



SPIS TREŚCI NUMERU 6 (349)

Zielone i czarne
Grzegorz Derfel

Co udowodnił
 Manindra Agrawal?
Jerzy Browkin

Zadania

Twierdzenie Du Faya
Paweł Kubit

O wyglądzie ciał w ruchu
Andrzej Nowojewski
Jakub Kallas
Andrzej Dragan

Aktualności

Wkładka olimpijska

Granica Eddingtona
Marcin Kiraga

Granica Roche'a

Granica Chandrasekhara

Mała Delta

Klub 44

Patrz w niebo

Czerwiec

Gammalimatias

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
 str. 1 Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hrynkiewicz, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Krzysztof Maślanka, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Zdzisław Pogoda, Michał Różyczka, Konrad Rudnicki, Grzegorz Sitarski, Andrzej Woszczyk,
 str. 2 Wiesław Żelazko – przewodniczący.
 Redaguje kolegium w składzie:
 str. 3 Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
 str. 4 Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski
 Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.
 Skład systemem TeX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL
 Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS
 str. 5 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**
 str. 8 Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.
 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
 str. 9 Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u
 str.10 1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
 str.11 2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.
 str.12 3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
 str.14 4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
 str.16 Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
 str.16 5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
 str.17 6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 do 5 XII – na I kwartał roku następnego,
 do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,
 do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,
 do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiwi.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wybór artykułów *Małej Delt*: <http://eduseek.ids.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Termodynamika czarnych dziur

Światło to fala elektromagnetyczna, czyli rozchodzące się w przestrzeni zaburzenie pola elektrycznego i magnetycznego. Długości fal świetlnych zajmują stosunkowo wąski przedział wśród wszystkich możliwych fal elektromagnetycznych (od około 400 nm dla fioletu do około 750 nm dla czerwieni), stanowiący widmo widzialne, pięknie prezentowane przez tęczę. Fale odpowiadające różnym barwom zawarte w dostarczonym przez Słońce świetle naturalnym mają niejednakowe natężenia. Światło o tym szczególnym składzie wywołuje wrażenie bieli. Z kolei czarne są substancje pochłaniające całe promieniowanie widzialne. Wrażenie barwne najczęściej jest skutkiem działania substancji (barwników), których molekuly pochłaniają światło z części widma. Pozostała część jest odbijana. Substancja zawierająca barwnik jest wtedy postrzegana jako kolorowa. Na przykład barwnik jest czerwony, jeśli pochłania głównie światło niebieskie i zielone.

Ponieważ fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną, światło może ulegać polaryzacji. W fali spolaryzowanej liniowo zaburzenie polega na tym, że wektor natężenia rozprzestrzeniającego się pola elektrycznego zmienia długość i zwrot, pozostając w jednej płaszczyźnie, przy czym jego koniec zakreśla płaską falistą linię – sinusoidę. W fali spolaryzowanej kołowo wektor o stałej długości przemieszcza się i jednocześnie obraca (jak łopata śmigła lecącego samolotu). Jego koniec zakreśla wtedy krzywą w przestrzeni – linię śrubową. Możliwe są oba kierunki obrotu – w prawo i w lewo. Światło zwykle można traktować jak wiele fal o polaryzacji liniowej; każdą z nich zaś można traktować jako sumę dwóch fal spolaryzowanych kołowo w prawo i w lewo.

W *Delcie 10/2002* opisany został „pozorny” charakter zielonego zabarwienia piór ptaków. Zielony kolor jest wynikiem interferencji światła w elementach struktury piór, które nie zawierają żadnego zielonego barwnika. W niniejszym artykule chciałbym przedstawić analogiczne zjawisko pozornego zabarwienia – też zresztą zielonego – występujące u pewnego chrząszcza.

Barwy odgrywają wielką rolę w świecie owadów. Dotyczy to zarówno otoczenia, w którym kolory niosą informację o życiowym znaczeniu, jak i ubarwienia samych owadów, które również bywa warunkiem przeżycia. Skrzydła motyli, ciała gąsienic lub pokrywy chrząszczy dostarczają wielu przykładów form zachwycających doborem kolorów i kształtem rysunku. Najczęściej wzory te powstają dzięki obecności barwników. Niektóre owady zawdzięczają swoje zabarwienie innemu zjawisku – interferencji światła w cienkich przezroczystych błonkach, które w różnej formie obecne są na powierzchni ciała. Bierze się to stąd, że niektóre spośród fal świetlnych odbitych od obu powierzchni błonki wzmacniają się, inne zaś osłabiają. Obserwowane światło ma więc skład

„nienaturalny”, który daje charakterystyczne mieniące się zabarwienie.

Tutaj przedstawione jest podobne, lecz bardziej wyrafinowane zjawisko. Dzięki niemu chrząszcz o nazwie kruszczyca złotawka (*Cetonia aurata*) jest zielony ze złotawym połyskiem (zdjęcie 1 na tylnej okładce). W pokrywie jego skrzydeł i pancerza (równie skomplikowanej jak każda inna tkanka żywego organizmu) znajduje się, między innymi, warstwa o specyficznej strukturze: przy przesuwaniu się w głąb pancerza obserwujemy, że kierunek, wzdłuż którego ułożone są długie molekuly chityny i białek, ulega skręceniu w lewo (jak kierunek desek, z których sporządzono stopnie kręconych schodków). Skomplikowane oddziaływanie fali świetlnej z takim zakręconym ośrodkiem jest przyczyną jego ciekawych własności optycznych. Z naturalnego światła padającego na pancerzyk chrząszcza zostaje wydzielone światło spolaryzowane kołowo w prawo i silnie pochłonięte w głębszych warstwach. Pozostała część światła – spolaryzowana kołowo w lewo – zostaje zawrócona (co określa się mianem odbicia dyfrakcyjnego). Efekt ten jest najsilniejszy dla fal świetlnych, których długość jest bliska skokowi zakręconej struktury (wysokości „piętra” kręconych schodków). U kruszczyca maksymalne dyfrakcyjne odbicie zachodzi dla światła zielonego. Właśnie w ten sposób uzyskuje ona zielone zabarwienie. Przekonuje nas o tym zdjęcie 2. Przy jego wykonywaniu odbite zielone światło spolaryzowane kołowo zostało najpierw zamienione na światło spolaryzowane liniowo (za pomocą płytki z kryształu kwarcu zwanej ćwierćfalówką), a następnie wygaszone za pomocą polaryzatora.

Ćwierćfalówka to płytka o odpowiedniej grubości wycięta z kryształu dwójłomnego, tj. ośrodka, w którym fale o różnej polaryzacji biegną z różnymi prędkościami. Zamienia ona światło spolaryzowane kołowo na spolaryzowane liniowo – linia śrubowa zostaje „spłaszczona” w sinusoidę. Polaryzator można porównać do płotu zbudowanego z pionowych sztachet. Przez szczeliny między nimi można przepchnąć tylko pionowe tyczki – ukośne i poziome zostaną zatrzymane. Odpowiednio ustawiony polaryzator może wygasić światło spolaryzowane liniowo o „niepasującym” kierunku wektorów pola elektrycznego („tyczek”).

W ten sposób zdjęcie to ujawnia, że pancerzyk chrząszcza jest czarny (tj. nie zawiera barwnika, który pochłaniałby tylko część widma światła widzialnego).

Opisane zjawisko powstawania mieniących się barw znane jest jako selektywne odbicie światła i jest charakterystyczną cechą ciekłych kryształów cholesterolowych. Kruszczyca nie jest jedynym chrząszczem, który zawdzięcza urodę temu efektowi. Taki sam sposób powstawania rozmaitych kolorów – na całym ciele lub tylko na części – stwierdzono u kilkunastu innych gatunków.

Co udowodnił Manindra Agrawal?

Jerzy BROWKIN

1. Liczbę naturalną n nazywamy **pierwszą**, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki: 1 i n . Liczbę naturalną n nazywamy **złożoną**, jeżeli ma co najmniej trzy dzielniki, tzn. oprócz dzielników 1 i n ma jeszcze dzielnik d , gdzie $1 < d < n$. Wtedy również liczba naturalna n/d jest dzielnikiem liczby n . Gdyby obie liczby d i n/d były większe od \sqrt{n} , to mielibyśmy $n = d \cdot n/d > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, co daje sprzeczność. Zatem każda liczba złożona n ma dzielnik większy od 1 i nie przekraczający \sqrt{n} .

Jeżeli więc chcemy zbadać, czy liczba naturalna n jest pierwsza czy złożona, to wystarczy dzielić ją przez wszystkie liczby naturalne d , gdzie $1 < d \leq \sqrt{n}$. Jeżeli choć w jednym przypadku dzielenie da się wykonać bez reszty, to znajdziemy dzielnik liczby n różny od 1 i od n , a zatem n jest liczbą złożoną. W przeciwnym razie n jest liczbą pierwszą.

Ten algorytm badania pierwszości liczby naturalnej n jest zbyt pracochłonny, wymaga bowiem wykonania około \sqrt{n} operacji elementarnych (dzieleni). Od dawna poszukiwano algorytmów, które wymagałyby wykonania znacznie mniejszej liczby operacji. Historia tych poszukiwań jest długa, lecz nie będziemy jej tu omawiać. W każdym razie żaden ze znalezionych algorytmów nie działał istotnie szybciej niż omówiony wyżej algorytm polegający na dzieleniu n przez wszystkie liczby naturalne nieprzekraczające \sqrt{n} .

Przełom nastąpił dopiero w roku 2002, gdy Manindra Agrawal i jego uczniowie – Neeraj Kayal i Nitin Saxena – z Politechniki w Kanpur (Indie) podali algorytm dla zbadania, czy dana liczba naturalna jest pierwsza czy złożona, wymagający wykonania znacznie mniejszej liczby operacji. Algorytm ten jest tak prosty, że przytoczymy go niżej. Dużo bardziej skomplikowane jest uzasadnienie, że jest on poprawny.

2. Algorytm AKS badania, czy liczba n jest pierwsza, czy złożona.

Krok 1. Badamy, czy istnieją takie liczby naturalne $r \geq 2$ i $s \geq 2$, że $n = r^s$. Jeżeli TAK, to liczba n jest złożona, jeżeli NIE, to przechodzimy do następnego kroku.

Komentarz. Gdyby $n = r^s$, gdzie $r \geq 2$, to $n \geq 2^s$. Stąd $s \leq \log n / \log 2$. Wystarczy więc zbadać, czy liczba $r = \sqrt[s]{n}$ jest całkowita dla $2 \leq s \leq \log n / \log 2$. Mamy więc do zbadania $C_1 \log n$ liczb, gdzie C_1 jest pewną stałą.

Krok 2. Bierzemy liczbę $r = 2$ i badamy, czy r dzieli n . Jeżeli TAK, to n jest liczbą złożoną, gdy r jest mniejsze od n , i jest liczbą pierwszą, gdy $r = n$. Jeżeli NIE, to badamy, czy

- 1) liczba $r - 1$ ma „duży” dzielnik pierwszy q , tzn. spełniający nierówność $q > 4\sqrt{r} \log n$.
- 2) liczba $n^{(r-1)/q} - 1$ jest podzielna przez r .

Jeżeli 1) lub 2) nie zachodzi, to jako r bierzemy następną liczbę pierwszą i postępujemy analogicznie.

Komentarz. Wiadomo, że istnieje taka stała C_2 , że dla pewnej liczby pierwszej $r < C_2(\log n)^6$ zachodzi 1) i 2).

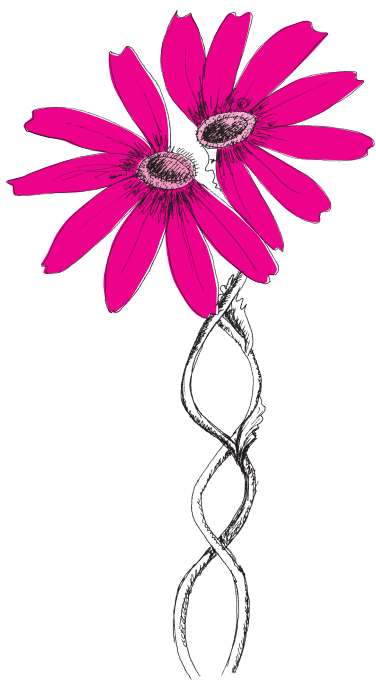
W kroku 2 badamy więc co najwyżej $C_2(\log n)^6$ liczb r i albo jedna z nich dzieli n (wtedy liczba n jest złożona), albo znajdziemy liczbę pierwszą r spełniającą 1) i 2).

Krok 3. Mamy liczbę pierwszą r spełniającą warunki 1) i 2). Dla każdego a , gdzie $1 \leq a \leq 2\sqrt{r} \log n$, dzielimy wielomian

$$(X - a)^n - X^n - a \text{ przez } X^r - 1.$$

Jeżeli za każdym razem reszta z tego dzielenia jest wielomianem o wszystkich współczynnikach podzielnych przez n , to liczba n jest pierwsza. W przeciwnym razie jest ona złożona.

Komentarz. Jak wiemy, $r \leq C_2(\log n)^6$, zatem liczba wielomianów rozpatrywanych w kroku 3 nie przekracza $2\sqrt{r} \log n \leq 2\sqrt{C_2}(\log n)^4 = C_3(\log n)^4$, gdzie C_3 jest pewną stałą.



Wobec tego w całym algorytmie liczba operacji elementarnych wykonanych na liczbach lub wielomianach nie przekracza

$$C_1 \log n + C_2(\log n)^6 + C_3(\log n)^4.$$

To wyrażenie jest pewnym wielomianem od $\log n$, mówimy więc, że algorytm AKS działa w czasie wielomianowym.

Algorytm omówiony na początku wymagał wykonania \sqrt{n} operacji. Ponieważ

$$\sqrt{n} = n^{1/2} = 2^{(\log n)/(2 \log 2)} = \left(2^{1/(2 \log 2)}\right)^{\log n}$$

jest funkcją wykładniczą od $\log n$, więc mówimy, że ten algorytm działa w czasie wykładniczym.

Funkcja wykładnicza rośnie dużo szybciej niż funkcja wielomianowa. Zatem dla dostatecznie dużych n algorytm AKS działa dużo szybciej niż algorytm omówiony na początku.

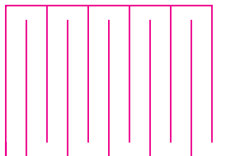
Istotnie nowym pomysłem w algorytmie AKS jest Krok 3. Niestety, trudno to zilustrować na prostym przykładzie, ponieważ dla zbadania, czy „mała” liczba n (powiedzmy, mniejsza niż 10^8) jest pierwsza, wystarczy zastosować tylko pierwsze dwa kroki tego algorytmu.

Dokładniejsze informacje o omawianych tu sprawach można znaleźć w Internecie pod adresem: <http://www.cse.iitk.ac.in>



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 597. Wykonano kondensator złożony z dwóch układów płaszczyzn przewodzących (rysunek obok). Zaniedbując efekty brzegowe, znaleźć pojemność tego kondensatora. Odległość między płaszczyznami jednego układu jest jednakowa i równa $2d$, a liczba płaszczyzn wynosi $2n$.

Rozwiązanie na str. 5

F 598. Jedną płaszczyznę nienaładowanego kondensatora o pojemności C uziemiono, a drugą połączono długim cienkim przewodem ze znajdującą się w dużej odległości przewodzącą kulą o promieniu r i ładunku q_0 . Jaki ładunek zostanie na kuli?

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

W poniższych grach uczestniczy dwoje zawodników: Alicja i Bartek. Gracze wykonują posunięcia na przemian. Grę zaczyna Alicja. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu zgodnego z regułami gry.

M 1027. Na stole leży n cukierków. W każdym ruchu gracz musi zjeść mniej niż połowę pozostałych na stole cukierków, ale co najmniej jeden. Na przykład, dla $n = 3$ w pierwszym ruchu Alicja musi zjeść 1 cukierek, po czym Bartek nie ma ruchu. Wyznaczyć $n \in \mathbb{N}$, dla których Alicja ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie na str. 5

M 1028. Na stole leżą dwie grupy złożone odpowiednio z m i n żetonów ($m, n \geq 1$). W pojedynczym ruchu gracz wybiera grupę, a żetony wybranej grupy wyrzuca do kosza. Drugą grupę dzieli na dwie nowe grupy (po co najmniej jednym żetonie). Dla jakich (m, n) Bartek ma strategię wygrywającą?

Rozwiązanie na str. 6

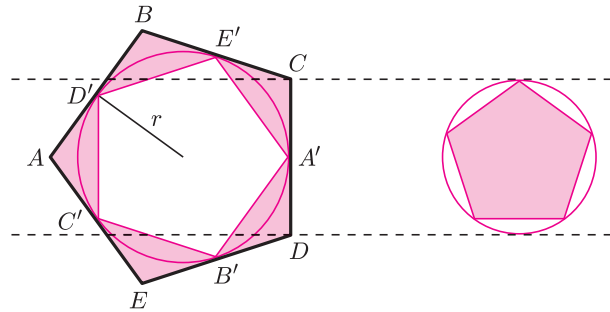
M 1029. Na początku na tablicy napisana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Posunięcie gracza polega na zastąpieniu napisanej na tablicy liczby k liczbą $k - d$, gdzie d jest dzielnikiem k oraz $1 \leq d < k$. Wyznaczyć n , przy których Alicja ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie na str. 16

Twierdzenie Du Faya

Du Fay był matematykiem francuskim żyjącym w pierwszej połowie XVIII wieku. Wykazał on, że: **różnica pól pięciokątów foremnych $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ – opisanego i wpisanego w ten sam okrąg – równa się polu pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o średnicy równej bokowi AB pięciokąta opisanego.**

Ilustruje to rysunek 1: pola zaznaczone kolorem są równe (zapiszmy to $P_5 = p_5$).



Rys. 1. Ilustracja twierdzenia, gdy $n = 5$.

Okazuje się, że twierdzenie to jest prawdziwe w przypadku dowolnego n -kąta, a nie tylko gdy $n = 5$. Oznaczmy przez P_n pole figury z lewej strony powyższego rysunku, gdy pięciokąt zastąpimy n -kątem (a przez p_n – pole figury z prawej strony).

Aby się przekonać o prawdziwości twierdzenia, należy obliczyć pola n -kątów opisanego i wpisanego w dany okrąg o promieniu r .

Pierwsze z nich jest równe $F_1 = nr^2 \operatorname{tg}(\pi/n)$, a drugie $F_2 = 1/2nr^2 \sin(2\pi/n)$,

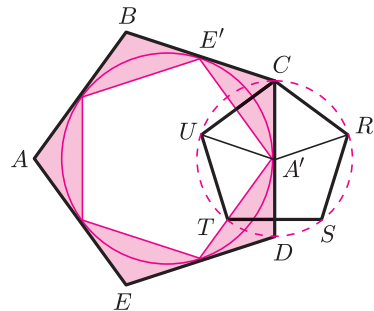
$$P_n = F_1 - F_2 = \frac{nr^2(\sin \pi/n)^3}{\cos \pi/n}.$$

Natomiast p_n obliczymy stosując wzór na F_2 przy promieniu $R = r \operatorname{tg}(\pi/n)$, bo taki jest wzór na połówkę boku n -kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu r . Przekonamy się, że $P_n = p_n$.

Zauważmy też, że $\lim P_n = 0$, a przy dużych n

$$P_n \approx [\pi^3 r^2]/n^2.$$

Dowód Du Faya dla pięciokąta jest czysto geometryczny. Wystarczy bowiem „mała modyfikacja” rysunku 1, polegająca na tym, że figurę z prawej strony przesuniemy tak, by odcinek CD był średnicą (przesuniętego okręgu).



Rys. 2

Czworokąt $E'CA'U$ jest rombem. Mamy bowiem: $E'C = CA' = A'U = r_2$ (jest to promień okręgu, w który wpisaliśmy pięciokąt $CRSTU$, a zarazem połowa boku CD).

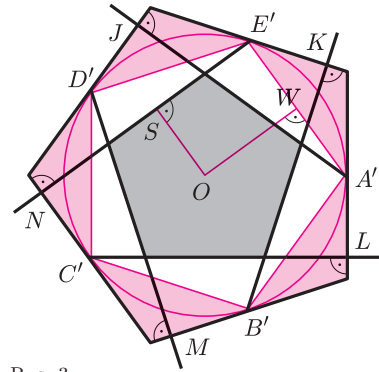
Ponadto, co ma kluczowe znaczenie, odcinki $E'C$ i UA' są równoległe. Bowiem suma miar kątów $E'CA'$ i $CA'U$ jest równa:

$$(*) \quad \frac{3}{5}\pi + \frac{1}{5} \cdot 2\pi = \pi.$$

Przekątne każdego rombu dzielą go na 4 przystające trójkąty prostokątne, zatem pola trójkątów $E'CA'$ i $CA'U$ są równe, tj. $P_5 = p_5$. To rozumowanie można „uratować” w przypadku dowolnego n -kąta: w równaniu $(*)$ mamy wtedy $\pi[(n-2)/n] + 2\pi/n = \pi$.

Jest jeszcze jedna interpretacja tego twierdzenia. Z wierzchołków pięciokąta wpisanego prowadzimy proste prostopadłe do boków pięciokąta opisanego: $A'J, B'K, C'L, D'M, E'N$.

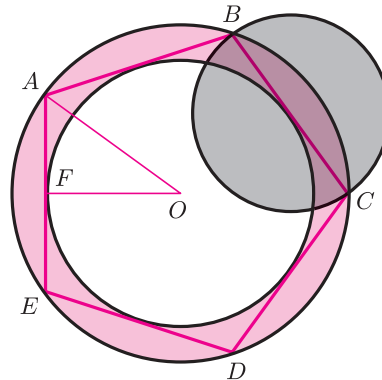
Utworzą one pięciokąt foremny (na rysunku 3 zaznaczony na szaro), którego pole jest równe polu figury kolorowej na tym rysunku, tj. P_5 .



Rys. 3

Ze środka O opuszczamy prostopadłe OS i OW do odcinków $E'N$ i $E'A'$. Powstaje prostokąt $OSE'W$, tj. $OS = A'E'/2$. Ten odcinek (OS) jest równy wysokości trójkąta $A'UC$ z rysunku 2 poprowadzonej z wierzchołka A' .

Możemy sobie teraz rozważyć sytuację odwrotną. Mianowicie taką, że weźmiemy koło opisywane i wpisane w ustalony pięciokąt foremny. Spójrzmy na poniższy rysunek.



Rys. 4

Niech OA będzie promieniem koła opisanego, OF – promieniem koła wpisanego. Twierdzenie Pitagorasa daje: $OA^2 = OF^2 + AF^2 = OF^2 + AB^2/4$. Stąd: $\pi(OA^2 - OF^2) = \pi AB^2/4$, to znaczy, że **różnica pól koła opisanego i wpisanego w pięciokąt foremny równa się polu koła o średnicy równej bokowi tegoż pięciokąta**. Pozostaje to prawdą w przypadku dowolnego n -kąta foremnego.

O wyglądzie ciała w ruchu

Andrzej NOWOJEWSKI, Jakub KALLAS,
Andrzej DRAGAN



Szczególna teoria względności dostarcza swoim adeptom niezwykłych wrażeń. Pierwszą reakcją jest jednak zawsze zdziwienie. Tempo upływu czasu jest względne? Rozmiary ruchomych obiektów zależą od obserwatora? Nonsens! A jednak tak właśnie jest i nasz zdrowy rozsądek okazuje się być złym doradcą. Wątpliwości nie ma tylko co do jednej rzeczy: teoria względności jest niezwykle ciekawa i wzbudza zainteresowanie nie tylko fizyków, ale także amatorów i kibiców nauki.

Aby przybliżyć tę wspaniałą teorię szerszemu gronu, napisano wiele książek popularnonaukowych, a wśród nich, jako jedną z pierwszych, uroczą książeczkę laureata Nagrody Nobla, George'a Gamowa „Pan Tompkins w Krainie Czarów”. Jej tytułowy bohater przenosi się we śnie do świata, w którym prędkość światła jest niewiele większa od prędkości pędzącego rowerzysty i gdzie wszystkie niesłychane relatywistyczne zjawiska są na porządku dziennym. Pan Tompkins na własne oczy może przekonać się, że jadący rower jest krótszy, a zegarek na ręce rowerzysty chodzi wolniej. Dzięki wizycie w „Krainie Czarów” Pan Tompkins (wraz z Czytelnikiem) zamiast studiować trudne podręczniki może na własnej skórze przekonać się na czym polega teoria względności. Lektura książeczki Gamowa byłaby świetnym sposobem na wyobrażenie relatywistycznego świata, gdyby nie jeden drobny szczegół, o którym autor celowo, bądź przypadkiem zapomniał. . . Otóż Pan Tompkins podróżując po Krainie Czarów stwierdza, że wszystkie ruchome przedmioty skracają się w kierunku ruchu. I jest tak w rzeczywistości, np. jadący rower jest zawsze krótszy o czynnik $\sqrt{1 - (v/c)^2}$, gdzie v jest prędkością roweru, a c prędkością światła. Nie oznacza to jednak wcale, że rower będzie wyglądał na krótszy! Nic podobnego! Zapewne brzmi to nieco od rzeczy, ale weźmy pod uwagę fakt, że obraz roweru jest tworzony przez światło docierające do obserwatora zawsze z pewnym opóźnieniem. Jeśli zatem sam rower porusza się z prędkością porównywalną z c , to gdy światło dotrze do oka Pana Tompkinsa, rower w międzyczasie zdąży się nieco przesunąć (dokładnie ten sam efekt możemy stwierdzić słysząc lecący odrzutowiec: dźwięk nie dochodzi z miejsca, w którym on się znajduje). Jednakże pozorne „przesunięcie” ruchomego obiektu to nie wszystko. Jeśli przejeżdża on dostatecznie blisko, to czas potrzebny na dotarcie światła z różnych jego części do oka obserwatora może być istotnie różny. Oznacza to, że na fotografii jadącego roweru światło docierające do kliszy z przedniego koła musiało być wyemitowane w innej chwili niż światło z tylnego koła! Ta rozbieżność staje się oczywiście tym większa im szybciej porusza się rower. W przypadku Krainy Czarów, w której rowery poruszają się z prędkościami niemal równymi tamtejszemu c , efekt ten zaczyna odgrywać kluczową rolę i obraz roweru powinien stać się w niezwykle sposób zniekształcony. Chcielibyśmy teraz pokazać, w jaki sposób można nauczyć się rysować obiekty w relatywistycznym ruchu, oczywiście na przykładzie roweru. Skupmy się dla uproszczenia na obiektach płaskich poruszających się w swojej płaszczyźnie. Płaską krzywą możemy opisać za pomocą równania postaci

$$(1) \quad F(x, y) = 0,$$

gdzie F jest pewną funkcją dwóch zmiennych. Na przykład okrąg o promieniu R i środku w początku układu współrzędnych jest opisany równaniem $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Rozważając zatem pewien obiekt, którego kontur jest opisany w spoczynku równaniem (1), możemy łatwo powiedzieć jaki będzie rzeczywisty kształt tego obiektu, jeśli będzie się on poruszał z prędkością v wzdłuż osi OX . Wystarczy w tym celu przekształcić współrzędne zgodnie z transformacją Lorentza:

$$(2) \quad x \mapsto \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$



Rozwiązanie zadania F 597.

Niech liczba płaszczyzn wynosi $i = 4$, wtedy $C = 3\varepsilon_0 S/d$ (trzy równoległe kondensatory). Analogicznie dla $i = 6$: $C = 5C_0$, gdzie $C_0 = \varepsilon_0 S/d$ itd. Zatem, dla $2n$ płaszczyzn:

$$C = (2n - 1)C_0 = (2n - 1)\varepsilon_0 S/d.$$



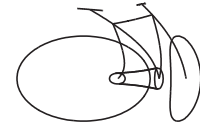
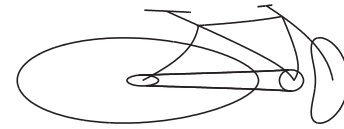
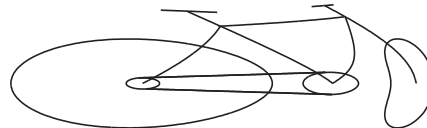
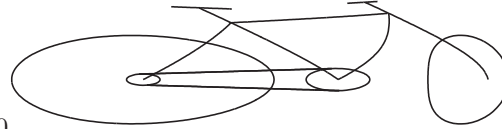
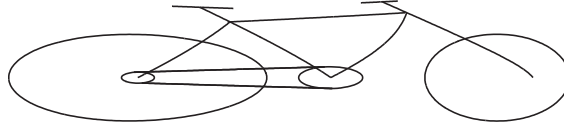
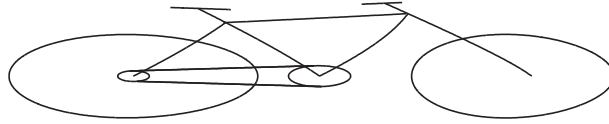
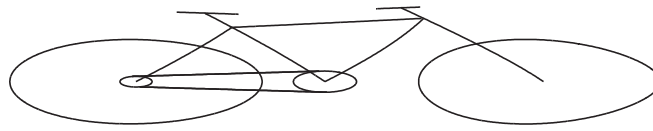
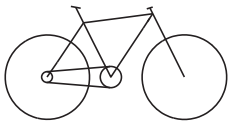
Rozwiązanie zadania M 1027.

Niech A będzie zbiorem tych $n \in \mathbb{N}$, dla których Alicja ma strategię wygrywającą. Niech $B = \mathbb{N} \setminus A$. Wykażemy indukcyjnie, że $B = \{2^k : k = 0, 1, 2, \dots\}$. Łatwo zauważyć, że $1, 2 \in B$. Zakładamy, że $\{1, 2, \dots, n-1\} \cap B =$

$$= \{2^k : k = 0, 1, 2, \dots, 2^k < n\}.$$

Jeśli $n = 2^m$ dla pewnego m , to po pierwszym ruchu Alicji pozostanie na stole więcej niż 2^{m-1} i mniej niż 2^m cukierków. Z założenia indukcyjnego w tym momencie istnieje strategia wygrywająca dla rozpoczynającego, czyli dla Bartka. Zatem $2^m \in B$.

Jeśli n nie jest powyższej postaci, to $n = 2^m + k$, $k < \frac{n}{2}$. Wówczas Alicja w pierwszym ruchu może zjeść k cukierków, pozostawiając Bartka z 2^m cukierkami w sytuacji przegranej. Zatem $n \in A$.



I to jest
cała filozofia!
Otrzymamy
wówczas nowy,
ruchomy kontur,
który w dowolnej
chwili t opisany jest
równaniem

$$(3) \quad F\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, y\right) = 0.$$

W przypadku okręgu
dostalibyśmy elipsę poruszającą
się wzdłuż osi OX i spłaszczoną
w kierunku ruchu o odpowiedni
czynnik. W książeczce George'a
Gamowa, Pan Tompkins „widział”
ruchome obiekty, których kształty
opisywane były właśnie równaniami
postaci (3), czyli bez żadnych zniekształceń,
które w rzeczywistości musiałyby się pojawić.
Postaramy się teraz odpowiedzieć na pytanie,
jak owe zniekształcenia naprawdę wyglądają.

Najłatwiej będzie rozważyć fotografię
poruszającego się obiektu, wykonaną aparatem
umieszczonym w pewnej odległości d od płaszczyzny
ruchu i zwróconym w jej kierunku. Niech aparat
znajduje się w punkcie $x = y = z = 0$, a płaszczyzna
opisana będzie równaniem $z = d$. Ponieważ światło
porusza się zawsze z prędkością c niezależną od ruchu
źródła lub obserwatora, to jeśli po wyemitowaniu przez
obiekt w chwili t i w punkcie (x, y, z) , dotarło do aparatu
w chwili t_{obs} , musi być spełniony związek:

$$(4) \quad c(t_{\text{obs}} - t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Jeśli zatem fotografię wykonano w ustalonej chwili t_{obs} ,
to rozwiązując układ równań (3) i (4) możemy znaleźć punkty,
z których światło dotarło do aparatu. Najlepiej pozbyć się z równań
czasu t , który nas nie interesuje. Wyznaczając t z równania (4)
i wstawiając do (3) dostajemy nowe równanie, którego właśnie
szukaliśmy:

$$(5) \quad F\left(\frac{x - (v/c)(ct_{\text{obs}} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, y\right) = 0.$$

Równanie to opisuje zarejestrowany przez aparat fotograficzny kontur
poruszającego się ciała, którego kształt w spoczynku zadany jest równaniem (1).
Występuje tu dodatkowy parametr t_{obs} opisujący moment wykonania zdjęcia,
który możemy wybrać dowolnie. Posługując się analogiczną metodą, można
bez trudu uogólnić powyższy wynik na ruch ciał trójwymiarowych, my jednak
pozostaniemy przy najprostszym przypadku, żeby pokazać jak interesujące
rzeczy wynikają z otrzymanego równania. Przykładowy kontur przedstawiający



Rozwiązanie zadania M 1028.

Niech A będzie zbiorem wszystkich
par (m, n) , $m, n \in \mathbb{N}$, dla których
istnieje strategia wygrywająca dla Alicji.
Wykażemy przez indukcję względem
 $m + n$, że

$$(m, n) \in A \iff 2 \mid m \cdot n.$$

Oczywiście $(1, 1) \notin A$. Rozważmy
najpierw przypadek, kiedy na stole są
grupy po m i n żetonów i $2 \mid m$. Jeśli
Alicja odrzuci grupę z n żetonami,
a drugą podzieli na grupy liczebności 1
i $m - 1$, to ponieważ $2 \nmid 1 \cdot (m - 1)$,
przy inteligentnej grze Alicji, na mocy
założenia indukcyjnego, przegra Bartek.
Zatem $(m, n) \in A$.

Jeśli $2 \nmid mn$, to przy dowolnym ruchu
Alicji powstanie grupa składająca się
z parzystej liczby żetonów. Wówczas
wygra Bartek.



nieruchomy rower znajduje się na rysunku w lewym rogu. Zauważmy, że obraz roweru jest wyjątkowo prosty do przeanalizowania, ze względu na to, że składa się wyłącznie z odcinków i okręgów, opisywanych elementarnymi równaniami. Dlatego posługując się równaniem (5) możemy przeanalizować wygląd każdego z tych elementów osobno, a następnie złożyć otrzymane kształty w jedną całość.

Numeryczne rozwiązania tego równania ukazane są jako seria rysunków. Są to „fotografie” roweru jadącego z prędkością $v = 0,8 c$, wykonane z odległości od płaszczyzny ruchu równej średnicy koła roweru w kilku równych odstępach czasu. Przyznacie, że zdjęcia są niezwykle zaskakujące! Na trzecim od góry zdjęciu, środek przedniego koła akurat mijał obserwatora. Wcześniejsze zdjęcia ukazują jak tylna większa część roweru zbliża się, podczas gdy na kolejnych przednie fragmenty roweru już się oddalają od aparatu. Jak widać szybko poruszający się rower wydaje się być wydłużony, gdy się do nas zbliża, skrócony zaś, gdy oddala. Skrócenie rozmiarów roweru następuje w pobliżu aparatu i jest tym szybsze, im bliżej jest dany fragment. Właśnie dlatego koła mają przez kilka chwil kształt rogalika. Środek koła jest bliżej nas i szybciej się skraca niż pozostałe fragmenty. Efekt ten przypomina nieco akustyczne zjawisko Dopplera, znane na przykład z gwałtownego obniżenia wysokości dźwięku przejeżdżającej na sygnale karetki. W naszym relatywistycznym przypadku jest podobnie: przejeżdżająca karetka uległaby pozornie gwałtownemu skróceniu i spowolnieniu. Na serii „zdjęć” możemy zobaczyć także inne ciekawe zjawisko. Otóż rower zbliżający się do nas (taki jakim go widzimy) porusza się znacznie szybciej niż oddalający. Mijając aparat z pozoru gwałtownie zwalnia, mimo że rzeczywisty rower porusza się bez przyspieszenia. Dlaczego tak się dzieje? Rozważmy pewien punkt zbliżającego się do nas roweru. W chwili t_a z punktu A (patrz rysunek poniżej) zostaje wysłany foton, który dociera do obserwatora O w chwili t_b , pokonując drogę $c(t_b - t_a)$. W chwili t_b punkt będący w położeniu B (po przebyciu drogi $v(t_b - t_a)$) wysyła do obserwatora kolejny foton, który rejestrowany jest w chwili t_c . Foton przebył drogę $c(t_c - t_b)$. Zatem według obserwatora rozważany punkt w chwili t_b znajdował się w położeniu A , zaś w chwili t_c był w B . Obserwowana prędkość punktu u jest więc równa stosunkowi pokonanej przez niego pozornej drogi do czasu, w którym to się odbyło:



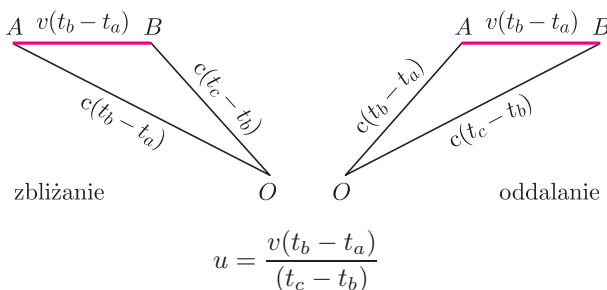
Rozwiązanie zadania F 598.

Potencjały kuli i połączonej z nią powierzchni są jednakowe, a potencjał uziemionej płaszczyzny jest równy zeru. Ponieważ potencjał punktu leżącego w nieskończoności jest równy zeru, a za taki można z warunków zadania uważać daną kulę, okazuje się, że kulę i kondensator można uważać za połączone równolegle:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q_0 - q}{C},$$

stąd

$$q = \frac{q_0}{1 + C/(4\pi\epsilon_0 r)}.$$



Gdy punkt się do nas zbliża $c(t_b - t_a) > c(t_c - t_b)$ (patrz rysunek), więc $u > v$.

W przypadku, gdy punkt się od nas oddala analogicznie mamy $c(t_b - t_a) < c(t_c - t_b)$, więc $u < v$.

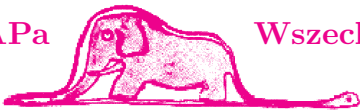
Dzięki ściślejszej analizie tego zjawiska dowiadujemy się, że prędkość pozorna ciała poruszającego się z prędkością $c/2$ jest większa od c , gdy się do nas zbliża! Z kolei w przypadku oddalania się od nas prędkość pozorna nigdy nie przekroczy prędkości światła.

Na podstawie rysunków możemy się zatem przekonać, że Pan Tompkins obserwując mijający go rower, stwierdziłby, że najpierw rower wydaje się nienaturalnie wydłużony i zbliża się szybciej niż w rzeczywistości, a następnie, w momencie mijania, rower nagle wydaje się wyhamowywać i skracać wzdłuż kierunku ruchu, zupełnie jak gdyby był wykonany z gumy! Musimy oczywiście pamiętać, że jest to jedynie pozorny obraz, a w rzeczywistości rower cały czas jest lorentzowsko skrócony i porusza się ze stałą prędkością. Te ciekawe wnioski dotyczą oczywiście nie tylko rowerów, ale wszystkich ciał będących w relatywistycznym ruchu. Dlatego możemy się domyślać, że Kraina Czarów, którą odwiedził Pan Tompkins musi być jeszcze niezwyklejsza, niż przedstawił to George Gamow.



MAPa

Wszechświata



Wszyscy chyba pamiętamy rysunki węża boja zamkniętego i otwartego oraz rysunek baranka, który zadowolił Małego Księcia:

– *Ça c'est la caisse. Le mouton que tu veux est dedans.*[†]



Rysunek w prawym dolnym rogu tej strony jest podobny do rysunku „zamkniętego węża boja”. Nie wszyscy widzą, że zawiera on „większą połowę” naszej wiedzy na temat ewolucji Wszechświata. A wydaje się, że wiemy całkiem dużo i to dość zaskakujących rzeczy.

Wykres ten został przygotowany przez zespół eksperymentu Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [1] działającego w ramach NASA. Eksperyment ten polega na mierzeniu anizotropii relikтового promieniowania tła za pomocą instrumentu umieszczonego w cieniu Ziemi (w punkcie Lagrange'a L2).

O wynikach tego eksperymentu było dość głośno w marcu tego roku. Na pierwszych stronach wielu gazet pojawiła się zielono-niebieska mapa anizotropii. Wszyscy dowiedzieli się nie tylko, co to jest promieniowanie reliktowe, jak i kiedy je odkryto, ale przede wszystkim, że Wszechświat w ćwierci wypełniony jest nieznaną natury ciemną materią, w aż 70% jeszcze bardziej tajemniczą ciemną energią, a zaledwie kilka procent stanowi znana nam materia, nazywana przez kosmologów materią barionową.

„Wszystko to i więcej jeszcze” w zasadzie wynika z zamieszczonego wykresu, a dokładniej z dopasowania tej kolorowej krzywej do punktów doświadczalnych, gdyż jej przebieg zależy od parametrów ewolucji Wszechświata.

Spróbujmy tego „zamkniętego węża” trochę otworzyć. Można powiedzieć, że punkty doświadczalne odpowiadają zmierzonym wartościom stopnia korelacji temperatury promieniowania relikowego dla danej odległości kątowej. Im więcej dla danego „rozstawu cyrka” znajdziemy par kierunków wykazujących odchylenie temperatury w tę samą stronę, tym wyżej „wzniesie się” dany punkt doświadczalny. Rozkład płaski odpowiadałby niezależności korelacji od skali. Jest on taki dla „rozstawów” większych od około 10° (czyli na lewo od głównego maksimum), co dokładnie zmierzył eksperyment COBE ponad 10 lat temu. Od tamtego czasu rozpoczęto poszukiwania pokazanej na wykresie, a wcześniej przewidywanej, struktury maksimum dla mniejszych skal kątowych.

Wygląd tej struktury zależy właśnie od parametrów kosmologicznych. Bardzo wiele eksperymentów stacjonarnych i balonowych przeprowadzono w ostatnich latach. Trzeba wspomnieć przynajmniej eksperymenty ACBAR i CBI, które są w stanie mierzyć skale kątowe mniejsze niż WMAP. Część wyników tych zespołów jest pokazana na wykresie (całość wychodzi poza skalę rysunku z prawej strony). Wszystkich przebił jednak WMAP dzięki bardzo dobrej dokładności pomiaru pierwszych dwóch maksimum.

Dlaczego jednak ma to tak wielkie znaczenie?

Prezentowany wykres jest obrazem tłumionej fali akustycznej uchwyconej w momencie rekombinacji plazmy w neutralne atomy. Zdarzyło się to niecałe 400 k lat po Wielkim Wybuchu i spowodowało przezroczystość Wszechświata dla fotonów, które teraz, ostygnięte do około 2,7 K, obserwujemy. Nie jest możliwe niezależne przypisanie określonej zmiany kształtu funkcji na prezentowanym wykresie konkretnemu parametrowi kosmologicznemu. Mocno upraszczając, można jednak powiedzieć, że położenie pierwszego maksimum pozwala na powiązanie wieku Wszechświata, tempa jego ekspansji i krzywizny (od krzywizny zależy suma kątów w trójkątach) z gęstością materii, od której zależy również wysokość maksimum, a sposób tłumienia kolejnych oscylacji jest związany ze składem materii [1].

Otrzymywane wyniki sugerują, że krzywizna jest zerowa, ale materii jest za mało, żeby to osiągnąć – potrzebne jest ujemne ciśnienie samej przestrzeni, czyli ciemna energia. Wyniki te są zgodne z pomiarami stałej Hubble'a za pomocą teleskopu HST, obserwacją przyspieszającej ekspansji Wszechświata za pomocą supernowych typu Ia i analizą przestrzennego rozkładu galaktyk. Dodanie którejkolwiek z tych trzech informacji pozwala na stwierdzenie, że gęstość energii we Wszechświecie jest z dokładnością do 3 % równa gęstości krytycznej, a to pociąga za sobą stwierdzenie, że ciemna energia stanowi 73 ± 4 % energetycznego bilansu Wszechświata. Zwykłej materii jest tylko $4,4 \pm 0,4$ %, a resztę powinna stanowić zimna ciemna materia, czyli materia w postaci nieodkrytych jeszcze masywnych cząstek.

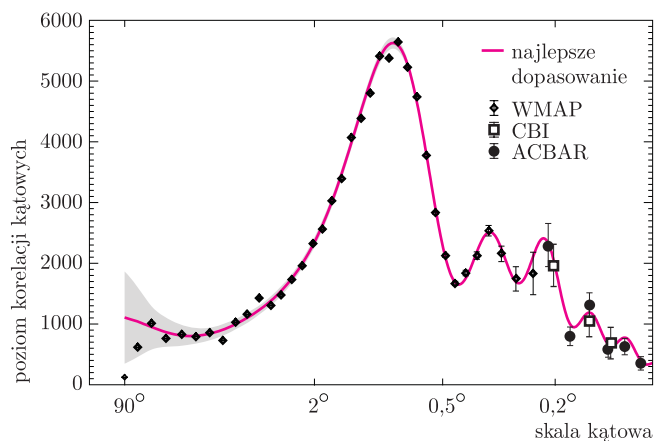
Będzie można to samemu sprawdzić, gdyż wszystkie dane WMAPa mają być publicznie dostępne [2]. Każdy (z odpowiednią wiedzą – to nie takie proste) będzie mógł w ofiarowanej skrzynce poszukać ukrywającego się w niej baranka.

Piotr ZALEWSKI

[†] „To jest skrzynka. Baranek, którego chcesz, jest w środku.” Antoine de Saint Exupéry, *Le petit prince*.

[1] <http://map.gsfc.nasa.gov>

[2] <http://lambda.gsfc.nasa.gov>



Granica Eddingtona

Marcin KIRAGA



Sir Arthur Eddington (1882–1944) był wybitnym astrofizykiem pierwszej połowy XX wieku. Jednym z bardziej znanych wyników jego prac jest stwierdzenie roli, jaką w masywnych gwiazdach spełnia ciśnienie promieniowania. Dlatego krytyczną jasność gwiazdy, przy której gradient ciśnienia promieniowania równoważy siłę przyciągania grawitacyjnego, nazywamy dziś jasnością Eddingtona L_E . Dla sferycznie symetrycznej gwiazdy o masie M wynosi ona

$$L_E = 4\pi GMc/\kappa,$$

gdzie G jest stałą prawitacji, c prędkością światła, a κ średnim współczynnikiem pochłaniania promieniowania na jednostkę masy. Zatem w zależności od masy, składu chemicznego, temperatury i gęstości warstw powierzchniowych każda gwiazda ma swoją własną wartość jasności Eddingtona. Warto jednak ocenić jej górne ograniczenie, które będzie dotyczyło gwiazd gorących. Otóż współczynnik pochłaniania κ jest najmniejszy, gdy ośrodek jest całkowicie zjonizowany, a promieniowanie jest rozpraszane na swobodnych elektronach. W dodatku w tej sytuacji wartość współczynnika pochłaniania nie zależy od długości fali (taki ośrodek nazywany jest szarym). W przybliżeniu wynosi ona

$$\kappa = 0,2(1 + X) \text{ cm}^2/\text{g},$$

gdzie X oznacza wagową zawartość wodoru w materii gwiazdy. Maksymalna jasność Eddingtona, wyrażona w jasnościach i masach Słońca przy typowym $X = 0,7$, wynosi wtedy

$$L_E = 39\,000 L_\odot \frac{M}{M_\odot}.$$

Jak widać, Słońce jest obecnie daleko od granicy Eddingtona. Są jednak gwiazdy, których duża jasność powoduje kłopoty ze stabilnością zewnętrznych warstw. Na przykład, jasność gwiazd ciągu głównego silnie zależy od ich masy i gwiazda o masie 100 mas Słońca powinna mieć już jasność bliską jasności Eddingtona, czyli kilka milionów razy większą niż Słońce.

Przy temperaturze wynoszącej kilkanaście tysięcy kelwinów materia gwiazdy nie jest całkowicie zjonizowana, więc jej nieprzezroczystość κ jest większa niż u gwiazd gorętszych. Dlatego wśród gwiazd chłodniejszych od 10 000 K nie ma gwiazd o bardzo wysokiej jasności (jest to tzw. granica Humphreysa–Davidsona). Najmasywniejsze gorące gwiazdy, opuszczając w wyniku ewolucji ciąg główny, nie mogą – pęczniąc – znacznie obniżyć swojej temperatury powierzchniowej, bo towarzyszyłby temu wzrost nieprzezroczystości, a tym samym możliwość osiągnięcia granicy Eddingtona. Dlatego też czerwonym nadolbrzymem może stać się gwiazda o masie nieprzekraczającej około 30 mas Słońca. Bardzo jasne (masywne) gwiazdy o niskich temperaturach obserwuje się wyjątkowo, a osiągnięcie przez nie granicy Eddingtona zawsze może zaowocować niestabilnością warstw zewnętrznych i znaczną utratą masy (co prawdopodobnie obserwujemy w erupcjach bardzo jasnych i gorących gwiazd zmiennych).

Jasne gwiazdy tracą jednak znaczną część swojej masy na skutek wiatru napędzanego przez ich promieniowanie, nawet jeżeli ich jasność jest znacznie poniżej jasności Eddingtona. Wynika to z obecności w ich atmosferach częściowo zjonizowanych pierwiastków odpowiedzialnych za wysoką nieprzezroczystość. Przykładem takich gwiazd o jasności bliskiej krytycznej i o szczególnie silnych

wiatrach gwiazdowych są gwiazdy Wolfa–Rayeta, które powstają w wyniku ewolucji najmasywniejszych gwiazd ciągu głównego.

A co z naszym Słońcem? Obecnie jego własne promieniowanie nie ma praktycznie żadnego wpływu na utratę masy (wiatr słoneczny pochodzi z gorącej korony), ale na ostatnim etapie ewolucji będzie jednym z decydujących czynników. Rozmiary fotosfery Słońca i jego jasność staną się – odpowiednio – kilkaset i kilka tysięcy razy większe niż obecnie. Jasność będzie stanowiła około 10% maksymalnej jasności Eddingtona, ale w okresie kilkudziesięciu tysięcy lat rozległa otoczka zostanie rozproszona. Odświeżone jądro będzie przez następne kilkanaście tysięcy lat oświetlało rozszerzającą się mgławicę planetarną i stanie się typowym białym karłem.

Pojęcie jasności Eddingtona stosuje się również do obiektów, które swoją energię promieniowania czerpią z akrecji materii. W przypadku czarnych dziur niemających powierzchni, w którą może uderzyć opadająca materia, sferycznie symetryczna akrecja zawsze będzie dawała jasność znacznie mniejszą od L_E . Ale w przypadku istnienia dysku akrecyjnego możliwe jest przekroczenie jasności Eddingtona. Mianowicie materia może służyć w płaszczyźnie równikowej i być wyrzucana (na skutek pochłaniania promieniowania i innych czynników) z obszaru centralnego w kierunku do niej prostopałym.

Granica Roche'a

Na stronie Ziemi zwróconej do Księżyca ocean podnosi się (następuje przypływ), ponieważ Księżyc przyciąga silniej wodę niż wnętrze Ziemi. Woda jest tu wszak o 6370 km bliżej Księżyca niż środek Ziemi. Na stronie przeciwnej wnętrze Ziemi jest przyciągane silniej niż oceaniczna woda, dlatego tam również ocean podnosi się. Nietrudno jest oszacować różnicę przyspieszeń grawitacyjnych będącą przyczyną tego zjawiska. Jeżeli przez R oznaczymy promień Ziemi, a odległość Księżyca (dużą w porównaniu z promieniem Ziemi) przez $r = 3,84 \cdot 10^8$ m, to różnica ta w przybliżeniu wyniesie

$$\Delta a = GM \left[\frac{1}{(r - R)^2} - \frac{1}{r^2} \right] \approx 2GM \frac{R}{r^3},$$

gdzie G to stała grawitacji, a $M = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg to masa Księżyca. Podstawiając wartości liczbowe stwierdzamy, że różnica ta (czyli „przyspieszenie pływowe”) jest rzędu $1 \mu\text{m}/\text{s}^2$. A więc mała, ale widocznie wystarczająca, by oceany podnosiły się o kilka metrów.

Ale nie o to chodzi. Jasne, że gdyby Księżyc był płynny, to Ziemia powodowałaby jego pływy, i to znacznie silniejsze, gdyż ma znacznie większą masę. Widzimy też, że przyspieszenie pływowe jest tym większe, im bliżej znajduje się ciało powodujące pływy – jest odwrotnie proporcjonalne do trzeciej potęgi odległości. Warto więc może sprawdzić, czy dostatecznie blisko planety przyspieszenie pływowe ma prawo być większe niż własne przyspieszenie grawitacyjne satelity na jego powierzchni – co doprowadziłoby do katastrofy. Innymi słowy, sensowne staje się pytanie: czy płynny satelita może obiegać swoją planetę w dowolnie małej odległości?

Wyprowadzony tu wzór nie da nam odpowiedzi na to pytanie. Jest on przecież słuszny w przypadku, gdy odległość ciał jest duża w porównaniu z ich rozmiarami. Dla odległości małej problem ten jest trudny rachunkowo, został jednak zbadany, aczkolwiek również przy pewnych upraszczających założeniach. Mianowicie postuluje się, że satelita zbudowany jest z jednorodnej i nieściśliwej cieczy, obiega planetę w niezmienną odległości w takim samym czasie, w jakim się obraca (czyli jest tzw. satelitą synchronicznym – jak nasz Księżyc), a jego kształt jest dokładnie elipsoidalny. W wyniku zawiłych obliczeń okazuje się, że satelita o gęstości ρ_s obiegający planetę o gęstości ρ może „żyć” nie bliżej niej niż w odległości $2,455 \sqrt[3]{\rho/\rho_s}$ jej promieni (licząc od środka planety). Ta krytyczna odległość nazywana jest granicą Roche'a. Zwróćmy uwagę, że np. pierścienie Saturna mieszczą się wewnątrz jego granicy Roche'a (przy założeniu, że $\rho = \rho_s$). Z tego nie musi wynikać, że jakieś ciało uległo tam rozerwaniu, bo może – odwrotnie – drobne bryłki nie zebrały się w większy glob.

W kiepskich powieściach fantastycznych spotyka się scenę, jak załoga nerwowo oczekuje, co stanie się, gdy statek kosmiczny przekroczy granicę Roche'a planety, do której właśnie się zbliża. Scena taka jest w ogóle bez sensu, bo przede wszystkim skoro miałyby się coś stać, to nie należało się do tej planety zbliżać. Ale i tak nie stanie się nic, bo nie ma prawa: statek jest przecież metalowy, a nie płynny. Bardzo silne przyspieszenia pływowe występują oczywiście w pobliżu zwartych obiektów, takich jak gwiazdy neutronowe czy czarne dziury, ale przy zbliżaniu się do nich statek uległby zagładzie dużo wcześniej z zupełnie innych powodów. A może na koniec Czytelnik wyjaśni, dlaczego woda wypuszczona luzem we wnętrzu załogowej stacji kosmicznej zbiera się w kule? – można to czasami zobaczyć nawet w telewizji. Przecież stacja kosmiczna obiega Ziemię poniżej ziemskiej granicy Roche'a! Tymczasem te kule wodne nie dość, że nie mają zamiaru się rozpaść, to nie wykazują nawet śladu deformacji pływowej.

T. K.



Granica Chandrasekhara

Każda stabilna gwiazda zawdzięcza swą stabilność tzw. równowadze hydrostatycznej, czyli temu, że w każdym miejscu gwiazdy ciężar elementu objętości równoważony jest przez wypór hydrostatyczny (pomijamy ciśnienie promieniowania). Ciśnienie gazu u podstawy elementu objętości jest zawsze odrobinę większe niż u jego szczytu i różnica ta to właśnie wypór równoważący ciężar. Z kolei ciśnienie to makroskopowy efekt tego, że cząstki gazu tworzącego gwiazdę nieustannie się zderzają, przekazują sobie wzajemnie pęd (oczywiście między innymi). Im więcej jest cząstek w jednostce objętości (większa gęstość ρ), albo im szybciej cząstki się poruszają (wyższa temperatura T), tym większe jest ciśnienie gazu P , czyli $P \sim \rho T$. Gaz, który podlega temu prawu, nazywa się gazem doskonałym, a powyższa zależność równaniem stanu gazu doskonałego lub równaniem Clapeyrona.

Czy to znaczy, że gaz może nie podlegać temu tak oczywistemu prawu? Otóż może! Jednym z takich dziwolągów jest gaz elektronowy, który ujawnia swoje istnienie i własności przy ogromnej gęstości materii. Przede wszystkim elektrony przestają wtedy trzymać się jąder atomowych, a ponadto dochodzi do głosu mechanika kwantowa, w szczególności zakaz Pauliego. Prawo to zabrania dwóm elektronom znaleźć się w tym samym stanie kwantowym. W dużym uproszczeniu chodzi o to, że według mechaniki kwantowej cała przestrzeń to ogromna liczba małych „komórek”, a każdej przypisana jest pewna energia. Zakaz Pauliego mówi, że w jednej komórce jest miejsce tylko dla jednej cząstki (elektronu). Dopóki każda cząstka ma do dyspozycji mnóstwo komórek, to wszystkie cząstki skaczą swobodnie między nimi i gaz jest gazem doskonałym. Gdy jednak zrobi się bardzo ciasno, to rosną szanse, że do tej samej komórki chciałoby wskoczyć kilka cząstek jednocześnie. W szczególności, skoro cząstki najchętniej obsadzają komórki o najniższych energiach, to głównie tam zaczyna brakować miejsca, przez co elektrony o dużych energiach nie mogą się swojej energii pozbyć. W takim gazie elektronowym powstaje nadwyżka cząstek szybkich i żadne chłodzenie gazu jej nie likwiduje. Ciśnienie gazu zależy wtedy tylko od jego gęstości – gaz taki nazywa się gazem zdegenerowanym.

Zdegenerowany gaz elektronowy jest odpowiedzialny za ciśnienie w bardzo gęstych centralnych częściach dostatecznie masywnych gwiazd. Gdy gwiazda taka odrzuca warstwy zewnętrzne (tworzące przez pewien czas mgławicę planetarną), odsłania się to właśnie jej zdegenerowane jądro, tzw. biały karzeł. Jest on obiektem stabilnym, czyli w nim również ciężar każdego elementu objętości równoważy wypór hydrostatyczny, ale w tym przypadku wypór określony jest przez równanie stanu gazu zdegenerowanego. Prowadzi to do zaskakujących konsekwencji. Gęstość takiej gwiazdy (centralna czy średnia – wszystko jedno) jest funkcją jej masy, podobnie jej promień, ale o ile większej masie odpowiada większa gęstość, to promień jest malejącą funkcją masy. Znaczący to, że gdyby na białego karła zrzucić dodatkową materię, to stawałby się coraz gęstszy, ale zarazem coraz mniejszy! Teoria budowy białych karłów, stworzona przez amerykańskiego astronoma (pochodzenia hinduskiego) Subrahmanyana Chandrasekhara (laureata Nagrody Nobla z 1983 r.), przewiduje, że przy masie równej $1,457M_{\odot}$ gwiazda taka miałaby nieskończoną gęstość i zerowy promień – masa ta zwana jest granicą Chandrasekhara.

Tyle mówi teoria. A co, gdyby (1) na białego karła naprawdę nadal spadała materia, albo gdyby (2) we wnętrzu masywnej gwiazdy miało dojść do degeneracji jądra o masie przekraczającej granicę Chandrasekhara? Z tym może być rozmaicie.

W pierwszym przypadku biały karzeł co jakiś czas pozbywa się części materii spływającej nań z towarzyszącej mu gwiazdy – zjawisko takie to wybuch tzw. gwiazdy nowej. Jest to termojądrowa eksplozja w cienkiej warstwie materii na powierzchni białego karła, przy czym jemu samemu doraźnie nic złego przy tym się nie dzieje. Natomiast próba

przekroczenia granicy Chandrasekhara kończy się tragicznie. Jeżeli bowiem w wyniku długotrwałego gromadzenia się materii na białym karle niemal osiągnął on graniczną masę, to musi wreszcie eksplodować, a nazywa się to supernowa typu Ia. W drugim przypadku stabilny biały karzeł w ogóle nie ma prawa powstać, zatem struktura wnętrza masywnej gwiazdy musi ulec gruntownej i gwałtownej przebudowie. Zachodzi wtedy wybuch gwiazdy supernowej typu Ib lub II, a po eksplozji zostaje gwiazda neutronowa lub czarna dziura.

T. K.





Zadania o Ziemi

W dobrym przybliżeniu Ziemia jest kulą – bryłą o nieskomplikowanej, lecz interesującej geometrii. Niektóre, nawet dobrze znane właściwości geometryczne kształtu kulistego wciąż jednak nas zaskakują. Hugo Steinhaus pisał, że glob ziemski jest „niepraktycznie zbudowany”. To prawda, ale dzięki temu matematycy mają co robić, choćby i wymyślać łamigłówki takie jak ta, powszechnie znana.

Zadanie 1. Wyszedłem z namiotu, poszedłem 1 km na południe, potem 1 kilometr na zachód. Idąc teraz stale na północ, wróciłem do punktu wyjścia i ku swojemu przerażeniu zauważyłem, że niedźwiedź wyjadł mi wszystkie zapasy żywności. Jakiego koloru był ten niedźwiedź? Oczywiście białego, bo taka wędrówka możliwa jest tylko w okolicach biegunów. Na biegunie południowym nie ma niedźwiedzi, a te w okolicy bieguna północnego są białe.

Przypomnijmy rozmiary Ziemi. Będziemy przyjmować, że jest ona kulą o promieniu 6371 km. W rzeczywistości Ziemia jest nieco spłaszczona wzdłuż osi biegunowej. Jej promień równikowy wynosi 6378,160 km, a biegunowy 6356,775 km. W tej sytuacji podany tu „promień kuli” jest promieniem kuli o takiej objętości, jaką naprawdę ma Ziemia.

Wiemy, że bieguny na Ziemi mają szerokość geograficzną 90 stopni, ale nie mają żadnej długości geograficznej. Południki zbliżają się do siebie i schodzą się w jeden punkt – właśnie biegun. Równoleżniki mają różną długość (zawsze $2\pi r$, ale im bliżej bieguna, tym mniejsze jest r). Najdłuższy jest oczywiście równik.

Zadanie 2. Obliczyć długość równoleżnika o szerokości geograficznej α . Który z równoleżników jest o połowę krótszy niż równik? Jaką długość ma równoleżnik przechodzący przez Twoją miejscowość? Ile kilometrów jest z Twojej miejscowości do bieguna północnego? Do bieguna południowego?

Rozwiązanie. Dojdź do niego sam(a). Narysuj Ziemię w przekroju, od Arktyki do Antarktydy. Wtedy równoleżnik (niech będzie on na półkuli północnej) stanie się cięciwą tego koła. Połącz środek koła z biegunem północnym i punktem końcowym cięciwy. Widzisz, gdzie utworzył się kąt prosty, prawda? Przypomnij sobie teraz, co to jest szerokość geograficzna i co to jest kosinus. Wyliczysz, że promień szukanego równoleżnika to $R \cos \alpha$, gdzie R jest promieniem Ziemi. Zatem długością równoleżnika jest $2\pi R \cos \alpha$. O połowę krótszy niż równik jest równoleżnik 60° . Rozstrzygnij następane pytania.

Zadanie 3. Z lotniska w Balicach wystartował samolot. Poleciał 222 km na północ, potem 222 km na wschód, 222 km na południe i 222 km na zachód. Gdzie wylądował?



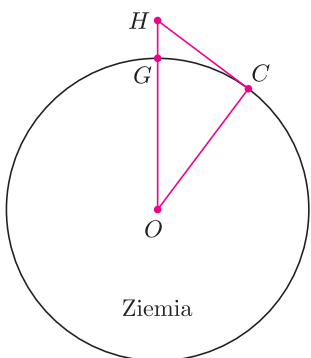
W tym punkcie, z którego wystartował? Oczywiście, że... nie.
 Wskazówka: na wschód i zachód lecimy wzdłuż równoleżników, które mają różną długość...

Wszyscy wiemy, że Balice to lotnisko krakowskie, a do rozwiązania zadania potrzebna jest nam szerokość geograficzna tego lotniska. Przyjmijmy $\phi = 50$ stopni (naprawdę jest to kilkanaście sekund kątowych więcej). Pamiętajmy, że jeden stopień długości geograficznej na równiku jest równy 111 km. Przyjeliśmy, że Ziemia jest kulą, a zatem jeden stopień na południku jest też równy 111 km, a więc 222 km południka to 2 stopnie.

Musimy znać długość d_{50} równoleżnika 50° oraz długość d_{52} równoleżnika 52° . Mamy $d_{50} = 2\pi R \cos \phi$, gdzie $\phi = 50^\circ$, a R jest promieniem Ziemi, $R = 6371$ km, natomiast $d_{52} = 2\pi R \cos 52^\circ$. Zatem $d_{50} = 25731$ km. Jeden stopień na tej szerokości to $\frac{25731}{360} = 71,5$ km. Natomiast $d_{52} = 24645$ km, więc jeden stopień na tej szerokości to 68,5 km. Samolot poleciał zatem 2 stopnie na północ. Znalazł się na 52 równoleżniku (z mapy możemy odczytać, że to okolice Łowicza), potem $\frac{222}{68,5} = 3,24$ stopnia na wschód (trochę na pñ.-zach. od Białej Podlaskiej) i 2 stopnie na południe (wtedy znalazł się między Jarosławiem i Lubaczowem). Był teraz 3,24 stopnia od Krakowa, czyli $3,24 \cdot 71,5 = 231,7$ km. Po przelecie 222 km w kierunku zachodnim znalazł się zatem o prawie 10 km na wschód od Balic. Jeśli lądował, to gdzieś na polu pod Batowicami...

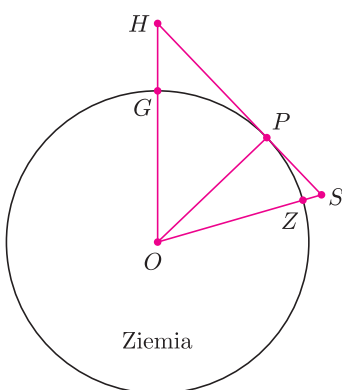
Zadanie 4. Ile jest równy promień horyzontu na Ziemi?

Odpowiedź zależy oczywiście od wysokości patrzącego. Przyjmijmy, że ma on oczy na wysokości h metrów, w punkcie H . Niech R będzie promieniem Ziemi, O – środkiem Ziemi, HC odległością horyzontu. Z trójkąta prostokątnego OCH mamy $HC^2 = OH^2 - OC^2$, czyli $HC^2 = (R + h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2$. Jeśli np. $h = 1,5$ m, to $HC \approx 4372$ km. Ale dwumetrowy mężczyzna, mający oczy na wysokości 1,90 m widzi o 550 metrów dalej. Dla niego horyzont jest odległy o 4920 metrów. Jeżeli wzniesiemy się na 10 km nad równinę, to nasz promień widzenia będzie już znaczny, około 357 km.

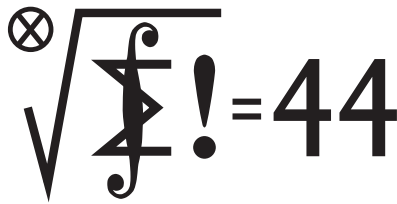


Zadanie 5. Miłośnicy Tatr wiedzą, że widać je już z Krakowa.

Obliczmy, na jaką wysokość trzeba się wzbąć nad Gdańsk, żeby zobaczyć wierzchołek Świnicy (2301 m). Na rysunku obok punkt G to Gdańsk, S – Świnica. Przyjmujemy, że Gdańsk leży na poziomie morza i że odległość „w poziomie” między Gdańskiem a Świnicą jest równa 575 km. Chcemy obliczyć długość odcinka GH . Przyjmiemy, że długość okręgu koła wielkiego przechodzącego przez Gdańsk i Świnicę jest równa 40000 km. Kąt środkowy GOZ na rysunku obok ma zatem $\frac{575}{40000} \cdot 2\pi \approx 0,0903$ radianów. Kąty OPH i OPS są proste, zatem $\cos \sphericalangle POS = \frac{R}{R+2,3 \text{ km}}$. Wyznaczamy stąd (za pomocą kalkulatora), że kąt POS ma 0,0269 radianów, zatem kąt HOP ma 0,0634 radiany. Obliczamy stąd $GH = \frac{R}{\cos \sphericalangle HOP} - R \approx 12,8$ km. Już z niespełna 13 kilometrów znad Gdańska widać wierzchołki Tatr. Nie są to wcale tylko wyliczanki teoretyczne. Piszący te słowa widział bardzo wyraźnie cały łańcuch Tatr z samolotu tuż po wylocie z Warszawy w stronę Wrocławia 24 listopada 2002 roku. Wspomnijcie to, gdy będziecie patrzeć ze Świnicy na północ.



Małą Deltę przygotował Michał SZUREK



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2003

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 463, 464

Redaguje Marcin E. KUCZMA

463. Wyznaczyć największą możliwą długość linii łamanej zamkniętej o następujących własnościach:

- wierzchołki łamanej są różnymi punktami przestrzeni \mathbb{R}^3 , których współrzędne należą do zbioru $\{0, 1, 2\}$;
- każde dwa sąsiednie boki łamanej są prostopadłe i mają długość 1.

464. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , a proste AP , BP , CP przecinają boki BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Dowieść, że

$$|AP| \cdot |BP| \cdot |CP| \geq 8 \cdot |PD| \cdot |PE| \cdot |PF|.$$

Zadanie 464 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2003

Przypominamy treść zadań:

455. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| > |AC|$. Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A przecina okrąg opisany na tym trójkącie ponownie w punkcie E . Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu E na bok AB . Dowieść, że $|AB| - |AC| = 2|AF|$.

456. Czy istnieją takie liczby niewymierne $\alpha > 1$, $\beta > 1$, że dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi nierówność $\lfloor \alpha^m \rfloor \neq \lfloor \beta^n \rfloor$?

455. Kąt EAB , wpisany w dany okrąg, ma miarę $90^\circ - \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CAB|$, czyli połowę miary kąta wpisanego opartego na łuku CAB ; stąd wniosek, że punkt E jest środkiem tego łuku, a zatem $|BE| = |CE|$.

Na przedłużeniu odcinka BA odkładamy odcinek AG o długości $|AG| = |AC|$. Punkty C i G leżą symetrycznie względem prostej AE (dwusiecznej kąta CAG). Otrzymujemy równość $|EG| = |EC| = |EB|$. Wysokość EF trójkąta równoramiennego BEG jest więc jego środkową: $|FB| = |FG|$. Stąd

$$|AB| - |AC| = |AB| - |AG| = (|AF| + |FB|) - (|FG| - |AF|) = 2|AF|.$$

456. Takie liczby istnieją. Przykład: $\alpha = \sqrt{6}$, $\beta = \sqrt{3}$. Przypuśćmy, że dla pewnej pary wykładników całkowitych $m, n \geq 1$ zachodzi równość $\lfloor \alpha^m \rfloor = \lfloor \beta^n \rfloor = k$. Wówczas $n \geq m$ oraz

$$k^2 \leq (\alpha^m)^2 < (k+1)^2, \quad k^2 \leq (\beta^n)^2 < (k+1)^2,$$

czyli

$$k^2 \leq 6^m \leq k^2 + 2k, \quad k^2 \leq 3^n \leq k^2 + 2k.$$

Stąd wynika oszacowanie

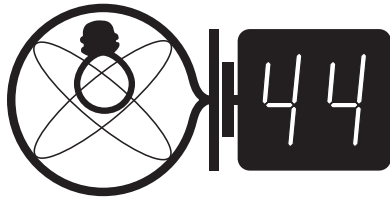
$$2k \geq |6^m - 3^n| = 3^m |2^m - 3^{n-m}| \geq 3^m.$$

Jednocześnie $k \leq \alpha^m = 6^{m/2}$. Wobec tego $3^m \leq 2 \cdot 6^{m/2}$; a taka nierówność ma miejsce jedynie dla $m = 1, 2, 3$. Dla tych trzech wartości wykładnika m część całkowita $\lfloor \alpha^m \rfloor$ przyjmuje wartości 2, 6, 14, rozmijające się z wartościami $\lfloor \beta^n \rfloor$, które dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ wynoszą kolejno 1, 3, 5, 9, 15. To pokazuje, że liczby $\alpha = \sqrt{6}$, $\beta = \sqrt{3}$ mają własność, o którą chodzi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
447 ($WT = 2,87$) i **448** ($WT = 1,69$)
z numeru 10/2002

Janusz Olszewski – Suwałki	43,08
Tomasz Wietecha – Tarnów	39,96
Jerzy Cisło – Wrocław	37,23



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2003

Zadania z fizyki nr 360, 361

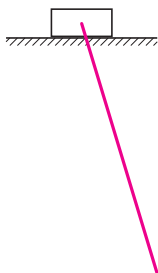
Redaguje Jerzy B. BROJAN

360. Ocenic orientacyjnie maksymalną prędkość łodzi o długości 10 m, szerokości 2 m i masie 2 tony, jeśli napędzający ją silnik rozwija moc 50 kW.

361. Według ogólnej teorii względności gwiazda odchyła przebiegające w jej pobliżu promienie świetlne. Odchylenie to można analizować, przyjmując, że na zewnątrz gwiazdy o masie M w odległości r od jej środka współczynnik załamania przestrzeni wynosi $n = 1 + \frac{2a}{r}$, gdzie $a = GM/c^2$ (M – masa gwiazdy, G – stała grawitacji). Obliczyć kąt odchylenia promienia przebiegającego tuż obok Słońca. Jeśli źródło światła jest bardzo odległe, to czy czas zwłoki (nadwyżka czasu przejścia promienia, wynikająca z jego spowolnienia w polu grawitacyjnym) ma skończoną wartość? Masa Słońca wynosi $2 \cdot 10^{30}$ kg, średnica $1,4 \cdot 10^6$ km.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2003

Przypominamy treść zadań:



352. Jednorodny pręt może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi osadzonej w klocek spoczywającym na poziomej powierzchni (rys.). Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia między klockiem a powierzchnią niezbędna do tego, aby po odchyleniu pręta do poziomu i puszczeniu klocek nie ruszył z miejsca? Masa klocka jest pomijalnie mała w porównaniu z masą pręta.

353. W doświadczeniu opisanym w jednym z zeszlenczonych numerów *Wiedzy i Życia* badano zimne neutrony (tzn. neutrony o bardzo małej energii kinetycznej) odbijające się od poziomej powierzchni i wykryto ich kwantowe poziomy energetyczne w polu grawitacyjnym Ziemi. Według podanej informacji wysokość stopnia między sąsiednimi poziomami wynosiła 15 μm . Zastosować analizę wymiarową w celu potwierdzenia tej wartości (co do rzędu wielkości).

352. Niech długość pręta wynosi $2l$, jego masa – m , a kąt odchylenia od pionu – α . Wprowadźmy także oznaczenie momentu bezwładności pręta względem punktu zawieszenia I , prędkości kątowej $\omega = d\alpha/dt$ i przyspieszenia kątowego $\varepsilon = d\omega/dt$. Podstawowe (i wzajemnie równoważne) równania opisujące ruch pręta to II zasada dynamiki ruchu obrotowego i zasada zachowania energii:

$$I\varepsilon = -mgl \sin \alpha, \quad \frac{1}{2}I\omega^2 = mgl \cos \alpha.$$

Po podstawieniu $I = \frac{4}{3}ml^2$ równania te przybierają postać

$$4l\varepsilon = -3g \sin \alpha, \quad 2l\omega^2 = 3g \cos \alpha.$$

Składową poziomą F_x i pionową F_y siły działającej na górny koniec pręta wyznaczmy z II zasady dynamiki ruchu postępowego środka pręta

$$F_x = md^2x/dt^2, \quad F_y = mg - md^2y/dt^2,$$

gdzie $x = l \sin \alpha$, $y = l \cos \alpha$ (oś y jest zwrócona w dół).

Dwukrotne różniczkowanie daje wyrażenia

$$d^2x/dt^2 = l\varepsilon \cos \alpha - l\omega^2 \sin \alpha, \quad d^2y/dt^2 = -l\varepsilon \sin \alpha - l\omega^2 \cos \alpha.$$

Wykorzystując wyżej wyprowadzone wzory na ε i ω^2 , otrzymujemy zależność F_x i F_y od α :

$$F_x = -\frac{9}{4}mg \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{9}{8}mg \sin 2\alpha,$$

$$F_y = mg \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha + \frac{3}{2} \cos^2 \alpha \right) = mg \left(\frac{11}{8} + \frac{9}{8} \cos 2\alpha \right).$$

Widzimy, że maksymalna bezwzględna wartość ilorazu F_x/F_y występuje dla $\alpha = 45^\circ$ i jest równa $\frac{9}{11}$. Tyle musi wynosić współczynnik tarcia, aby klocek nie ruszył z miejsca.

353. Należy wyrazić wielkość l o wymiarze długości przez stałą Plancka h , masę neutronu m oraz przyspieszenie ziemskie g . Zgodność wymiarów osiągniemy tylko wtedy, gdy

$$l = (\text{stała bezwymiarowa}) \cdot \sqrt[3]{\frac{h^2}{m^2g}}.$$

Podstawiając dane liczbowe $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js, $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg, $g = 9,8$ m/s², znajdujemy wartość pierwiastka równą 25 μm , co oznacza zadowalającą zgodność.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
348 (WT = 1,85) i **349** (WT = 2,95)
z numeru 12/2002

Aleksander Surma	– Myszków	44,06
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	43,22
Marek Wójcicki	– Szczecin	42,07
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	34,91
Tomasz Wietecha	– Tarnów	30,76
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	20,09
Michał Józwiowski	– Błonie	12,65

Pan Aleksander Surma jest już trzecim Weteranem, który zdobył 44 punkty po raz czwarty.

Patrz w niebo

Zdolność rozdzielcza obserwacji radioastronomicznych dawno przewyższyła rozdzielczość optyczną. Najmniejszy kąt rozróżnialny przez teleskop (lub pojedynczy radioteleskop) wynosi w przybliżeniu (w radianach) tyle, co stosunek długości fali odbieranego promieniowania do średnicy (radio)teleskopu. Fale radiowe są wprawdzie znacznie dłuższe od optycznych, ale średnice teleskopów radiowych (w każdym razie średnice efektywne) w jeszcze większym stopniu przewyższają średnice teleskopów optycznych. Są bowiem sposoby, aby anteny rozdzielone tysiącami kilometrów wykorzystać jako małe fragmenty radioteleskopu o średnicy zbliżonej do średnicy Ziemi. W rezultacie uzyskuje się radiową rozdzielczość rzędu 10^{-4} sekundy łuku.

Obiektem poddanym tak szczegółowym obserwacjom stała się około trzech lat temu aktywna galaktyka M87, a dokładniej – jej centrum zawierające czarną dziurę o masie 3 mld mas Słońca. Chodziło o zbadanie obszaru, skąd z prędkością przyświelną wypływają w przeciwnie strony strugi materii. Podana tu rozdzielczość kątowa przy odległości galaktyki równej 15 Mpc odpowiada długości 0,01 pc, a to z kolei 30 promieniom samej czarnej dziury. Badaniom można było w tym przypadku poddać strugę biegnącą ku Ziemi, gdyż to jej promieniowanie jest, zgodnie z teorią względności, wzmacnione, natomiast strugi oddalającej się od Ziemi – osłabione. Obserwacje potwierdziły to, co właściwie podejrzewano od dość dawna, że mianowicie w formowaniu strug bierze udział pole magnetyczne. Wyrzucanie strug w przeciwnie strony wymuszone jest przez otaczający czarną dziurę dysk akrecyjny. Trzeba wiedzieć, że gorąca, zjonizowana materia (plazma) i pole magnetyczne zachowują się w przybliżeniu jak galareta przeniknięta wiązką sprężystych nici. Galarecie tej łatwo jest poruszać się wzdłuż nici (linii pola), a jeżeli energicznie chciałaby poruszać się w poprzek linii, to pociągnie je za sobą. Dlatego wirujący dysk akrecyjny porywając linie pola, zmusza je do nawijania się na jego oś symetrii. W ten sposób linie pola magnetycznego tworzą jakby dwie liny skręcone w przeciwnych kierunkach, a liny te z kolei stają się jedyną drogą ucieczki dla materii wyrzucanej z otoczenia czarnej dziury. Stąd tak symetryczna budowa tych osobliwych obiektów.

Tomasz KWAST

Czerwiec

Chyba mało kto zdaje sobie sprawę z tego, jak wiele jest gwiazd zmiennych i jak rozmaicie mogą wyglądać ich krzywe jasności. Jest tak dlatego, że gwiazdy te są na ogół odległe, a więc słabe, choć jest ich też kilka wśród tych niewielu tysięcy widocznych na niebie bez pomocy przyrządów optycznych. W Koronie Północnej, którą w czerwcowe wieczory widać w pobliżu zenitu, są np. dwie gwiazdy o „przeciwnych” typach zmienności. T Coronae Borealis to gwiazda, która będąc na ogół na granicy widoczności gołym okiem, od czasu do czasu słabnie do 14 mag. Jest ona przedstawicielką całej grupy gwiazd, które w niejednakowych odstępach czasu wyrzucają zwiększone ilości węgla wyprodukowanego w wyniku własnych reakcji termojądrowych. Jasność gwiazdy wraca do normalnego poziomu, gdy rozproszy się jej „węglowa” otoczka. Dla odmiany R Coronae Borealis to tzw. nowa powrotna, czyli od czasu do czasu silnie rozbłyskująca wskutek termojądrowej eksplozji wodoru spływającego na nią z gwiazdy towarzyszącej. W maksimum blasku osiąga wtedy 2 mag.

Wenus jest w Byku, a Saturn na granicy Byka i Bliźniąt, planety te są więc bardzo blisko Słońca, dlatego ich nie widać. Jowisz jest w Raku i wieczorami świeci nad zachodnim horyzontem, a Mars w Wodniku i widać go w drugiej połowie nocy. Na początku miesiąca można rano próbować odszukać Merkurego, który 3 VI znajdzie się najdalej kątowo od Słońca. Pełnia Księżycy wypada 14 VI, a now 29 VI. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych gwiazd w czerwcu nie będzie. 21 VI nastąpi przesilenie letnie, czyli początek lata i zarazem od tej daty dni będą się już skracać. Ale wakacje dopiero się zaczynają!

T. K.



Rozwiązanie zadania M 1029.

Wykażemy przez indukcję, że przy inteligentnej grze obu graczy Alicja wygra dokładnie wtedy, gdy $2 \mid n$. Łatwo zauważyć, że Alicja wygra przy $n = 2$ i przegra przy $n = 3$.

Jeśli na tablicy napisana jest liczba nieparzysta n , to $n - d$ jest liczbą parzystą dla dowolnego $d \mid n$ i mniejszą niż n . Z założenia indukcyjnego wynika, że w tym momencie Bartek ma strategię wygrywającą.

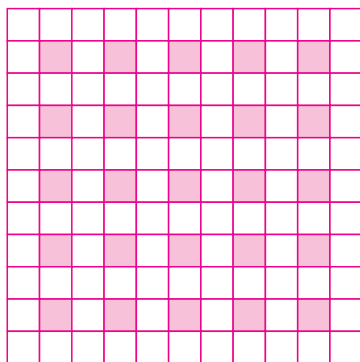
Jeśli na tablicy jest napisana liczba parzysta n , to Alicja może ją zastąpić liczbą nieparzystą $n - 1$. Liczby nieparzyste prowadzą jednak do przegranej. Zatem w tym przypadku wygra Alicja.



**KOLOROWANKI –
 NUMEROWANKI (4)**

Tym razem rzecz będzie o marnotrawstwie. Przypuśćmy, że mamy szachownicę o boku $2n + 1$ podzieloną na pola jednostkowe. Chcemy wyciąć z niej, **tnąc tylko po bokach pół**, możliwie najwięcej kwadratów o boku 2. Pytanie jest oczywiste: ile i jak?

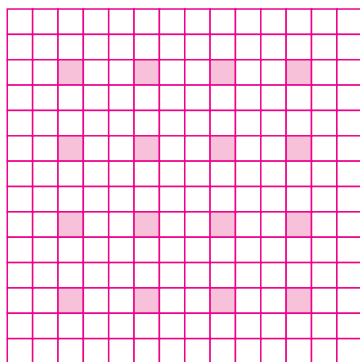
Z jednej strony potrafimy nawet z kwadratu o boku $2n$ wyciąć n^2 kwadratów. Z drugiej zaś strony po wycięciu n^2 kwadratów z szachownicy o boku $2n + 1$ pozostaje niewykorzystana powierzchnia $4n + 1$, która wystarczyłaby na dodatkowe n kwadratów, o ile umielibyśmy przeprowadzić podział w odpowiedni sposób. Niestety, ta powierzchnia zmarnować się **musi**. Pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1.



Rys. 1

Wówczas pokolorowanych zostało n^2 pół i każdy kwadrat o boku 2 zawiera pokolorowane pole. Zatem wycięcie więcej niż n^2 kwadratów nie jest możliwe.

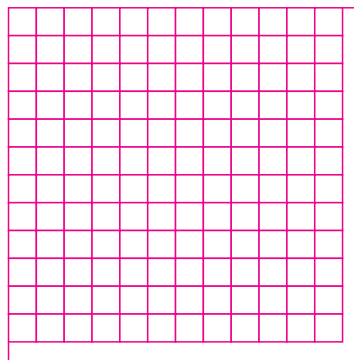
Podobnie z szachownicy o boku $3n + 2$ nie wytniemy więcej niż n^2 kwadratów o boku 3, co łatwo wynika z kolorowania przedstawionego na rysunku 2.



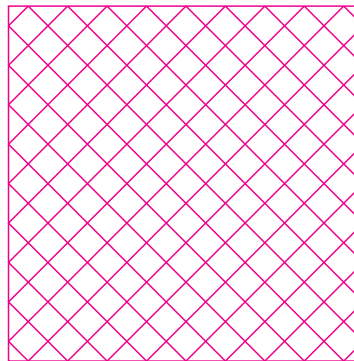
Rys. 2

Analogiczne rozumowanie pokazuje, że z szachownicy o boku $4n + 3$ nie uzyskamy więcej niż n^2 kwadratów o boku 4. Na przykład z szachownicy o boku 51 możemy wyciąć 144 kwadraty o boku 4 (rysunek 3). Jeżeli jednak nie będziemy się upierać, aby podział przebiegał wzdłuż

linii szachownicy, można uzyskać 145 kwadratów, dokonując podziału jak na rysunku 4. Należy przy tym zwrócić uwagę, że $9 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \approx 50,91 < 51$.



Rys. 3



Rys. 4

Jeśli dopuścimy podziały nieprzebiegające wzdłuż linii szachownicy, zagadnienie znalezienia największej liczby możliwych do uzyskania kwadratów jest bardzo trudne. Udowodniono, że pewne nieregularne metody wycinania kwadratów pozwalają uzyskać z kwadratu o boku 100000,1 więcej niż $100000^2 + 6000$ kwadratów jednostkowych.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (36)

Zadanie: Rozważamy ostrosłupy, których podstawą jest romb, a wszystkie ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.

Wyznaczyć wszystkie romby, które mogą być podstawą opisanego wyżej ostrosłupa.

Rozwiązanie: Niech romb $ABCD$ będzie podstawą, natomiast S wierzchołkiem ostrosłupa.

Ponieważ ściany boczne ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi, wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równej długości, a co za tym idzie, punkty A, B, C, D leżą na sferze o środku S i promieniu równym długości krawędzi bocznej. Zatem romb $ABCD$ jest wpisany w okrąg będący przecięciem tej sfery i płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Na rombie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest on kwadratem, tak więc romb spełniający warunki zadania musi być kwadratem. Zbudowanie ostrosłupa o podstawie kwadratowej i równoramiennych ścianach bocznych nie nastęrcza żadnych trudności.

Odpowiedź: Rombami spełniającymi warunki zadania są jedynie kwadraty.

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl



Olimpiada

Zadania II stopnia oraz finału Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

LIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2002/2003

ZAWODY II STOPNIA (21–22 lutego 2003)

1. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita $n > 2003$, że w ciągu

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{2003}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o . Dwusieczne kątów DAB i ABC przecinają się w punkcie P , a dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie Q . Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu o , który nie zawiera punktów D i A . Punkt N jest środkiem tego łuku DA okręgu o , który nie zawiera punktów B i C . Dowieść, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do MN .

3. Dany jest wielomian

$$W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x.$$

Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych a, b spełniających równanie

$$W(a) = W(b).$$

4. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki: $0 < 2k < p$ oraz $kp + 3 = x^2 + y^2$.

5. Punkt A leży na zewnątrz okręgu o o środku O . Z punktu A poprowadzono dwie proste styczne do okręgu o odpowiednio w punktach B i C . Pewna styczna do okręgu o przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Proste OE i OF przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnić, że z odcinków BP, PQ i QC można zbudować trójkąt podobny do trójkąta AEF .

6. Każdej parze liczb całkowitych nieujemnych (x, y) jest przyporządkowana liczba $f(x, y)$ zgodnie z warunkami:

$$f(0, 0) = 0;$$

$$f(2x, 2y) = f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y),$$

$$f(2x + 1, 2y) = f(2x, 2y + 1) = f(x, y) + 1 \text{ dla } x, y \geq 0.$$

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną i niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $f(a, b) = n$. Rozstrzygnąć, ile jest liczb x spełniających równanie $f(a, x) + f(b, x) = n$.

1. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinek CD jest wysokością. Przez środek M boku AB poprowadzono taką prostą przecinającą półproste CA i CB odpowiednio w punktach K i L , że $CK = CL$. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL . Wykazać, że $SD = SM$.

2. Liczba a jest dodatnia i mniejsza od 1. Dowieść, że dla każdego skończonego, ściśle rosnącego ciągu nieujemnych liczb całkowitych (k_1, \dots, k_n) zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^n a^{k_i} \right)^2 < \frac{1+a}{1-a} \sum_{i=1}^n a^{2k_i}.$$

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek:

dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $W(n)$.

4. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, z , że $0 < x < y < z < p$. Wykazać, że jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają takie same reszty przy dzieleniu przez p , to liczba $x^2 + y^2 + z^2$ jest podzielna przez $x + y + z$.

5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H . Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Udowodnić, że istnieje permutacja (x_1, x_2, \dots, x_n) zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, spełniająca dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ warunek:

x_{i+1} jest jedną z liczb $2x_i, 2x_i - 1, 2x_i - n, 2x_i - n - 1$, przy czym $x_{n+1} = x_1$.

Informacje o przebiegu LIV Olimpiady Matematycznej

I. W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1587 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 597 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 126 uczniów.

II. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 17 kwietnia br. postanowił przyznać 14 osobom dyplom laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów, na 36 punktów możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

I miejsce: Marcin PILIPCZUK (35 pkt.), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Leszek Sidz, Agnieszka Kałamajska, Michał Krych, Joanna Jasznińska i Jakub Onufry Wojtaszczyk).

II miejsce: Paweł JANUSZEWSKI (30 pkt.), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Mieczysław Jędrzejowski i Zdzisław Pogoda).

III miejsce: Witold RĘBACZ (29 pkt.), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciele: Lucyna Cięciwa, Mieczysław Jędrzejowski, Zdzisław Pogoda, Michał Kapustka, Grzegorz Kapustka i Witold Jarnicki).

IV miejsce: Kamil DUSZENKO (28 pkt.), kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciel: Bożena Ingot).

Nagrody stopnia drugiego

V–VI miejsce:

Michał LASOŃ (24 pkt.), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Ryszard Gruca, Lucyna Cięciwa, Mieczysław Jędrzejowski, Zdzisław Pogoda i Paweł Walter).

Aleksander ZABŁOCKI (24 pkt.), kl. IV, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (n.: Zbigniew Bobiński, Maria Kobus i Alina Semrau).

VII miejsce: Bartłomiej ROMAŃSKI (23 pkt.), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Jerzy Bednarczuk, Wiktor Bartol i Jakub Onufry Wojtaszczyk).

Nagrody stopnia trzeciego

VIII miejsce: Bartosz WALCZAK (20 pkt.), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Lucyna Cięciwa, Ryszard Gruca, Mieczysław Jędrzejowski i Paweł Walter).

IX–X miejsce:

Krzysztof CHOROMAŃSKI (18 pkt.), kl. III, II LO im. Stefana Batorego w Warszawie (n.: Alfreda Klimczewska).

Mateusz MICHAŁEK (18 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka, Jacek Dymel, Tomasz Michałek i Paweł Walter).

XI miejsce: Jan CZAJKOWSKI (17 pkt.), kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Wiesław Suchocki, Zbigniew Romanowicz, Artur Jeż i Mateusz Kwaśnicki).

XII–XIV miejsce:

Tomasz KAZIMIERCZUK (14 pkt.), kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (n.: Ewa Wierdak).

Joanna PANECKA (14 pkt.), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Agnieszka Kałamajska, Leszek Sidz i Michał Krych).

Lech STAWIKOWSKI (14 pkt.), kl. III, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Augustyn Kałuża, Zbigniew Romanowicz i Rafał Kulik).

III. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 16 zawodników:

Miejsca XV–XXVIII:

Jadwiga COGIEL (12 pkt.), kl. IV, I LO w Lublińcu (n.: Urszula Peşik i Józef Kalinowski).

Piotr DANILEWSKI (12 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka, Janina Kłapyta, Ryszard Gruca i Marzanna Jaszczewska).

Maria DONTEN (12 pkt.), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Agnieszka Kałamajska, Leszek Sidz, Jakub Onufry Wojtaszczyk i Michał Krych).

Rafał FABIAŃSKI (12 pkt.), kl. IV, LO im. Macieja Rataja w Strzelcach Krajeńskich (n.: Beata Domaradzka).

Michał JASZCZYK (12 pkt.), kl. III, XIII LO w Szczecinie (n.: Michał Szuman i Beata Bogdańska).

Damian KONIECKI (12 pkt.), kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (n.: Ewa Wierdak).

Tomasz KURAS (12 pkt.), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka i Janina Kłapyta).

Tomasz KURPIOS (12 pkt.), kl. IV, Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 4 w Bydgoszczy (n.: Halina Kwiatkowska).

Tomasz LENARCIK (12 pkt.), kl. III, I LO im. Stefana Żeromskiego w Kielcach (n.: Katarzyna Dąbrowska-Adach, Andrzej Lenarcik i Maciej Sękalski).

Stefan ŁAPICKI (12 pkt.), kl. I, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Augustyn Kałuża).

Arkadiusz PAWLIK (12 pkt.), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Lucyna Cięciwa, Mieczysław Jędrzejowski, Ryszard Gruca, Zdzisław Pogoda i Witold Jarnicki).

Michał PILIPCZUK (12 pkt.), kl. III, 20. Społecznego Gimnazjum Ogólnokształcącego w Warszawie (n.: Joanna Jaszewska, Adam Smólski i Jakub Onufry Wojtaszczyk).

Piotr PŁOSZYŃSKI (12 pkt.), kl. IV, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (n.: Henryk Pawłowski).

Kacper ZAJĄC (12 pkt.), kl. I, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Augustyn Kałuża, Paweł Głowacki i Zbigniew Romanowicz).

Miejsca XXIX–XXX:

Aleksander PIOTROWSKI (11 pkt.), kl. III, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (n.: Zdzisława Graczyk i Henryk Pawłowski).

Przemysław UZNAŃSKI (11 pkt.), kl. IV, III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni (n.: Wojciech Tomalczyk).

IV. W skład delegacji polskiej na XLIV Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbędzie się w Tokio (Japonia) w dniach 10–20 lipca br. powołani zostali:

*Kamil Duszenko,
Paweł Januszewski,
Michał Lasoń,
Marcin Pilipczuk,
Witold Rębacz,
Aleksander Zabłocki.*

Jako zawodników rezerwowych powołano *Bartłomieja Romańskiego* i *Bartosza Walczaka*.

V. Na XXVI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się w dniach 21 czerwca–1 lipca br. w Austrii w miejscowości Graz powołano delegację, w skład której wejdą:

*Krzysztof Choromański,
Jan Czajkowski,
Michał Pilipczuk,
Bartłomiej Romański,
Lech Stawikowski,
Bartosz Walczak.*

Zawodnicy rezerwowi: *Tomasz Lenarcik* i *Kacper Zając*.

VI. Powołano też delegację na XIV Olimpiadę Matematyczną Państw Bałtyckich, która odbędzie się na Łotwie na początku listopada br. Skład tej delegacji jest następujący:

*Piotr Danilewski,
Michał Jaszczuk,
Tomasz Kuras,
Stefan Łapicki,
Mateusz Michalek.*

Zawodnicy rezerwowi: *Tomasz Lenarcik* i *Kacper Zając*.

VII. Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej odbędzie się w dniach 1–15 czerwca br. w Domu Wczasowym Zgoda w Zwardoniu. Na obóz ten zostały powołane następujące osoby:

<i>Maciej Balawender,</i>	<i>Tomasz Kuras,</i>
<i>Krzysztof Choromański,</i>	<i>Tomasz Lenarcik,</i>
<i>Jan Czajkowski,</i>	<i>Stefan Łapicki,</i>
<i>Piotr Danilewski,</i>	<i>Mateusz Michalek,</i>
<i>Kamil Duszenko,</i>	<i>Hubert Orlik-Grzesik,</i>
<i>Andrzej Grzesik,</i>	<i>Michał Pilipczuk,</i>
<i>Aleksander Jankowski,</i>	<i>Witold Rębacz,</i>
<i>Paweł Januszewski,</i>	<i>Bartłomiej Romański,</i>
<i>Michał Jaszczuk,</i>	<i>Bartosz Walczak,</i>
<i>Leszek Jurkowski,</i>	<i>Kacper Zając.</i>

Zawodnicy rezerwowi: *Maciej Jaśkowski*, *Paweł Góra* i *Jakub Kallas*.

Wskutek uwzględnienia ewentualnych odwołań składy powyższych delegacji mogą ulec zmianie.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Wewnątrz satelity poruszającego się po orbicie geostacjonarnej umieszczono układ dwóch małych, identycznych kulek o masie dużo większej od masy łączącego je sztywnego pręta. Układ może swobodnie obracać się wokół nieruchomego względem satelity środka pręta. Znajdź położenia równowagi układu kulek i pręta. Wyznacz okres małych drgań układu w płaszczyźnie orbity wokół położenia równowagi.

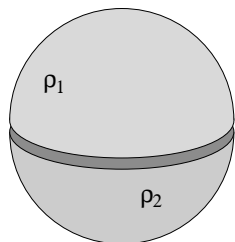
Uwaga: Siły grawitacji działające na obie kulki nie są równe, możesz jednak przyjąć, że są równoległe.

Wskazówka: Dla małych wartości x można stosować przybliżenie: $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$.

2. Ichtiolog oglądał przez lupę rybkę pływającą w akwarium na głębokości $h = 10$ cm. Użyta lupa była soczewką dwuwypukłą o obu promieniach krzywizn równych $R = 25$ cm, wykonaną ze szkła o współczynniku załamania $n = 1,5$. Lupa umieszczona została poziomo na wysokości $w = 5$ cm nad powierzchnią wody w taki sposób, aby obserwowana rybka znajdowała się na osi symetrii soczewki. Następnie ichtiolog opuścił lupę na powierzchnię wody zanurzając jedną stronę soczewki. Jakie było położenie obrazu rybki w obu przypadkach? Współczynnik załamania światła w wodzie $n' = \frac{4}{3}$.

3. W niektórych sondach kosmicznych stosuje się źródła energii wykorzystujące zjawisko rozpadu β^- (z jądra emitowany jest elektron) zachodzące między innymi w plutonie ^{241}Pu .

Rozważ ogniwo składające się z kwadratowej blaszki o grubości $d = 0,1$ mm i boku $a = 10$ cm wykonanej z plutonu ^{241}Pu umieszczonej pomiędzy przewodzącymi blaszkami o grubości dostatecznej, by pochłonię wszystkie wyemitowane elektrony. Zewnętrzne blaszki są ze sobą zwarte i tworzą elektrodę ujemną, natomiast środkowa plutonowa blaszka tworzy elektrodę dodatnią. Odległość pomiędzy środkową blaszką a każdą z blaszek zewnętrznych wynosi $l = 1$ mm. Oblicz stacjonarne natężenie prądu generowanego przez to ogniwo.



1. Dwie półkule o promieniach R , wykonane z izolatora, naładowano równomiernie ładunkami o gęstościach objętościowych ρ_1 i ρ_2 i zbliżono

Wyznacz czas, po którym napięcie nieobciążonego ogniwa wzrośnie od 0 do $U = 100$ V.

Gęstość plutonu $\rho = 19,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, a jego czas połowicznego zaniku $T = 13$ lat. Przyjmij, że wszystkie wyemitowane elektrony docierają do elektrody ujemnej, a czas ładowania jest zanedbywalnie krótki w porównaniu z czasem połowicznego zaniku.

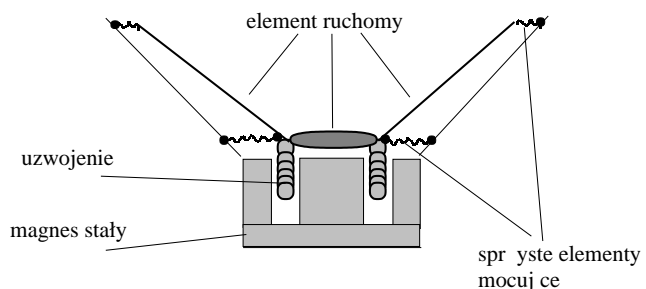
Zadanie doświadczalne. Element ruchomy głośnika można traktować jako ciało sztywne, o pewnej masie, przymocowane sprężyscie do obudowy głośnika. Element ten może wykonywać drgania harmoniczne.

Masz do dyspozycji:

- głośnik,
- generator napięcia sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości,
- woltomierz napięcia zmiennego,
- trzy monety 50 gr o masie 3,95 g każda,
- monetę 2 zł,
- kawałki dwustronnej taśmy klejącej o gęstości powierzchniowej $0,01 \text{ g/cm}^2$,
- papier milimetrowy,
- przewody elektryczne umożliwiające zestawienie układu doświadczalnego.

1. Wyznacz masę monety 2 zł.
2. Wyznacz masę elementu ruchomego głośnika.

Wskazówka: Połącz głośnik z generatorem i wyznacz częstotliwość, dla której napięcie zmienne mierzone na głośniku osiąga maksymalną wartość. Przyjmij, że częstotliwość ta odpowiada częstotliwości drgań własnych elementu ruchomego głośnika.

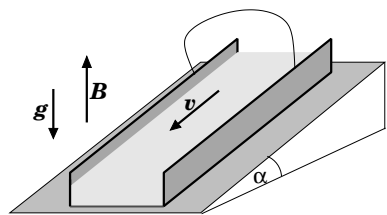


ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

do siebie na bardzo niewielką odległość – rysunek. Oblicz siłę wzajemnego oddziaływania tych półkul.

2. W korytku przymocowanym do równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 1^\circ$ płynie nielepkka ciecz

o gęstości $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ i przewodnictwie właściwym $\sigma = 100 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Pionowe ścianki korytka wykonane z idealnie przewodzącego materiału są zwarte ze sobą,



a dno jest płaskie i nieprzewodzące. Całość znajduje się w jednorodnym, skierowanym pionowo w górę, polu magnetycznym.

Oblicz, jaką wartość ma indukcja tego pola, jeżeli stacjonarny i jednorodny przepływ cieczy odbywa się ze stałą prędkością $v = 5 \text{ m/s}$.

Przyjmij, że przepływ masy odbywa się tylko wzdłuż korytka, a indukowany prąd elektryczny płynie w poprzek. Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

3. Płaska, doskonale czarna powierzchnia o stałej temperaturze T_w jest umieszczona równoległe do innej doskonale czarnej płaszczyzny o stałej temperaturze T_n , niższej od T_w . Między powierzchniami jest próżnia.

W celu zmniejszenia powodowanego promieniowaniem przepływu ciepła pomiędzy powierzchniami umieszczono ekran złożony z m cienkich czarnych płyt odizolowanych od siebie termicznie i leżących równoległe do płaszczyzn.

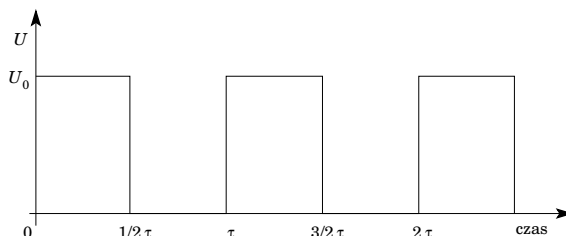
Ile razy zmniejszył się strumień promieniowania (energia przekazana w jednostce czasu na jednostkę powierzchni) pomiędzy płaszczyznami po wstawieniu ekranu?

Wyznacz temperatury kolejnych płyt $1, 2, \dots, m$ i podaj wartości liczbowe dla $m = 9$, $T_w = 1300^\circ \text{C}$, $T_n = 300^\circ \text{C}$. Efekty związane ze skończonymi rozmiarami powierzchni zaniedbaj.

Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:

- żarówkę z włóknem wolframowym, o napięciu znamionowym $2,2 \text{ V}$,
- oscyloskop,
- zasilacz napięcia stałego, regulowanego w zakresie $0 \div 3 \text{ V}$,
- opornik o oporności $1 \text{ } \Omega$,
- przewody elektryczne,
- papier milimetrowy.

Dodatkowo, w części B zadania, masz do dyspozycji układ elektroniczny przetwarzający napięcie stałe z zakresu od 1 V do 3 V w napięcie zmienne o regulowanej amplitudzie U_0 oraz regulowanym okresie τ (patrz rysunek).



Część A. Wyznacz doświadczalnie moc oddawaną przez żarówkę do otoczenia w zależności od temperatury jej włókna. Uzyskane wyniki przedstaw na wykresie.

Część B. Wyznacz masę gorącej części włókna żarówki. Przyjmij, że ciepło właściwe wolframu nie zależy od temperatury i wynosi $c_w = 1440 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

W obu częściach zadania przyjmij, że opór włókna żarówki R_w jest liniową funkcją temperatury:

$$R_w(T) = R_0(1 + \alpha_R(T - T_0)),$$

gdzie T – bezwzględna temperatura włókna, natomiast R_0 – opór włókna w temperaturze pokojowej T_0 . Przyjmij $\alpha_R = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $T_0 = 295 \text{ K}$.

Uwaga! Przed włączeniem napięcia zasilania poproś asystenta o sprawdzenie układu.

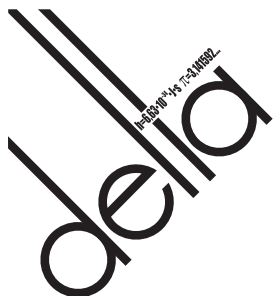
Laureaci LII Olimpiady Fizycznej 2002/2003

1. Szymon Piotr SZAFRANIEC, kl. IV, II LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Gorzowie Wlkp. (nauczyciel: mgr Bogumiła Jankowska).
2. Marcin Łukasz PILIPCZUK, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska).
3. Krzysztof IWASZCZUK, kl. IV, I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku (nauczyciel: mgr Mirosława Żuber).
4. Bartłomiej Maciej SZCZYGIEL, kl. III, II LO im. Cypriana Kamila Norwida w Jeleniej Górze (nauczyciel: mgr Andrzej Jarnuszkiewicz).
5. Tomasz Wiktor KAZIMIERCZUK, kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: mgr Barbara Lenert).

6. Leszek Grzegorz GRUDZIEN, kl. IV, II LO im. Jana Śniadeckiego w Kielcach (nauczyciel: mgr Beata Prędotka).
7. Piotr Krzysztof MIGDAŁ, kl. I, V LO w Bielsku-Białej (nauczyciel: mgr Ewa Gajda).
8. Mateusz Michał NOWACZYK, kl. III, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi (nauczyciel: mgr Hanna Szyburska).
9. Jerzy Stanisław ORŁOWSKI, kl. IV, XXVII LO im. Tadeusza Czackiego w Warszawie (nauczyciel: mgr Maria Kuśmierk).
10. Damian KONIECKI, kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: mgr Grzegorz Depczyński).

11. Kamil FABER, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński).
12. Jan Aleksander GUTT, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński).
13. Michał Piotr HELLER, kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: mgr Ryszard Zapala).
14. Łukasz Piotr BĄK, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: dr Sławomir Brzezowski).
15. Paweł Zbigniew BUDZOWSKI, kl. IV, LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli (nauczyciel: mgr Stanisław Szymonik).
16. Artur Jan FIJAŁKOWSKI, kl. IV, III LO im. Adama Mickiewicza w Katowicach (nauczyciel: dr Halina Broda).
17. Piotr STAWIŃSKI, kl. IV, I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie (nauczyciel: mgr Maria Kłysz).

18. Krzysztof Grzegorz SOBCZAK, kl. IV, V LO im. ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie (nauczyciel: mgr Anna Mazurkiewicz).
19. Paweł ŚLEDŹ, kl. III, XIII LO w Szczecinie (nauczyciel: mgr Krzysztof Łyszczek).
20. Mateusz Józef MICHĄLEK, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: dr Sławomir Brzezowski).
21. Łukasz PAWICKI, kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciel: mgr Marian Bąk).
- 22–23. Marek Jerzy SZYPROWSKI, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński).
- 22–23. Adam Jan LATOSIŃSKI, kl. IV, I Społeczne LO im. Hetmana Jana Tarnowskiego w Tarnobrzegu (nauczyciel: mgr Jacek Bąk).



XLVI OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2002/2003

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (druga seria)

1. Planetoida o średnicy $d = 65$ km, obiegająca Słońce po orbicie kołowej w okresie $P = 5,5$ lat, zakrywa odległą gwiazdę. W czasie zakrycia planetoida porusza się na sferze z prędkością $\rho = 26''/\text{godz.}$, a jej elongacja wynosi $\gamma = 90^\circ$. Zakładając, że planetoida ma kształt sferyczny, a zakrycie zachodzi centralnie, oblicz czas zakrycia. Jak nazywałoby się to zjawisko, gdyby uczestniczył w nim Pluton, a nie zakrywana gwiazda? Dane dotyczące Plutona znajdź samodzielnie i podaj ich źródło.
2. Dwie gwiazdy z trudem mieszczą się na średnicy pola widzenia teleskopu. Oblicz deklinacje tych gwiazd wiedząc, że są one sobie równe, a ich rektascensje różnią się o $\Delta\alpha = 0,^h1$. Wiadomo też, że pewna

gwiazda leżąca na równiku niebieskim przechodzi przez średnicę pola widzenia tego teleskopu w czasie $\Delta t = 2$ min.

3. Pewna gwiazda jest odległa od nas o 250 lat świetlnych. Moc promieniowania od tej gwiazdy wynosi $6,4 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$, a maksimum promieniowania przypada na długość fali $\Lambda = 2,634 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Oblicz temperaturę, promień i całkowitą moc promieniowania tej gwiazdy w jednostkach promieniowania Słońca.

4. Krótko opisz jedno z najciekawszych dla Ciebie wydarzeń astronomicznych ostatnich kilku lat. Podaj źródła swoich informacji.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Dla gwiazd ciągu głównego temperatura T z dobrym przybliżeniem jest proporcjonalna do ilorazu masy M i promienia R , czyli

$$T \sim \frac{M}{R}.$$

Istnieją również związki między masą i promieniem. Dla gwiazd o masach małych i średnich jest w przybliżeniu $R \sim M$. W przypadku gwiazd bardzo masywnych można przyjąć $R \sim \sqrt{M}$. Posługując się tymi wzorami oszacuj czas przebywania na ciągu głównym gwiazd o najmniejszych masach (8% masy Słońca) wiedząc, że gwiazda o masie Słońca znajduje się na ciągu głównym przez około 10^{10} lat. Oszacuj

również masę, jaką mogą mieć najmasywniejsze gwiazdy, przyjmując, że za gwiazdę można uznać obiekt, który pozostaje na ciągu głównym przez czas co najmniej rzędu 10^4 lat.

Dla uproszczenia przyjmij, że stałe proporcjonalności dla gwiazd o małych i dużych masach są takie same jak dla Słońca.

2. 18 stycznia 2000 roku nastąpiło zderzenie z Ziemią dużego meteoroidu, który nazwano Tagish Lake od nazwy jeziora, w okolicach którego spadły jego resztki. Związany ze zderzeniem bolid był doskonale

obserwowany i udało się zmierzyć prawie wszystkie interesujące wielkości z nim związane. Z pewnym przybliżeniem, mającym na celu ułatwienie rachunków, dane te przedstawiają się następująco:

- moment spadku 16^h43^m UT,
- miejsce spadku 60 N, 135 W,
- azymut lotu 155° (azymut liczony od południa przez zachód, a więc bolid leciał z kierunku północno-północno-zachodniego),
- całkowita energia wypromieniowana w czasie zjawiska wyniosła $1,1 \cdot 10^{12}$ J,
- prędkość w atmosferze 15 km/s,
- gęstość meteoroidu (na podstawie znalezionych meteoroidów) około 1500 kg/m^3 .

Wiedząc, że na promieniowanie zamieniło się około 5% energii mechanicznej ciała, a meteoroid leciał praktycznie w płaszczyźnie ekliptyki, oblicz promień meteoroidu i oszacuj wielką półość orbity.

Uwagi:

1. Parametry dotyczące Słońca, Ziemi oraz jej orbity potraktuj jako dane. Prędkość ciała na eliptycznej orbicie

keplerowskiej ma postać

$$v = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)},$$

gdzie:

M_\odot – masa Słońca,
 G – stała grawitacji,
 r – odległość od Słońca,
 a – wielka półość orbity.

2. Ułatwieniem rozwiązania może być sporządzenie rysunku zdarzenia widzianego od strony północnego bieguna ekliptyki.

3. W ewolucji gwiazd wprowadza się pojęcia odpowiednich skal czasowych. Jedną z nich jest dynamiczna skala czasowa określana jako czas potrzebny do zapadnięcia się gwiazdy, podczas jej kurczenia się, gdyby nie było sił przeciwdziałających takiemu kurczeniu. Wtedy byłby to spadek swobodny warstwy zewnętrznej do środka gwiazdy. Oszacuj ten czas dla Słońca, przyjmując masę Słońca $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg i promień Słońca $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ m.

4. Przeczytaj tekst załączonego fragmentu artykułu („Winda do nieba”, *Polityka* nr 49, 7 grudnia 2002), a następnie przedyskutuj realność (od strony fizyczno-astronomicznej) proponowanego przedsięwzięcia.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. W lutowym numerze *Sky & Telescope* z roku 2001 ukazała się notatka o znalezieniu pary prawie bliźniaczych związanych grawitacyjnie planetoid o jasności 24 magnitudo każda. Według tej notatki okres wzajemnego obiegu planetoid wynosi około 4 lat, odległość kątowna – cztery sekundy, a odległość między tymi ciałami – 130 tysięcy kilometrów. Dodatkowo podano, że rozmiary planetoid wynoszą około 100 kilometrów. Powyższe dane są przybliżone i dlatego są nieco sprzeczne. Przedyskutuj je, a w szczególności rozpatrz problem rozmiarów planetoid w świetle pozostałych przytoczonych danych. W celu porównania użyj danych Charona znajdującego się w zbliżonej odległości od Słońca (wg *Szkolnego Słownika Astronomii*: magnitudo 16,8, promień 595 km, masa $1,77 \cdot 10^{21}$ kg).

2. W drugim etapie olimpiady spotkaliśmy się z tzw. dynamiczną skalą czasową. Ewolucja obłoku gazowego może zachodzić w czasie zbliżonym do tej skali, jeżeli energia kurczącego się obłoku nie jest zamieniana na energię termiczną. Zachodzi to w przypadku intensywnego chłodzenia (np. przez wypromieniowanie) lub gdy w obłoku pojawi się „kanał” pochłaniający energię. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z kurczeniem się niezjonizowanego gazu, a w drugim, gdy energia grawitacyjna zamieniana jest na energię dysocjacji i jonizacji. Kurczenie obłoku następuje w każdym

przypadku, gdy energia grawitacyjna jest większa co do modułu od energii termicznej, a w przeciwnym przypadku następuje rozprężanie. Zakładając dla uproszczenia, że energia grawitacyjna obłoku jest opisana wzorem¹⁾

$$E_g = -\frac{3GM^2}{5R},$$

gdzie M – masa obłoku, R – jego promień, oszacuj:

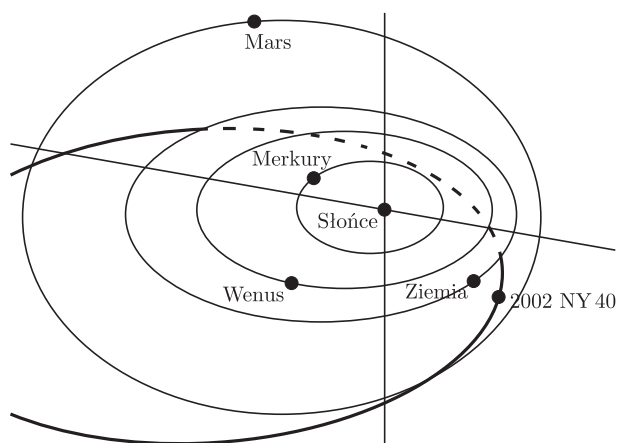
1. Jaką gęstość musi mieć obłok wodoru H_2 o masie równej masie Słońca ($2 \cdot 10^{30}$ kg) i temperaturze 20 K, by móc zacząć kurczenie.
2. Jaki będzie promień powstałej w ten sposób protogwiazdy, jeżeli założyć, że połowa energii grawitacyjnej wydzielonej w trakcie kurczenia

zostanie zamieniona na energię dysocjacji (4,5 eV na cząsteczkę) i jonizacji (13,6 eV na atom, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$), a promień protogwiazdy odpowiada momentowi, gdy jonizacja dotyczy całej gwiazdy.

¹⁾ Wzór jest wprawdzie słuszny dla sferycznego i jednorodnego obłoku, powinien jednak dać wartości zbliżone do rzeczywistości, mimo że prawdziwy obłok nie jest jednorodny ani pod względem gęstości, ani temperatury.

3. Asteroida 2002 NY 40 zbliżyła się do Ziemi na odległość 540 000 km. Na rysunku zaznaczono pozycję planetoidy w dniu zbliżenia.

Nachylenie orbity asteroidy do ekliptyki jest niewielkie. Zakładając, że asteroida jest kulą odbijającą światło jak ziemski Księżyc i wiedząc, że jej jasność obserwowana wynosiła 6,5 mag oraz korzystając z dodatkowych przyjętych przez siebie danych i uproszczeń, oceń średnicę planetoidy. Wymień wszystkie przyjęte przez siebie uproszczenia i założenia oraz przeprowadź ocenę jakości swojego oszacowania.



4. Aparatura planetarium odtworzy dwukrotnie wygląd nieba obserwowany w obecnych czasach przez „hipotetycznego” obserwatora z powierzchni jednej z planet Układu Słonecznego*. Określ z możliwie największą dokładnością czas i miejsce obserwacji.

Podaj pełne uzasadnienie odpowiedzi.

*Na kopule planetarium był odtworzony wygląd nieba z powierzchni Merkurego w dniu, w którym z Ziemi obserwuje się przejście Merkurego przed tarczą Słońca (7 maja 2003 r). Rozwiązując zadanie uczestnik dysponował Atlasmem Nieba i Kalendarzem Astronomicznym na 2003 r.

5. Na podstawie samodzielnie przeprowadzonych obserwacji Księżyca**:

- oceń jego współrzędne horizontalne,
- zaznacz na załączonej mapce linię terminatora,
- dokonaj identyfikacji widocznych w polu widzenia lunetki elementów powierzchni zaobserwowanych w pobliżu terminatora.
- wyznacz kąt pomiędzy kierunkiem przechodzącym przez końce linii widocznego terminatora a kierunkiem koła godzinowego przechodzącego przez Księżyc.

**Zadanie było rozwiązywane na tarasie obserwatorium astronomicznego. Uczestnik dysponował małą lunetką, mapą Księżyca, Atlasmem Nieba, Kalendarzem Astronomicznym na 2003 r. oraz dokładnym zegarem.

6. W dniu 7 maja 2003 roku pomiędzy 5,2^h oraz 10,5^h UT nastąpi przejście Merkurego przed tarczą Słońca. Podaj przybliżony termin następnego podobnego zjawiska.

Przyjmij następujące założenia:

- Orbity Ziemi i Merkurego są okręgami.
- Średnica kątowa tarczy Słońca obserwowanego z Ziemi wynosi 32’.
- Wielka półoś (w przyjętych założeniach promień) orbity Merkurego $a = 0,387$ AU.
- Nachylenie orbity Merkurego względem ekliptyki $i = 7,0^\circ$.
- Okres obiegu Merkurego wokół Słońca wynosi 87,97^d.
- Średnica Merkurego wynosi 4880 km.

Końcowa klasyfikacja

Laureaci

I miejsce: Piotr GUZIK, kl. III, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie.

II miejsce: Krzysztof PUTYRA, kl. IV, V LO w Bielsku-Białej.

III miejsce: Krzysztof BARCZYŃSKI, kl. IV, LO im. Bolesława Chrobrego w Pszczynie.

IV miejsce: Michał GROSS, kl. IV, II LO im. Cypriana Kamila Norwida w Tychach.

V miejsce ex aequo:

Dawid ŁUSZCZKI, kl. IV, II LO im. Pułkownika Leopolda Lisa-Kuli w Rzeszowie.

Bartosz FORMAL, kl. IV, I LO im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie.

Finaliści

Krzysztof MAZURKIEWICZ, kl. III, I LO im. Filomatów Ziemi Michałowskiej w Brodnicy.

Paweł WOJTCZAK, kl. V, Zespół Szkół Politechnicznych im. Bohaterów Monte Cassino we Wrześni.

Krzysztof MILLER, kl. III, V LO im. Wspólnej Europy w Olsztynie.

Marcin GRONOWSKI, kl. I, II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Grudziądzu.

Zbigniew ARTEMIUK, kl. IV, LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Przasnyszu.

Wyróżnienie za rozwiązanie zadania w sali planetarium otrzymał

Jakub SKOWRON, kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.