji gęstości powietrza (rys. 1). Im mniejsza jest objętość fluktuacji, tym większe prawdopodobieństwo jej powstania i tym większe natężenie rozproszonego światła o długości fali odpowiadającej rozmiarom fluktuacji. Ich równania zostały później sprawdzone eksperymentalnie, posłużyły mianowicie do wyznaczenia stałej Avogadro z niezwykle dużą precyzją.

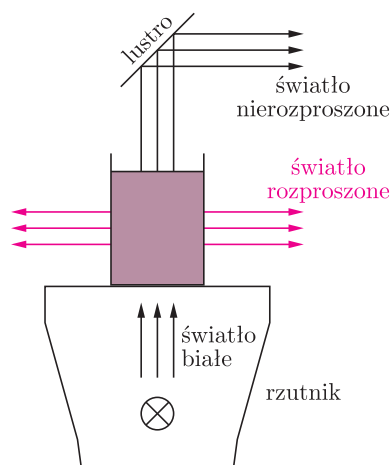
Zwróćmy jeszcze uwagę, że prawo Rayleigha jest słuszne jedynie dla obiektów mniejszych niż jedna dziesiąta długości fali światła padającego, a dla większych obiektów, jak kuliste kropelki wody, rozpraszanie opisuje teoria Mie. Natężenie rozproszonego światła według teorii Mie jest większe niż według prawa Rayleigha. Co więcej, światło jest silniej rozpraszane do przodu niż na boki. Rozkład kątowy natężenia światła od cząstek o różnych średnicach schematycznie ilustrują indykatrysy na rysunku 2.

Porównując teorię Rayleigha i teorię Mie, zauważamy, iż natężenie światła rozproszonego na kropelkach wody słabiej zależy od długości fali (jest odwrotnie proporcjonalne do długości fali). Wyjaśnia to zarówno biały kolor chmur, jak i szary kolor lasu w mglistej atmosferze.

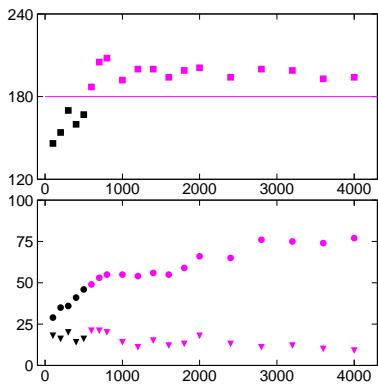
Te dwa rodzaje rozpraszania możemy zademonstrować w szklance wody. Roztwór tiosiarczanu sodu (około 1 łyżeczki) w wodzie destylowanej (500 ml) umieszczamy na projektorze (rys. 3). Kiedy dodamy nieco rozcieńczonego kwasu siarkowego, z roztworu zaczynają się wytrącać cząsteczki siarki i światło niebieskie zostaje rozproszone na boki, podczas gdy światło czerwone przechodzi przez roztwór niemal nierozproszone. Podobny proces zachodzi podczas zachodu słońca. Umieszczając filtry barwne wokół szklanki, możemy sprawdzić, że rzeczywiście rozpraszane są wszystkie długości fali, natomiast światło niebieskie najsilniej.



Rys. 2. Rozpraszanie Rayleigha (góra) i Mie (dół). Długość strzałek odpowiada natężeniu światła rozproszonego w danym kierunku.



Rys. 3. Układ doświadczalny służący do demonstracji rozpraszania światła.



Rys. 4. Wyniki analizy zdjęć z tylnej okładki, w zależności od odległości lasu w metrach. Użyto kodowania koloru HSV (*Hue* – barwa; *Saturation* – nasycenie; *Value* – jasność). W kodowaniu tym pierwsza liczba (górny wykres) zmienia się w zakresie 0–360 i odpowiada mierze w stopniach kąta określającego położenie dominującego koloru na kole barw. Poszczególnym barwom podstawowym odpowiadają zakresy: czerwonej (–60, 60), zielonej (60, 180), niebieskiej (180, 300). Następną liczbą (trójkąty na dolnym wykresie) określa nasycenie koloru. Czystej barwie odpowiada wartość 100, a 0 odpowiada kolorowi szaremu. Trzecia liczba (kółka na dolnym wykresie), również z zakresu 0–100, określa jasność. Niebieskimi znacznikami przedstawiono sytuację, w której dominuje kolor niebieski.

Ale proces wytrącania trwa dalej. Powstają duże ugrupowania siarki, większe niż jedna dziesiąta długości fali światła i obserwujemy zarówno wzrost natężenia światła rozpraszanego, jak i zmianę jego koloru na bielszy.

Po tym dość długim, lecz niezbędnym wstępie możemy przejść do zaproponowanej przez nas metody pomiaru odległości, dla których zielony las zaczyna być widziany jako niebieski. Wykonaliśmy serię zdjęć wzdłuż drogi, co umożliwiło nam pomiar odległości. Zdjęcia wykonano w godzinach południowych w kierunku zachodnim, niebo było pokryte chmurami, temperatura wynosiła około 20 stopni Celsjusza, wilgotność około 50% oraz było bezwietrznie. Następnie wyznaczyliśmy średnią barwę dla zaznaczonych obszarów na zdjęciach przetworzonych do postaci elektronicznej. Niektóre z tych zdjęć znajdują się na tylnej okładce.

Wyniki przedstawiamy na rysunku 4. Na pierwszych pięciuset metrach dominuje kolor zielony ustępując następnie niebieskiemu.

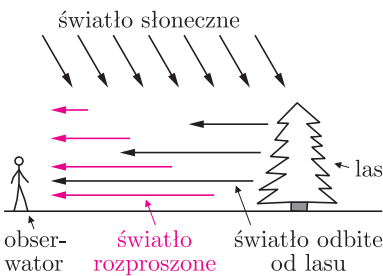
Spróbujmy wyjaśnić, dlaczego tak się dzieje. Kiedy światło pada na las, jest selektywnie odbijane w kierunku obserwatora. Dlatego z bliska las wydaje się zielony. Gdy odległość między lasem a obserwatorem rośnie, natężenie zielonego światła odbitego od lasu maleje (jest rozpraszane na boki). Ponadto część światła słonecznego zostaje rozproszona w kierunku obserwatora (rys. 5). Udowodniliśmy już, że jest to w przeważającym stopniu światło niebieskie. Z tych dwóch przyczyn kolor odległego lasu wydaje się niebieski. Natomiast wrażenie mglistości spowodowane jest spadkiem natężenia światła odbitego od lasu, a co za tym idzie spadkiem ilości obserwowanych detali.

Zastanówmy się jeszcze, jak warunki pogodowe wpływają na kolor lasu. Po pierwsze, kiedy atmosfera jest wolna od pyłów i kropelek wody, odległe plany wydają się silnie niebieskie. Ponieważ takie warunki niezwykle rzadko panują w Polsce, powróćmy do zdjęcia Wielkiego Kanionu. Wykonaliśmy analizę także tej fotografii. Widać wyraźnie (rys. 6), jak czerwona składowa bliskiego planu ustępuje składowej niebieskiej w miarę powiększania się odległości. Kolor niebieski jest tu bardzo wyraźny, a odległości sięgają pięćdziesięciu i więcej kilometrów. Interesujące jest, że otrzymujemy ten sam rezultat, mimo że skały nie są zielone, lecz brązowe.

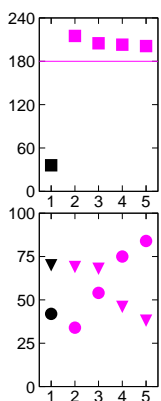
Natomiast pokazane na tylnej okładce zdjęcie Tatr zostało wykonane wtedy, kiedy w powietrzu znajdowało się wiele kropelek wody, większych niż jedna dziesiąta długości fali światła. Rozpraszanie staje się w takich warunkach nieselektywne i odległe wzgórza jawią nam się w odcieniach szarości. Analiza komputerowa tego zdjęcia potwierdza nasze spostrzeżenia (rys. 7). Wraz z odległością wzrasta jasność, natomiast spada nasycenie koloru – wzajemny stosunek barw pozostaje mniej więcej stały, co właśnie odpowiada odcieniom szarości rejestrowanym przez nasze oko.

Jest jeszcze wiele czynników, które mogą wpływać na kolor odległego lasu. Jednak jego niebieski kolor jest spowodowany rozpraszaniem światła w atmosferze i wpływają nań takie czynniki jak: odległości, kierunek obserwacji i oświetlenia, pogoda, czystość powietrza (w zanieczyszczonej atmosferze nie można pominąć absorpcji) i wrażliwość oka.

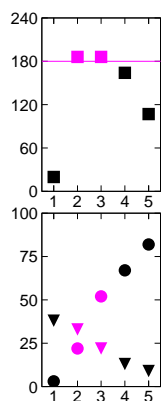
Zjawiska związane z kolorem lasu dają niewyczerpane możliwości prowadzenia badań. Pokazaliśmy jedynie jedno z wielu możliwych podejść.



Rys. 5. Mechanizm powstawania niebieskiej barwy lasu.



Rys. 6. Analiza zdjęcia Wielkiego Kanionu z przedniej okładki (rys. 6) oraz zdjęcia Tatr z tylnej okładki (rys. 7), w funkcji numerów pól zaznaczonych na zdjęciach. Legenda podana jest w opisie rysunku 4.



Rys. 7



Autorzy artykułu, wraz z Janem Guttem (kapitanem), Jackiem Wołkowiczem i Anną Zlatkes, tworzyli zespół XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, który pod opieką mgr. Stanisława Lipińskiego wygrał ubiegłoroczny

Finał Międzynarodowego Turnieju Młodych Fizyków,
Odessa 2002.



Graniastosłup spotyka płaszczyznę

Zbigniew MARCINIAK

W *Delcie* 12/2002 Michał Szurek opisał, jak popijając herbatę oraz bawiąc się programowalnym kalkulatorem podczas podróży koleją, odkrył następujące



Rozwiązanie zadania M 1033.

Zauważmy, że

$$W(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \equiv (x-1)^3 + 2 \pmod{2003}.$$

Udowodnimy, że funkcja

$$\overline{W}(x) = (x-1)^3 + 2 \pmod{2003}$$

jest permutacją zbioru

$$\mathbb{Z}_{2003} = \{0, 1, \dots, 2002\}.$$

Wystarczy uzasadnić, że przyporządkowanie

$$x \mapsto x^3 \pmod{2003}, \quad x \in \mathbb{Z}_{2003}$$

jest różnowartościowe.

Przypuśćmy, że $x^3 \equiv y^3 \pmod{2003}$.

Ponieważ 2003 jest liczbą pierwszą, na mocy małego twierdzenia Fermata mamy

$$(x^3)^{668} = x^{2002+2} \equiv x^2 \pmod{2003}.$$

Zatem z naszego przypuszczenia wynika, że $x^2 \equiv y^2$, skąd $y \equiv \pm x$. Jeśli $y \equiv -x$, to mielibyśmy $x^3 \equiv (-x)^3$, czyli $x \equiv y \equiv 0$. Zatem rzeczywiście $x \equiv y \pmod{2003}$.

Pozostaje dowiedzieć, że jeśli

$$\pi : S \rightarrow S$$

jest dowolną permutacją zbioru skończonego $S = \{0, 1, \dots, m\}$, to istnieje takie n , że

$$\underbrace{\pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi}_n$$

jest identycznością na S .

Dla dowolnego $a \in S$ ciąg $a, \pi(a), \pi(\pi(a)), \dots$ jest okresowy, począwszy od pierwszego wyrazu. Niech t_a będzie długością okresu tego ciągu. Wówczas $\pi^{kt_a}(a) = a$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\pi^{t_0 t_1 \dots t_m}(x) = x$$

dla dowolnego $x \in S$.

1. Twierdzenie. *Jeżeli graniastosłup prosty, którego podstawą jest $2n$ -kąt foremny, przekroimy płaszczyzną tak, że przetnie ona krawędzie boczne kolejno w punktach leżących na wysokości $d_0, d_1, \dots, d_{2n-1}$ nad dolną podstawą, to dla $n = 2, 3, 4, 6$ zachodzi równość*

$$d_0^{n-1} + d_2^{n-1} + \dots + d_{2n-2}^{n-1} = d_1^{n-1} + d_3^{n-1} + \dots + d_{2n-1}^{n-1}.$$

To mnie zaintrygowało: równe sumy wysokich potęg odległości punktów od podstawy – z czego może wynikać tak nietypowy dla geometrii związek? No i jak to jest dla innych wartości n ?

Niestety, na kalkulator nie mogłem liczyć: po pierwsze, mój kalkulator wykonuje tylko cztery działania. Po drugie – jeśli Michał Szurek z kalkulatora więcej nie wycisnął, to mnie się pewnie też nie uda. Zrobiłem więc sobie herbaty, wziąłem kartkę i zacząłem liczyć.

Gdy we wzorze z Twierdzenia 1 przeniesiemy wszystkie wyrazy na lewą stronę, otrzymamy równość $\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j d_j^{n-1} = 0$. Spróbujmy zatem zbadać wyrażenie

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j d_j^k \quad \text{dla par liczb naturalnych } n \text{ i } k.$$

Oznaczmy $\alpha = 2\pi/2n$ i umieścimy w przestrzeni prostokątnej układ współrzędnych tak, by wierzchołki dolnej podstawy graniastosłupa miały współrzędne $(\cos j\alpha, \sin j\alpha, 0)$ dla $0 \leq j \leq 2n-1$. Płaszczyzna tnąca ma równanie postaci $z = ax + by + c$, zatem krawędzie boczne przebijają w punktach o współrzędnych $(\cos j\alpha, \sin j\alpha, a \cos j\alpha + b \sin j\alpha + c)$, tj. na wysokości $d_j = a \cos j\alpha + b \sin j\alpha + c$ nad podstawą.

Jeśli $a = b = 0$, to $d_j = c$ i badane wyrażenie redukuje się do $c^k \cdot \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j = 0$.

Wobec tego będziemy dalej zakładać, że $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$.

Dobierzmy kąt β tak, by $a/\rho = \cos \beta$, $b/\rho = \sin \beta$. Wtedy

$$d_j = \rho(\cos \beta \cos j\alpha + \sin \beta \sin j\alpha) + c = \rho \cos(\beta - j\alpha) + c.$$

Badane wyrażenie

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j (\rho \cos(\beta - j\alpha) + c)^k$$

zależy, *a priori*, od trzech parametrów: c , ρ i β . Jako funkcja zmiennej c jest to wielomian stopnia co najwyżej k , postaci

$$\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \rho^r s_r c^{k-r}, \quad \text{gdzie } s_r = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \cos^r(\beta - j\alpha).$$

Zajmiemy się obliczeniem sum s_r . Przypomnijmy, że $\alpha = 2\pi/2n$.

2. Lemat. *Niech φ będzie kątem postaci $l\alpha$, dla pewnej liczby całkowitej l . Dla dowolnego kąta γ zachodzi równość*

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \cos(\gamma - j\varphi) = \begin{cases} 2n \cdot \cos \gamma, & \text{gdy } l \text{ jest postaci } (2s-1)n; \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$



Rozwiązanie zadania M 1034.

Załóżmy, że

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x).$$

Wówczas

$$P(a_i)Q(a_i) = W(a_i) = -1.$$

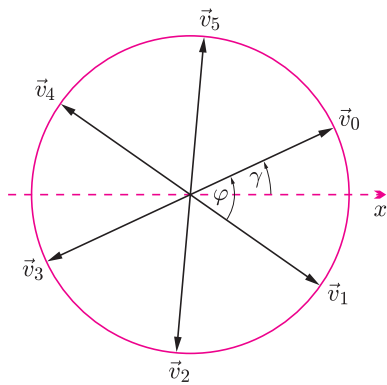
Ponieważ $P(a_i), Q(a_i) \in \mathbb{Z}$, więc

$$Q(a_i) = -P(a_i) = \pm 1.$$

Niech

$$V(x) = P(x) + Q(x).$$

Wówczas wielomian $V(x)$ jest stopnia mniejszego od n i ma co najmniej n pierwiastków (są nimi a_1, \dots, a_n). Jest więc $V(x) \equiv 0$, zatem $P(x) = -Q(x)$, $W(x) = -Q^2(x)$, co jest niemożliwe, gdyż współczynnik przy x^n w wielomianie W jest dodatni (równy 1).



**Polski Konkurs Prac
Młodych Naukowców
2004**

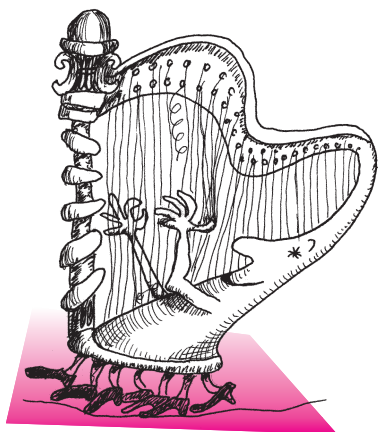
Polski Komitet Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej ogłasza konkurs prac z dziedziny nauk ścisłych, przyrodniczych, technicznych, społecznych i ekonomicznych.

Celem konkursu jest wyłonienie prac reprezentujących Polskę w finałach europejskich.

Na Konkurs należy zgłaszać tylko oryginalne prace naukowe.

Do Polskich Eliminacji można zgłaszać wyłącznie prace nagrodzone lub wyróżnione w konkursie ogólnopolskim (w przypadku konkursów wieloetapowych – tylko w etapie najwyższym) lub mające rekomendację pracownika naukowego ze stopniem doktora lub doktora habilitowanego.

Wszelkie informacje o Konkursie można uzyskać w biurze Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci, ul. Chocimska 14, 00-791 Warszawa, tel. (+22)8482468, 8482398, e-mail: fundusz@gask.pl



Dowód. Ponieważ $-\cos x = \cos(x - \pi)$ oraz $\cos x = \cos(x - 2\pi)$, mamy

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \cos(\gamma - j\varphi) = \sum_{j=0}^{2n-1} \cos(\gamma - j\varphi - j\pi) = \sum_{j=0}^{2n-1} \cos(\gamma - j\psi), \text{ gdzie } \psi = \varphi + \pi.$$

Rozważmy na płaszczyźnie układ wektorów jednostkowych $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{2n-1}$, zaczepionych w początku układu i tworzących z dodatnią półosią osi OX kąty $\gamma, \gamma - \psi, \gamma - 2\psi, \dots, \gamma - (2n - 1)\psi$ oraz sumę \vec{v} tych wektorów. Gdy $l = (2s - 1)n$, kąt ψ jest postaci $2s\pi$ i wszystkie wektory \vec{v}_j pokrywają się z \vec{v}_0 , zatem $\vec{v} = 2n \cdot \vec{v}_0$. W przeciwnym przypadku obrót płaszczyzny o kąt $-\psi$ zmienia położenie każdego niezerowego wektora, przy czym \vec{v}_0 przechodzi na \vec{v}_1 , \vec{v}_1 na \vec{v}_2, \dots , w końcu \vec{v}_{2n-1} przechodzi na \vec{v}_0 . Wynika stąd, że obrócone wektory mają nadal sumę \vec{v} , a stąd $\vec{v} = 0$. Wystarczy teraz zauważyć, że wzór z lematu to równość pierwszych współrzędnych wektorów $\sum_{j=0}^{2n-1} \vec{v}_j$ oraz \vec{v} .

Z wykładnikami potęg przy kosinusach poradzimy sobie dzięki następującej obserwacji.

3. Lemat. Dla dowolnej liczby naturalnej r istnieją takie współczynniki a_l ($0 \leq l \leq r$), że ma miejsce tożsamość $\cos^r x = \sum_{l=0}^r a_l \cdot \cos lx$. Co więcej, $a_r = 2^{-r+1}$.

Dowód. Poprowadzimy indukcję względem r . Dla $r = 1$ to oczywiście prawda. Załóżmy, że uzyskaliśmy już odpowiedni wzór dla pewnego $r \geq 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} \cos^{r+1} x &= \cos x \cdot \sum_{l=0}^r a_l \cdot \cos lx = \sum_{l=0}^r a_l \cdot \cos x \cos lx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^r a_l \cdot [\cos(l+1)x + \cos(l-1)x] \text{ jest też żądanej postaci.} \end{aligned}$$

Zgromadziliśmy już dość informacji, by obliczyć s_r dla $r \leq n$.

Na mocy Lematu 3 mamy:

$$\begin{aligned} s_r &= \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \cos^r(\beta - j\alpha) = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \sum_{l=0}^r a_l \cdot \cos l(\beta - j\alpha) = \\ &= \sum_{l=0}^r a_l \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \cos(l\beta - j(l\alpha)). \end{aligned}$$

Na mocy Lematu 2 suma stojąca po a_l nie znika tylko wtedy, gdy l jest nieparzystą wielokrotnością n . Gdy $r < n$, żadna z liczb $0 \leq l \leq r$ nie spełnia tego warunku, a stąd $s_r = 0$. Natomiast $s_n = a_n \cdot 2n \cos n\beta = 2^{-n+2} n \cos n\beta$.

Podsumujmy:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j d_j^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \rho^r s_r c^{k-r} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k < n; \\ \rho^n 2^{-n+2} n \cos n\beta \neq 0, & \text{gdy } k = n. \end{cases}$$

Udowodniliśmy zatem

4. Twierdzenie. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli graniastostup prosty, którego podstawą jest $2n$ -kąt foremny, przekroimy płaszczyzną tak, że przetnie ona krawędzie boczne kolejno w punktach leżących na wysokościach $d_0, d_1, \dots, d_{2n-1}$ nad dolną podstawą, to dla wykładników $k = 0, 1, \dots, n - 1$ zachodzą równości

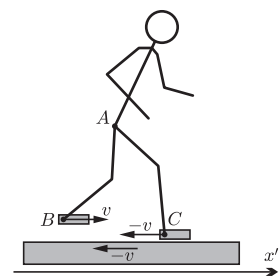
$$d_0^k + d_2^k + \dots + d_{2n-2}^k = d_1^k + d_3^k + \dots + d_{2n-1}^k.$$

Natomiast dla wykładnika $k = n$ podobna tożsamość nie zachodzi – różnica między stroną lewą i prawą zależy od położenia płaszczyzny tnącej.

Rozważmy bardzo szybki, relatywistyczny chód Roberta Korzeniowskiego. Ponieważ wewnątrz obiektów poruszających się z bardzo dużymi prędkościami czas płynie wolniej dla obserwatorów zewnętrznych, należy się spodziewać, że zegarek na ręce Roberta Korzeniowskiego będzie chodził wolniej. Powolniejsze będzie również bicie jego serca. A co można powiedzieć o ruchu jego nóg? Czy *im szybciej będzie szedł, tym wolniej poruszać będzie nogami?* Czy w granicy prędkości światła wcale nie będzie nimi poruszał? W jaki sposób można chodzić, nie ruszając nogami?

Rzeczywiście, z punktu widzenia obserwatora zewnętrznego upływ czasu w układzie Roberta Korzeniowskiego (wielkości w tym układzie oznaczać będziemy literkami z primem) jest powolniejszy. Tempo upływu czasu różni się o czynnik $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, gdzie v jest prędkością chodu. Nie oznacza to jednak, że można przez tenże czynnik skalować prędkości wszystkich ruchów w poruszającym się układzie! Prawo „spowolnionego upływu czasu” o podany czynnik dotyczy obiektów nieruchomych (na przykład zegarów) w poruszającym się układzie odniesienia. Działa ono dobrze również dla obiektów poruszających się powoli w układzie primowanym. Ponieważ jednak ruch nóg w układzie primowanym musi być równie szybki jak ruch piechura, musimy dokonać transformacji Lorentza współrzędnych określających położenie nóg oraz środka masy chodźcy niezależnie. W tym celu wprowadzimy najprostszy z możliwych model chodu.

W całym problemie ważne są naprawdę tylko trzy punkty: środek masy (A), i położenie dwóch stóp (B i C). Rozważmy sytuację z punktu widzenia Roberta Korzeniowskiego (czyli w układzie primowanym). Przedstawia ją rysunek poniżej.



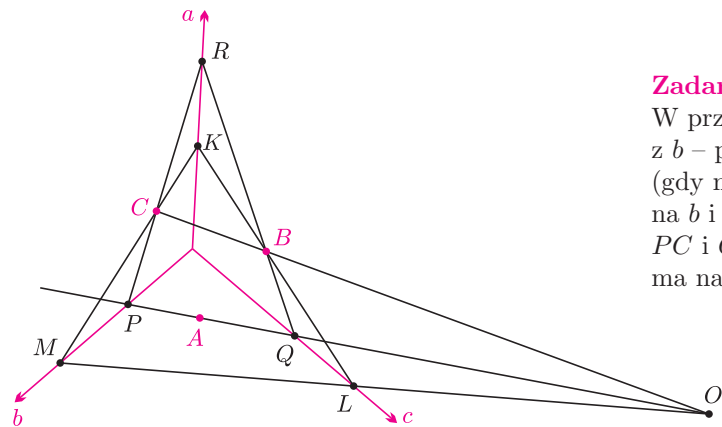
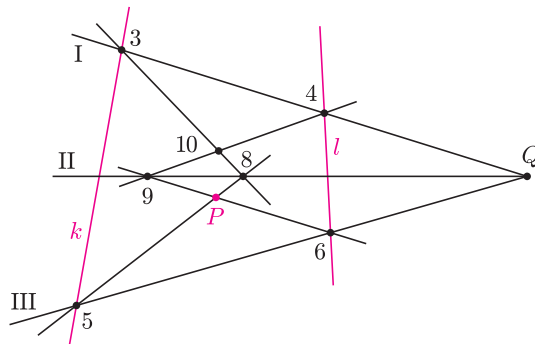
Prosty model chodu w inercyjnym układzie piechura.

W tym układzie środek masy (A) jest nieruchomy, chodnik porusza się do tyłu z pewną prędkością $-v$, stopa aktualnie dotykająca ziemi (C) również porusza się z prędkością $-v$, a druga stopa, przenoszona do przodu (B) porusza się z prędkością v . Zgodnie z przepisami chodu sportowego w każdej chwili co najmniej jedna stopa musi dotykać ziemi. Dlatego Robert Korzeniowski chcąc iść jak najszybciej, stawiając jedną stopę *jednocześnie* odrywa drugą. Powiedzmy, że w chwili $t' = 0$ stopa odrywana znajduje się w punkcie $x'^B = -d$, a stopa stawiana w punkcie $x'^C = d$. Natomiast przez cały czas środek masy A znajduje się w punkcie $x'^A = 0$. Zmiana stóp następuje w chwili $t' = \frac{2d}{v}$. Przez następne 40 km ruch jest cyklicznie powtarzany.

Jak wygląda chód z punktu widzenia obserwatora stojącego na chodniku (układ nieprimowany), dla którego środek masy Roberta Korzeniowskiego porusza się zgodnie z równaniem $x^A = vt$? Sprawdźmy najpierw za pomocą transformacji Lorentza, jak wyglądają czasoprzestrzenne współrzędne opisujące stawianie i odrywanie stóp. Rozpocznijmy od pierwszego tupnięcia: stopa C postawiona zostaje w punkcie $x^C = \frac{d}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, a stopa B oderwana w punkcie $x^B = -\frac{d}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, czyli krok staje się dłuższy. Okazuje się jednak, że stopy są stawiane i odrywane w różnych chwilach: stopa B zostaje oderwana w chwili $t^B = \frac{-dv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, jeszcze zanim zostanie postawiona stopa C , co ma miejsce w chwili $t^C = \frac{dv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (nawiasem mówiąc może to być przyczyną dyskwalifikacji Roberta Korzeniowskiego, mimo iż ten twierdzi, że stopy zmieniał *jednocześnie*). Rozważmy teraz drugie tupnięcie, w którym stopa B zostaje postawiona w punkcie $x^B = \frac{3d}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, a stopa C oderwana w punkcie $x^C = \frac{d}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, zatem krok jest znowu dłuższy. Odpowiednie chwile odpowiadające tym zdarzeniom to $t^B = \frac{2d/v + dv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ oraz $t^C = \frac{2d/v - dv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Następnie proces powtarzany jest cyklicznie. Sprawdźmy teraz, że czas oderwania stopy od ziemi wynosi: $\Delta t_{\uparrow} = \frac{2d}{v} \frac{1 + v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, natomiast czas, w którym druga stopa dotyka ziemi, to: $\Delta t_{\downarrow} = \frac{2d}{v} \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Możemy teraz odpowiedzieć już w pełni na pytanie, co dzieje się z nogami podczas relatywistycznego chodu według naszego prostego modelu. Czas trwania pełnego kroku, w którym stopa jest przenoszona, a następnie spoczywa na ziemi, wynosi: $\Delta t = \Delta t_{\uparrow} + \Delta t_{\downarrow} = \frac{4d/v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ i jest dłuższy od czasu $\Delta t'$ widzianego przez Roberta Korzeniowskiego: $\Delta t' = \frac{4d}{v}$. Zatem odpowiedź na pytanie, czy im szybciej idziemy, tym wolniej ruszamy nogami, dla zewnętrznego obserwatora jest, paradoksalnie, twierdząca! W granicy $v \rightarrow c$ czas trwania pełnego kroku staje się wręcz nieskończony! Jest i druga ciekawa obserwacja: w tej granicy obie stopy przez większość czasu „fruną w powietrzu”, robiąc ogromne kroki i prawie wcale nie dotykając ziemi.

To ostatnie stwierdzenie staje się wręcz oczywiste, gdy zdamy sobie sprawę, że w układzie Roberta Korzeniowskiego cały zewnętrzny świat (zatem również chodnik) się skraca. I mimo że długość kroku według Korzeniowskiego jest zwyczajna, to skracanie chodnika powoduje, iż każdy krok wiąże się z pokonaniem ogromnego dystansu. Nic więc dziwnego, że z punktu widzenia sędziów kroki piechura stają się nienaturalnie długie. Ponieważ jednak nogi Korzeniowskiego nie mogą się wydłużać, to jedyną możliwością zrealizowania tej sytuacji jest bieg z wydłużoną fazą lotu.

Zadanie 1. Rysujemy trzy proste I, II, III, przechodzące przez dowolnie poza k i l wybrany punkt Q i nieprzechodzące przez P . Przecięcia I i III z k i l oznaczamy 3, 4, 5 i 6 na pamiętkę rysunku z marginesu w *Małej Delcie*, który naśladowujemy – punkt P pełni rolę punktu 7. Łącząc P z 5 i z 6, otrzymujemy w przecięciu z II punkty 8 i 9. Łączymy teraz 8 z 3 i 9 z 4, w przecięciu otrzymując punkt 10. Prosta P-10 jest szukaną prostą. Redakcja ma nadzieję, że wiadomo czemu.



Zadanie 2. Obieramy dość dowolnie na a punkt K . W przecięciu prostej KB z c otrzymujemy punkt L , a KC z b – punkt M . Proste BC i LM przecinają się w punkcie O (gdy nie chcą – zmieniamy punkt K). Prosta OA wyznacza na b i c dwa wierzchołki szukanego trójkąta – P i Q . Proste PC i QB przecinają się w trzecim wierzchołku, R . Redakcja ma nadzieję, że wiadomo, dlaczego leży on na a .

Zadanie 7. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będzie zbiorem liczb całkowitych, z których nie wszystkie są jednakowe ($n > 2$). Utworzymy nowy zbiór postaci $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \dots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_n+a_1}{2}$, a z niego według tej samej reguły następnym zbiór i tak dalej. Udowodnić, że po kilku krokach powstanie zbiór, w którym nie wszystkie liczby będą całkowite.

Czytelnicy piszą...

Witam, w numerze *Delty* z lutego 2003 na stronie 7 zadanie nr 7 jest nieprawdziwe! Konkretniej: nie zachodzi dla n parzystych, a kontrprzykład stanowi dowolny ciąg postaci $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$, w którym p i q są tej samej parzystości.

Poza tym, jeżeli już zgodzić się z jego prawdziwością dla liczb n nieparzystych, to skoro należy tu udowodnić, że po KILKU krokach powstanie ciąg, w którym nie wszystkie liczby będą całkowite, to jest to znów nieprecyzyjne. Łatwo jest przecież tworzyć ciągi, które wymagają KILKUNASTU kroków.

Kamil HAWDZIEJUK



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 601. Oszacować średnią gęstość Słońca.
Rozwiązanie na str. 16

F 602. Oszacować prędkość spadania spadochroniarza z otwartym spadochronem.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1033. Niech

$$W(x) = x^3 + 2000x^2 + 3x + 1.$$

Udowodnić, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $W^n(a) - a$ jest podzielne przez 2003 dla każdego $a \in \mathbb{Z}$, gdzie

$$W^n(x) = \underbrace{W(W(\dots W(x)\dots))}_{n \text{ razy}}$$

Rozwiązanie na str. 6

M 1034. Niech

$$W(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) - 1,$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 2$, są różnymi liczbami całkowitymi. Udowodnić, że $W(x)$ nie jest iloczynem wielomianów o współczynnikach całkowitych stopnia co najmniej 1.

Rozwiązanie na str. 6

M 1035. Czy istnieje taki wielomian $W(x)$, różny od stałej, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją takie $k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l$, że

$$W(n) = 2^k + 2^l?$$

Rozwiązanie na str. 16

Dalsze wariacje na melodię „Tnijmy graniastosłup”

Michał SZUREK

1. Cantabile. Co to jest tak zwane „dobre zadanie”? To tak, jak dobry temat muzyczny: powinno łatwo wpadać w ucho, mieć prostą konstrukcję, nieskomplikowaną fabułę, dostarczać skojarzeń, dopuszczać możliwości transkrypcji, przeróbek i uogólnień, sugerować możliwości dalszego rozwijania tematu i – jak w muzyce – dawać się interesująco rozwiązać. Nieznającym się na muzyce powiem, że „rozwiązanie” akordu polega na przejściu od jednego do drugiego, z dysonansu na konsonans. Akord buduje pewne napięcie, rozwiązanie akordu rozładowuje to napięcie. Słyszymy dokładnie to, co intuicyjnie chcielibyśmy usłyszeć. Dokładnie tak, jak w matematyce: zadanie buduje pewne napięcie, rozwiązanie rozładowuje je, a takie „rozwiązanie”, jakie dokonuje się w sali porodowej, też rozładowuje napięcie. Interesujące, że w różnych językach słowo „rozwiązanie” kojarzy się też z czym innym. Po polsku rozwiązujemy węzeł, ale angielskie „solve” to to samo, co „rozpuścić”. Po rosyjsku „reszenije” to także „postanowienie”, po niemiecku równania rozwiązuje się tak, jakby się kupowało bilet (die Gleichung lösen, die Fahrkarte lösen).



Rozwiązanie akordu dominantowego na toniczny.

W świetle tych rozważań nasze zadanie o graniastosłupie jest bardzo dobre. Zaskakujące jest to, że występują w nim rzadko spotykane w geometrii wyższe potęgi. Przeformułujmy lekko tezę.

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego $2n$ -kątowego, tworząc w przekroju wielokąt wypukły $D_1D_2 \dots D_{2n}$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa, to dla wykładników $k = 0, 1, \dots, n - 1$

$$\text{zachodzi } \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i d_i^k = 0.$$

2. Dolce. Słownie: suma naprzemienna jest równa zeru. Z czym Ci się to kojarzy, osłuchany Czytelniku? Oczywiście, z wzorem Eulera o wielościanach wypukłych: naprzemienna suma liczb ścian kolejnych wymiarów jest równa zeru (jeżeli dopuścimy ścianę pustą i ścianę pełną = sam wielościan). A gdzie jeszcze w matematyce mamy sumy naprzemienne? Na przykład w słynnym wzorze Eulera $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ albo w zadaniu o roztargnionej sekretarce: jeżeli n listów zostało przypadkowo włożonych do n zaadresowanych kopert, to prawdopodobieństwo tego, że choć jeden trafił do właściwej koperty, jest równe $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots \pm \frac{1}{n!}$.

A więc tematowi naszego zadania należy się pewna uwaga, bo należy do zbioru standardowych wątków.

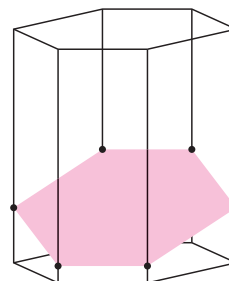
3. Andante con moto. Nie zważając na protesty antyglobalistów, posłużmy się maszyną. Pierwszy lepszy programowany kalkulator, potrafiący wykonywać rachunki symboliczne, powinien się nadać. Ja wziąłem Texas 92 ... ale właśnie tylko wziąłem. Wszystko by się dało zrobić za jego pomocą, ale w Laptopie mam i edytor tekstu, i program *Mathematica*, więc łatwiej mi przetrzucać się z jednego na drugi. Program wyznaczający naprzemienną sumę k -tych potęg jest banalny:

```
(* naprzemienna suma potęg na gslupie n-katnym *)
gslup[n_, k_, x_, y_, z_] := Simplify[x^k - y^k + z^k + Sum[
  (-1)^j*(Simplify
    [
      Solve[
        Det[{{1,1,0,x},{1,Cos[2Pi/n],Sin[2Pi/n],y},
          {1,Cos[4*Pi/n],Sin[4*Pi/n],z},
          {1,Cos[2j*Pi/n],Sin[2j*Pi/n],h}}] == 0,h]]
      ][1,1,2]
    ])^k,
  {j,3,n-1}]]
```

i będziemy się nim podpierać.

4. Piano. Najpierw spróbujmy zanalizować ostatnie słowa tekstu Zbigniewa Marciniaka, że dla $k \geq n/2$ wartość sumy naprzemiennej $\sum_{i=1}^n (-1)^i d_i^k$ zależy od położenia płaszczyzny tnącej. No, to zbadajmy, jak zależy.

Nazwijmy przekrojem krawędziowym przekrój taki, jak na rysunku poniżej: dwa przeciwległe boki przekroju są równoległe do podstawy. Wtedy (nie tylko w graniastosłupie sześciokątnym) owa suma jest zero... , bo (wyrażając się nieco kolokwialnie) wszystko się równo układa i te same liczby się kasują...



Badamy zatem naprzemienną sumę k -tych potęg odległości wierzchołków równoległoboku, który jest przekrojem, od podstawy. Oznaczmy wartość tej sumy przez $g(n, k)$. Zaczniemy od $n = 4$ (prostopadłościan). Zamieńmy d_1, d_2, d_3 na x, y, z . Funkcja $g(n, k)$ zależy więc od trzech zmiennych x, y, z .

Naciśnięcie klawisza Enter daje

$$g(4, k) = x^k - y^k + z^k - (x - y + z)^k.$$

To ciekawa funkcja. Będziemy ją rozpatrywać w obszarze

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq z \leq h,$$

gdzie h jest wysokością prostopadłościanu.

Przypominam bowiem o założeniu, że podstawa jest

wielokątem foremnym wpisanym w koło o promieniu 1. Możemy też zakładać, że pierwszy wierzchołek przekroju leży „najniżej” (ściślej: nie wyżej niż inne). Wyznamy wartość największą i wartość najmniejszą funkcji w tym obszarze.

Funkcja potęgowa (dla wykładników $k > 1$) jest wypukła: odcinek łączący punkty jej wykresu leży zawsze nad krzywą. Jeżeli zatem $0 \leq x \leq y \leq z$, to

$$y^k + (x - y + z)^k \leq (x + z)^k \leq x^k + z^k,$$

a więc $g(4, k) \geq 0$. Mamy zatem proste, ale ładne twierdzenie.

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne prostopadłościanu, tworząc w przekroju równoległobok $D_1D_2D_3D_4$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa (przy czym D_1 jest wierzchołkiem najbliższym podstawy), to

$$\text{dla dowolnego wykładnika } k > 1 \text{ jest } \sum_{i=1}^4 (-1)^i d_i^k \geq 0.$$

Wyznamy wartość największą funkcji

$$g(4, k) = x^k - y^k + z^k - (x - y + z)^k.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe:

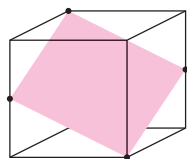
$$\frac{\partial g}{\partial x} = kx^{k-1} - k(x - y + z)^{k-1},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -ky^{k-1} + k(x - y + z)^{k-1},$$

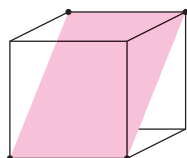
$$\frac{\partial g}{\partial z} = kz^{k-1} - k(x - y + z)^{k-1}$$

i przyrównujemy je do zera. Ponieważ x, y, z , a także $x - y + z$ są liczbami dodatnimi, więc niezależnie od wykładnika wszystkie trzy pochodne cząstkowe mogą być równe zeru, tylko gdy $x = y = z$. Nasza funkcja nie ma ekstremów wewnątrz obszaru, w którym ją badamy. Pozostaje zbadać jej przebieg na brzegu obszaru $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x \leq y \leq 1$, $0 \leq y \leq z \leq h$, co ominiemy, a tylko podamy wynik: wartość największa tej funkcji jest przyjmowana dla parametrów $x = 0, y = h/2, z = h$. Odpowiada to przekrojowi, który moglibyśmy nazwać *wierzchołkowym*.

Ten przekrój maksymalizuje naprzemienną sumę k -tych potęg odległości wierzchołków od podstawy.



Taki przekrój minimalizuje naprzemienną sumę k -tych potęg odległości wierzchołków od podstawy. Oczywiście, dla przekroju „poziomego” ta suma jest też zerem.



Możemy teraz „wygenerować” kilka ciekawych zadań, choćby i takie:

Zadanie 1. Wyznamy kąty rombu, który jest przekrojem maksymalizującym naprzemienną sumę k -tych potęg odległości wierzchołków od podstawy.

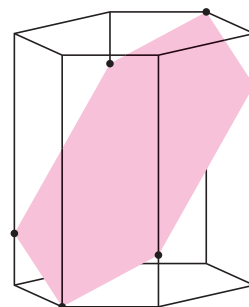
Zadanie 2. Wyznamy rozmiary prostopadłościanu, dla którego ten romb ma kąty $45^\circ, 135^\circ$.

5. Allegro con brio. Z wykładu fizyki na IV roku studiów zapamiętałem powiedzenie profesora: „fizyk nie zabiera się do obliczeń, jeśli nie zna odpowiedzi”. A Thomas Edison mawiał: „Po co myśleć? Ekperymentuj”. Zachowajmy się i my w ten sposób. Szukamy przekroju graniastosłupa sześciokątnego, który maksymalizuje naprzemienną sumę sześciątów odległości wierzchołków od podstawy. Przyjmijmy na początek, że wysokość graniastosłupa jest równa 1. Podzielmy każdą z krawędzi na 100 części i poprowadźmy milion płaszczyzn. Wiele z nich (Czytelniku: ile?) przecina tylko powierzchnię boczną graniastosłupa (a nie podstawy) – tak, jak jest w warunkach naszego zadania. Sprawdzamy, który daje największą naprzemienną sumę sześciątów. Mózg elektroniczny potrzebuje na odpowiedź kilkanaście sekund:

```
h=1; m=0;
For [i=0, i<100,
  For [j=i, j<100,
    For [k=j, k<100, d1=i*h/100;
      d2=j*h/100, d3=k*h/100;
      d4=d1 - 2d2 + 2d3;
      d5=2d1 - 3d2 + 2d3;
      d6=2d1 - 2d2 + d3;
      g=d1^3 - d2^3 + d3^3 - d4^3 + d5^3 - d6^3;
      If [0<d4<=h && 0<d5<=h && 0<d6<=h && g>m,
        m=g; d1max=d1; d2max=d2; d3max=d3; d4max=d4;
        d5max=d5; d6max=d6]; k++; j++; i++;
      Print [d1max, " ", d2max, " ", d3max, " ", d4max, " ",
        d5max, " ", d6max, " ", N [m]]]
```

$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0.1875$

Otrzymane liczby znaczą tyle: przekrój maksymalizujący przechodzi przez przeciwległe wierzchołki obu podstaw i „tnie po równo”, jedna czwarta wysokości od góry i od dołu.



Taki przekrój wierzchołkowy maksymalizuje naprzemienną sumę k -tych potęg. Dwa wierzchołki wielokąta znajdują się w przeciwległych wierzchołkach graniastosłupa, a wychodzące z tych wierzchołków boki mają równe długości.

6. Mormorando. Skoro wiemy już, jaka jest odpowiedź, postaramy się ją udowodnić. Ale... właściwie po co? Przecież nie mamy żadnej wątpliwości, że odpowiedź jest dobra. Możemy sprawdzić – i to jest ciekawe – że jest to przekrój maksymalizujący sumę dowolnych potęg.

Mamy tu do czynienia z interesującym pytaniem. Już teraz matematycy muszą sobie na nie odpowiadać. Czy dopuszczać dowody komputerowe i, co gorsza, czy dopuszczać takie metody obliczeniowe, które

wprawdzie przekonują nas na 100%, że coś jest prawdą. . . ale nie są dowodami? Pozornie sprawa jest prosta: metody takie, jak zaprezentowane tu przez mnie sprawdzenie, nie stanowią dowodu matematycznego, więc należy je odrzucić. Ale to znaczy, że sami ograniczamy siebie, nie dopuszczając pewnego rodzaju niezbitych argumentów.

A tak na marginesie, matematyczny dowód faktu, że przekrój maksymalizujący naprzemienną sumę k -tych potęg dla dowolnego graniastosłupa prawidłowego o parzystej liczbie boków podstawy) można nietrudno przeprowadzić tak:

1. sprawdzamy, że przesunięcie płaszczyzny tnącej wzdłuż osi „pionowej” nie zmienia wartości sumy naprzemiennej k -tych potęg, zatem można zakładać, że najniższy wierzchołek leży na dolnej podstawie;
2. sprawdzamy, że jeżeli dolna podstawa graniastosłupa leży na płaszczyźnie $z = 0$ i wszystkie wierzchołki przekroju są „poniżej” górnej podstawy, to biorąc zamiast płaszczyzny tnącej jej obraz w przekształceniu $(x, y, z) \rightarrow (x, y, az)$, $a > 1$, otrzymujemy przekrój o większej naprzemiennej sumie, zatem można zakładać, że najniższy wierzchołek leży na dolnej podstawie, a najwyższy na górnej;
3. sprawdzamy, że jeżeli przekrój nie jest „równoramienny”, to nie maksymalizuje naszej naprzemiennej sumy: w tym celu obracamy lekko płaszczyznę tnącą wokół osi przechodzącej przez wierzchołki leżące na górnej i dolnej podstawie. Jest tu trochę rachunków, ale komputer jest cierpliwy. . .

Numerujemy wierzchołki tak, by zerowy był najniższy. A oto zadanie dla Czytelników: czy owa „naprzemienna suma k -tych potęg” jest zawsze nieujemna (tak, jak dla prostopadłościanu)? Autor umie to „sprawdzić” komputerowo. . .

A oto kilka innych funkcji $g(n, k)$:

$$g(6, 4) = -24(x - y)(y - z)(x - 2y + z)(x - y + z),$$

$$g(6, 5) = -10(x - y)(y - z)(x - 2y + z) \times (7x^2 - 15xy + 9y^2 + 13xz - 15yz + 7z^2),$$

$$g(8, 4) = \frac{(-4x^2 + 3\sqrt{2}x^2 - xy + y^2 + 9xz - 6\sqrt{2}xz - yz - 4z^2 + 3\sqrt{2}z^2)}{(1 - \sqrt{2})^4} \times 4(x - y)(y - z).$$

Mamy co badać, prawda? Powodzenia.

7. Forte. Znaleźliśmy wiele ciekawych zależności. Jakie jeszcze można znaleźć? A czy można wyznaczyć wszystkie? Popróbujmy. Zadanie stanie się prostsze, gdy sformułujemy je w języku geometrii algebraicznej. Czytelnikom polecamy rozwiązanie zadania w przypadku $n = 4$ (prostopadłościan), a my przeprowadzimy dyskusję dla graniastosłupa o podstawie sześciokątnej. Wyliczyliśmy, że gdy

sześciokąt podstawy jest wpisany w koło o promieniu 1 o środku $(0, 0)$, a jednym z wierzchołków sześciokąta jest punkt $(1, 0)$ i gdy trzy kolejne odległości, o których mowa w zadaniu, oznaczymy przez d_1, d_2, d_3 , to trzy następujące są równe

$$\begin{aligned} d_4 &= d_1 - 2d_2 + 2d_3, \\ d_5 &= 2d_1 - 3d_2 + 2d_3, \\ d_6 &= 2d_1 - 2d_2 + d_3. \end{aligned}$$

Wynika stąd, na przykład, że

$$d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + d_5 - d_6 = 0,$$

wystarczy dodać.

Zapomnijmy na chwilę, że d_1, d_2, d_3 są odległościami punktów od płaszczyzny i potraktujmy je jako zmienne. Określmy odwzorowanie przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 w sześciowymiarową \mathbb{R}^6 wzorem $(d_1, d_2, d_3) \rightarrow (d_1, d_2, d_3, d_3 - 2d_2 + 2d_3,$

$$2d_1 - 3d_2 + 2d_3, 2d_1 - 2d_2 + d_3).$$

Jest to przekształcenie różnowartościowe i zanurza ono \mathbb{R}^3 jako pewną płaską przestrzeń H w \mathbb{R}^6 . Ponieważ $6 - 3 = 3$, więc H jest opisane układem trzech równań liniowych sześciu zmiennych. Oznaczając współrzędne w \mathbb{R}^6 przez x_1, x_2, \dots, x_6 , mamy trzy oczywiste zależności, spełnione przez wszystkie punkty przestrzeni H :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_5 &= 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 &= 0. \end{aligned}$$

A to znaczy, że każda relacja algebraiczna między $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ pochodzi od trzech podstawowych:

$$\begin{aligned} r_1 &= -d_1 + 2d_2 - 2d_3 + d_4; \\ r_2 &= -2d_1 + 3d_2 - 2d_3 + d_5; \\ r_3 &= -2d_1 + 2d_2 - d_3 + d_6. \end{aligned}$$

Dla przykładu, wykażemy, jak zależy od r_1, r_2, r_3 suma naprzemienna kwadratów odległości. Obliczmy:

$$\begin{aligned} r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 &= (-d_1 + 2d_2 - 2d_3 + d_4)^2 - \\ &- (-2d_1 + 3d_2 - 2d_3 + d_5)^2 + (-2d_1 + 2d_2 - d_3 + d_6)^2 = \\ &= d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - 2d_1d_4 + 4d_2d_4 - 4d_3d_4 + d_4^2 + 4d_1d_5 - \\ &- 6d_2d_5 + 4d_3d_5 - d_5^2 - 4d_1d_6 + 4d_2d_6 - 2d_3d_6 + d_6^2 = \\ &= d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + d_6^2 + (-2d_1 + 4d_2 - 4d_3)d_4 + \\ &+ (-4d_4 + 4d_5 - 2d_6)d_5 + (-4d_1 + 4d_2 - 2d_3)d_6 = \\ &= d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - d_5^2 + d_6^2. \end{aligned}$$

To, co robiliśmy tutaj, czyli wyznaczanie wszystkich relacji między zmiennymi na podanym zbiorze, jest typowym zadaniem geometrii algebraicznej. Bywa na ogół bardzo trudne, ale u nas równania nie były skomplikowane.

7. Brawa, okrzyki „bis”. Ten tekst pisałem długo, za długo w stosunku do powagi zadania. Ale i tak został mi pewien niedosyt, między innymi spowodowany tym, że moje maszynki poddają się przy bardziej skomplikowanych kosinusach. Co jeszcze można ciekawego zobaczyć w graniastosłupie przecinanym płaszczyzną?

Przez dziurkę od klucza

Człowiek z natury jest ciekawy. Może nawet ciekawski. Dlatego korci nas, żeby podglądać. Was nie? Mnie tak. Zwłaszcza jeżeli podglądane obiekty są obdarzone naturalnym wdziękiem. A właśnie takie udało się niedawno bardzo dokładnie podejrzeć „przez dziurkę od klucza”.

Chodzi o podglądanie nanorurek, o których wiele razy już pisaliśmy. Są to rurki utworzone z pojedynczej warstwy lub kilku warstw atomów węgla ułożonych w sześciokątną siatkę. Są obdarzone wieloma ciekawymi cechami. Np. mogą być zarówno przewodnikami, jak półprzewodnikami. Ich cechy zależą od szczegółów nanoskopijnej struktury – średnica takich nanorurek jest rzędu pojedynczych nanometrów. Dlatego podglądanie tych szczegółów jest nie tylko ciekawe, ale i ważne z naukowego punktu widzenia.

Wymyślono już wiele sposobów na takie podglądanie. Są to przede wszystkim różne rodzaje mikroskopów skaningowych, których zasada działania jest analogiczna do odtwarzania nagrań utrwalonych na płytach gramofonowych. Trzeba tylko użyć odpowiednio ostrej igły i za jej pomocą przebadać obserwowany obiekt. Ciekawe jest to, że jako igły używa się często właśnie nanorurek. Dokładność uzyskiwanego obrazu odpowiada rozmiarom igły i dochodzi do ułamków nanometra!

To jednak nie do końca jest podglądaniem. Metody takie należałoby raczej porównać do macania. Dlaczego nie można po prostu popodglądać, czyli użyć światła? Myślę, że większość naszych Czytelników zna odpowiedź. Zdolność rozdzielcza konwencjonalnej mikroskopii optycznej (rys. 1) jest ograniczona przez kryterium Rayleigha do rozmiarów rzędu długości fali użytego światła, co dla zakresu optycznego, a nawet dla ultrafioletu odpowiada zaledwie rozmiarom rzędu 100–300 nanometrów.

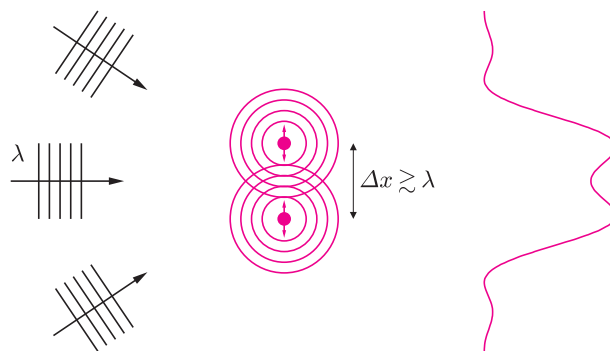
Okazuje się, że to ograniczenie, wynikające z falowej natury światła, daje się przewyciężyć za pomocą... dziurki od klucza. Można mianowicie zastosować tzw. aperturową mikroskopię bliskiego pola. Przekładając „z polskiego na nasze” chodzi po prostu o badanie obiektu za pomocą położonej bardzo blisko niego, przesuwanej dziurki (rys. 2). Wtedy zdolność rozdzielcza jest rzędu rozmiarów dziurki.

Niestety, metoda ta ma poważne ograniczenie. Jeżeli długość fali światła jest dużo większa niż rozmiary dziurki (a o to przecież nam chodzi), bardzo mało światła przechodzi przez dziurkę, więc sygnał ginie w tle. I na to jednak znaleziono sposób. Po prostu zamiast dziurki trzeba użyć klucza! Jest to schematycznie przedstawione na rysunku 3. Ostrze, z punktu widzenia dyfrakcji światła, działa podobnie jak dziurka.

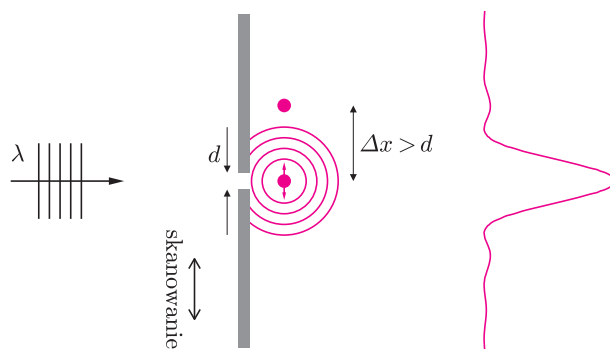
Diabeł jak zwykle tkwi w szczegółach. W praktycznym zastosowaniu ukazany na rysunku 4 użyto nie tylko samej obecności ostrza, ale również powstających bardzo silnych pól elektrycznych generowanych przez elektrony ostrza wykonanego ze złota.

Wyniki są w każdym razie obiecujące.

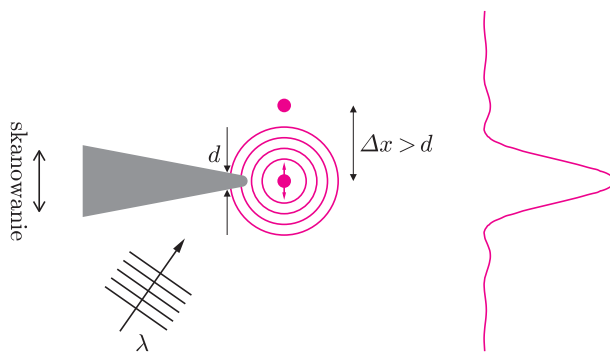
Piotr ZALEWSKI



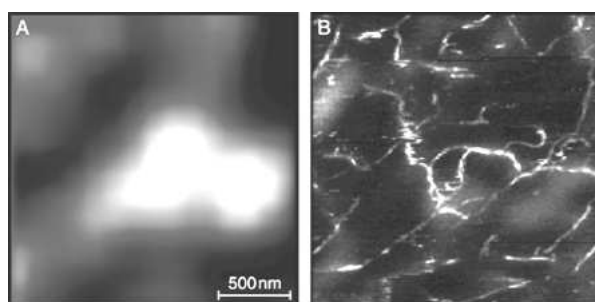
Rys 1. Schemat konwencjonalnej spektroskopii optycznej.



Rys 2. Schemat aperturowej mikroskopii bliskiego pola.

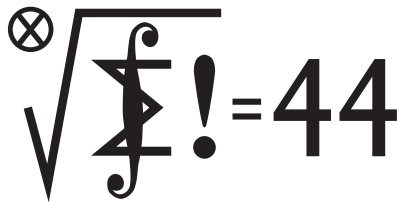


Rys 3. Schemat tzw. ramanowskiej mikroskopii bliskiego pola.



Rys 4. Dwa obrazy nanorurek węglowych. Obraz A otrzymany został za pomocą zwykłego mikroskopu optycznego. Obraz B uzyskano z zastosowaniem ramanowskiej mikroskopii bliskiego pola.

High-Resolution Near-Field Raman Microscopy of Single-Walled Carbon Nanotubes, A. Hartschuh, E.J. Sánchez, X.S. Xie i L. Novotny, Phys. Rev. Lett. **90**(2003)095503



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2003

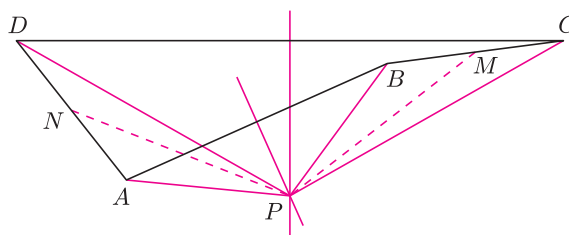
Przypominamy treść zadań:

459. W czworokącie $ABCD$ boki BC i DA mają jednakową długość. Symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie P . Wykazać, że punkt P leży na symetralnej odcinka łączącego środki boków BC i DA .

460. Dowieść, że dla $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0; \pi/4)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{(\operatorname{tg} x_1)(\operatorname{tg} x_2) \dots (\operatorname{tg} x_n)} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \dots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \dots + \cos^2 x_n}}$$

459. Niech M będzie środkiem boku BC , a N środkiem boku DA .



Ponieważ $|PB| = |PA|$, $|PC| = |PD|$ oraz $|BC| = |DA|$, trójkąty PBC i PAD są przystające. Ich odpowiednie środkowe PM i PN są więc równe; a to znaczy, że P leży na symetralnej odcinka MN .

460. Jeżeli liczby x_i (dla $i = 1, 2, \dots, n$) należą do przedziału $\langle 0; \pi/4 \rangle$, to liczby $a_i = \operatorname{tg}^2 x_i$ należą do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$ oraz

$$\frac{\sum \sin^2 x_i}{\sum \cos^2 x_i} = \frac{n}{\sum \cos^2 x_i} - 1 = \frac{n}{\sum (1 + a_i)^{-1}} - 1$$

(we wszystkich sumach wskaźnik sumowania i biegnie od 1 do n). Mamy udowodnić, że wartość tego wyrażenia jest niemniejsza niż $(\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} x_n)^{2/n} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}$, czyli że

$$(*) \quad \frac{1}{n} \sum \frac{1}{1 + a_i} \leq \frac{1}{1 + (\prod a_i)^{1/n}}$$

dla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \langle 0; 1 \rangle$. Gdy którakolwiek z liczb a_i jest równa zero, nierówność zachodzi. Dalej przyjmijmy, że liczby a_i są dodatnie i oznaczmy

$$a_i = e^{-t_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n; \quad t_i \geq 0.$$

Funkcja $f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$ jest wklęsła w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$ (łatwo sprawdzić, że $f''(t) < 0$). Spełnia więc nierówność Jensena

$$\frac{1}{n} \sum f(t_i) \leq f\left(\frac{1}{n} \sum t_i\right),$$

która jest równoważnym zapisem dowodzonej nierówności (*) przy podstawieniu $a_i = e^{-t_i}$.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

451 ($WT = 1,11$) i **452** ($WT = 3,48$)

z numeru 12/2002

Jerzy Cisło – Wrocław 45,71

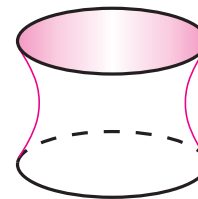
Marian Łupieżowicz – Zebrzydowice 36,24

Pan Cisło – po raz drugi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2003

Przypominamy treść zadań:

356. Z cienkiego drutu wykonano dwa jednakowe kółka o promieniu r_0 . Kółka zetknięto i zwilżono wodą z mydłem (tylko sam brzeg, wewnątrz kółek nie było pokryte błoną), a następnie powoli rozsuwano w kierunku prostym do ich płaszczyzny (rysunek 1). Na jaką maksymalną odległość można je odsunąć, żeby łącząca je błona nie przerwała się? Obok rozwiązania analitycznego lub numerycznego dopuszczalna jest też odpowiedź oparta na przeprowadzonym doświadczeniu.



Rys. 1

357. Siły jądrowe wiążą jądra atomowe tak mocno, że podwyższenie temperatury materii nawet do kilkunastu milionów stopni nie jest w stanie wpłynąć na budowę wewnętrzną jąder. Dlaczego więc rozpad izotopu berylu ${}^7\text{Be}$ zachodzi we wnętrzu Słońca znacznie wolniej niż w laboratorium ziemskim?

356. Błona mydlana ma taki kształt, że jej powierzchnia (a więc i energia powierzchniowa) jest minimalna. Według geometrii różniczkowej średnia krzywizna powierzchni (dana wyrażeniem $\frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$, gdzie R_1 i R_2 są tzw. głównymi promieniami krzywizny) jest wtedy równa zero.

Błonek o symetrii obrotowej wokół osi z przedstawmy w przekroju (rys. 2), wtedy jeden z tych promieni jest promieniem krzywizny otrzymanej krzywej, czyli

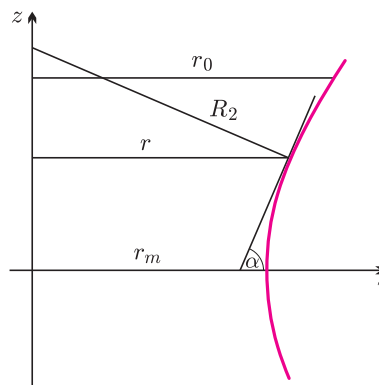
$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha}{ds},$$

gdzie $d\alpha$ jest zmianą kierunku stycznej przy przesunięciu ds wzdłuż krzywej.

Drugi z promieni jest związany z krzywizną przekroju w płaszczyźnie prostopadłej do rysunku i wynosi

$$R_2 = \frac{r}{\sin \alpha}$$

(por. w poradnikach matematycznych wzory opisujące krzywiznę powierzchni).



Rys. 2

Zerowa wartość krzywizny średniej oznacza więc spełnianie równania

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\sin \alpha}{r}.$$

Podstawiamy $ds = dr / \cos \alpha$ i całkując otrzymujemy $r \sin \alpha = \text{const.} = r_m$, gdzie r_m jest minimalną wartością r , odpowiadającą kątowi $\alpha = \pi/2$.

W następnym kroku zbadamy funkcję $z(r)$

$$\frac{dz}{dr} = \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{r_m}{\sqrt{r^2 - r_m^2}}.$$

Całkowanie w granicach od r_m do r_0 daje nam równanie

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{r_m}{r_0} \ln \left(\frac{r_0}{r_m} + \sqrt{\left(\frac{r_0}{r_m}\right)^2 - 1} \right),$$

przy czym początek osi z przyjęliśmy w środku między kółkami (gdzie $r = r_m$), czyli z_0 jest połową odległości między kółkami. (Powyższe wyrażenie można zapisać prościej, posługując się funkcjami hiperbolicznymi.)

Jak wykazują obliczenia numeryczne, maksymalną wartością z_0/r_0 jest 0,66274, a zatem maksymalną odległością między kółkami jest $1,3255 \cdot r_0$. Wartość ta jest osiągnięta dla

$$\frac{r_m}{r_0} = 0,5524.$$

357. Izotop ${}^7\text{Be}$ rozpada się drogą wychwytu elektronu. We wnętrzu Słońca elektrony z powłoki K ulegają wzbudzeniu lub jonizacji, co zwiększa ich średnią odległość od jądra i zmniejsza prawdopodobieństwo wychwytu.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

352 (WT = 2,35) i 353 (WT = 2,55)
z numeru 2/2003

Marek Wójcicki	- Szczecin	46,22
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	43,00
Tomasz Wietecha	- Tarnów	40,83
Marian Łupieżowiec	- Gliwice	20,09
Michał Józwickowski	- Błonie	14,77

Witamy nowego Weterana Klubu 44 F -
p. Wójcickiego.



Rozwiązanie zadania M 1035.

Załóżmy, że $k > l$. Wówczas liczby postaci $2^k + 2^l$ są parami różne. Pokażemy, że dla dowolnego ciągu (a_n) złożonego z liczb postaci $2^k + 2^l$, $k, l \in \mathbb{Z}$, takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, dla nieskończenie wielu n zachodzi

$$(1) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{4}{3}.$$

Dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{Z}$ istnieje liczba n_k o własności:

$$a_{n_k} = 2^k + 2^l,$$

dla pewnego $l \in \mathbb{Z}$ ($k > l$) oraz dla dowolnego $n < n_k$ mamy

$$a_n = 2^{k'} + 2^{l'}$$

z $k > k' > l'$. Wówczas

$$\frac{a_{n_k}}{a_{n_k-1}} > \frac{2^k}{2^{k-1} + 2^{k-2}} = \frac{4}{3},$$

co dowodzi (1).

Przyjmując $a_n = W(n)$, łatwo zobaczyć, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

co jest sprzeczne z (1).

Taki wielomian nie istnieje.



Rozwiązanie zadania F 601.

Średnia gęstość Słońca

$$\rho_S = \frac{M_S}{V_S} = \frac{3}{4\pi} \frac{M_S}{R_S^3}.$$

Z II prawa dynamiki mamy

$$m_Z \frac{4\pi^2 r_{ZS}}{T^2} = G \frac{m_Z M_S}{r_{ZS}^2},$$

stąd

$$\rho_S \approx \frac{24\pi\alpha^3}{T^2 G} \approx 1 \text{ g/cm}^3,$$

gdzie $\alpha = D_S/r_{ZS} \approx 0,01$ – kątowy rozmiar Słońca (D_S – średnica Słońca a r_{ZS} – odległość Ziemi od Słońca), $T \approx \pi \cdot 10^7$ s ≈ 1 rok, a G – stała grawitacji.



Rozwiązanie zadania F 602.

W czasie Δt na spadochron o powierzchni S uderzy powietrze z prędkością v i o masie $\Delta m \sim \rho v S \Delta t$, przekazując pęd $\Delta m v$. Zatem siła parcia powietrza wynosi $F = \Delta m v / \Delta t \sim \rho v^2 S$. Przy ustalonej równowadze siła ta jest równa sile ciężenia działającej na spadochroniarza:

$$\rho v^2 S \approx mg,$$

skąd $v \sim \sqrt{mg/(\rho \pi r^2)} \approx 5$ m/s przy $m \approx 100$ kg i $r \approx 3$ m.

Patrz w niebo

Oglądając zdjęcia nieba wykonane kamerą o polu widzenia kilku lub kilkunastu stopni, każdy bez trudu zauważy liczne zgrupowania gwiazd, szczególnie często występujące w Drodze Mlecznej. Są to tzw. gromady otwarte, w których obrazy gwiazd nie zlewają się w jedną plamę świetlną (jak na ogół jest w gromadach kulistych), ale które jednak są wyraźnie widoczne na gwiaździstym tle. Są jednak inne gromady, których gwiazdy rozrzucone są na obszarze nawet kilku gwiazdozbiorów, a więc nie można ich tak zwyczajnie zobaczyć na tle nieba. Rozpoznaje się je na podstawie ruchu tych gwiazd. Jeżeli mianowicie dana gwiazda do gromady należy, to porusza się w przestrzeni z dużą dokładnością równoległe do towarzyszek. Oczywiście, gwiazdy takiej nie można z góry wytypować. Gromada taka nazywa się gromadą ruchomą.

Kilka lat temu w Hydrze odkryto gromadę ruchomą skupiającą wyjątkowo młode gwiazdy – ich wiek ocenia się na 10 mln lat, i leżącą wyjątkowo blisko – w odległości 50 pc. Jej gwiazdy rozsiane są na obszarze 30° . Bardzo interesującą gwiazdą jest w niej nieregularna zmienna TW Hydrae. Wykazuje ona cechy świadczące o tym, że jest bardzo młoda, tak młoda, iż jeszcze nie stała się gwiazdą ciągu głównego. Dowodzi tego np. duża w niej zawartość litu (który zostaje szybko „wypalony” w rozpoczynających się reakcjach termojądrowych). A oznaką młodości całej gromady jest obecność pyłowych obłoków otaczających niektóre jej gwiazdy. Nie byłoby w tym wszystkim nic rewelacyjnego, gdyby nie fakt, że w pobliżu nie ma żadnych obszarów gwiazdotwórczych czy gęstych obłoków materii międzygwiazdowej, z których gromada mogłaby powstać. Jej odkrywcy twierdzą wręcz, że jest ona jak góra lodowa znaleziona u brzegów Hawajów. Podejrzewa się zatem, że została wyrzucona z wielkiej gromady młodych gwiazd położonej na granicy Skorpiona i Centaura, odległej o 120 pc. Grupa gwiazd zawierająca TW Hydrae wzbudziła wielkie zainteresowanie, stwarza bowiem rzadką okazję obserwowania ze stosunkowo małej odległości procesu powstawania gwiazd, jak i – prawdopodobnie – powstawania układów planetarnych.

Tomasz KWAST

Sierpień

Z każdym niemal gwiazdozbiorem nieba północnego związana jest jakaś starożytna legenda. Tarcza, położona wprawdzie 10° na południe od równika niebieskiego, jest jednym z najdalej na północy nieba położonych gwiazdozbiorów, nie mających żadnej legendy. Wprowadził go w 1690 r. Jan Heweliusz na cześć króla Jana Sobieskiego i jego zwycięstwa nad Turkami pod Wiedniem. Według zamiaru Heweliusza gwiazdozbiór miał nazywać się Tarczą Sobieskiego, teraz jednak cały świat zna go pod skróconą nazwą. Jest to mały i słabo widoczny gwiazdozbiór położony w Drodze Mlecznej na południe od Orła. Znajduje się w nim ładna gromada otwarta M11 (czyli NGC 6705) widoczna już przez lornetkę, gdyż jej jasność wynosi 6,3 mag. Leży w odległości 1700 pc, ma rozmiary 6 pc i zawiera niemal 400 gwiazd.

Na sierpniowym niebie z planet widać praktycznie tylko Marsa. Jest on w Wodniku, wschodzi wieczorem i widać go przez całą noc. Wszystkie pozostałe dostrzegalne gołym okiem planety są zbyt blisko Słońca (Wenus na granicy Raka i Lwa, Jowisz w Lwie i Saturn w Bliźniętach). Co prawda w połowie miesiąca można wieczorami próbować szukać Merkurego, gdyż 14 VIII znajdzie się w największej kątowej odległości od Słońca. Pełnia Księżyca wypada 12 VIII, nów 27 VIII. Żadnych zaćmień ani zakryć jasných obiektów w sierpniu nie będzie.

T. K.

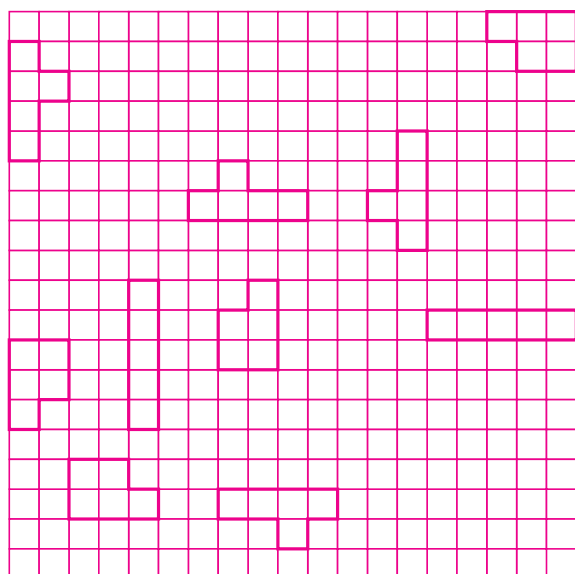
**KOLOROWANKI –
 NUMEROWANKI (6)**

Zadanie: Z kwadratowej kartki w kratkę o boku 19 usunięto pole narożne. Czy tak powstałą figurę można, tnąc tylko po kratkach, podzielić na prostokąty o wymiarach 1×5 ?

Czytelnik wyćwiczony na poprzednich K–N od razu wpadnie na pomysł ponumerowania kratek jak na rysunku 1. Wówczas poza narożną figurą, składającą się z 15 kratek, każda z liczb 1, 2, 3, 4, 5

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4

Rys. 1



Rys. 2

występuje tyle samo razy, natomiast wyróżniony wielokąt zawiera tylko dwie dwójki i aż cztery czwórki. Nie ma więc mowy o podziale całej figury na prostokąty 1×5 , gdyż każdy taki prostokąt musi zawierać pięć różnych liczb.

Utrudnijmy zadanie, dopuszczając oprócz prostokątów 1×5 , dwa inne rodzaje figur o polu 5, przedstawione na rysunku 2. Jak widać, figury te można dowolnie obracać, ale nie można używać ich lustrzanego odbicia. Czy teraz podział wyjściowej figury na tak różnorodne części jest możliwy?

Patrząc na rysunek 3, stwierdzamy, że nie jest prawdą, iż każda figura podziału zawiera pięć różnych liczb.

Jednak zastosowanie nieco innej numeracji dowodzi, że nawet podział na tak różnorodne figury nie jest możliwy. Uważny Czytelnik bez trudu dostrzeże na rysunku 4 dowód tego faktu.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4

Rys. 3

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1

Rys. 4

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl



mała delta

Kiedy więcej, kiedy mniej

Każdą liczbę dodatnią c można, rzecz jasna, przedstawić w postaci sumy dwóch składników dodatnich na bardzo wiele sposobów. Mówiąc szczerze, na nieskończenie wiele sposobów. O ile jednak suma takich dwóch składników jest zawsze równa c , o tyle ich iloczyn wcale nie jest stały. Na przykład, $2 + 3 = 5$, $1 + 4 = 5$ i $\sqrt{2} + (5 - \sqrt{2}) = 5$, ale żadne dwie z liczb $2 \cdot 3$, $1 \cdot 4$, $\sqrt{2} \cdot (5 - \sqrt{2})$ nie są równe. Czy można wśród wszystkich iloczynów znaleźć największy? Dokładniej, czy spośród wszystkich par liczb dodatnich x, y , takich że $x + y = c$ dla pewnej ustalonej liczby dodatniej c , istnieje para, której iloczyn jest największy?

Aby się o tym przekonać, zajmijmy się przez chwilę inną nierównością. Wykażemy mianowicie, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Stąd już krok do nierówności

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0,$$

prawdziwej dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y .

Co więcej, równość w tej, a więc i w pierwszej nierówności, mamy wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

Z powyższego rozumowania wynika, że iloczyn dwóch liczb dodatnich x, y nigdy nie jest większy od $\frac{(x + y)^2}{4}$ i jest tej ostatniej liczbie równy tylko wtedy, gdy $x = y$. W takim razie:

δ jeśli $x + y = c$, to największy iloczyn xy otrzymamy wtedy, gdy $x = y$.

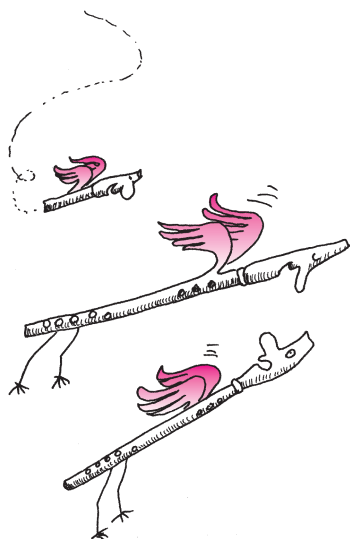
Na przykład, spośród wszystkich prostokątów o stałym obwodzie c największe pole ma kwadrat (o boku $c/4$), spośród wszystkich trójkątów prostokątnych o stałej sumie długości przyprostokątnych największe pole ma trójkąt równoramienny itp. Ale z nierówności $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$ lub równoważnej jej nierówności $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ możemy wywnioskować coś więcej. Wynika z niej bowiem, że suma dwóch liczb dodatnich nigdy nie jest mniejsza niż podwojony pierwiastek kwadratowy z ich iloczynu, a równość, jak wiemy, jest wtedy, gdy $x = y$.

Mamy zatem następujące twierdzenie:

δ jeśli $xy = c$, to najmniejszą sumę $x + y$ otrzymamy wtedy, gdy $x = y$.

Na przykład: spośród wszystkich prostokątów o stałym polu najmniejszy obwód ma kwadrat, spośród wszystkich trójkątów prostokątnych o stałym polu najmniejszą sumę długości przyprostokątnych ma trójkąt równoramienny itp.

W. B.





Co to jest temperatura?

– zapytałem wczoraj Maćka, mojego młodszego brata. Spojrzał na mnie zdziwiony.

– No przecież wiadomo. Zero to jest temperatura zamarzania wody, a sto stopni to temperatura wrzenia. Dzieli się skalę termometru na sto różnych części. A w skali Kelvina...

– Zaraz, zaraz – powstrzymałem go. – Nie tak szybko. A... co to jest termometr?

– Ty chyba mnie nabierasz. W tym jest pewnie jakiś haczyk?

– Ależ skąd, to jest zupełnie uczciwe pytanie.

– Coś ty z byka spadł, termometru nie widziałeś? – zezłościł się Maciek. – Was na tych studiach chyba zupełnie ogłupiają!

– Powiedzmy, że nie widziałem. Czy mógłbyś mi go dokładnie opisać? – zapytałem b a r d z o spokojnie. (Nie daruję mu tego ogłupiania, poczekaj, zobaczymy, czyje będzie na wierzchu!)

– No... bierze się bańkę szklaną z zabarwionym alkoholem, cienką rurkę...

Nie dałem mu dokończyć.

– A dlaczego właściwie z alkoholem? Czy nie mogłaby być inna ciecz?

– Mogłaby, jasne. Na przykład rtęć...

– Dlaczego rtęć? A oleju, gliceryny, benzyny nie można by nalać? A może po prostu wody?

– Wody nie, bo jak zamarznie, to rozsądzi termometr. Ale olej, jeśli nie krzepnie, to mógłby być chyba równie dobry – Maciek był jakby odrobinę mniej pewny siebie.

– Co to znaczy „równie dobry”? Jaką masz gwarancję, że równe odstępy temperatury na skali rtęciowej będą odpowiadać równym odstępom na olejowej? A jeśli się okaże, że temperatura, która na termometrze rtęciowym jest w połowie odległości między zerem a stu stopniami, na termometrze olejowym będzie równa nie 50, tylko 49 albo 52 stopnie, to co wtedy?

Namyślał się przez chwilę.

– Chodzi ci pewnie o to, że ta ciecz powinna się rozszerzać równomiernie...

– Co to znaczy? Jak sprawdzisz, czy dana ciecz rozszerza się równomiernie?

– Trzeba znaleźć współczynnik rozszerzalności cieplnej – przypomniało się coś Maćkowi – czyli stosunek względnego przyrostu objętości do przyrostu temperatury. Ten współczynnik powinien być stały...

– Przecież temperatura nie jest jeszcze zdefiniowana, i nie wiesz, ile wynosi ten przyrost temperatury! To jest błędne koło! Żeby wprowadzić współczynnik rozszerzalności cieplnej, trzeba najpierw mieć skalę temperatur. Czy w drugiej klasie nie nauczyłeś się jeszcze unikać takich pętli?

Uszy Maćka poczerwieniały. Tym razem odpowiedź przyszła po dłuższej chwili.

– Ty się mnie czepiasz. Przecież można się po prostu umówić, że definiujemy skalę według termometru rtęciowego. Zresztą różnice między różnymi skalami temperatur będą niewielkie, przynajmniej dla większości cieczy... więc cały ten problem nie ma większego praktycznego znaczenia.

– Może nie ma większego znaczenia, jeśli chodzi o przedział 0° – 100° , który jest stosunkowo nieduży, ale jak ustalisz, czy przyrost o 1 stopień w okolicy -100°C jest „taki sam”, jak przyrost o 1 stopień w okolicy $+300^{\circ}\text{C}$? Zapewniam cię, że różnice między wskazaniem różnych termometrów mogą tu być bardzo poważne. Termometr rtęciowy nie obejmuje zresztą takiego zakresu, bo rtęć krzepnie w -39°C . A w ogóle... chcesz wprowadzić w tej sprawie jakąś dowolną umowę? Mało ci, że istnieją skale Celsjusza, Kelvina, Fahrenheita, choć różnią się tylko o przesunięcie i przemnożenie przez stałą, to chciałbyś jeszcze, żeby każda z nich miała wersję rtęciową, alkoholową itp.? Przydałoby ci się trochę logiki i ścisłości. Właśnie tego, jeśli chcesz wiedzieć, można się nauczyć na studiach...

Wyglądało na to, że dobrze poczuł szpilę.

– A może użyć termopary? – zaproponował po chwili jakby nigdy nic. – Otrzymuje się

napięcie proporcjonalne do różnicy temperatur, więc...

– Nic z tego. Ta proporcjonalność to jest prawo przybliżone, słuszne na ogół tylko w niezbyt dużym przedziale temperatur. Poza tym termopary też można konstruować z różnych metali...

Zapadła dłuższa cisza. Żeby uratować swój honor, Maciek koniecznie musiał coś sobie przypomnieć...

– Czekaj, czekaj. Ja chyba już wiem, dokąd ty zmierzasz. Trzeba wziąć zamiast cieczy – gaz doskonały. Coś takiego było w podręczniku, ale ani rusz nie mogłem wtedy zrozumieć, po co się to wprowadza. Taki termometr jest przecież zupełnie niepraktyczny... Aha, przecież wszystkie gazy rozrzedzone można uważać za gaz doskonały, więc rozszerzają się tak samo! Hura! I jeszcze... temperatura gazu doskonałego jest proporcjonalna do energii kinetycznej jego cząsteczek. Nie powiesz chyba, że energia kinetyczna nie jest wielkością dobrze określoną!

– Bardzo dobrze – przyznałem – W dodatku termometr z gazem doskonałym wskazuje od razu temperaturę w skali fizycznej – Kelvina. W zerze absolutnym objętość gazu spadłaby do zera. Jest to całkiem dobra definicja temperatury, ale... mnie niezupełnie odpowiada.

– Dlaczego?

– Bo jednak opiera się na własnościach jednej wyróżnionej substancji – gazu doskonałego. Jest to może i ważny przypadek, ale kto wie, czy nie istnieją inne ciała, równie proste, które rozszerzałyby się inaczej? Najlepiej byłoby mieć taką konstrukcję termometru, która nie zależałaby od własności żadnej konkretnej substancji.

– To jest chyba niemożliwe!

– A nie znasz takiego prawa fizycznego, które miałoby jednakową postać dla wszystkich ciał, i wiązałoby się jakoś z temperaturą?

Maciek wyglądał na skołowanego, najwyraźniej nic takiego nie przychodziło mu do głowy.

– A druga zasada termodynamiki i silnik Carnota? – przypominałem.

– Aha, że sprawność cyklu Carnota jest maksymalną sprawnością silnika cieplnego...

– Nie tylko o to chodzi. Istotne jest przede wszystkim to, że sprawność silnika Carnota zależy tylko od temperatury grzejnika T_1 i chłodnicy T_2 i jest taka sama dla wszystkich substancji.

– A to właściwie skąd wiadomo?

– Bo gdyby jeden silnik, pobierając od grzejnika tyle samo ciepła co drugi, zamieniał więcej go na pracę, to ten drugi silnik można by puścić w przeciwną stronę (pamiętaj, że silnik Carnota pracuje w sposób odwracalny). Wtedy grzejnik nie pobierałby w sumie ani nie oddawał żadnego ciepła, a chłodnica oddawałaby więcej drugiemu, niż pobierałaby od pierwszego. Układ pobierałby więc ciepło tylko od chłodnicy, zamieniając je w całości na pracę, co jest sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki.

– I w jaki sposób na tej podstawie można skonstruować termometr?

– Bardzo prosto. Trzeba wybrać sobie pewną temperaturę odniesienia, która wyznaczy wielkość skali. Na przykład może to być punkt zamarzania wody, i jeśli się mu przypisze 273 stopnie, to otrzyma się skalę Kelvina. Następnie dla dowolnego innego punktu na skali określamy temperaturę przez silnik Carnota, którego grzejnik będzie utrzymywany w temperaturze mierzonej, a chłodnica – w temperaturze odniesienia (albo na odwrót). Pomiar temperatury odbywa się poprzez pomiar sprawności silnika, według wzoru

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

– I to ma być „bardzo prosto”? Ty chyba żartujesz! Zanim puścisz w ruch silnik Carnota, zanim zmierzysz jego sprawność... Cały dzień byś stracił na wykonanie jednego pomiaru!

– Ależ ja wcale nie mówię, że tak ma wyglądać praktyczny termometr! To jest tylko ogólna zasada wyznaczania skali. Istnieją zresztą metody matematyczne, które pozwalają ją „przetłumaczyć” na bardziej praktyczny język zależnie od typu termometru. Na przykład temperatura wyznaczona termometrem gazowym okazuje się taka sama, jak wyznaczona silnikiem Carnota.

– Wszystko jedno, mnie się wydaje, że to bardzo dziwaczna definicja – zakończył Maciek sceptycznie.

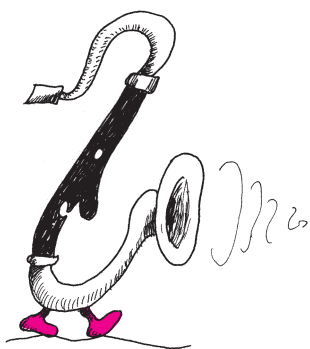
A co Wy o tym sądzicie?

Jerzy B. BROJAN

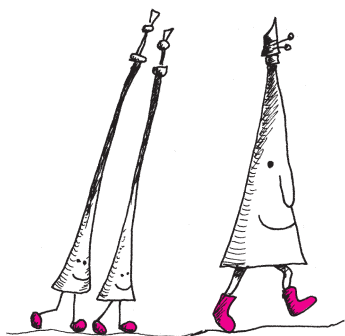
Lata świetlne czy metry?

Chyba najpopularniejszą astronomiczną jednostką odległości jest rok świetlny. Co prawda z obserwacji teleturniejów wiadomo, że według niektórych jest to jednostka czasu, ale... spuśćmy kurtynę – nie wszyscy w szkole przepadali za astronomią. W każdym razie jest to odległość przebywana przez światło w ciągu roku, a więc wynosi tyle, co prędkość światła (3×10^8 m/s) razy długość roku ($3,15 \times 10^7$ s), czyli w przybliżeniu 10^{16} m. Jest to odległość ogromna, a jednak stanowiąca dopiero 1/4 odległości Słońca od najbliższej gwiazdy.

Na obszarze Układu Słonecznego jednostka ta jest kompletnie niepraktyczna. Zresztą kilometr też. Zajrzawszy do dowolnych tablic astronomicznych, łatwo przekonujemy się, że odległości międzyplanetarne to miliony czy miliardy kilometrów i zarazem bardzo drobne ułamki roku świetlnego. Dlatego dawno już wymyślono jednostkę odległości praktyczną w Układzie Słonecznym. Ona się nawet tak nazywa: **jednostka astronomiczna** (1 j.a.), i oznacza **średnią odległość Ziemi od Słońca**. Zamiast więc mówić, że Ziemia obiega Słońce w odległości 150 mln km, mówi się, obiega w odległości 1 (domyślnie: jednej jednostki astronomicznej). Tak się też szczęśliwie składa, że po przeliczeniu na „czas świetlny” odległość ta również wyraża się liczbą możliwą do ogarnięcia wyobraźnią. Mianowicie 150 mln km po podzieleniu przez prędkość światła daje prawie dokładnie 500 s, czyli 8,3 min. Tyle czasu światło leci od Słońca do Ziemi. Od Księżyca do Ziemi trochę ponad sekundę, a na przebycie średnicy samego Słońca potrzebowałoby ponad 4 sekund.



Można teraz pobawić się w przeliczanie odległości planet z jednostek astronomicznych na minuty. W gruncie rzeczy nic ciekawego z tego nie wyniknie, warto jednak zapamiętać, jak wielka jest w tych jednostkach orbita najodleglejszej planety, Plutona. To, że Pluton obiega Słońce w odległości (średniej) niemal 6 mld km, jest oczywiście prawdą, ale liczba taka nikomu chyba nic nie mówi. Natomiast powiedzenie, że jest to 40 j.a., albo 5,5 godzin świetlnych, daje od razu pojęcie o skali odległości w Układzie Słonecznym. A nawet odległości międzygwiazdowych, bo – jak wspomnieliśmy – od najbliższej gwiazdy światło leci ponad 4 lata.



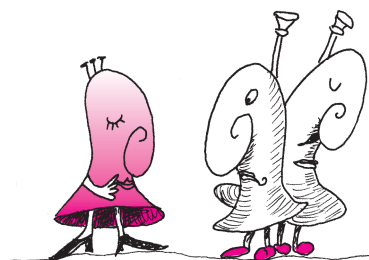
Używanie „zręcznych” jednostek jest nie tylko zabawą lub sposobem na pogłądowe przedstawienie jakiegoś zagadnienia, lecz stanowi również ułatwienie obliczeń. Na przykład trzecie prawo Keplera zapisane w jednostkach fizycznych mówi, że okres obiegu planety T i półoś jej orbity a związane są zależnością:

$$T^2/a^3 \approx 4\pi^2/(GM),$$

gdzie G jest stałą grawitacji, a M masą Słońca, podczas gdy wyraziwszy rozmiary orbit planet w jednostkach astronomicznych, a okresy obiegu w latach, mamy po prostu

$$T^2 = a^3.$$

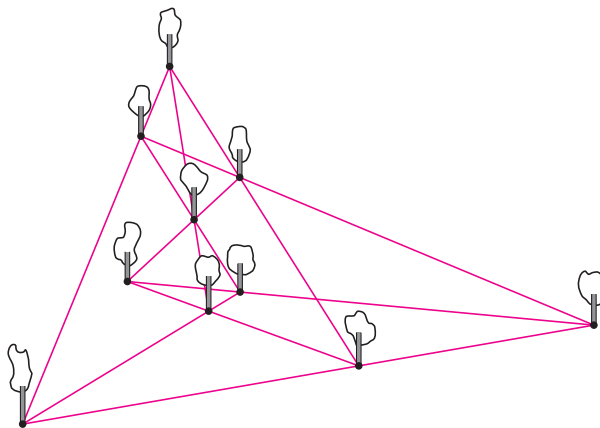
Przy poważnych numerycznych obliczeniach ruchu planet, z uwzględnieniem oddziaływania każdej planety z każdą inną, zachodzi potrzeba korzystania miliony razy ze wzoru na siłę wzajemnego oddziaływania planet, warto więc, dla oszczędności czasu komputerowego, by wzór ten miał możliwie najprostszą postać. A to właśnie osiąga się, prowadząc obliczenia w najodpowiedniejszych dla danego zagadnienia jednostkach.



T. K.

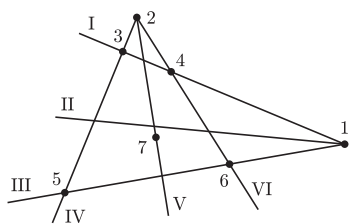
Oszczędny ogrodnik

Ile co najmniej trzeba mieć drzew, aby posadzić je po trzy w dziesięciu rzędach? Ten, który prymitywnie myśli, że trzydzieści, myli się. Wystarcza w zupełności 10 drzew. Zamieszczone obok rozwiązanie zostało wymyślone przez architekta krajobrazu, doradcę kardynała Richelieu, Girarda Desarguesa (czyt. dezarga). Powstaje w sposób naturalny kilka pytań. Na ile dowolnie rozmieszczone są te rzędy? Jaki pożytek matematyczny można mieć z rozwiązania tego ogrodniczego problemu? Jak się przekonać, że rozwiązanie nie jest „naciągnięte”, że nie jest to sugestywna niedokładność rysunku? Wypada na to odpowiedzieć.

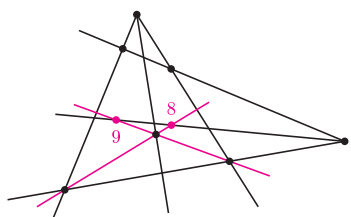


Jak powstaje konfiguracja Desarguesa

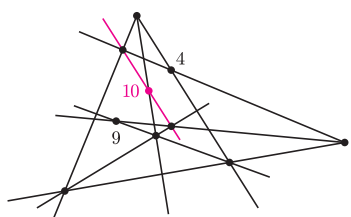
Rysujemy dwie trójki prostych I – VI i zaznaczamy na nich punkty 1 – 7 (ten ostatni dość dowolnie na V).



Prowadzimy proste 5-7 i 6-7; w przecięciu z II otrzymujemy punkty 8 i 9.



Prowadzimy prostą 3-8 i w przecięciu z V otrzymujemy punkt 10.



Jeżeli punkty 4, 9 i 10 leżą na jednej prostej, to Desargues miał rację. Przeprowadźcie precyzyjny eksperyment.

Na marginesie narysowana jest historyjka obrazkowa, która mówi, jak dalece dowolnie można narysować konfigurację Desarguesa i wskazuje, co mianowicie należy dowodzić, aby stwierdzić, że taka konfiguracja istnieje. Po prostu trzeba wykazać, że otrzymane na końcu trzy punkty, z których każdy leży na dwóch narysowanych prostych (inne leżą już na trzech!), leżą na wspólnej prostej. Fakt, że tak jest, nazywa się twierdzeniem Desarguesa. Proponuję Czytelnikom, aby inaczej zaczęli rysować konfigurację Desarguesa – inaczej, to znaczy tak, aby ostatnią rysowaną prostą była kolejno każda z nich. Tyle o dowolności.

Pożytek matematyczny z twierdzenia Desarguesa nazywa się geometrią rzutową – wielu uważa, że od tego się zaczęło. Ale nie każdy wie, co to takiego jest geometria rzutowa – jeśli jednak lubi rozwiązywać zadania, to zobaczy, że za pomocą tego twierdzenia można rozwiązać ciekawe zadania. Oto dwa z nich.

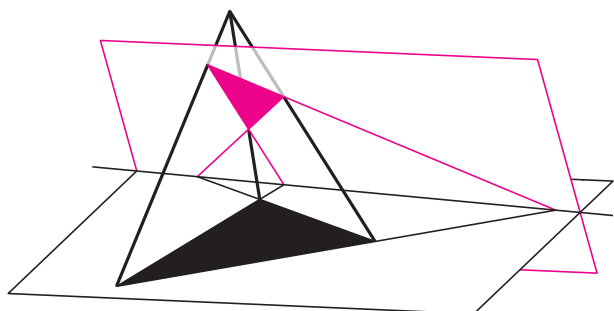
Zadanie 1. Na płaszczyźnie dane są dwie proste k i l o niedostępnym (lub nieistniejącym – nie wiemy) punkcie przecięcia. Dany jest także pewien punkt P nieleżący na żadnej z nich. Należy samą linijką skonstruować prostą przechodzącą przez punkt P i przez punkt przecięcia prostych k i l (lub równoległą do nich).

Zadanie 2. Trzy półproste a , b i c o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na kąty rozwarte. We wnętrzu każdego z tych kątów dany jest punkt, odpowiednio A , B , C . Należy samą linijką skonstruować trójkąt o wierzchołkach na tych półprostych, którego boki przechodzą przez punkty A , B i C .

Oczywiście, nie podamy tu rozwiązań – zepsulibyśmy całą przyjemność. Dla porządku jednak znajdują się one w numerze.

No i dowód. Zamiast niego zauważmy, że na rysunek konfiguracji Desarguesa można popatrzeć tak: jest to czworościan przecięty płaszczyzną. Na rysunku jest zatem pięć płaszczyzn. Wszystkie interesujące nas proste są przecięciami jakiejś pary z nich. Np. prosta II z rysunku na marginesie to przecięcie płaszczyzny podstawy z płaszczyzną tnącą.

M. K.





Twierdzenie Szarkowskiego

Weźmy funkcję $f(x) : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ o wykresie jak na rysunku 1 i utwórzmy ciąg (a_0, a_1, a_2, \dots) według następującego przepisu

$$a_1 = f(a_0), a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2), \dots$$

Czy można znaleźć takie a_0 , żeby nasz ciąg był stały? Aby tak było, wystarczy, żeby zachodziła równość

$$(*) \quad f(a_0) = a_0.$$

Rzeczywiście, wtedy $a_1 = f(a_0) = a_0$, $a_2 = f(a_1) = f(f(a_0)) = f(a_0) = a_0$, itd. Sprawdźmy zatem, czy równość $(*)$ zachodzi dla jakiegoś a_0 .

Rozwiązujemy równanie $x = 2x$ z warunkiem $x \in [0, 1]$ oraz $x = 4 - 2x$ z warunkiem $x \in (1, 2]$. Pierwsze z tych równań ma, oczywiście, rozwiązanie $x_1 = 0$, a drugie $x_2 = 4/3$. Zatem jedyne ciągi stałe, jakie możemy otrzymać z naszej funkcji f zgodnie z przepisem, to ciągi: $4/3, 4/3, 4/3, 4/3, 4/3, \dots$ oraz $0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

A czy można tak dobrać a_0 , by uzyskać ciąg postaci A, B, A, B, A, B, \dots dla pewnych różnych liczb A i B ? Zauważmy, że aby tak się stało, konieczne jest, by – po pierwsze – nie zachodziła równość $(*)$, bo wtedy ciąg byłby stały. Ponadto musimy mieć $f(a_0) = a_1$ i $f(a_1) = a_0$, czyli po prostu

$$(**) \quad f(f(a_0)) = a_0.$$

Czy taką liczbę da się znaleźć? Cóż, musimy teraz rozwiązać równanie $g(x) = x$ dla funkcji $g(x) = f(f(x))$. Pozostawimy Czytelnikowi sprawdzenie, że funkcja $g(x)$ ma wykres jak na rysunku 3. Nietrudno wyliczyć, że rozwiązaniem równania $g(x) = x$ są liczby $x_1 = 4/5$ oraz $x_2 = 8/5$. Biorąc więc np. $a_0 = 4/5$, uzyskujemy ciąg $4/5, 8/5, 4/5, 8/5, 4/5, 8/5, \dots$

Skoro nam tak świetnie idzie, to spróbujmy teraz, czy da się dobrać a_0 tak, by uzyskać ciąg postaci $A, B, C, A, B, C, A, B, C, \dots$ dla różnych liczb A, B i C . Jasne, że teraz nie chcemy, by zachodziły równości $(*)$ i $(**)$, natomiast żądamy, aby zachodziła równość

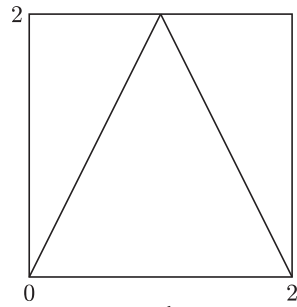
$$(***) \quad f(f(f(x))) = x.$$

Musimy zatem rozwiązać równanie $h(x) = x$ dla funkcji $h(x) = f(f(f(x)))$, której wykres przedstawia rysunek 4. Rozwiązaniem równania $(***)$ jest, jak widać, osiem, dwa to oczywiście 0 i $4/3$. Pozostałe nietrudno obliczyć, my zdradzimy tylko, że jednym z nich jest $x = 4/9$, który po podstawieniu w miejsce a_0 daje ciąg $4/9, 8/9, 16/9, 4/9, 8/9, 16/9, 4/9, 8/9, 16/9, \dots$

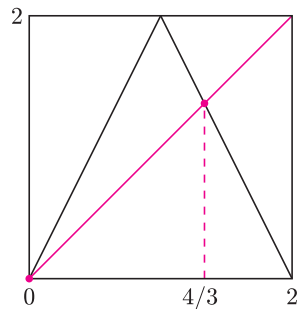
Czytelnik, który z rezygnacją spodziewa się, że padnie teraz pytanie o istnienie ciągu postaci $A, B, C, D, A, B, C, D, A, B, C, D, \dots$, nie powinien popadać w rozpacz. Nie będziemy już rysować wykresów kolejnych złożań funkcji f ani przeprowadzać żadnych nużących rachunków. Chroni nas przed tym słynne **twierdzenie Szarkowskiego**, które, w najprostszej wersji, mówi, że *jeśli funkcja $f(x)$ z odcinka $[a, b]$ na odcinek $[a, b]$ jest ciągła i generuje (w opisany wyżej sposób) ciąg postaci $A, B, C, A, B, C, A, B, C, \dots$, to generować musi już dla dowolnej liczby n ciąg postaci $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$, gdzie wszystkie liczby $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ są różne.*

otrzymamy m.in. ciąg postaci A, B, C, A, B, C, \dots , a tym samym – zgodnie z twierdzeniem Szarkowskiego – ciągi o powtarzającym się okresowo dowolnie długim bloku różnych liczb?

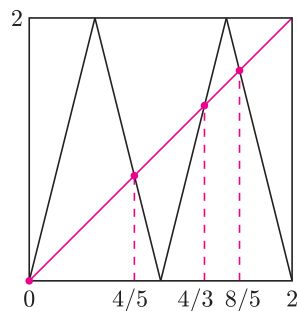
W. S.



Rys. 1. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 4 - 2x & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$

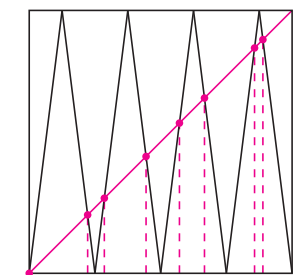


Rys. 2



Rys. 3.

$$g(x) = \begin{cases} 4x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4 - 4x & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ 4x - 4 & \text{dla } x \in [1, \frac{3}{2}] \\ 8 - 4x & \text{dla } x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$



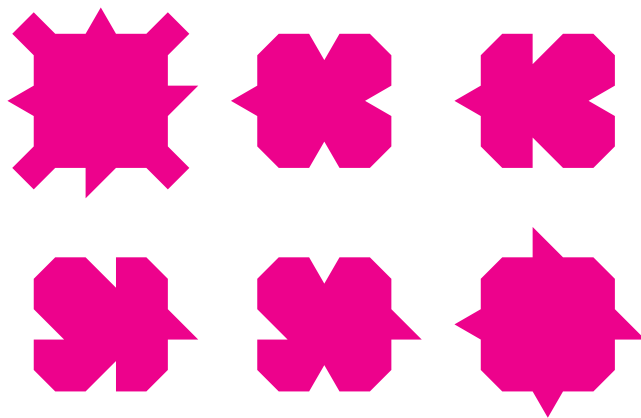
Rys. 4

Na koniec pozostaje zachęcić tych z Czytelników, którzy znają nieśmiertelny wzór „be kwadrat minus cztery a ce” do zmierzenia się z funkcją $s(x) = 4x(1 - x)$ określoną na odcinku $[0, 1]$. Czy generując ciągi w opisany wyżej sposób,

Kafelki Robinsona

Jest w matematyce grupa twierdzeń, które już ze względu na swoją budowę wróżą trudności w ich dowodzeniu. To twierdzenia, że czegoś zrobić się nie da. Na przykład, że nie można podać ogólnych wzorów na pierwiastki równań stopnia większego od 4. Albo że dla liczby całkowitej $n > 2$ nie ma liczb całkowitych dodatnich a, b, c spełniających równanie $a^n + b^n = c^n$. Albo że nie ma algorytmu wskazującego w skończonej liczbie kroków wszystkie całkowite rozwiązania równania algebraicznego o całkowitych współczynnikach. Albo że ze standardowych aksjomatów teorii mnogości nie można wyprowadzić możliwości takiego uporządkowania elementów dowolnego zbioru, by każda jego niepusta część miała element najmniejszy.

Przykładów można by mnożyć wiele, ale są wśród nich i takie, z którymi warto samemu się zmierzyć. Oto sześć kafelków wymyślonych w 1971 roku przez Raphaëla Robinsona. Okazuje się, że – dysponując dowolnie wielkimi zapasami tych kafelków – można szczelnie i bez nakrywań pokryć nimi całą płaszczyznę.



Ale miało przecież być o tym, że czegoś nie da się zrobić. Otóż nie da się tego zrobić w sposób okresowy. Co to znaczy? Wyobraźmy sobie, że zaznaczyliśmy na płaszczyźnie wszystkie linie, wzdłuż których stykają się kafelki, i wykonaliśmy kopię powstałej siatki na przezroczystej folii. Otóż pokrycie jest okresowe, gdy można tak przesunąć folię, aby wszystkie linie siatki znów się nałożyły. Bardzo polecamy ćwiczenia w pokrywaniu płaszczyzny takimi kafelkami (trzeba wykonać sobie z tekturki ich spory zapas), jak też próbę zastanowienia się nad dowodem, że takie pokrycie nie może być okresowe.

M. K.



Co to znaczy białe?

Właśnie, czy białe światło zawsze jest takie samo? Wszyscy chyba wiemy, że nie. Wrażenie białości odbieramy wtedy, gdy wszystkie trzy wrażliwe na kolor receptory naszych oczu są pobudzone tak, jakby były pobudzone przez „naprawdę białe” światło, czyli ciągle widmo o natężeniu niezależnym od częstości. Te trzy receptory reagują najsilniej na światło: jeden na czerwone, drugi na zielone, trzeci na niebieskie. W takim razie można wywołać wrażenie bieli za pomocą światła składającego się z trzech dyskretnych składowych, zamiast z ciągłego widma. Nie pozostaje nam nic innego, jak zbadać, które źródła białego światła są „naprawdę białe”, a które tylko „białe udają”.

W tym celu należy światło rozszczepić. Można użyć pryzmatu, ale dzisiaj o wiele łatwiej o siatkę dyfrakcyjną – wystarczy wziąć byle jaką (ale nagrany) płytę kompaktową. Te kolorowe refleksy to nic innego, jak dyfrakcja światła. Żeby jednak sprawdzić, czy mamy do czynienia z ciągłym,

czy też z dyskretnym widmem, należy badane światło przepuścić przez jakąś szczelinę tak, aby obrazy poszczególnych części źródła nie zachodziły na siebie.

Proponuję zbadać zwykłą żarówkę (kontrolnie), a następnie energooszczędne świetlówki, ekran monitora itd. Które z tych źródeł okaże się dyskretnie i czym będą się różnić? Warto sprawdzić. Czy jednak „nieprawdziwość” białego światła w czymś przeszkadza? Niektórym tak, choć zazwyczaj nie potrafiamy wytłumaczyć dlaczego.

A jeżeli już jesteśmy przy przeszkadzaniu, to warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden szczegół. Światło może migać. To też łatwo sprawdzić. Wystarczy szybko machać np. długopisem na tle ekranu komputera. Długopis będzie widać w miejscach, które odpowiadają świeceniu źródła. Jeżeli macie taką możliwość, to porównajcie telewizor, dobry monitor i monitor ciekłokrystaliczny. Nie zaszkodzi też przyjrzeć się różnym świetłówkom. Powodzenia.

P. Z.

Do przemyslenia na plaży i nie tylko

Jak zmieni się ciśnienie atmosferyczne, jeśli wyparuje woda ze wszystkich oceanów?

Dodatkowe ciśnienie pary wodnej Δp jest równe ciśnieniu warstwy wody, która wzięłaby się z pokrycia całej powierzchni Ziemi warstwą wody z oceanów o stałej grubości. Średnia głębokość oceanów wynosi $H \approx 4$ km, można założyć, że zajmują one $2/3$ powierzchni Ziemi. Zatem $\Delta p \sim \frac{2}{3}\rho g H \approx 3 \cdot 10^7$ Pa, czyli ciśnienie wzrosłoby ponad 100 razy.

Z jaką minimalną prędkością można jechać na nartach wodnych?

Jadąc na nartach wodnych, można się utrzymać na powierzchni wody, jeśli siła ciężkości, działająca na poruszającego się na nich człowieka, równa jest pionowej składowej siły działania wody na narty. Jest ona proporcjonalna do $\rho V^2 S \cos \alpha \sin \alpha$, gdzie S – powierzchnia nart, a α to kąt nachylenia nart do horyzontu. Pomijając siłę wyporu, dla $m = 80$ kg i $S = 0,4$ m² otrzymujemy: $\rho v^2 S \cos \alpha \sin \alpha \sim mg$, $v \sim \sqrt{2mg/\rho S} \approx 2$ m/s.

Jakiej głębokości dotek utworzy się pod śmigłowcem ratowniczym, który zawisł na niewielkiej wysokości nad wodą daleko od brzegu?

Ze względu na panującą równowagę powietrze działa od dołu na śmigłowiec siłą skierowaną w górę i równą sile ciężkości działającej na śmigłowiec. Warstwa powietrza między śmigłowcem a wodą przy niezbyt dużej wysokości z taką samą siłą działa na wodę, tworząc zagłębienie. Zatem śmigłowiec wypchnie taką masę wody, jaką ma on sam (powietrze między nim a wodą odgrywa rolę elementu przenoszącego siłę i może być pominięte w rozważaniach). Przyjmując masę śmigłowca równą $m \approx 10^4$ kg, długość śmigieł $l \approx 5$ m, otrzymujemy głębokość dziury równą w przybliżeniu $h \sim m/\rho \pi l^2 \approx 0,1$ m.

Jaką moc rozwija kolarz na finiszu?

Przyjmijmy, że prędkość rowerzysty na finiszu wynosi v , a siła oporu powietrza $F \sim \rho v^2 S$, gdzie ρ to gęstość powietrza, a S – efektywne pole powierzchni kolarza, na które pada prąd powietrza. Stąd moc $P \approx Fv \approx \rho v^3 S$. Przyjmując $\rho \approx 1$ kg/m³, $v \approx 60$ km/h, $S \approx 0,5$ m², otrzymujemy $P \approx 2$ kW.

Jakie jest naprężenie łańcucha rowerowego w czasie jazdy pod górę?

Porównajmy moment sił: $Fr \sim mg \cdot 2r$, gdzie r to promień koła zębatego, $2r$ – odległość pedału od osi tego koła, mg – siła ciężkości działająca na człowieka równa maksymalnej sile nacisku na pedał. Dla $m \approx 70$ kg otrzymujemy $F \sim 2mg \approx 1,4 \cdot 10^3$ N.

W jakiej odległości od obserwatora człowiek w jaskrawym ubraniu, uciekający przez las (bez poszycia), przestaje być widoczny?

Niech d oznacza średni promień pnia drzew, a l – średnią odległość między drzewami. Dokonajmy pewnego eksperymentu myślowego i rozmieścimy drzewa tak, żeby tworzyły ścisłą palisadę w kształcie okręgu o promieniu równym szukanej odległości x z obserwatorem w jego środku. Za taką palisadą nawet człowiek w jaskrawym ubraniu nie będzie widoczny. W ogrodzeniu długości $2\pi x$ jest więc $2\pi x/d$ drzew, które zostały wzięte z obszaru o powierzchni πx^2 . Jeśli na obszar $S \sim l^2$ przypada średnio jedno drzewo, to na powierzchni πx^2 będzie ich $\pi x^2/l^2$. Zatem $2\pi x/d \approx \pi x^2/l^2$, skąd, przyjmując $l \approx 3$ m i $d \approx 0,2$ m, dostajemy $x \approx 2l^2/d \approx 10^2$ m.

E. Cz.

