



SPIS TREŚCI NUMERU 7 (350)

Fraktalne obrazy z reaktora chemicznego <i>Marek Berezowski</i>	str. 1
Termodynamika czarnych dziur <i>Ewa Czuchry</i>	str. 2
Pochodna motywacji osiągnięć <i>Marcin Sterkowicz</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Być albo nie być altruistą – dylemat więźnia <i>Jacek Miękiś</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Zadania o szklanych kulach <i>Lev Kourliandtchik</i>	str.12
Graficzne przedstawianie brył czterowymiarowych <i>Adam Narkiewicz</i>	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Lipiec	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hrynkiewicz, Tadeusz Jarzembowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres

prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**

Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie

okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII – na I kwartał roku następnego,

do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,

do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,

do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiwi.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wybór artykułów *Małej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:
 Paradoks Korzeniowskiego

Fraktalne obrazy z reaktora chemicznego

Marek BEREZOWSKI

„I think the next century will be the century of complexity”
– Stephen Hawking, 2000. Należałoby dodać, że wiek XXI będzie także wiekiem fraktali. Znaleźć je bowiem można nie tylko w chmurach, górach, drzewach czy płatkach śniegu, ale także w reaktorach chemicznych.

W 1980 roku matematyk polskiego pochodzenia, Benoit Mandelbrot, badał strukturę rozwiązań następującego równania rekurencyjnego:

$$(1) \quad z_{k+1} = z_k^2 + c.$$

Założył, że zmienna z i stała c są liczbami zespolonymi, tzn.

$$(2) \quad z = z_R + iz_I, \quad c = c_R + ic_I.$$

W wyniku iteracji Mandelbrot stwierdził, że ciąg $\{z_0, z_1, \dots\}$ jest zbieżny tylko dla niektórych wartości c i niektórych wartości początkowych z_0 . Gdy ciąg był ograniczony, rysował na płaszczyźnie czarny punkt o współrzędnych $(c_R; c_I)$. Gdy ciąg był rozbieżny, rysował punkt o kolorze odpowiadającym liczbie iteracji, po której kolejny jego wyraz przekroczył pewną założoną wartość graniczną. W ten sposób, zupełnie niespodziewanie, uzyskał fascynujące obrazy. Nazwał je fraktalami (łac.: *podzielny, ułamkowy*). Ich strukturę cechuje wysokie samopodobieństwo. Każdy bowiem fragment, odpowiednio powiększony, przypomina całość. Jednym z tych obrazów jest słynny zbiór Mandelbrota, którego zdjęcia znane są praktycznie na całym świecie.

Patrząc na obrazy fraktalne, odnosi się nieodparte wrażenie, że są one odbiciem otaczającej nas rzeczywistości. Uzyskane z obliczeń komputerowych „choinki”, „płatki śniegu” czy „chmury” jako żywo przypominają kształty występujące w przyrodzie. Struktury fizyczne mają także formę fraktalną. Fragment kamienia przypomina bowiem swym kształtem całą górę. A jak to jest w technice, dziedzinie wiedzy opartej na mniej lub bardziej złożonych modelach matematycznych?

W niniejszym artykule chcę pokazać, że – stosując metodę Mandelbrota – obrazy fraktalne uzyskuje się także z modeli opisujących konkretne urządzenia techniczne. W tym przypadku chodzi o chemiczny reaktor rurowy, który jest aparatem o stosunkowo prostej konstrukcji. Składa się z rury, do której doprowadzane są reagujące ze sobą strumienie. Rura może być zewnętrznie chłodzona lub grzana lub też pracować w sposób adiabatyczny. Z reguły wypełniona jest ciałem stałym, którym jest katalizator podtrzymujący reakcję (reaktor heterogeniczny). Jeżeli reaktor pozbawiony jest katalizatora (reaktor homogeniczny), przepływający strumień nie napotyka żadnych oporów i, przy znikomym przewodzeniu ciepła, stan ustalony osiągany jest w aparacie praktycznie po czasie równym czasowi przepływu od wlotu do wylotu rury. Z matematycznego punktu

widzenia model takiego urządzenia stanowią równania różniczkowe cząstkowe, w których poszukiwanymi zmiennymi są stężenie α i temperatura Θ . Próbując rozwiązać problem numerycznie, dochodzimy do pewnych równań rekurencyjnych. Jeśli przyjmiemy założenie matematyczne, że zmienne stanu nie są liczbami rzeczywistymi, lecz zespolonymi, uzyskamy problem analogiczny do problemu Mandelbrota, z tym że, w odróżnieniu od (1), jest to problem dwuwymiarowy. Z fizykalnego punktu widzenia zespolony model reaktora chemicznego nie ma, oczywiście, uzasadnienia. Stężenie α i temperatura Θ są bowiem, w praktyce, wielkościami rzeczywistymi. Chodziło jednak o to, by stwierdzić, czy operatory (funkcje) ściśle związane z kinetyką procesu, czyli mechanizmem reakcji chemicznej, mogą wygenerować zbiory fraktalne na zmiennych zespolonych. (Ze względu na chaotyczną wrażliwość modeli reaktorów chemicznych, obrazy fraktalne uzyskuje się także dla rzeczywistych wartości stężenia α i temperatury Θ .)

Do obliczeń zastosowano technikę numeryczną podobną do tej, jaką wprowadził Mandelbrot do tworzenia swojego zbioru. Zmieniając kolejno wartości początkowe zmiennej zespolonej $\Theta(1)_0 = \{\Theta_R(1)_0; \Theta_I(1)_0\}$, uzyskano, w rozwiązaniach, ciągi $\{\Theta(1)_0, \Theta(1)_1, \Theta(1)_2, \dots\}$. Jeżeli dany ciąg był zbieżny, rysowano na płaszczyźnie czerwony punkt o współrzędnych $[\Theta_R(1)_0; \Theta_I(1)_0]$. Jeżeli ciąg był rozbieżny, rysowano punkt o kolorze odpowiadającym liczbie iteracji, po której moduł liczby zespolonej $\Theta(1)_k$, czyli $\sqrt{\Theta_R^2(1)_k + \Theta_I^2(1)_k}$, przekroczył założoną wartość graniczną. Obliczenia te wykazały, że model generuje bardzo złożone i ciekawe struktury geometryczne. Uzyskano zbiory fraktalne. Wybrane obrazy oraz ich powiększenia prezentują rysunki na tylnej stronie okładki. Widać bardzo wyraźnie, że wyodrębnione fragmenty zawierają praktycznie niezliczoną ilość elementów przypominających zbiór podstawowy. Elementy te z kolei zawierają kolejne fragmenty podobne do całości zbioru lub jego wycinków. Można w ten sposób, teoretycznie w nieskończoność, zagłębiać się w uzyskaną strukturę, nigdy nie napotykając jej granicy.

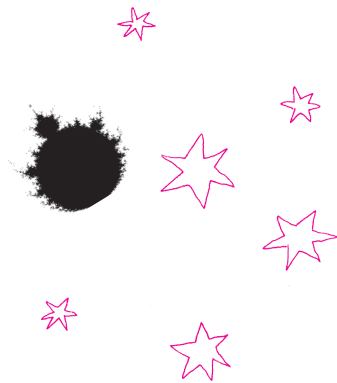
Na zakończenie trzeba dodać, że gdybyśmy rozpatrywali proces heterogeniczny, czyli reaktor wypełniony katalizatorem i uwzględnili przewodzenie ciepła w ciele stałym i strumieniu, uzyskalibyśmy podobne obrazy fraktalne. Obliczenia byłyby jednak o wiele bardziej złożone i czasochłonne.

W konkluzji nasuwa się pytanie. Czy wobec faktu generowania obrazów fraktalnych przez modele matematyczne zwykłych urządzeń technicznych, nie opisują one lub mogą opisywać czegoś więcej, niż tylko te urządzenia?

Patrz także: <http://www.pk.edu.pl/~mberez>.

Termodynamika czarnych dziur

Ewa CZUCHRY



Czarne dziury to obiekty powstające przy analizie pola grawitacyjnego w ogólnej teorii względności. Są to obszary czasoprzestrzeni, w których pole grawitacyjne jest tak silne, że żadne ciało fizyczne, nawet światło, nie może się wydostać poza ten obszar. Jednym z najbardziej ciekawych aspektów teorii czarnych dziur jest analogia między prawami fizyki czarnych dziur a zwykłymi prawami termodynamiki. Prawa fizyki czarnych dziur są otrzymywane na drodze ścisłych matematycznych rozważań, prawa termodynamiki zaś są tylko makroskopowymi przybliżeniami skomplikowanych praw fizyki mikroskopowej, obowiązującymi w układach o dużej ilości cząstek. Istnieje jednak pewna matematyczna analogia między prawami fizyki czarnych dziur a prawami termodynamiki, analogia, która może sięgać głębiej niż formalne podobieństwa wzorów matematycznych i prowadzić do pewnych fizycznych wniosków.

Zacznijmy trochę od środka. W 1971 r., na gruncie rozważań opartych na ogólnej teorii względności, zostało sformułowane pewne prawo dotyczące mechaniki czarnych dziur:

W dowolnym procesie fizycznym całkowite pole powierzchni A wszystkich czarnych dziur we Wszechświecie nie może maleć: $\Delta A \geq 0$.

To prawo bardzo przypomina drugie prawo termodynamiki, które mówi, że w dowolnym procesie fizycznym całkowita entropia S całej materii we Wszechświecie nie może maleć: $\Delta S \geq 0$.

Ta analogia może się wydawać bardzo sztuczna. „Twierdzenie o powierzchni” jest ścisłą matematyczną konsekwencją ogólnej teorii względności, natomiast II zasadę termodynamiki uważa się nie za ścisłą konsekwencję praw natury, lecz raczej prawo, które zachodzi w pewnym przybliżeniu w układach o dużej liczbie stopni swobody. Można jednak pokazać, że ta analogia między mechaniką czarnych dziur a II zasadą termodynamiki rozciąga się też na inne prawa termodynamiki.

Przypomnijmy najpierw znane, np. ze szkoły, prawa termodynamiki:

0. W ciele znajdującym się w stanie równowagi termodynamicznej temperatura T jest stała.
1. Zmiana energii wewnętrznej E : $\Delta E = T\Delta S + \Delta W$, gdzie ΔW jest pracą wykonaną nad układem, np. przez zmianę objętości $\Delta W = p\Delta V$.
2. W dowolnym procesie fizycznym całkowita entropia S całej materii we Wszechświecie nie może maleć: $\Delta S \geq 0$
3. Nie można osiągnąć temperatury $T = 0$ w procesie fizycznym. (Alternatywne sformułowanie: przy temperaturze T dążącej do 0 entropia układu dąży do 0.)

Porównajmy teraz te prawa z prawami mechaniki czarnych dziur. Przed ich sformułowaniem wprowadźmy jeszcze pewną wielkość, która ma bardzo

duże znaczenie w opisie czarnych dziur. Jest to tzw. grawitacja powierzchniowa, czyli granica wartości siły, która z nieskończoności utrzymuje jednostkową masę próbną w miejscu. Granica wartości tej funkcji na horyzoncie czarnej dziury to właśnie grawitacja powierzchniowa κ , przy czym *horyzont* to powierzchnia graniczna czarnej dziury, po przekroczeniu której żadne ciało fizyczne nie może się już wydostać na zewnątrz.

Prawa fizyki czarnych dziur są następujące:

0. Grawitacja powierzchniowa κ jest stała na horyzoncie stacjonarnej czarnej dziury.

Z pewnych technicznych rozważań dla ogólnych obracających się czarnych dziur wynika zależność:

1. $\Delta M = \frac{1}{8\pi}\kappa\Delta A + \Omega\Delta J$, gdzie M oznacza masę czarnej dziury, A – pole powierzchni horyzontu, Ω to prędkość kątowna, a J to moment pędu czarnej dziury.

Formuła ta jest analogiczna do I prawa termodynamiki. Człon $\Omega\Delta J$ odpowiada członowi $p\Delta V$, co więcej, dla jakiegokolwiek obracającego się ciała w jego formule termodynamicznej pojawia się właśnie wyrażenie $\Omega\Delta J$. W powyższym prawie fizyki czarnych dziur ΔA występuje podobnie jak ΔS w I prawie termodynamiki, tylko tutaj jest mnożone przez $(1/8\pi)\kappa$, a nie przez T – zatem grawitację powierzchniową κ można interpretować jako temperaturę czarnej dziury. Już zerowe prawa termodynamiki i czarnych dziur wskazują na tę analogię.

2. W dowolnym procesie fizycznym całkowite pole powierzchni A wszystkich czarnych dziur we Wszechświecie nie może maleć: $\Delta A \geq 0$.
3. Z analizy ogólnego przypadku obracających się czarnych dziur wynika, że niemożliwe jest osiągnięcie wartości $\kappa = 0$ na drodze fizycznego procesu. Im bardziej się zbliżamy do tego konkretnego rozwiązania, tym trudniej zrobić następny krok, podobnie jak przy próbie

realizacji $T = 0$. (Alternatywne sformułowanie III prawa termodynamiki: „ $S \rightarrow 0$, gdy $T \rightarrow 0$ ”, nie jest spełnione w fizyce czarnych dziur, ponieważ A może nie dążyć do zera.)

Zatem pewnego rodzaju analogicznymi wielkościami są energia wewnętrzna i masa: $E \leftrightarrow M$, temperatura i grawitacja powierzchniowa: $T \leftrightarrow \alpha\kappa$ oraz entropia i pole powierzchni horyzontu: $S \leftrightarrow (1/8\pi\alpha)A$, gdzie α jest jakąś stałą. Zwróćmy jednak uwagę na podobne role odgrywane przez energię wewnętrzną E i masę M . Jest to pewnego rodzaju wskazówka, że związek między prawami czarnych dziur i prawami termodynamiki to więcej niż analogia wzorów matematycznych, co wynika z tego, że E i M nie pełnią tylko analogicznej roli we wzorach, ale reprezentują tę samą wielkość fizyczną – energię.

Jest tylko pewien problem. W klasycznej teorii grawitacji temperatura czarnej dziury jest równa 0, ponieważ czarna dziura pochłania wszystko, ale nic nie emituje. Może stąd wynikać, że κ nie może fizycznie reprezentować temperatury. Jednakże w 1974 roku S. Hawking odkrył, że kwantowa kreacja par cząstek wirtualnych powoduje emisję z czarnej dziury cząstek o widmie ciała doskonale czarnego. Zgodnie z fizyką kwantową i zasadą nieoznaczoności, w próżni mogą spontanicznie pojawiać się na chwilę pary cząstek: cząstka i antycząstka. Ponieważ energia nie może powstawać z niczego, jedna cząstka z tej pary musi mieć energię dodatnią, a druga ujemną. Przypuśćmy, że taka para, np. elektron-pozyton, powstała w pobliżu horyzontu czarnej dziury, a jedna z tych cząstek, o ujemnej energii, dostała się pod horyzont. Stąd już nie może się wydostać, a więc nie może nastąpić anihilacja jej z antycząstką. Na zewnątrz czarnej dziury zostaje więc cząstka pozostała z wygenerowanej spontanicznie pary, i jest to cząstka rzeczywista, o dodatniej energii. Zatem czarna dziura promieniuje. Widmo tego promieniowania jest widmem ciała doskonale czarnego o temperaturze $T = \frac{\hbar}{2\pi}\kappa$. Zatem κ , a dokładnie $\kappa/2\pi$ fizycznie reprezentuje temperaturę termodynamiczną czarnej dziury!

Pozostaje pytanie, czy istnieje fizyczny związek między S i $\frac{1}{4}A$ (stała proporcjonalności $\alpha = 1/2\pi$ wynika z rozważań na temat temperatury i grawitacji powierzchniowej). A dokładniej: czy $\frac{1}{4}A$ fizycznie reprezentuje entropię czarnej dziury?

Zgodnie z II prawem termodynamiki całkowita entropia Wszechświata nigdy nie maleje. Jednak gdy mamy do czynienia z czarną dziurą, możemy chcieć się ograniczyć tylko do materii na zewnątrz horyzontu, o tym, co dzieje się wewnątrz, nic nie wiemy, poza tym wszystko jest „zjadane” przez osobliwość w środku czarnej dziury. Łatwo jednak sprawić, żeby entropia materii na zewnątrz czarnej dziury malała, np. wrzucając część materii do czarnej dziury. Z drugiej strony „twierdzenie o powierzchni” mówi, że powierzchnia horyzontu A nigdy nie maleje. Jednak w związku ze wspomnianym już promieniowaniem Hawkinga, gdy czarna dziura emituje powstałe w wyniku spontanicznej kreacji cząstki, niosące pewną energię, i absorbuje cząstki o energii ujemnej, jej całkowita energia maleje, aż do całkowitego „wyparowania”, powodując zmniejszenie się powierzchni do zera. Zatem w obecności czarnej dziury i ze względu na efekty kwantowe, zarówno II prawo termodynamiki, jak i „twierdzenie o powierzchni” są łamane.

Jednak w procesach, w których $\Delta S < 0$ w związku ze spadaniem materii na czarną dziurę, powierzchnia czarnej dziury zwiększa się: $\Delta A > 0$. I analogicznie, w procesach „parowania”, gdy $\Delta A < 0$, entropia materii na zewnątrz czarnej dziury rośnie: $\Delta S > 0$, w związku z emisją promieniowania. Można więc zdefiniować uogólnioną entropię:

$$S' = S + \frac{1}{4}A.$$

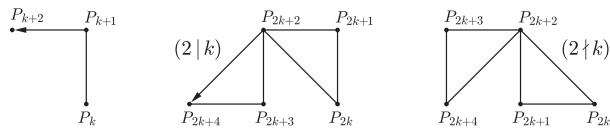
Widzimy, że zmniejszaniu się S towarzyszy wzrost A , a zmniejszaniu się A wzrost S . Sugeruje to, że w dowolnym procesie fizycznym musi obowiązywać uogólnione prawo: $\Delta S' \geq 0$. Prawo to ma bardzo naturalną i prostą interpretację. Jest to nic innego niż zwykle II prawo termodynamiki zastosowane do układu zawierającego czarną dziurę, przyjąwszy, że entropia czarnej dziury jest równa $\frac{1}{4}A$.

Zatem analogia między prawami termodynamiki a prawami fizyki czarnych dziur przestaje być po prostu analogią. Prawa fizyki czarnych dziur są niczym więcej jak prawami termodynamiki zastosowanymi do układu materia i czarna dziura. Niejasny pozostaje tylko fizyczny mechanizm tego, że $\frac{1}{4}A$ jest entropią czarnej dziury. Oczekuje się, że zostanie to wyjaśnione przez kwantową teorię grawitacji.



Rozwiązanie zadania M 1031.

Niech S będzie obrotem o 45° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



Wykażemy, że

$$(*) \quad \vec{P}_{2k} \vec{P}_{2(k+1)} = \sqrt{2} \cdot S(\vec{P}_k \vec{P}_{k+1}).$$

Mamy $P_2 = (1, 1)$, więc wzór $(*)$ zgadza się dla $k = 0$.

Rozważmy przypadek $a_{k+1} = 1$. Wówczas $a_{2(k+1)} = 1$.

Rysunek obok uzasadnia krok indukcyjny w tym przypadku. Przypadek $a_{k+1} = -1$ jest symetryczny.

Z równości $(*)$ otrzymujemy

$$\vec{P}_{16k} \vec{P}_{16(k+1)} = 16 \cdot \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{8 \text{ razy}}(\vec{P}_k \vec{P}_{k+1}) = 16 \cdot \vec{P}_k \vec{P}_{k+1}.$$

Interesują Cię bardziej praktyczne zastosowania matematyki niż podziwianie piękna i kunsztu dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata? Jeśli tak, wygląda na to, że powinnaś/powinieneś wybrać studia psychologiczne. Jeszcze chyba nigdy różne dziedziny nauk nie przenikały się tak mocno. Psychologowie muszą znać tajniki statystyki, ekonomieści (dziedzina tradycyjnie zdominowana przez metody matematyczne) zagłębiają się w prace psychologów Amosa Tversky'ego i Daniela Kahnemana (tylko ten ostatni żył na tyle długo, by móc w ubiegłym roku odebrać Nagrodę Nobla z ekonomii). Prowadzi się coraz więcej badań interdyscyplinarnych. Poniżej przedstawiam teoretyczny model Atkinsona (1964), który zajmował się badaniem potrzeby osiągnięć, oraz jego empiryczną weryfikację, którą przeprowadził wraz z Litwinem (1960).

Jak pokazują daty obu prac, mamy tu do czynienia z przypadkiem, kiedy obserwacje empiryczne poprzedzają modelowe uogólnienia. Jednakże bardzo płodne może okazać się również podejście odwrotne: model teoretyczny i weryfikacja empiryczna tego modelu.

Model wydaje się bardzo prosty, ale płynące zeń wnioski, jak sądzę, mogą zadziwić niejednego naukowca.

Mimo że wyniki naszego działania silnie zależą od nas samych (zaangażowania, wytrwałości, pracowitości, uporu, koncentracji itp.), jednakże często są też obciążone pewną dozą niepewności. Oznaczmy więc symbolem P_S prawdopodobieństwo sukcesu w pewnym zadaniu (przy założeniu, że sami dołożyliśmy wszelkich starań, aby sukces ten rzeczywiście nastąpił). Tak więc zadanie, dla którego P_S wynosi np. 0,8, możemy określić jako dość łatwe; jeśli $P_S = 0,2$ – mamy do czynienia z zadaniem dość trudnym, a $P_S = 0,5$ oznacza zadanie o średnim poziomie trudności. Jeśli odniesiemy sukces, jego miarę wyrazić możemy wielkością $1 - P_S$ (im mniejsze jego prawdopodobieństwo, tym większy sukces), jeśli zaś doznamy porażki, jej miarą jest wielkość $-P_S$ (im bardziej prawdopodobny sukces, tym bardziej dotkliwa porażka).

Jest to założenie modelu, jednakże trzeba zdać sobie sprawę, że być może powinniśmy mierzyć wielkość sukcesu funkcją nieliniową względem prawdopodobieństwa sukcesu.

Jakie zadania i wyzwania wybieramy? Innymi słowy, jakie wybieramy P_S ? Takie pytanie postawił sobie Atkinson i przyjął, że nasze zachowanie zależy w takich sytuacjach od następujących czynników:

- motyw osiągnięcia sukcesu (M_S), tj. jak bardzo zależy nam na sukcesie,
- motyw unikania porażki (M_P), tj. jak bardzo boimy się niepowodzenia,
- wielkość sukcesu ($1 - P_S$),
- wielkość niepowodzenia ($-P_S$).

Teraz możemy określić subiektywnie odczuwaną wielkość sukcesu jako $M_S(1 - P_S)$ oraz subiektywnie

odczuwaną wielkość porażki jako $-M_PP_S$. Rezultat naszego działania R możemy więc postrzegać jako dyskretną zmienną losową o następującym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$R = \begin{cases} M_S(1 - P_S) & \text{z prawdopodobieństwem } P_S \\ -M_PP_S & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - P_S. \end{cases}$$

Wartość oczekiwana powyższej zmiennej losowej, którą możemy interpretować jako chęć do działania, wynosi więc:

$$\begin{aligned} ER &= P_S M_S(1 - P_S) + (1 - P_S)(-M_PP_S) = \\ &= P_S(1 - P_S)(M_S - M_P). \end{aligned}$$

Z powyższego wyrażenia można bezpośrednio wyciągnąć ciekawe wnioski, jednakże potrzebujemy jeszcze dodatkowego, choć dość rozsądnego założenia, że w naszym zachowaniu staramy się maksymalizować wartość oczekiwaną rezultatu działania.

Wiele badań z psychologii ekonomicznej pokazuje, że w analogicznych sytuacjach związanych z niepewnością ludzie wcale nie zachowują się tak racjonalnie. Aby modele lepiej pasowały do rzeczywistości stosowane bywają operacje takie jak ważenie prawdopodobieństw. Z tego też powodu np. funkcja użyteczności von Neumana–Morgensterna, dotycząca wyboru w warunkach niepewności, jest uznawana za normatywną, a lepiej przybliżają rzeczywistość modele takie, jak teoria perspektywy Kahnemana i Tversky'ego czy teoria oczekiwanej użyteczności zależnej od pozycji (rank-dependent expected utility) Quiggina.

Co ciekawe, chęć do działania (dodatnia) będzie przejawiana tylko u osób, u których silniejszy jest motyw osiągania sukcesu niż motyw unikania porażki ($M_S - M_P$). Dlatego też na razie zajmijmy się tylko tymi osobami, u których $M_S > M_P$.

Teraz możemy przejść do odpowiedzi na zasadnicze pytanie, które postawił sobie Atkinson: jak trudne zadania wybieramy? Wartość oczekiwana rezultatu działania ER , pomijając parametry związane z konkretną osobowością człowieka, jest funkcją tylko jednej zmiennej – prawdopodobieństwa sukcesu P_S . A zatem odszukamy maksimum ciągłej i różniczkalnej funkcji $ER(P_S)$ z dziedziną $P_S = [0,1]$, znajdując punkt zerowy pochodnej względem P_S . Nie jest to zadanie trudne; z własności pochodnej wiemy, że

$$(ER)' = (1 - 2P_S)(M_S - M_P),$$

a zatem $(ER)' = 0$ gdy $P_S = 0,5$. Nie trzeba nikogo przekonywać, że parabola $ER(P_S)$ ma maksimum, a nie minimum czy punkt przegięcia: $(ER)'' = -2(M_S - M_P)$, zatem funkcja ER ma w punkcie $P_S = 0,5$ maksimum (lokalne, jak również, w tym przypadku, globalne). Wniosek Atkinsona, nieco zaskakujący, brzmi więc następująco: **osoba, u której silniejszy jest motyw osiągania sukcesu niż motyw unikania porażki, będzie wybierała zadania o średnim poziomie trudności ($P_S = 0,5$).**

Wróćmy teraz do osób, u których silniejszy jest motyw unikania porażki niż motyw osiągania sukcesu ($M_S < M_P$).

W tym przypadku funkcja $ER(P_S)$ jest „uśmiechniętą” parabolą, a ściślej – jej fragmentem w dziedzinie $P_S = [0,1]$. $ER(P_S)$ osiąga więc maksimum (równe 0) na krańcach dziedziny, czyli dla $P_S^{(1)} = 0$ oraz $P_S^{(2)} = 1$. **Wniosek: osoba, u której silniejszy jest motyw unikania porażki niż motyw osiągnięcia sukcesu będzie wybierała zadania o skrajnych poziomach trudności: albo bardzo łatwe, albo bardzo trudne.**

Badania empiryczne (np. Atkinsona i Litwina (1964)) potwierdzają przewidywania modelu. Badani studenci mieli możliwość wykonania dziesięciu rzutów obręczą z dowolnie wybranej odległości od palika. Wszyscy studenci obserwowali nawzajem swoje wyniki, co miało wzbudzać motyw osiągnięcia. Motywację osiągnięć u każdej osoby mierzono za pomocą specjalnie skonstruowanych testów. Wyniki pokazały, że osoby o wysokiej potrzebie osiągnięć i o małej obawie przed niepowodzeniem zwykle wykonywały rzuty

z umiarkowanej odległości, a osoby o niskiej potrzebie osiągnięć i o wysokiej obawie przed niepowodzeniem robiły to znacznie rzadziej.

Mnie osobiście urzeka w tym modelu jego prostota, połączona z ciekawą interpretacją i nieoczywistymi wynikami. Ale czy wszystkie założenia modelu Atkinsona, dyskutowane krótko w przypisach, są poprawne? Czy stanowią akceptowalne przybliżenie rzeczywistości, czy też kryje się w nich poważny błąd? Czy model odnosi się do wszystkich sfer życia, a nie tylko rzutów z dowolnej odległości? Pozostawiam te kwestie do rozważenia Czytelnikom.

LITERATURA

Atkinson J.W. (1964), *Introduction to Motivation*: Van Nostrand, Princeton.

Atkinson J.W., Litwin G.H. (1960), *Achievement motive and test anxiety conceived as motive to approach success and motive to avoid failure*, „Journal of Abnormal and Social Psychology”, nr 60, s. 52–63.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 599. Strumień wody w fontannie podnosi się na wysokość H nad końcem rury doprowadzającej wodę. Do tej rury podłączono dodatkową pionową rurkę o takiej samej średnicy i o wysokości $h < H$ (rysunek obok). Jak należy zmienić moc pompy, jeśli chcemy, żeby po podłączeniu dodatkowej rurki poziom, na który podniesie się woda, był taki sam?

Rozwiązanie na str. 13

F 600. Kamień o masie m jest utrzymywany w powietrzu za pomocą n strumieni wody, wychodzących pionowo z otworu o przekroju S . Prędkość wody wychodzącej z otworu wynosi v . Dochodząc do kamienia, woda rozlatuje się poziomo. Na jakiej wysokości nad otworem znajduje się kamień?

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1030. Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = 1, \\ a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 3. \end{aligned}$$

Niech $m \in \mathbb{N}$. Wykazać, że dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ mamy $m \mid a_n$.

Rozwiązanie na str. 13

M 1031. Definiujemy ciąg (a_n) następująco:

$$a_{2n} = a_n \quad \text{oraz} \quad a_{2n+1} = (-1)^n.$$

Żółw porusza się po układzie współrzędnych.

Na samym początku znajduje się w punkcie $P_0 = (0, 0)$, skąd udaje się do punktu $P_1 = (1, 0)$. Po dotarciu do punktu P_i skręca w lewo o 90° , jeśli $a_i = 1$ lub skręca w prawo o 90° , jeśli $a_i = -1$. Następnie idzie naprzód jedną jednostkę. Znajduje się wtedy

w punkcie P_{i+1} . Wykazać, że

$$\overrightarrow{P_{16k}P_{16(k+1)}} = 16 \cdot \overrightarrow{P_kP_{k+1}}.$$

Rozwiązanie na str. 3

M 1032. Ciąg (a_n) , $n \geq 0$ zdefiniowany jest następująco:

$$a_n = \begin{cases} a_{n/2} & \text{gdy } 2 \mid n, \\ -a_{n-1} & \text{gdy } 2 \nmid n, \end{cases} \quad \text{oraz } a_0 = 1.$$

Udowodnić, że żaden segment ciągu (a_n) nie powtarza się trzy razy z rzędu, tj. nie istnieją $k \geq -1$, $T \geq 1$, takie że

$$\begin{aligned} (a_{k+1}, \dots, a_{k+T}) &= (a_{k+T+1}, \dots, a_{k+2T}) = \\ &= (a_{k+2T+1}, \dots, a_{k+3T}). \end{aligned}$$

Rozwiązanie na str. 16

Być albo nie być altruistą – dylemat więźnia

Jacek MIEKISZ

J.B.S. Haldane, angielski genetyk z pierwszej połowy XX wieku, rozprawiał pewnego dnia w pubie o problemie istnienia zachowań altruistycznych. Teoria ewolucji Darwina uczy nas, że każdy musi dbać o swoje interesy, w przeciwnym razie nasza linia potomna, dziedzicząca nasze zachowanie nieprzystosowane do otaczających nas warunków, zostanie zmieciona przez dobór naturalny. W jaki sposób altruistyczne zachowanie może być egoistyczne w sensie darwinowskim? – rozmyślał Haldane. Nagle zerwał się znad stołu pokrytego serwetkami pełnymi obliczeń i wykrzyknął „Poświęć swoje życie dla dwóch braci albo ośmiu kuzynów”. Aby zrozumieć rozumowanie Haldane’a, musimy przejść przyspieszony kurs genetyki. Każda nasza komórka (oprócz rozrodczych) zawiera 23 pary chromosomów, na których są rozmieszczone geny – nasz plan na przyszłość. W procesie mejozy powstają komórki rozrodcze mające tylko po jednym chromosomie z każdej pary, czyli tylko połowę materiału genetycznego. Każdy z nas w momencie poczęcia, przy złączeniu się komórek rozrodczych, otrzymuje połowę genów od matki i połowę od ojca. Twój brat dzieli więc średnio z Tobą połowę twoich genów, a więc można powiedzieć, że jest on połową Ciebie. Trzech Twoich braci to pod względem genetycznym półtora Ciebie, a więc z punktu widzenia egoistycznych genów warto oddać swoje życie dla trzech braci (w przypadku dwóch braci nasze życie i ich łączne życia są jednakowo warte). Opisane powyżej rozważania stanowią istotę tak zwanego doboru krewniaczego (z ang. *kin selection*), teorii rozwiniętej przez biologa angielskiego Hamiltona w latach sześćdziesiątych poprzedniego wieku. Zastosujmy ją do mrówek. Organizmy, których komórki zawierają pary chromosomów, nazywamy diploidalnymi, a te, których komórki zawierają pojedyncze chromosomy, haploidalnymi. Mrówki są haplodiploidalne. Osobniki żeńskie rozwijają się z zapłodnionych jajeczek, są diploidalne; osobniki męskie natomiast rozwijają się z niezapłodnionych jajeczek, a więc są haploidalne, dostają chromosomy tylko od matki. Wnikliwy czytelnik, mający pod ręką serwetkę, dojdzie natychmiast do następujących wniosków. Siostra mrówka nie poświęciłaby swojego życia, nawet gdyby mogła uratować trzech braci. Natomiast trzy siostry poszłyby w ogień, niosąc pomoc czterem swoim siostrzyczkom (tak jak w przypadku dwóch braci jest to przypadek graniczny).

Wydźmy jednak z knajpki i udajmy się na łono natury – tam, gdzie toczą się rzeczywiste walki biologiczne, gdzie jedne gatunki czy zachowania wypierają inne. Pracownicy mrówki, pomagające królowej w opiekowaniu się dziećmi, są trzy razy bardziej spokrewnione z siostrami niż z braćmi,

powinny więc trzy razy lepiej opiekować się swoimi siostrami (to znaczy karmić je) niż braćmi. I rzeczywiście, biolodzy zaobserwowali, że stosunek ciężaru ciała mrówek rodzaju żeńskiego do mrówek rodzaju męskiego jest w gniazdach bardzo bliski 3:1. Natomiast gdy pracownicy nie są spokrewnione ze swoimi podopiecznymi, to wtedy stosunek ten jest równy 1:1.

Ale dlaczego zachowujemy się altruistycznie w stosunku do niespokrewnionych z nami osób? Ujmijmy ten problem na gruncie teorii gier. Przenieśmy się z królestwa genetyki do socjobiologii. Wyobraźmy sobie, że dwaj podejrzani o ciężkie przestępstwo są przesłuchiwani przez policję. Każdemu z nich powiedziano, że jeśli przyzna się do winy, pograżając w ten sposób swego kompana, który się nie przyzna, to może się spodziewać wyroku mniejszego o 5 lat. Jeżeli obydwaj nie będą wobec siebie lojalni, to odsiedzą w więzieniu o 1 rok mniej; natomiast jeżeli obaj pójdą w zaparte, to z braku bezpośrednich dowodów obciążających mogą liczyć na 3 lata mniej odsiadki. Każdy z nich zadaje sobie pytanie: co robić? Ma do wyboru dwie strategie: nie obciążać kompana, nazwijmy ją Kooperacja (K) lub współpracować z policją, czyli Zdrada (Z). Wypłatami naszych graczy są lata, które będą im darowane. Wyplata gracza zależy od jego strategii i od strategii oponenta. Wyплаты możemy więc zapisać w postaci macierzy U , której element u_{ij} jest wypłatą gracza pierwszego (wierszowego) grającego strategią i , podczas gdy gracz drugi (kolumnowy) gra strategią j . W naszym przypadku wygląda to tak:

$$U = \begin{matrix} & \begin{matrix} K & Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ Z \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Gra jest symetryczna, co oznacza, że wypłaty gracza drugiego dane są przez macierz transponowaną do U . Macierz wypłat jest znana każdemu z graczy. Gra jest rozgrywana w ten sposób, że gracze jednocześnie ogłaszają swoje strategie i dostają odpowiednie wypłaty. Zauważmy, że niezależnie od tego, co zrobi gracz kolumnowy, najlepszą odpowiedzią gracza wierszowego, czyli dającą mu największą wypłatę, jest Zdrada. Mówimy, że strategia Kooperacja jest zdominowana i w związku z tym nie ma powodu, by nią grać.

Jest rok 1950. John Nash, doktorant z matematyki na Uniwersytecie Princeton, opracowuje swoją koncepcję równowagi – para strategii (strategia gracza pierwszego, strategia gracza drugiego) stanowi równowagę Nasha, jeśli każda z nich jest najlepszą odpowiedzią na drugą; innymi słowy, żadnemu z graczy nie opłaca się jednostronnie zrezygnować z gry w równowadze, bo na pewno nic na tym nie zyska, a być może straci. Oczywiście jest, że para (Z,Z)

stanowi równowagę Nasha. W tym samym roku przeprowadzono eksperyment, w którym dwóch graczy zagrało ze sobą w dylemat więźnia 100 razy z rzędu. Okazało się, że zgodna kooperacja wystąpiła aż 60 razy, a obustronna zdrada tylko 14 razy.

Powyższe wyniki pokazano Nashowi. Nie zgodził się on jednak z sugestią, że eksperyment ten jest testem jego koncepcji równowagi. Nie można interpretować go, mówił, jako ciągu niezależnych gier, lecz raczej jako jedną grę z wieloma ruchami. Rozważmy więc taką wielką grę, zwaną grą iterowaną, i znajdziemy jej równowagę Nasha. Zauważmy przede wszystkim, że w grze iterowanej mamy do dyspozycji bardzo wiele strategii. Strategią jest przepis mówiący nam, co mamy zrobić w każdym kroku (kooperować czy zdradzić) w zależności od tego, co zrobił oponent w poprzednich krokach. W poszukiwaniu równowag pomocna będzie technika zwana „indukcją wsteczną”, czyli cofanie się w czasie. W ostatnim, setnym kroku, gracze mogą pomyśleć następująco. Nasz wybór w ostatnim kroku nie ma żadnego wpływu na zachowanie się naszego przeciwnika w przyszłości (bo jej po prostu nie ma) i wobec tego zdradzimy, co jest racjonalnym zachowaniem się w pojedynczej grze. Tak samo myśli nasz przeciwnik i obydwoj wybieramy Z. Wiemy już, co się zdarzy w setnej rundzie, przejdźmy więc do rundy 99. Analogiczne rozumowanie doprowadza nas do zdrady. Indukcja wsteczna wymusza na nas zdradę w każdym kroku aż do rundy pierwszej. Wynika z tego jasno, że jedyną równowagą iterowanej gry dylemat więźnia jest zdrada w każdym kroku. Wygląda więc na to, że jedyną szansą na kooperację jest brak ostatniej rundy. Załóżmy, że gra będzie się toczyć w nieskończoność. Aby uniknąć nieskończonych wypłat, wprowadźmy ich dyskontowanie. Jest rzeczą oczywistą, że złotówka dzisiejsza nie jest równa złotówce jutrzejszej; na przykład za 4 złote jutrzejsze nie kupimy dzisiaj *Delty*. Praktycy finansowi mówią, że 1 złotówka dzisiaj jest równa $1 + r$ jutro, gdzie r jest jednodniową stopą procentową, czyli inaczej – złotówka jutrzejsza jest warta dzisiaj δ , gdzie $\delta = 1/(1 + r)$ nazywamy dyskontem. Wynika z tego, że jeśli będziemy zarabiać złotówkę codziennie aż do nieskończoności, to wartość obecna naszego strumienia pieniędzy będzie wynosić

$$1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 1/(1 - \delta)$$

po zsumowaniu nieskończonego szeregu geometrycznego o ilorazie δ . Ale dosyć tej matematyki finansowej, wracajmy do teorii gier. Przyjrzyjmy się następującej strategii – zaczynamy od kooperacji i kooperujemy dopóty, dopóki przeciwnik nas nie zdradzi, a jeśli to nastąpi, to my zdradzać będziemy już zawsze. Udowodnimy, że strategia ta, nazwijmy ją Zemsta do Końca (ZdK), jest równowagą Nasha, jeśli tylko δ jest odpowiednio bliska jedności.

Twierdzenie. *(ZdK,ZdK) jest równowagą Nasha, jeśli $\delta \geq 3/5$.*

Dowód. Wystarczy udowodnić, że ZdK jest najlepszą odpowiedzią na ZdK. Załóżmy, że nasz przeciwnik gra ZdK. Nasza wypłata z gry ZdK jest równa $3/(1 - \delta)$. Jeżeli jednak w którymś momencie zdradzimy i zainkasujemy 5, to od następnego momentu przeciwnik nasz będzie zawsze zdradzał i w związku z tym możemy już tylko dostać $1/(1 - \delta)$. Jeżeli $3/(1 - \delta) \geq 5 + 1/(1 - \delta)$, czyli $\delta \geq 3/5$, to ZdK jest najlepszą odpowiedzią na ZdK, a więc (ZdK, ZdK) jest równowagą Nasha.

Oczywiście (Zawsze Zdradzaj, Zawsze Zdradzaj) jest również równowagą Nasha. Jest jeszcze jedna bardzo ciekawa strategia – Wet za Wet. Rozpoczynamy od współpracy, a następnie powtarzamy ruch przeciwnika z poprzedniej rundy, a więc mścimy się, gdy zdradził i nagradzamy go, gdy kooperował. Poprosimy teraz ciekawskiego Czytelnika, aby obliczył, dla jakich δ (Wet za Wet, Wet za Wet) jest równowagą Nasha. Mamy więc kilka równowag Nasha. Pojawia się klasyczny problem wyboru równowagi Nasha.

W 1980 roku Robert Axelrod, profesor nauk politycznych na Uniwersytecie w Michigan (posiadacz licencjatu z matematyki), przeprowadził następujący eksperyment. Poprosił teoriogrowców, psychologów, socjologów i ekonomistów o przesłanie swoich strategii dla nieskończenie-iterowanego dylematu więźnia. Strategie te brały udział w turnieju, rozgrywaną każdą z każdą 200 rund dylematu więźnia (bez dyskontowania). Dla każdej ze strategii komputer obliczał uśrednioną po wszystkich spotkaniach sumę wypłat. Okazało się, że najlepsza była strategia Wet za Wet zaproponowana przez Anatola Rapoport, która zdobyła 504 punkty na 1000 możliwych. W następnym etapie strategii reprodukowały się z liczbą potomków proporcjonalną do uzyskanego wyniku. Wzrastał więc procentowy udział strategii z większymi wypłatami – dobór naturalny Darwina w akcji. Po czym znowu każda ze strategii grała z każdą inną i znowu następną generacją była wynikiem doboru naturalnego. Po wielu generacjach Wet za Wet okazał się strategią najczęściej występującą w populacji. Innymi słowy, Wet za Wet zachowywał się prawie jak punkt stabilny opisanego powyżej układu dynamicznego. Nie jest on jednak punktem asymptotycznie stabilnym, ani, jakby to powiedzieli biolodzy, strategią ewolucyjnie stabilną. Po pierwsze, jeżeli do populacji wet-za-wetowców dodamy trochę wiecznych kooperantów, to mogą oni wечно z nimi współistnieć. Nie wiemy też, czy nie istnieje jakaś wymyślna strategia, która nie byłaby lepsza od Wetu za Wet. Trwają nadal poszukiwania prostego, ale jednocześnie realistycznego modelu dynamicznego, w którego asymptotycznie stabilnych równowagach obecne będą zachowania altruistyczne.

Analizą matematyczną układów dynamicznych, których stabilnymi punktami są równowagi Nasha, zajmuje się teoria gier ewolucyjnych, o której postaramy się napisać słów kilka w przyszłości.




mała delta

Kolorowanie splotów

– Tato, kup mi na urodziny 15-godzinny zegar – oświadczył Paweł. Widząc nasze zdziwione miny, dodał: – Wtedy lekcja w szkole będzie naprawdę trwała godzinę.

– To nie byłoby najgorzej, gdyby godziny dzienne były krótsze od nocnych – podchwycił Tomek, który sypia tylko 5–6 godzin z powodu nadmiaru prac domowych zadawanych w liceum, które zaczął w tym roku. Pawełek jednak nie to miał na myśli, bo wyjaśnił:

– W szkole rozpatrywaliśmy zegary, zaczęliśmy od 3-godzinnego,  potem rysowaliśmy wielką tabelkę zegara 11-godzinnego, a następnie rozpatrywaliśmy zegar abstrakcyjny o n -godzinach, który nazwaliśmy Z_n .

– Ja wiem – przerwał Tomek – gdy wskazówka wykona obrót (po n godzinach), to wraca do wyjściowej pozycji, czyli $n = 0$ w Z_n – to tak, jakbyśmy brali resztę z dzielenia przez n – dodał.

– Właśnie tak – potwierdził Pawełek. – Czy to nie śmieszne, że $2 + 2 = 0$ w Z_4 ?

Tutaj wtrąciłem, że Z_n nazywa się grupą cykliczną o n elementach, zegar jest tylko ilustracją, a Z nie pochodzi od zegara, ale od niemieckiego słowa *Zahl*, które znaczy *Liczba*...

Pawełek przerwał mi.

– Wiemy, wiemy, to nudne i łatwe, a niemieckiego nie znamy, lepiej powiedz, Tato, czy tej grupy zegara można użyć do węzłów i splotów? Nie dałem długo na siebie czekać.

– Czy wiecie, że 3-kolorowanie diagramu splotu, które dyskutowaliśmy w zeszłym roku, ma związek z zegarem 3-godzinnym?

– 3 kolory, 3 godziny, coś w tym musi być – zamyślił się Tomek. – Ale jak dodawać kolory? – dodał.

– Pewnie żółty i niebieski dadzą zielony, ale jak odejmować kolory? – szybko wtrącił Paweł.

Nie dając się sprowokować, powiedziałem do Tomka:

– Czy pamiętasz, jak definiowaliśmy 3-kolorowanie splotów? Użyj zamiast kolorów (czerwony, zielony, niebieski) liczb 0, 1, 2, jak w zegarze Z_3 .

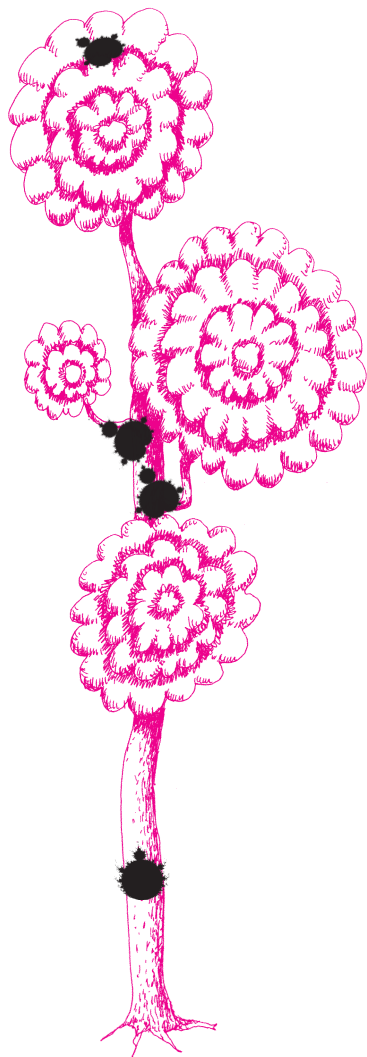
Tomek przypominał sobie.

– Rysujemy węzeł płasko, zaznaczając w punktach przecięcia, która linia idzie górą, a która dołem.

– Zgadza się – potwierdziłem. – To nazywamy diagramem węzła czy splotu.

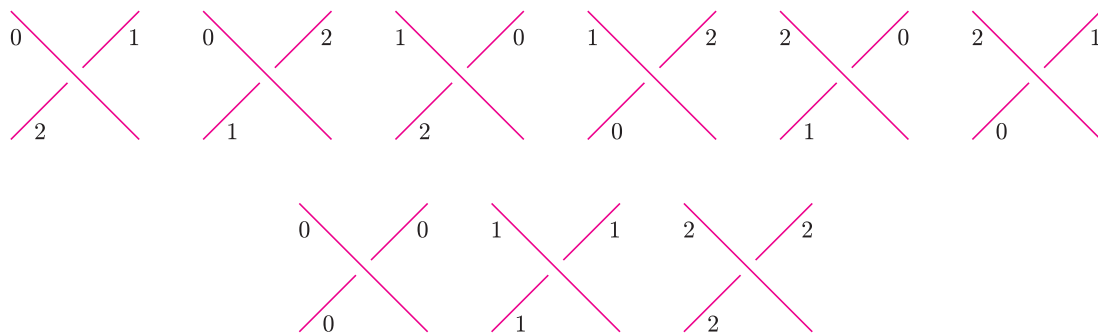
– Potem – ciągnął Tomek – malujemy diagram trzema kolorami, w ten sposób, że zmiana koloru może nastąpić tylko, gdy przerywamy linię (przed tunelem), ponadto w każdym skrzyżowaniu musimy mieć kolory zgodnie z jakąś regułą, ale nie pamiętam jej – dokończył.

– Reguła jest taka, że w każdym skrzyżowaniu używamy trzech różnych kolorów lub tylko jednego koloru.

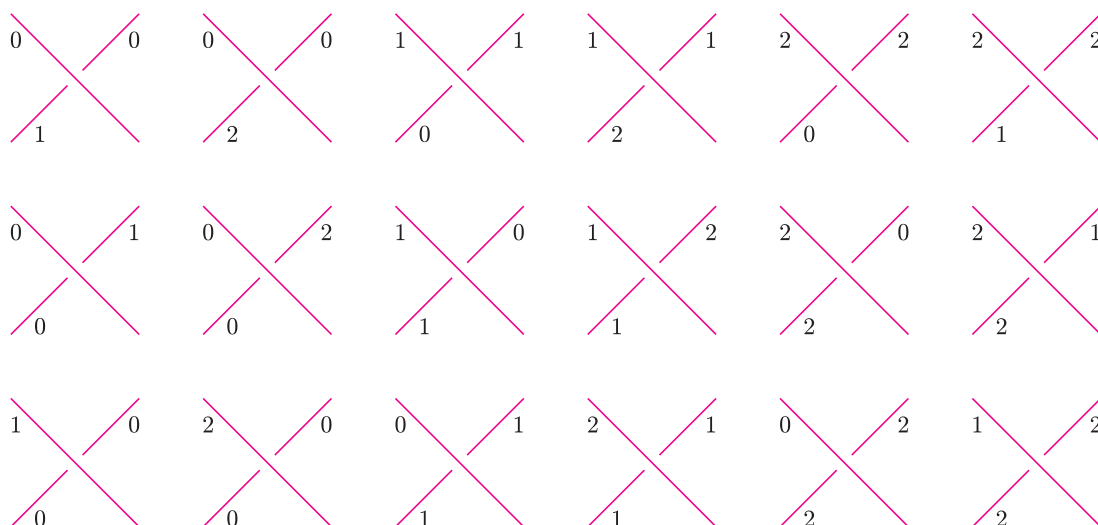




Mamy więc następujące możliwości.



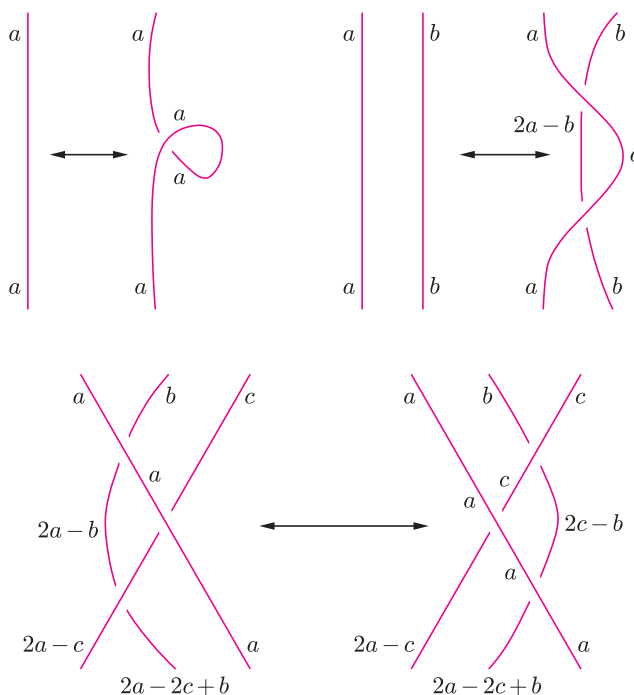
- Czy widzicie jakąś regułę? – dokończyłem. Nikt się nie odezwał.
- Dodajcie trzy liczby ze skrzyżowania – odpowiedziałem.
- Zawsze zero na zegarze – ucieszył się Paweł – oto nasza reguła!
- Sprawdźmy lepiej niedopuszczone 3-kolorowania – studził zapał Tomek.



- Wychodzi zawsze 1 lub 2, nigdy 0 – Tomek był przekonany. Mamy więc następującą zasadę – podsumowałem – dopuszczamy tylko takie 3-kolorowania, które w każdym skrzyżowaniu dodają się do 0 w Z_3 .
- To jaką regułę znajdziemy dla dowolnego Z_n ? Czy też suma kolorów ma się równać zero? – zaciekawil się Pawełek.
- To niemożliwe – zauważył Tomek. – Kolorowanie pętli tym samym kolorem, powiedzmy 1, dałoby $1 + 1 + 1 = 0$, co zachodzi tylko w Z_3 .
- Świetna obserwacja – pochwaliłem. – Nasza formuła będzie miała formę $2a = b + c$ w Z_n .
- A co z Z_3 ? – zapytał Pawełek. – Czy zmieniliśmy reguły gry?
- Pawełku, w Z_3 , $2a = -a$, czyli równość $2a = b + c$ daje to samo co $-a = b + c$ i dalej $a + b + c = 0$.
- Sprytnie – powiedział Pawełek.
- Ale co właściwie będziemy sprawdzać? – Tomek miał wątpliwości.
- Kolorowania mogą chyba być różne dla różnych diagramów tego samego splotu.
- Tak – zgodziłem się – ale nie zmieni się liczba kolorowań n kolorami, choć same kolorowania mogą się zmienić. Oznaczmy liczbę n -kolorowań diagramu D przez $col_n(D)$; teraz naszą obserwację możemy precyzyjnie sformułować (za amerykańskim matematykiem R. Foxem, 1956): Liczba n -kolorowań diagramu, $col_n(D)$, jest niezmiennikiem splotu, czyli nie zmienia się przy ruchach Reidemeistera.



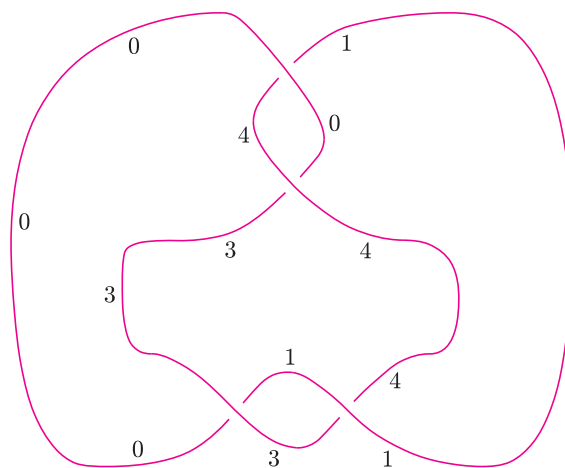
Formalny dowód zostawmy Czytelnikom, nie jest on trudny, wskazówką jest rysunek.



– Poprzednim razem mówiłeś, Tata, że do pokazania, iż węzeł ósemkowy nie jest trywialny, potrzeba 5-kolorowania – przypomniał sobie Tomek – zrobimy to teraz jako ćwiczenie.

– Tomku, to jest łatwiejsze niż analiza *Wielkich nadziei* Dickensa, którą robiłeś całą ostatnią noc – wtrącił trochę ironicznie Pawełek i kontynuował:

– Trywialny węzeł ma tylko trywialne kolorowania, bo nie ma skrzyżowań, a dla węzła ósemkowego zaraz znajdziemy nietrywialne kolorowanie; oto ono – dodał po chwili bardzo ucieszony swoim sukcesem.



– Chyba nie ma w tym nic złego, że użyłem tylko czterech kolorów? – zaniepokoił się po chwili.

– To jest dozwolone, działałeś przecież w Z_5 – uspokoilem go. – Ósemka nie jest trywialna!

Z pomocą Tomka i Pawelka przygotował Józef PRZYTYCKI

1. Jeśli p, q jest parą liczb bliźniaczych (tzn. są to liczby pierwsze różniące się o 2) większych od 3, to suma $p + q$ jest podzielna przez 12.
2. Niech n będzie liczbą naturalną i p – liczbą pierwszą większą od $n + 1$. Wówczas suma $1^n + 2^n + 3^n + \dots + (p - 1)^n$ jest podzielna przez p .
3. Niech k będzie liczbą naturalną nieparzystą. Wówczas suma $1 + 2 + \dots + n$ dzieli sumę $1^k + 2^k + \dots + n^k$.
4. Jeśli pewien wyraz rosnącego ciągu arytmetycznego liczb naturalnych jest n -tą potęgą liczby naturalnej, to ciąg ten zawiera nieskończenie wiele n -tych potęg liczb naturalnych.
5. Niech $m \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Część całkowita sumy

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

jest równa $2m - 2$.

6. Niech m i n będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi. Jeśli liczby a^m i a^n są wymierne (całkowite), to liczba a jest wymierna (całkowita).

$$7. \underbrace{33\dots33}_{n \text{ cyfr}} < \sqrt{\underbrace{11\dots11}_{2n \text{ cyfr}}} < \underbrace{33\dots34}_{n \text{ cyfr}}, \quad \underbrace{66\dots66}_{n \text{ cyfr}} < \sqrt{\underbrace{44\dots44}_{2n \text{ cyfr}}} < \underbrace{66\dots67}_{n \text{ cyfr}}.$$

Nadesłał Witold BEDNAREK

Twierdzenie Gaussa orzeka, że cyrklem i linijką można skonstruować n -kąć foremny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych całkowitych nieujemnych k i l

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_l,$$

gdzie p_i są różnymi liczbami pierwszymi Fermata, to znaczy liczbami pierwszymi postaci $2^{2^m} + 1$. Wśród liczb tej postaci liczby pierwsze otrzymuje się dla $m = 0, 1, 2, 3, 4$, czyli są to 3, 5, 17, 257, 65537. Dla $m = 5$ otrzymuje się już liczbę złożoną, co pierwszy odkrył Euler. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} 4294967297 &= 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 2^{32} + 5^4 \cdot 2^{28} - (5^4 \cdot 2^{28} - 1) = \\ &= 2^{28}(2^4 + 5^4) - (5^2 \cdot 2^{14} + 1)(5 \cdot 2^7 + 1)(5 \cdot 2^7 - 1) = \\ &= 641 \cdot (2^{28} - (5^2 \cdot 2^{14} + 1)(5 \cdot 2^7 - 1)). \end{aligned}$$

Wśród liczb Fermata z m większym od 5 nie udało się, jak dotąd, znaleźć liczby pierwszej. Największe m , dla którego stwierdzono, że liczba Fermata jest złożona, to 23471, choć nie sprawdzono wszystkich „po drodze”. Sporo przyjemności może przynieść sprawdzenie, że dla $m = 73$ otrzymujemy liczbę złożoną. Można to stwierdzić na sposób Eulera: jednym z czynników jest $5 \cdot 2^{75} + 1$ (mamy tu 75 zamiast 7, jak u Eulera).

M. K.

Liczba n jest pierwiastkiem pierwotnym w systemie dziesiętkowym, jeśli jej odwrotność ma okres długości $n - 1$. Na przykład

$$\frac{1}{7} = 0, (142857),$$

więc 7 jest pierwiastkiem pierwotnym. Podobnie pierwiastkami pierwotnymi są np. 17, 19, 23, 29, 97, 337, a nie są np. 2, 3, 5, 11, 13. Do tej pory nie ma dobrego kryterium rozstrzygnięcia, czy dana liczba n jest pierwiastkiem pierwotnym, czy nie. Gauss, będąc w szkole, znalazł okresy odwrotności wszystkich liczb do 1000, a więc do tysiąca pierwiastki pierwotne są już od dwustu lat znane.

M. K.

Szklana kula, zrzucona swobodnie z pewnego piętra n -piętrowego wieżowca, może się stłuc. Zależy to nie od kuli, lecz od wysokości. Dysponujemy k takimi kulami. Należy ustalić minimalną liczbę prób, które trzeba wykonać, zrzucając kule z pięter tego wieżowca, aby wykryć numer najwyższego piętra, po przrzuconiu z którego kula nie stłucze się.

Oznaczmy przez $f(n, k)$ żadaną liczbę prób. Jest oczywiste, że $f(n, 1) = n$. Spróbujmy znaleźć $f(n, 2)$. Oczywiście zachodzą równości:

$$f(1, 2) = 1, \quad f(2, 2) = 2, \quad f(3, 2) = 2, \\ f(4, 2) = 3, \quad f(5, 2) = 3, \quad f(6, 2) = 3.$$

Zanim przystąpimy do poszukiwania ogólnego wzoru na $f(n, 2)$, postaramy się obliczyć jakąś konkretną jej wartość, na przykład $f(100, 2)$.

Pierwsze, co przychodzi do głowy, to próbować kolejno testować piętra o numerach 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100. Prowadzi to do 19 prób. Ale czy rzeczywiście trzeba ich aż tyle?

Spróbujmy podejść do rozwiązania tego zadania bardziej rozważnie.

Niech k będzie najmniejszą liczbą niezbędnych rzutów kul. Jest oczywiste, że pierwszą próbę trzeba przeprowadzić z piętra o numerze k . Drugą zaś próbę przeprowadzamy z piętra o numerze $k + (k - 1) = 2k - 1$, trzecią z piętra o numerze $k + (k - 1) + (k - 2) = 3k - 3$ i tak dalej. Próba o numerze k odbędzie się z piętra o numerze

$$k + (k - 1) + \dots + 1 = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Zatem $\frac{k(k + 1)}{2} \geq 100$. Stąd $k = 14$ i otrzymujemy, że $f(100, 2) = 14$.

Rzuty należy przeprowadzać kolejno z następujących pięter:

$$14, 27, 39, 50, 60, 69, 77, 84, 90, 95, 99, 100.$$

Teraz już wiadomo, jak rozwiązać zadanie w przypadku ogólnym dla dwóch kul.

Niech $f(n, 2) = k$. Wtedy

$$\frac{k(k + 1)}{2} \geq n.$$

Stąd

$$k \geq \frac{\sqrt{8n + 1} - 1}{2}.$$

Oznaczmy przez $\lceil x \rceil$ najmniejszą liczbę całkowitą, która jest nie mniejsza niż x . Mamy

$$f(n, 2) = \left\lceil \frac{\sqrt{8n + 1} - 1}{2} \right\rceil.$$

Teraz zajmijmy się znalezieniem wzoru na $f(n, 3)$.

Łatwo jest znaleźć kilka początkowych wartości:

$$f(1, 3) = 1, \quad f(2, 3) = 2, \quad f(3, 3) = 2, \quad f(4, 3) = 3, \\ f(5, 3) = 3, \quad f(6, 3) = 3, \quad f(7, 3) = 3, \quad f(8, 3) = 4.$$

Spróbujmy obliczyć $f(100, 3)$.

Oznaczmy tę liczbę przez k . Jest oczywiste, że pierwszą próbę należy przeprowadzić z piętra o numerze

$$\frac{(k - 1)k}{2} + 1.$$

Drugą próbę należy przeprowadzić z piętra o numerze

$$\frac{(k - 1)k}{2} + 1 + \frac{(k - 2)(k - 1)}{2} + 1.$$

Trzecią próbę przeprowadzamy z piętra o numerze

$$\frac{(k - 1)k}{2} + 1 + \frac{(k - 2)(k - 1)}{2} + 1 + \frac{(k - 3)(k - 2)}{2} + 1$$

i tak dalej. Próbę o numerze k przeprowadzamy z piętra o numerze

$$\frac{(k - 1)k}{2} + 1 + \frac{(k - 2)(k - 1)}{2} + 1 + \dots + \frac{1 \cdot 2}{2} + 1 + 1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left((k - 1)k + (k - 2)(k - 1) + \dots + 1 \cdot 2 \right) + k =$$

$$= \frac{1}{2} \left((k - 1)^2 + (k - 1) + (k - 2)^2 + (k - 2) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + 1^2 + 1 \right) + k =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(k - 1)k(2k - 1)}{6} + \frac{(k - 1)k}{2} \right) + k =$$

$$= \frac{(k - 1)k(2k - 1) + 3(k - 1)k + 12k}{12} =$$

$$= \frac{k(2k^2 - 3k + 1 + 3k - 3 + 12)}{12} =$$

$$= \frac{k(2k^2 + 10)}{12} = \frac{k(k^2 + 5)}{6}.$$

A więc

$$\frac{k(k^2 + 5)}{6} \leq 100.$$

Stąd $k = 9$ i $f(100, 3) = 9$.

Oznacza to, że rzuty należy przeprowadzać kolejno z następujących pięter:

$$37, 66, 88, 100.$$

Teraz już wiemy, jak rozwiązać zadanie w przypadku ogólnym dla trzech kul. Jeśli $f(n, 3) = k$, to

$$\frac{k(k^2 + 5)}{6} \geq n.$$

Tak, na przykład, $f(2003, 3) = 23$.

Mam nadzieję, że Czytelnik już zrozumiał, w jaki sposób należy podchodzić do rozwiązania zadania w przypadku ogólnym.

Na koniec proponuję Czytelnikowi, aby samodzielnie obliczył $f(2003, 4)$.

Graficzne przedstawianie brył czterowymiarowych

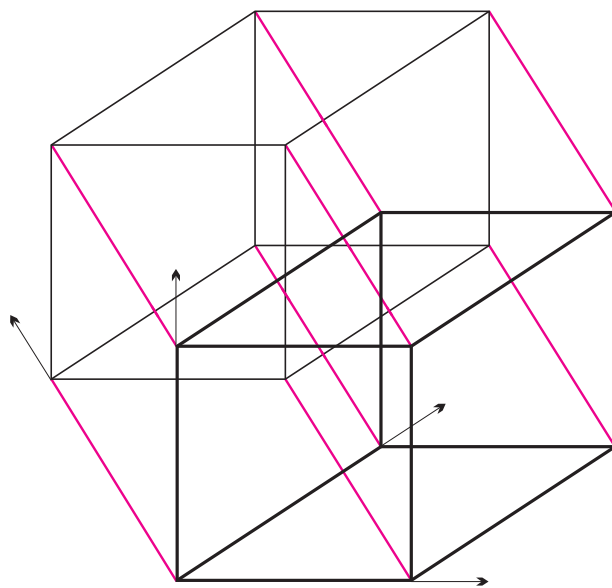
Adam NARKIEWICZ

Załóżmy, że chcemy przedstawić na rysunku czterowymiarowy hipersześcian. Na płaszczyźnie mamy jednak tylko dwie osie współrzędnych, musimy więc zdefiniować dwie kolejne. Niech pierwszą z nich będzie oś z , a drugą oś w . Te dwie nowe abstrakcyjne osie to linie proste przecinające układ współrzędnych w jego środku. Przyjmijmy, że oś z przecina osie x oraz y pod kątem α_x i α_y , odpowiednio. Niech ponadto dla osi w kąty przecięcia osi x i y wynoszą β_x i β_y .

Aby móc przystąpić do naszkicowania obrazu hipersześcianu, musimy jeszcze zdefiniować tzw. współczynnik skrócenia, który dla danej osi abstrakcyjnej jest stosunkiem długości odcinka jednostkowego na tej osi do długości odcinka jednostkowego na osi rzeczywistej. Ustalmy pewne Δ_z i Δ_w (są to współczynniki skrócenia odpowiednio osi z i w). Możemy teraz przystąpić do obliczeń.

Każdemu punktowi czterowymiarowej przestrzeni, $P = (x, y, z, w)$, przypisujemy punkt $P' = (x', y')$, gdzie

$$x' = x + z \cdot \cos \alpha_x \Delta_z + w \cdot \cos \beta_x \Delta_w, \quad y' = y + z \cdot \cos \alpha_y \Delta_z + w \cdot \cos \beta_y \Delta_w.$$



Rys. 1

W zależności od wyboru współczynników α_x , α_y , β_x , β_y , Δ_z i Δ_w uzyskujemy różne obrazy hipersześcianu, z których jeden przedstawiony jest na rysunku 1.

Warto teraz przyjrzeć się uważnie i dostrzec wszystkie sześciany stanowiące ściany hipersześcianu (ile ich jest?).

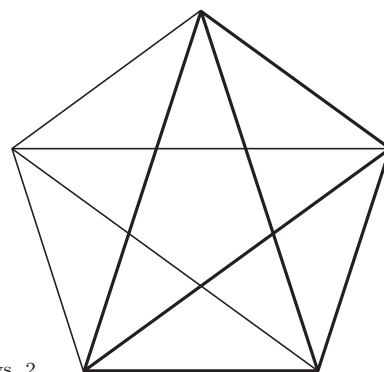
Zajmijmy się teraz bryłą będącą czterowymiarowym odpowiednikiem czworoboku foremnego. Należy on do ciągu figur, w którym każda kolejna

figura powstaje przez dodanie jednego wierzchołka do poprzedniej, tak by wszystkie były w jednakowej odległości. Pierwszą figurą tego ciągu jest odcinek, drugą trójkąt równoboczny, a trzecią czworobok foremny. Rozważmy czwartą figurę z tego ciągu. Łatwo zauważyć, że będzie to figura czterowymiarowa, mająca pięć wierzchołków. Szybko uzyskujemy ich współrzędne:

$$A = (0, 0, 0, 0), \quad B = (1, 0, 0, 0), \quad C = (1/2, \sqrt{3}/2, 0, 0),$$

$$D = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3, 0), \quad E = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/12, \sqrt{10}/4).$$

Spróbujmy teraz wykonać rzut tej figury w dwóch wymiarach. W tym celu znów musimy zdefiniować dwie dodatkowe osie, nazwijmy je w i z , podobnie jak w przypadku hipersześcianu. Na szczęście teraz mamy do czynienia tylko z pięcioma wierzchołkami (hipersześcian ma ich 16), dlatego możemy je wszystkie przedstawić. Ustalmy współczynnik skrócenia i kąty pomiędzy osiami. Jeden z możliwych wyników przedstawia rysunek 2.



Rys. 2



Rozwiązanie zadania F 599.

Niech $\rho_0 v S$ będzie masą wody wychodzącej w jednostce czasu z rury przy prędkości strumienia v i przekroju S . Wtedy moc pompy wynosi:

$$P_0 = \frac{\rho_0 v S v^2}{2}.$$

Po podłączeniu rurki o wysokości h moc pompy musi być równa:

$$P = \frac{\rho_0 u S u^2}{2} + \rho_0 u S g h,$$

gdzie u – prędkość wody wychodzącej przez koniec dodatkowej rurki. Mamy też:

$$v^2 = 2gH, \quad u^2 = 2g(H - h).$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{u}{v} \left[\left(\frac{u}{v} \right)^2 + \frac{2gh}{v^2} \right] = \frac{u}{v} = \sqrt{1 - \frac{h}{H}}.$$



Rozwiązanie zadania M 1030.

Niech

$$b_n \equiv a_n \pmod{m}.$$

Wówczas

$$b_n \in \mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Różnych trójek

$$(x, y, z) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$$

jest tylko skończenie wiele, więc równość

$$(b_{k-2}, b_{k-1}, b_k) = (b_{l-2}, b_{l-1}, b_l)$$

zachodzi dla pewnych $k \neq l$. Przedłużając definicję ciągu (a_n) dla $n \leq 0$, mamy

$$a_0 = a_3 - a_1 = 1 - 1 = 0.$$

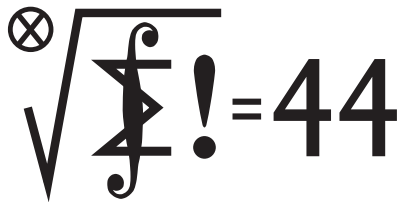
Wówczas

$$b_{k+t} = b_{l+t}$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{Z}$, również dla t ujemnych, bo

$$b_{n-2} \equiv b_{n+1} - b_{n-1} \pmod{m}.$$

Zatem ciąg b_n jest okresowy i $b_n = b_0 = 0$ dla nieskończenie wielu n .



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2003

Przypominamy treść zadań:

457. Na płaszczyźnie jest dany zbiór złożony z $2n$ punktów ($n \geq 2$), których obie współrzędne są liczbami całkowitymi z przedziału $(1; n)$. Dowieść, że pewne cztery punkty tego zbioru są wierzchołkami równoległoboku.

458. Wyznaczyć najmniejszą liczbę a , taką że nierówność $(1 - a) \sin x + a \operatorname{tg} x > x$ jest spełniona dla wszystkich $x \in (0; \pi/2)$.

457. Weźmy pod uwagę wszystkie proste poziome, na których leżą jakiegokolwiek punkty zbioru A (rozważanego zbioru $2n$ punktów). Na każdej takiej prostej kolorujemy na pomarańczowo ten punkt zbioru A , który jest położony najbardziej na lewo; pozostałe punkty zbioru A kolorujemy na niebiesko. Jest więc co najmniej n punktów niebieskich.

Każdemu punktowi niebieskiemu przyporządkujemy jego odległość od punktu pomarańczowego leżącego na tej samej prostej poziomej. Wartościami owych odległości są liczby całkowite ze zbioru $\{1, \dots, n-1\}$. Istnieją więc dwa punkty niebieskie, N_1 i N_2 , którym została przyporządkowana ta sama liczba. Punkty N_1 i N_2 leżą na różnych prostych poziomych. Niech P_i będzie punktem pomarańczowym leżącym na prostej poziomej przechodzącej przez punkt N_i ($i = 1, 2$). Czworokąt $P_1N_1N_2P_2$ jest niezdegenerowanym równoległobokiem.

458. Dla dowolnej stałej a badamy funkcję

$$f_a(x) = (1 - a) \sin x + a \operatorname{tg} x - x.$$

Obliczamy jej kolejne pochodne (i ich wartości w punkcie 0):

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= (1 - a) \cos x + a(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 1, & f'_a(0) &= 0, \\ f''_a(x) &= (a - 1) \sin x + 2a(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x), & f''_a(0) &= 0, \\ f'''_a(x) &= (a - 1) \cos x + 2a(1 + 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg}^4 x), & f'''_a(0) &= 3a - 1. \end{aligned}$$

Z uzyskanych równości wynika, że jeżeli $a < 1/3$, to funkcja f_a przyjmuje w prawostronnym otoczeniu punktu 0 wartości ujemne; rozważana nierówność nie jest więc spełniona.

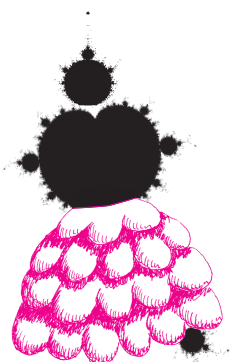
Niech teraz $a = 1/3$. Dla $x \in (0; \pi/2)$ zachodzą znane nierówności

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \quad \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}.$$

Wobec tego

$$f_{1/3}(x) = \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \operatorname{tg} x - x > \frac{2}{3} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{1}{3} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) - x = 0.$$

To pokazuje, że $a = 1/3$ jest najmniejszą stałą o postulowanej własności.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
449 ($WT = 1,58$) i **450** ($WT = 3,00$)
z numeru 11/2002

Janusz Olszewski – Suwałki	47,35
Tomasz Wietecha – Tarnów	44,54
Jerzy Cisło – Wrocław	41,81
M. Łupieżowicz – Zebrzydowice	35,35

Znów parada Weteranów – i to jaka!
Janusz Olszewski i Tomasz Wietecha
kończą szóstą rundę: „podwójna norma
weterańska”.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2003

Przypominamy treść zadań:

354. Na końcach nieważkiego pręta o długości $2l = 2$ m zamocowane są dwa małe ciała, każde o masie m . Ile wynosi okres małych wahań tego pręta wokół pozycji pionowej, jeśli punkt zawieszenia pokrywa się ze środkiem pręta? Rozważyć dwa przypadki:

- a) pole grawitacyjne jest radialne (skierowane do środka Ziemi), a jego natężenie ma jednakową wartość g w okolicy górnego i dolnego ciała,
- b) pole grawitacyjne jest takie, jakby cała masa Ziemi była skupiona w jej środku.

355. Chemik pozostawił w otwartym naczyniu ciekły azot, który powoli parował. Po pewnym czasie analiza wykazała, że w azocie jest domieszka tlenu. W miarę ubywania azotu procent tlenu rósł, aż ostatnia partia cieczy składała się wyłącznie z ciekłego tlenu. Na tej podstawie chemik wywnioskował, że zrealizowane zostało marzenie alchemików – wykryta została transmutacja pierwiastków. Czy to prawda? Wyjaśnić, co się stało.

354. Oznaczmy przez ε kąt odchylenia pręta od pionu. Według twierdzenia cosinusów odległości każdej z mas od środka Ziemi są równe

$$R_1 = \sqrt{R^2 + l^2 - 2Rl \cos \varepsilon},$$

$$R_2 = \sqrt{R^2 + l^2 + 2Rl \cos \varepsilon},$$

gdzie R – odległość od środka Ziemi do środka pręta. Zgodnie z założeniem małych drgań przybliżymy $\cos \varepsilon \approx 1 - \varepsilon^2/2$ i takie samo przybliżenie (rozwiniecie z dokładnością do wyrazów typu ε^2) zastosujemy do pierwiastka:

$$R_1 \approx R - l + \frac{Rl\varepsilon^2}{2(R-l)},$$

$$R_2 \approx R + l + \frac{Rl\varepsilon^2}{2(R+l)}.$$

W przypadku a) zmiana energii potencjalnej jest dana wyrażeniem

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg(\Delta R_1 + \Delta R_2),$$

natomiast w przypadku b) należy ją wyliczyć ze wzoru

$$\Delta E_{\text{pot}} = \frac{GMm}{(R-l)^2} \Delta R_1 + \frac{GMm}{(R+l)^2} \Delta R_2,$$

gdzie G – stała grawitacji, M – masa Ziemi. Należy tu podstawić

$$\Delta R_1 \approx \frac{Rl\varepsilon^2}{2(R-l)} \quad \text{i} \quad \Delta R_2 \approx -\frac{Rl\varepsilon^2}{2(R+l)},$$

a ponadto uprościć wzory, korzystając z warunku $R \gg l$.

Otrzymujemy w przypadku a) przyrost energii potencjalnej równy

$$E_{\text{pot}} \approx mg \frac{l^2}{R} \varepsilon^2,$$

a w przypadku b) – trzykrotnie większy.

Energia kinetyczna opisana jest wzorem

$$E_{\text{kin}} = ml^2 \omega^2$$

(ω – prędkość kątowna), a dalej łatwo już wyznaczyć okres drgań

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad T_b = 2\pi \sqrt{\frac{R}{3g}}.$$

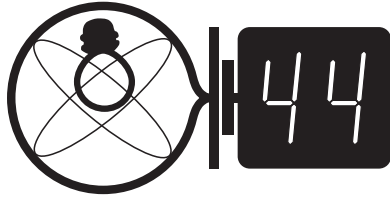
Zauważmy, że T_a jest okresem obiegu Ziemi przez satelitę na niskiej orbicie. Wartości liczbowe wynoszą

$$T_a = 5063 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 24 \text{ min},$$

$$T_b = 2923 \text{ s} \approx 49 \text{ min}.$$

Ciekawe, że oba okresy są niezależne od długości pręta, skąd można wywnioskować, że taki sam byłby też np. okres drgań cienkiego pręta o masie jednorodnie rozłożonej.

355. Temperatura wrzenia ciekłego azotu pod ciśnieniem normalnym wynosi -196°C , a tlenu -183°C , czyli jest o 13°C wyższa. Dlatego tlen z powietrza będzie się skraplał nad ciekłym azotem i „rozcieńczał” go.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
350 (WT = 1,80) i 351 (WT = 3,37)
z numeru 1/2003

Marek Wójcicki	– Szczecin	43,87
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	39,74
Tomasz Wietecha	– Tarnów	35,93
Marian Łupieżowicz	– Gliwice	20,09

Patrz w niebo

Jasne i ciemne równoleżnikowe pasy na Jowiszu widać już przez niewielki teleskop i obraz ten jest znany nawet nie-astronomom. Powszechnie wiadomo też, że Jowisz emituje więcej energii, niż dostaje jej w postaci promieniowania słonecznego. Prawdopodobnie energia ta pochodzi z nieustannego powolnego osiadania globu planety pod własnym ciężarem. Atmosfera Jowisza jest zatem silnie grzana od spodu, wywołuje to silne ruchy pionowe mas gazu, a szybki ruch obrotowy planety (dokładniej, wywołane przezeń przyspieszenie Coriolisa) powoduje odchylenie się wszelkich wiatrów ku kierunkowi wschód-zachód. Stąd pasiasty wygląd tarczy Jowisza.

W ogromnym skrócie tak mogłoby być, a szczegóły mechanizmu, dzięki któremu wewnętrzne ciepło planety byłoby przerabiane na energię potężnych wiatrów, są do dziś niejasne. Od niedawna wydaje się, że poznano przynajmniej jeden z elementów tego mechanizmu: gigantyczne błyskawice. Mianowicie grupa amerykańskich astronomów prześledziła za pomocą sondy Galileo pewien burzowy układ jowiszowych chmur w pobliżu Wielkiej Czerwonej Plamy. Astronomowie ci stwierdzili, że chmury, w których podczas nocy „błyskało”, po kilku godzinach znajdowały się na bocznej stronie planety około 50 km wyżej. Badacze wnioskują stąd, że to właśnie błyskawice pośredniczą w transporcie energii z dołu do góry, przekazując ją w tempie $5 \cdot 10^{15}$ W (w skali całego globu). Błyskawicom tym towarzyszyłyby gwałtowne ruchy pionowe mas atmosfery, wywołujące z kolei wielkie wiry przekazujące ostatecznie swą energię równoleżnikowym wiatrom. Wszystko wskazuje na to, że błyskawice są też odpowiedzialne za nadmiar acetyleny w atmosferze Jowisza. W zasadzie może on powstawać z metanu pod wpływem promieniowania słonecznego, ale nie w takich ilościach, jakie się obserwuje. Narzuca się więc możliwość, że acetylen powstaje w niższych warstwach atmosfery w wyniku działania błyskawic (w tempie szacowanym na 50 t/s) i stamtąd prądy wstępujące wynoszą go na dużą wysokość, gdzie już jest obserwowany.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania F 600.

Siła wywierana na kamień przez jeden strumień wynosi:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho_0 v'^2 S',$$

gdzie ρ_0 jest gęstością wody, v' jest prędkością wody na wysokości h , a S' polem przekroju strumienia na tej wysokości. Zatem

$$mg = n\rho_0 v'^2 S' = n\rho_0 v S v',$$

bo z nieściślności wody wynika $v' S' = v S$. Ponadto

$$v'^2 = v^2 - 2gh.$$

Otrzymujemy zatem

$$h = \frac{1}{2g} \left[v^2 - \left(\frac{mg}{n\rho_0 v S} \right)^2 \right].$$



Rozwiązanie zadania M 1032.

Przyjmijmy $b_i = a_0 + \dots + a_i$. Ponieważ $a_n = -a_{n-1}$ gdy $2 \nmid n$ oraz $a_i = \pm 1$, więc

$$(*) \quad \begin{cases} b_i = \pm 1 & \text{gdy } 2 \nmid i \text{ oraz} \\ b_i = 0 & \text{gdy } 2 \mid i. \end{cases}$$

Niech $k \geq -1$ będzie najmniejszą liczbą, dla której istnieje takie $T \geq 1$, że

$$(a_{k+1}, \dots, a_{k+T}) =$$

$$= (a_{k+T+1}, \dots, a_{k+2T}) = \\ = (a_{k+2T+1}, \dots, a_{k+3T}).$$

Niech T też będzie możliwie najmniejsze.

Niech

$$S = a_{k+1} + \dots + a_{k+T}.$$

Wówczas

$$b_k + S + S + S = b_{k+3T},$$

skąd, wobec (*), $b_k = S = 0$.

Zatem $2 \mid k+1$ i $2 \mid T$. Ale wówczas, dla $k' = \frac{k-1}{2}$ i $T' = T/2$, z definicji ciągu (a_n) mamy

$$(a_{k'+1}, \dots, a_{k'+T'}) =$$

$$= (a_{k'+T'+1}, \dots, a_{k'+2T'}) = \\ = (a_{k'+2T'+1}, \dots, a_{k'+3T'}),$$

co przeczy minimalności k i T .

Lipiec

W lipcowe wieczory w całej okazałości widać splecione gwiazdozbiory Węża i Wężownika. Mają one przedstawiać bynajmniej nie człowieka walczącego z wężem, lecz mitycznego lekarza Asklepiosa trzymającego w rękach potężnego węża, symbol lekarzy. Wąż ten – na niebie – jest tak długi, że Wężownik dzieli go swoją postacią na dwie rozłączne części. W części wschodniej, zwanej Ogonem Węża, znajduje się nieregularna i dość rozrzedzona otwarta gromada gwiazd M16 (NGC 6611) (około 6 mag), którą otacza mgławica o tych samych numerach katalogowych, ale która ma własną nazwę Orzeł (patrz okładka), takiego bowiem jej kształtu można dopatrzeć się na zdjęciach. Mgławica ta została sfotografowana przez teleskop Hubble'a, dzięki czemu powstał niezwykle efektowny kosmiczny obraz uderzający bogactwem szczegółów i plastyką. Na tle świecącego na czerwono wodoru mgławicy widać trzy ciemne kolumny pyłowe, z których w wielu miejscach wyłaniają się protogwiazdy. Orzeł jest więc, podobnie jak Wielka Mgławica w Orionie, obszarem gwiazdotwórczym, będącym częścią jeszcze większego obłoku molekularnego, leżącego w odległości 2,5 kpc.

Tym razem lipcowe niebo wieczorem jest ubogie w planety. Wenus i Saturn są w Bliźniętach, a Jowisz na granicy Raka i Lwa, planet tych więc praktycznie nie widać. Jedynie Mars, znajdujący się w Wodniku, wieczorem wschodzi i widać go do rana. Pełnia wypada 13 VII, a nów 29 VII. 17 VII Księżyc zakryje Marsa, ale zjawisko to w Polsce nie będzie widoczne (widać je będzie od centralnego Pacyfiku przez Amerykę do północnego Atlantyku). Żadnych zakryć jasnych gwiazd w lipcu nie będzie.

T. K.

KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (5)

Zastanówmy się, ile prostokątów 7×11 można wyciąć z kwadratowej kartki w kratkę o boku 1666.

Zakładając, że uda nam się tego dokonać bez niepotrzebnego marnotrawstwa, możemy mieć nadzieję na wycięcie 36046 prostokątów i pozostawienie tylko 14 kratek niewykorzystanych. Czy jednak taki optymistyczny wariant jest możliwy?

Okazuje się, że nie!

Ponumerujemy kratki kwadratu jak na rysunku 1, gdzie przedstawiono kwadrat o boku 16.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2
10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Rys. 1

Wówczas poza kwadratem o boku 5, znajdującym się w rogu kartki, każda z liczb od 1 do 11 występuje tyle samo razy.

Jeżeli wytniemy z kartki prostokąty 7×11 , to dzieląc każdy z nich na prostokąty 1×11 , otrzymamy sposób wycięcia pewnej liczby prostokątów 1×11 . Jednak każdy prostokąt 1×11 zawiera pole z liczbą 11. Zatem przy podziale kwadratu na prostokąty 1×11 co najmniej 25 kraterki musi zostać zmarnowanych. Nie da się więc wyciąć 36046 prostokątów 7×11 .

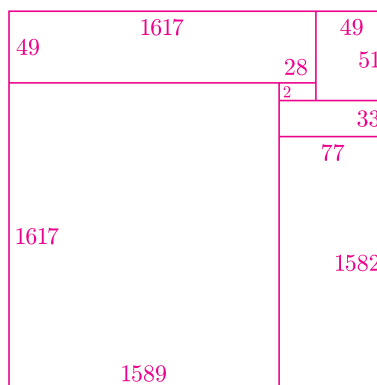
Czy da się wobec tego wyciąć 36045 prostokątów? Wówczas pozostałoby 91 pól niewykorzystanych.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (36')

Wyjaśnienie oszustwa (36): Rombami spełniającymi warunki zadania są nie tylko kwadraty. Wszystkie inne romby też spełniają warunki zadania!

Próbujmy. Kwadrat 1666×1666 dzielimy na prostokąty 49×1617 , 1617×1589 , 1582×77 , 33×77 , 2×28 i 49×51 .

Schemat podziału (bez zachowania proporcji) pokazany jest na rysunku 2.

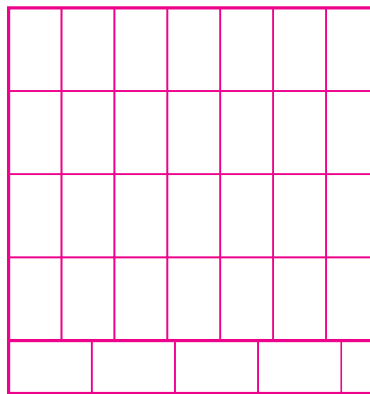


Rys. 2

Pierwsze cztery prostokąty daje się w oczywisty sposób podzielić bez strat na prostokąty 7×11 , gdyż każdy z tych prostokątów ma jeden bok o długości podzielnej przez 7, a drugi przez 11.

Prostokąt 2×28 , zawierający 56 pól, idzie w całości „na zmarnowanie”.

Pozostaje dokonać podziału prostokąta 49×51 na prostokąty 7×11 przy pozostawieniu niewykorzystanych $91 - 56 = 35$ pól. W tym celu dzielimy prostokąt na prostokąty 49×44 oraz 49×7 , z których pierwszy dzielimy na prostokąty 7×11 bez strat, a z drugiego wycinamy cztery prostokąty 7×11 , pozostawiając niewykorzystany prostokąt 7×5 (rysunek 3).



Rys. 3

Tym samym podzieliłiśmy kwadrat o boku 1666 na prostokąty 7×11 , pozostawiając tylko 91 pól niewykorzystanych.

Niech $ABCD$ będzie dowolnym rombem. Oznaczmy przez S obraz punktu C w obrocie o dowolny niezerowy kąt wokół prostej BD . Wówczas wszystkie ściany boczne ostrosłupa $ABCDS$ są trójkątami równoramionymi.

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl