

XXXVII Zjazd Fizyków Polskich

odbędzie się w Gdańsku, w dniach 15–18 września 2003.

W imieniu organizatorów serdecznie zapraszamy.

Adres organizatorów konferencji: Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Uniwersytet Gdański
ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk; tel./fax: (58) 341 87 00
<http://iftia9.univ.gda.pl/~zjazdptf>, e-mail: ZjazdPTF@iftia9.univ.gda.pl

SPIS TREŚCI NUMERU 5 (348)

Zadania trudniejsze od innych <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 1
Lemat Kuratowskiego–Zorna <i>Wojciech Guzicki</i>	str. 5
Jak pryska bańka mydlana? <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 6
O zasadzie minimum <i>Piotr Zakrzewski</i>	str. 8
Mnożniki Lagrange’a <i>Witold Sadowski</i>	str.10
Zadania	str.11
Mała Delta	str.12
Aktualności	str.13
Niezrealizowane minimum <i>Grzegorz Łukaszewicz</i>	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Maj	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hryniewicz, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Krzysztof Maślanka, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Zdzisław Pogoda, Michał Różyczka, Konrad Rudnicki, Grzegorz Sitarski, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**

Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiwi.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wybór artykułów *Małej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

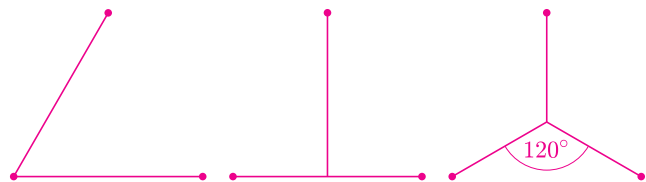
Test na liczby pierwsze

Przekazując wiedzę kolejnym pokoleniom, wybieramy takie umiejętności, fakty, które mają duży walor użytkowy lub poznawczy. Pewne z nich wpisują się w kanon naszej kultury, wzbogacając tych, którzy ją poznają. Na specjalną uwagę zasługują problemy, które mają duże znaczenie praktyczne i nie zostały dotychczas rozwiązane w zadowalający sposób. Czy takie problemy w ogóle istnieją?

O tak, i jest ich wiele. Kilka z nich prezentujemy poniżej. Punktem wyjścia będą proste obserwacje z elementarnej geometrii, które bardzo szybko doprowadzą nas do trudnych i wciąż aktualnych zagadnień. Rozpocznijmy od następującego zadania.

Zadanie 1. Połącz wierzchołki trójkąta równobocznego odcinkami, których łączna długość jest możliwie najmniejsza.

Na kolejnych rysunkach (rys. 1, 2, 3) prezentujemy trzy propozycje rozwiązań, w których każda następna jest lepsza od poprzedniej.



Rys. 1

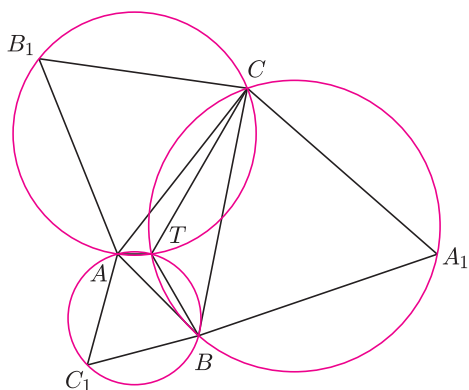
Rys. 2

Rys. 3

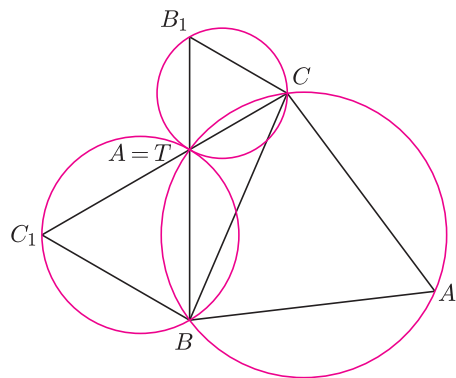
Jak wykazać, że ostatnia propozycja jest rozwiązaniem zadania?

W dyskusji nad rozwiązaniem tego zadania dla dowolnego trójkąta przydatna będzie własność, którą zauważył włoski fizyk i matematyk Evangelista Torricelli (1608–1647) [uczeń Galileusza, wykazał istnienie ciśnienia atmosferycznego, skonstruował barometr]:

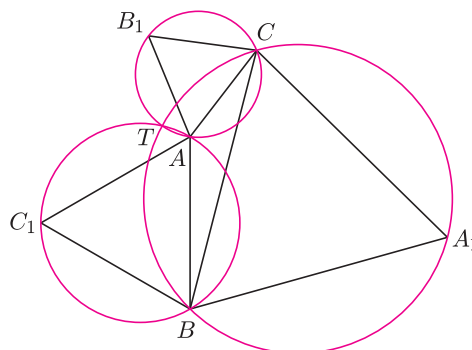
Jeśli na zewnątrz dowolnego trójkąta, na jego bokach, zbudujemy trójkąty równoboczne i na każdym z nich opiszemy okrąg, to tak otrzymane trzy okręgi przetną się w jednym punkcie (rys. 4, 5, 6).



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Niezwykłość tej obserwacji polega na tym, że punkt jednoznacznie wyznaczają dwa przecinające się okręgi, tu zaś w jednym punkcie spotykają się trzy okręgi zwane *okręgami Torricellego*. Wspólny punkt ich przecięcia nazywamy *punktem Torricellego*. Wykazanie opisanej własności (zwanej również *twierdzeniem Napoleona*, gdyż Napoleon I Bonaparte (1769–1821) też ją odkrył) nie jest trudne. Uzasadnienie można oprzeć na następującej szkolnej obserwacji [12, str. 130]: *suma miar kątów wpisanych w okrąg, opartych na tej samej cięciwie, lecz mających wierzchołki po przeciwnych stronach cięciwy, jest równa π* .

Okręgi opisane na trójkątach równobocznych CB_1A i AC_1B przecinają się w punkcie T . Wykażemy, że punkt T należy również do okręgu opisanego na trójkącie równobocznym BA_1C .

Gdy $|\sphericalangle A| < \frac{2}{3}\pi$ (rys. 4), to

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BTC| &= 2\pi - (|\sphericalangle BTA| + |\sphericalangle ATC|) = \\ &= 2\pi - \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

Gdy $|\sphericalangle A| = \frac{2}{3}\pi$ (rys. 5), to $A = T$.

Gdy $|\sphericalangle A| > \frac{2}{3}\pi$ (rys. 6), to

$$|\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle BTA| + |\sphericalangle ATC| = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

Zatem, w każdym z rozpatrywanych przypadków $|\sphericalangle BTC| = \frac{2}{3}\pi$ i jest to kąt oparty na tej samej cięciwie co kąt BA_1C , którego miara wynosi $\frac{1}{3}\pi$. Oznacza to, że punkty B, T, C, A_1 leżą na wspólnym okręgu opisanym na trójkącie równobocznym BA_1C .

Aby dla danego trójkąta wyznaczyć punkt Torricellego, nie musimy rysować wskazanych okręgów. Punkt T otrzymamy w wyniku przecięcia się dwóch spośród prostych AA_1, BB_1, CC_1 . Na przykład, punkty B, T, B_1 leżą na jednej prostej, gdyż $|\sphericalangle BTC| = \frac{2}{3}\pi, |\sphericalangle CTB_1| = |\sphericalangle CAB_1| = \frac{1}{3}\pi$, a zatem $|\sphericalangle BTB_1| = \pi$. Można również wykazać [11, str. 140], że odcinki AA_1, BB_1, CC_1 mają jednakową długość równą

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2S\sqrt{3}},$$

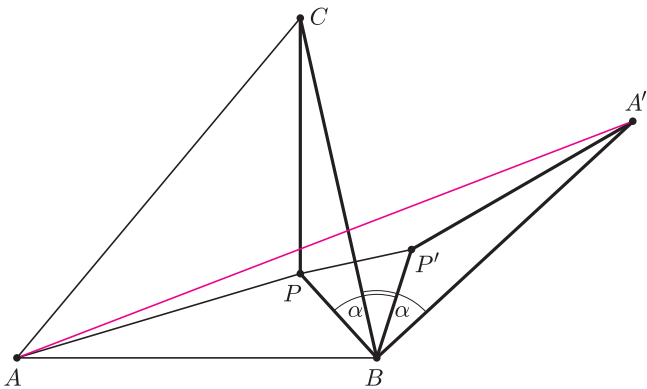
gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta ABC , S zaś jego polem (która to wielkość, zgodnie ze wzorem Herona, też jest funkcją długości boków trójkąta).

Punkt Torricellego pojawił się w matematyce (fizyce(?)) w związku z problemem ekstremalnym postawionym przez Bonawenturę Cavalieriego (1598–1647) (jego autorstwo przypisuje się również Pierrowi de Fermat (1601–1665)).

Problem. Połącz trzy punkty odcinkami, których łączna długość jest możliwie najmniejsza.

Jedną z trudności tego problemu (**Zadanie 1** jest jego szczególnym przypadkiem) jest to, że odpowiedź zależy od „rodzaju” trójkąta, jaki tworzą zadane punkty.

Przypadek I. Wskażemy najpierw rozwiązanie dla trójkątów, w których punkt Torricellego jest ich punktem wewnętrznym, czyli dla trójkątów o kątach wewnętrznych mniejszych niż $\frac{2}{3}\pi$. Wówczas z punktu Torricellego T każdy bok takiego trójkąta ABC widać pod kątem $\frac{2}{3}\pi$. Oto błyskotliwe rozwiązanie Hofmanna [5]. Rozważmy dowolny punkt wewnętrzny P trójkąta ABC , dla którego $\max\{|\sphericalangle A|, |\sphericalangle B|, |\sphericalangle C|\} < \frac{2}{3}\pi$. Punkt P łączymy z wierzchołkami A, B, C i obracamy trójkąt CPB o kąt $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ wokół punktu B do położenia trójkąta $A'P'B$.



Rys. 7

Wówczas

$$|AP| + |BP| + |CP| = |AP| + |P'P| + |A'P'|$$

i ostatnia suma jest najmniejsza, gdy punkty P oraz P' należą do odcinka AA' .

Wtedy

$$|\sphericalangle APB| = \pi - |\sphericalangle BPP'| = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi,$$

$$|\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle A'P'B| = \pi - |\sphericalangle PP'B| = \frac{2}{3}\pi.$$

Oznacza to, że z punktu P każdy z boków rozważanego trójkąta jest widoczny pod kątem $\frac{2}{3}\pi$. Zatem w tym przypadku optymalne rozwiązanie dają odcinki łączące punkt Torricellego z wierzchołkami trójkąta.

Przypadek II. Gdy punkty A, B, C tworzą trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych ma miarę równą co najmniej $\frac{2}{3}\pi$, to rozwiązaniem problemu jest suma długości odcinków wychodzących z wierzchołka tego kąta. Uzasadnienie tego jest bardziej kłopotliwe.

Niech trójkąt ABC będzie taki, że $|\sphericalangle C| \geq \frac{2}{3}\pi$ oraz $P \neq C$. Wykażemy, że wówczas

$$|AC| + |CB| < |AP| + |BP| + |CP|.$$

Wprowadźmy oznaczenia: $|\sphericalangle ACB| = \gamma \geq \frac{2}{3}\pi$, $|\sphericalangle ACP| = \varphi, |\sphericalangle BCP| = \psi$, F niech będzie rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC , a G rzutem prostokątnym punktu P na prostą CB . Wówczas

$$|AC| = |AF| + |CP| \cdot \cos \varphi, \quad |BC| = |BG| + |CP| \cdot \cos \psi,$$

czyli

$$\begin{aligned} |AC| + |BC| &= |AF| + |BG| + |CP| \cdot (\cos \varphi + \cos \psi) = \\ &= |AF| + |BG| + |CP| \cdot 2 \cdot \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}. \end{aligned}$$

Ponieważ jeden z powyższych cosinusów ma wartość $\cos \frac{\gamma}{2}$ (to, który z nich, zależy od tego, czy P jest punktem wewnętrznym kąta BCA) i $\gamma \geq \frac{2}{3}\pi$, więc $\cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$. W konsekwencji

$$|AC| + |BC| \leq |AF| + |BG| + |CP|.$$

Uwzględniając, że $|AF| < |AP|, |BG| < |BP|$, otrzymujemy ostatecznie

$$|AC| + |CB| < |AP| + |BP| + |CP|.$$

Oznacza to, że w przypadku trójkątów, których jeden z kątów wewnętrznych ma miarę większą niż $\frac{2}{3}\pi$, mamy zupełnie nową sytuację – punkt Torricellego nie wskazuje optymalnego rozwiązania problemu!

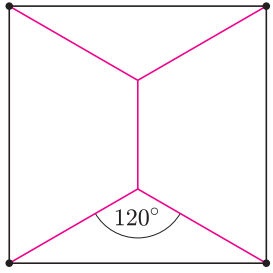
Omawiane zagadnienie ma wiele różnych uogólnień często zwanych *problemem sieci minimalnej*. Najbardziej kłopotliwym wśród nich jest *problem Steinera* (Jacob Steiner (1796–1863)).

Problem Steinera. Połącz n punktów płaszczyzny spójnym układem odcinków tak, aby ich łączna długość była możliwie najmniejsza.

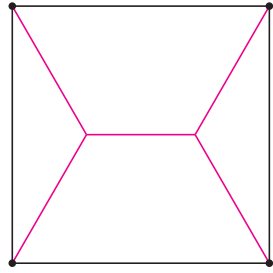
Oczywiste jest, że rozwiązanie tego problemu zależy od położenia danych punktów. Pewne trudności ujawniają się już, gdy próbujemy znaleźć minimalną sieć dla czterech punktów. Przypatrzmy się rozwiązaniu następującego zadania [7, zad. 75; Delta 9/1987, zad. 151].

Zadanie 2. Połącz wierzchołki kwadratu odcinkami tak, by ich łączna długość była możliwie najmniejsza.

Ideę rozwiązania można odczytać z rysunku 8. Rysunek 9 pokazuje, że otrzymane rozwiązanie nie jest jednoznaczne.

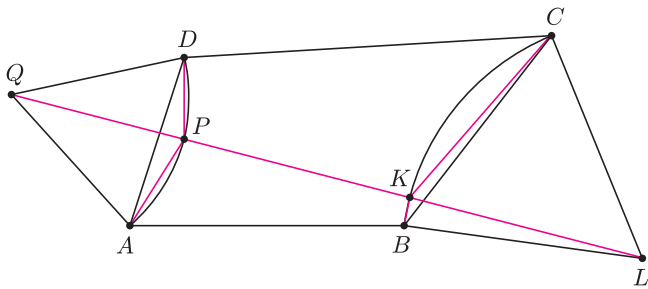


Rys. 8



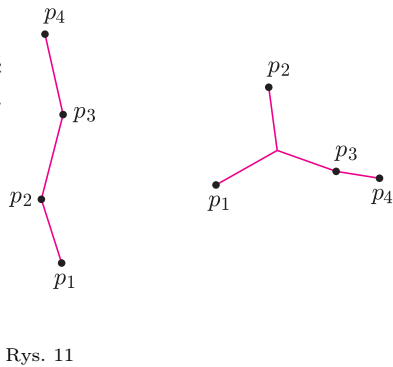
Rys. 9

Przy innym położeniu czterech punktów na płaszczyźnie zadanie się komplikuje. Na przykład dla czworokąta o kątach wewnętrznych nie większych niż $\frac{2}{3}\pi$ sieć minimalną znajdujemy, wybierając tę parę przeciwległych boków, dla których odległość ich środków jest największa i wykonując konstrukcję przedstawioną na rysunku 10 [1, 2].

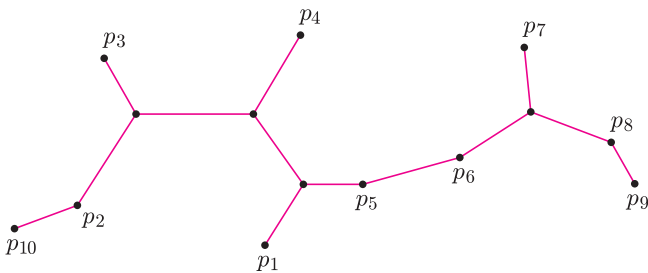


Rys. 10

W innych przypadkach sieć minimalna może mieć inny kształt (rys. 11). Dla większej liczby punktów problem się komplikuje, rysunek 12 przedstawia minimalną sieć dla wskazanych 10 punktów.



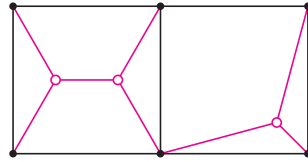
Rys. 11



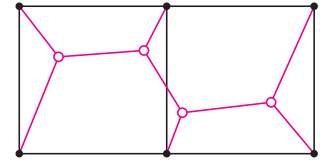
Rys. 12

Pomysł, że do rozwiązania problemu Steinera można dojść „krok po kroku” – najpierw (w znany już sposób) znajdujemy rozwiązanie dla trzech lub czterech punktów, a następnie łączymy otrzymane

sieci, nie jest dobry. Wyznaczona w ten sposób sieć dla 6 punktów będących wierzchołkami kwadratów (rys. 13) jest dłuższa od sieci przedstawionej na rysunku 14.

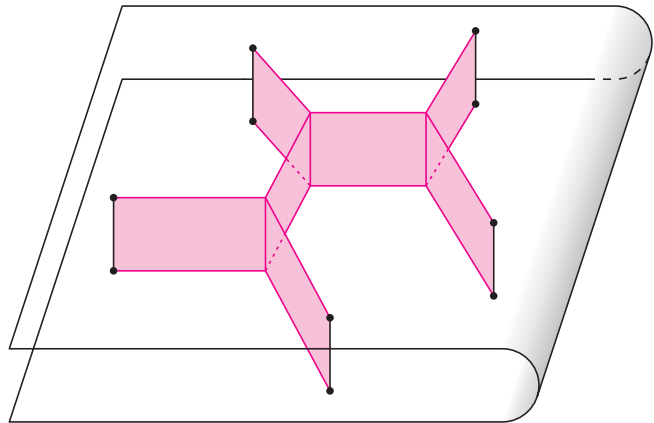


Rys. 13



Rys. 14

Oznacza to, że rozwiązanie problemu Steinera wymaga podejścia globalnego. Dla niedużej liczby punktów sieć minimalną można wyznaczyć doświadczalnie [2], korzystając z własności błony mydlanej, która dzięki działaniu napięcia powierzchniowego jest w stanie stałej równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy ma minimalne pole (rys. 15).



Rys. 15

W tej sytuacji naturalne jest pytanie: czy istnieje jakiś algorytm, który w skończonej liczbie kroków wskazywałby rozwiązanie problemu Steinera? Odpowiedź na nie jest pozytywna. Pierwszy taki algorytm podał w 1961 roku Z.A. Melzak [6] (od tego czasu tylko nieznacznie usprawniony, zob. [9, 10]). Sukces ten jest jednak pozorny, gdyż możliwości jego rzeczywistego wykorzystania są bardzo ograniczone. Algorytm ten jest po prostu nieefektywny. Na przykład dla $n = 7$ należy się liczyć z koniecznością zbadania 62370 sieci. W związku z tym nasza uwaga musi być skierowana nie tylko w stronę pytania o istnienie algorytmu, lecz również na możliwość jego efektywnego wykorzystania – rozwiązanie problemu za rozsądną cenę (czyli w możliwym do zaakceptowania czasie). Takimi zagadnieniami zajmuje się *teoria złożoności obliczeniowej* [3, 4].

Spróbujmy pokrótce wyjaśnić, o co chodzi. Jeśli czas na wykonanie w algorytmie obliczeń dla n parametrów uzależniony jest od liczby n wielomianowo, na przykład wzorem $5n^3$, to mówimy, że taki algorytm daje wynik w czasie *wielomianowym*. Takie algorytmy uważa się za dobre, a problem, który one rozwiązują, za łatwy. Na przykład: dodawanie dwóch liczb

n -cyfrowych wymaga nie więcej niż $2n$ operacji dodawania na cyfrach, mnożenie takich liczb nie wymaga więcej niż $3n^2$ operacji. Są to więc zadania łatwe. Jeśli jednak w algorytmie czas na wykonanie obliczeń dla n parametrów rośnie piorunująco szybko, na przykład wykładniczo jak 2^n (lub jeszcze gorzej, jak $n!$ czy n^n), to takie zadanie jest praktycznie niewykonalne. W tym przypadku, dla $n = 70$, nawet gdybyśmy sprawdzali 1000000 przypadków co sekundę, to i tak potrzebowalibyśmy ponad 300000 wieków dla sprawdzenia wszystkich 2^{70} przypadków. Problemy, dla których znamy tylko algorytmy niedające wyników w czasie wielomianowym, uważa się za trudne. Jest jednak nowy kłopot, jak dla danego problemu pokazać, że dla jego rozwiązania nie istnieje algorytm o wielomianowym czasie realizacji. Innymi słowy, jak pokazać, że dany problem jest trudny? Niestety, tego jeszcze nie potrafimy zrobić, choć znamy około 1000 zadań, które na dzień dzisiejszy uznajemy za trudne. Jednym z takich zadań jest wspomniany wyżej problem Steinera.

Trudnym zadaniem jest również **problem komiwojażera** (sformułowany przez Karla Mengera w 1930 roku): *znajdź najkrótszą drogę przechodzącą przez każde z n danych miast, która kończy się w mieście, w którym się rozpoczęła*. Ponieważ liczba wszystkich tras wynosi $n!$, więc dla dużych n wyznaczenie drogi, rozważając przypadek po przypadku, jest zadaniem beznadziejnie nieefektywnym.

Tego typu problemy (zwane też problemami szeregowania) spotykamy w wielu sytuacjach praktycznych: zbieranie pieniędzy z aparatów telefonicznych, obchód przez strażnika ustalonych miejsc w fabryce, trasy dostawy towaru do różnych sklepów w mieście itd. Wszelkstronną analizę tego problemu, jego różnych wariantów oraz innych problemów o podobnym charakterze można znaleźć w pracy [8].

Wiele praktycznych zastosowań ma również **problem pakowania**: *wypełnić plecak różnymi przedmiotami o wartościach p_i i wagach w_i , dokonując takiego wyboru, aby wartość załadowanych do plecaka przedmiotów była możliwie największa i oczywiście nie przekroczyła udźwigu plecaka*.

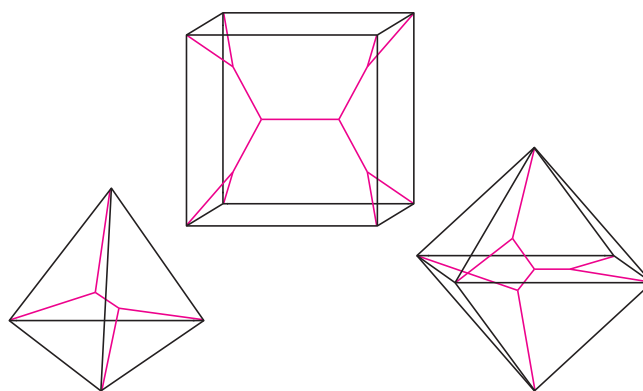
Oto przykład prostego geometrycznego wariantu problemu pakowania: *ile niezachodzących na siebie kwadratów jednostkowych można umieścić wewnątrz dużego kwadratu o boku $s = N + \frac{1}{10}$* ? Dotychczas wiadomo, że istnieją takie upakowania, które pozostawiają niepokrytą powierzchnię równą prawie $s^{\frac{3-\sqrt{3}}{2}} \approx s^{0,634}$ (wydaje się, że nie jest to najlepsze oszacowanie, obiecującą wielkością jest $s^{0,5}$). Na przykład: dla kwadratu o boku $s = 100000,1$ upakowanie konwencjonalne mieści 10^{10} kwadratów, pozostawiając niepokrytą powierzchnię nieco większą niż 20000 kwadratów jednostkowych. Ponieważ jednak $100000,1^{0,634} \approx 1479,11$, więc dla rozważanego

kwadratu istnieje (!) niekonwencjonalne upakowanie mieszczące jeszcze dodatkowo ponad 18500 kwadratów jednostkowych! Tyle teoria, jak jednak wykonać to w praktyce?

Trudne są również tzw. **problemy pokryciowe**, które od strony praktycznej dotyczą takich zagadnień jak: planowanie lotów personelu lotniczego, określenie okręgów wyborczych, optymalne przemieszczanie towarów od przedsiębiorstw przez magazyny do pewnej liczby odbiorców.

Dla żadnego z wyżej wskazanych problemów nie znaleziono dotychczas efektywnego (tzn. o czasie wielomianowym) algorytmu ich rozwiązania. Jest więc nad czym rozmyślać...

Na zakończenie powróćmy jeszcze do problemu sieci minimalnych dla kilku punktów, ale umieszczonych nie na płaszczyźnie, lecz w przestrzeni. Rysunek 16 prezentuje sieci minimalne dla wierzchołków czworoscianu foremego, sześciianu, ośmiościanu foremnego.



Rys. 16

Mam nadzieję, że dopracowanie szczegółów i wykazanie poprawności prezentowanych rozwiązań nie będzie kłopotliwe, a może nawet dostarczy trochę przyjemności.

LITERATURA:

- [1] N.C. Chi, *Sieć dróg dla czterech miejscowości*, Delta **10**/1988, 12–13.
- [2] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.
- [3] R.L. Graham, *Kombinatoryczna teoria szeregowania*, w: *Matematyka współczesna, dwanaście esejów* (red.: L.A. Steen), WNT, Warszawa, 1983, 200–229.
- [4] D. Harel, *Rzecz o istocie informatyki*. Algorytmika, WNT, Warszawa, 1992.
- [5] J.E. Hofmann, *Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **60**(1929), 22–23.
- [6] Z.A. Melzak, *On the problem of Steiner*, Canad. Math. Bull. **4**(1961), 143–148.
- [7] H. Steinhaus, *100 zadań*, Warszawa, 1993.
- [8] M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik, *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa, 1999.
- [9] P. Winter, *An algorithm for the Steiner problem in the Euclidean plane*, Networks **15**(1985), 323–345.
- [10] P. Winter, *Steiner problem in networks: a survey*, Networks **17**(1987), 129–176.
- [11] S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, Warszawa, 1964.
- [12] J. Zydzler, *Geometria*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1997.

W dowodach wielu twierdzeń matematycznych wykorzystuje się zbiory maksymalne w pewnych rodzinach zbiorów. Przyjrzymy się jednemu takiemu zastosowaniu zbiorów maksymalnych.

Zbiór X jest maksymalny w rodzinie zbiorów \mathbb{Z} , jeśli X nie jest zawarty w żadnym różnym od niego zbiorze z tej rodziny.

Można łatwo skonstruować funkcję przekształcającą w sposób różnowartościowy zbiór liczb naturalnych na jego kwadrat: $f: \mathbb{N} \xrightarrow{1:1} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Mianowicie ustawimy wszystkie pary liczb naturalnych w ciąg: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0), \dots$

Kwadratem zbioru A nazywamy iloczyn kartezjański $A \times A$, tj. zbiór wszystkich takich par (a, b) , że $a, b \in A$.

Łatwo dostrzec regułę: najpierw bierzemy parę $(0, 0)$, potem takie pary (k, l) , że $k + l = 1$, potem takie, że $k + l = 2$ itd. W ramach każdej grupy porządkujemy pary (k, l) według rosnącego k .

Istnienie takiej funkcji f oznacza, że zbiory \mathbb{N} i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mają tyle samo elementów; mówimy wtedy, że są **równoliczne**. Trochę trudniej jest dowiedzieć, że istnieje funkcja $g: \mathbb{R} \xrightarrow{1:1} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (czyli że prosta ma tyle samo punktów co płaszczyzna). Taką funkcję g pierwszy skonstruował matematyk niemiecki Georg Cantor w końcu XIX wieku. Powstało pytanie, czy podobną własność ma każdy zbiór nieskończony. W roku 1906 matematyk niemiecki Hessenberg udowodnił, że tak rzeczywiście jest. W dowodzie twierdzenia Hessenberga można wykorzystać zbiory maksymalne.

Niech więc A będzie zbiorem nieskończonym i przyjrzymy się rodzinie takich funkcji f , że $f: B \xrightarrow{1:1} B \times B$, gdzie B jest nieskończonym

podzbiorem zbioru A . Takie funkcje istnieją. Istotnie, z tego, że zbiór A jest nieskończony, wynika, iż można z niego wybrać nieskończony ciąg różnych elementów $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Funkcję f możemy zdefiniować przyporządkowując kolejnym wyrazom tego ciągu pary $(a_0, a_0), (a_0, a_1), (a_1, a_0), (a_0, a_2), (a_1, a_1), (a_2, a_0), (a_0, a_3), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_3, a_0), (a_0, a_4), (a_1, a_3), (a_2, a_2), (a_3, a_1), (a_4, a_0), \dots$

W tej definicji rozpoznajemy znane nam już numerowanie par liczb naturalnych. Jeśli funkcja $f: B \xrightarrow{1:1} B \times B$ jest elementem maksymalnym w tym zbiorze funkcji (tzn. nie istnieje taka funkcja $g: C \xrightarrow{1:1} C \times C$, że $f \subset g$), to można dowiedzieć, że zbiór B jest równoliczny ze zbiorem A . Ponieważ zbiór B jest równoliczny ze swoim kwadratem, to i zbiór A okazuje się równoliczny ze swoim kwadratem.

Funkcję definiuje się jako taki zbiór par (x, y) , że żaden element nie występuje na pierwszym miejscu w dwóch różnych parach.

Jak dowiedzieć, że taka maksymalna funkcja istnieje?

Tę kwestię rozstrzyga właśnie tzw. Lemat Kuratowskiego–Zorna. Przed sformułowaniem tego lematu zdefiniujemy jeszcze jedno pojęcie. Mówimy, że rodzina zbiorów Y jest łańcuchem, jeśli każde dwa zbiory P i Q należące do Y są porównywalne, tzn. $P \subseteq Q$ lub $Q \subseteq P$.

Lemat Kuratowskiego–Zorna mówi, że jeśli dana jest taka rodzina zbiorów X , że dla dowolnego łańcucha $Y \subseteq X$ suma wszystkich zbiorów rodziny Y należy do X , to rodzina X ma element maksymalny.

Dowód, że zdefiniowana wyżej rodzina funkcji spełnia założenia lematu Kuratowskiego–Zorna, nie jest trudny. Łącznie otrzymujemy wniosek, że każdy zbiór nieskończony jest równoliczny ze swoim kwadratem.



Rozwiązanie zadania M 1025.

Skorzystamy z nierówności pomiędzy ważoną średnią arytmetyczną i geometryczną: $a_1^{w_1} \cdot \dots \cdot a_n^{w_n} \leq \left(\frac{a_1 w_1 + \dots + a_n w_n}{w_1 + \dots + w_n} \right)^{w_1 + \dots + w_n}$.

Mamy $x_1 \cdot (2 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot (n x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \right)^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = s_n^{-s_n}$,

gdzie $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Równość zachodzi, gdy $x_1 = 2x_2 = \dots = nx_n$, co w połączeniu z równością $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ daje $x_i = \frac{1}{i} x_1 = \frac{1}{i} s_n^{-1}$.

Szukane maksimum wynosi więc

$$\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot \dots \cdot n^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} \cdot s_n^{-s_n}.$$



Rozwiązanie zadania M 1026.

Z nierówności $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$, dla $a, b > 0$ (z równością

przy $x = \sqrt{ab}$) wynika, że suma $\sum_{i=k+1}^n \left(\frac{x_i}{x_i} + \frac{x_i}{x_i} \right)$ jest

najmniejsza, gdy

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{x_{k+1}} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) (x_{k+1} + \dots + x_n)} \stackrel{\text{ozn}}{=} c.$$

To samo zachodzi, gdy x_1 zamienimy na x_2, \dots, x_k . Zatem suma

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \leq k, j > k}} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right)$$

jest najmniejsza, gdy $x_1 = \dots = x_k = c$. Mamy też

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j, i,j \leq k}} \frac{x_i}{x_j} \geq k(k-1),$$

z równością dla $x_1 = \dots = x_k$, gdyż $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2$. Suma

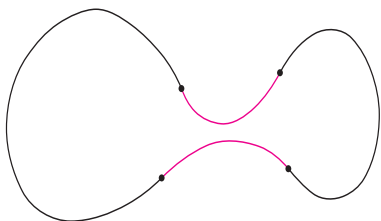
$$\sum_{\substack{i,j \\ i > k, j > k, i \neq j}} \frac{x_i}{x_j}$$

jest stała. Należy zatem przyjąć $x_1 = \dots = x_k = c$.

W ostatnich kilkunastu latach na pograniczu geometrii różniczkowej i teorii równań różniczkowych rozrósł się nowy, pokaźny dział matematyki, poświęcony badaniom krzywych i powierzchni, które poruszają się zgodnie z jakimś określonym przepisem, zmieniając wraz z upływem czasu swój charakter i własności. Różne punkty mogą przy tym poruszać się z różnymi prędkościami, wyznaczonymi przez rozmaite geometryczne charakterystyki krzywej czy powierzchni. Badania te mają z jednej strony wyraźny kontekst stosowany (proszę pomyśleć, ilu w szerokim świecie jest bogatych sponsorów, których może interesować ruch cieniutkiej granicy między płynnym metalem a zakrzepłym stopem, albo ruch linii oddzielającej wilgotną jeszcze farbę od zaschniętej warstewki lakieru), z drugiej zaś wiążą się blisko z najpoważniejszymi problemami współczesnej geometrii.

Z obu powodów warto przedstawić Czytelnikom *Delty* choćby czubek góry lodowej – i opowiedzieć kilka słów o przykładach pojęciowo najprostszych, a przy tym dostatecznie ciekawych i trudnych. Chodzi o tak zwaną ewolucję krzywiznową. Podlegająca jej płaska krzywa zamknięta porusza się zgodnie z następującym przepisem: w ustalonej chwili wektor prędkości każdego punktu krzywej jest prostopadły do krzywej i ma długość równą wartości bezwzględnej krzywizny. Zanim opiszemy kilka własności takiego ruchu krzywych płaskich, przypomnimy definicje i powiemy, jak ustala się zwrot prędkości.

Krzywizna krzywej gładkiej $y: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ w punkcie $y(s)$ to odwrotność promienia tego okręgu, który najlepiej ze wszystkich „pasuje” do krzywej w okolicy punktu $y(s)$. Jeśli krzywa sparametryzowana jest długością łuku (tzn. przekształcenie y odpowiada podróży wzdłuż krzywej ze stałą, jednostkową szybkością – wektor styczny $y'(s)$ ma dla każdego s długość 1), to krzywizna jest równa liczbie $k(s) = |y''(s)|$. Dla krzywych płaskich wprowadza się krzywiznę ze znakiem.

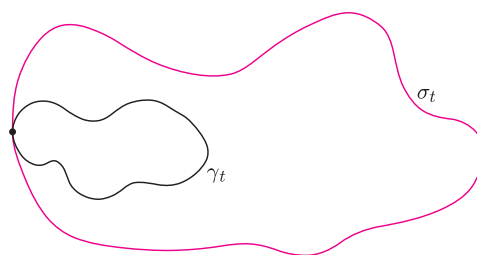


Rys. 1. Czarne części krzywej mają krzywiznę dodatnią, kolorowe – ujemną. W zaznaczonych kropkami punktach krzywizna znika.

W ewolucji krzywiznowej prędkość jest równa iloczynowi krzywizny i wektora normalnego *wewnętrznego*. Przyjęty wybór znaku krzywizny powoduje, że krzywe ograniczające zbiory wypukłe (jak np. okrąg, elipsa czy kontur jajka) – dla krótkości zwane dalej po prostu *krzywymi wypukłymi* – kurczą się. Jest jasne, że ostatecznie każda taka krzywa musi „wpaść sama na siebie”. Powstaje więc naturalne pytanie: w jaki sposób się to odbywa? Czy w momencie katastrofy krzywa zamienia się w odcinek? W punkt?

Zanim odpowiemy na te pytania, podamy inne własności ewolucji krzywiznowej.

Własność pierwsza: zakaz wyprzedzania. Jeśli w chwili początkowej krzywa γ_0 znajdowała się wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą σ_0 , to podczas ewolucji krzywiznowej dla wszystkich czasów t krzywe σ_t i γ_t będą rozłączne. Dlaczego tak się dzieje? Oto szkic najważniejszego argumentu. Przypuśćmy na chwilę, że jest inaczej i w pewnej chwili t krzywa σ_t po raz pierwszy dotknęła γ_t . W typowej sytuacji krzywizna σ_t jest wtedy mniejsza niż krzywizna γ_t , bo przecież krzywa σ_t dotyka krzywej γ_t od zewnątrz. Zatem prędkość krzywej σ_t jest mniejsza niż prędkość γ_t , co jednak wyklucza możliwość doścignięcia. (Gdy krzywizny obu krzywych w punkcie pierwszego spotkania są równe, potrzebny jest nieco subtelniejszy argument, wnikający głębiej w teorię równań różniczkowych.)



Rys. 2. W chwili pierwszego spotkania zewnętrzna krzywa jest mniej zakrzywiona, więc powinna poruszać się wolniej.

Własność druga: pole obszaru ograniczonego przez krzywą zmniejsza się w stałym tempie. Dowód tej własności pozostawimy jako zadanie dla szczególnie zainteresowanych Czytelników.

Własność trzecia: jeśli γ_0 jest okręgiem o promieniu r_0 , to γ_t jest współśrodkowym z γ_0 okręgiem o promieniu $r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2t}$. Nietrudno potwierdzić to rachunkiem. Podlegający ewolucji krzywiznowej okrąg pozostanie, rzecz jasna, okręgiem; przepis na prędkość prowadzi do równania $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r}$.

Mnożąc je stronami przez $2r$, otrzymujemy $\frac{d(r^2)}{dt} = -2$, czyli $r^2(t) = C - 2t$. Oczywiście dobór stałej $C = r_0^2$ prowadzi do przytoczonego wcześniej wzoru, który ma sens jedynie dla $t \in [0, t_*]$, gdzie $t_* = r_0^2/2$ jest *czasem życia okręgu*.

Każda krzywa zamknięta kurczy się więc proporcjonalnie szybko do pola, które początkowo ogranicza, z pewnością nie dłużej niż otaczający ją okrąg (to wynika z zakazu wyprzedzania). Pora na odpowiedź, co się dzieje w chwili ostatecznej katastrofy.

Twierdzenie 1 (M. Gage, R. Hamilton, 1986). *Każda krzywa wypukła podlegająca ewolucji krzywiznowej kurczy się do okrągłego punktu.*

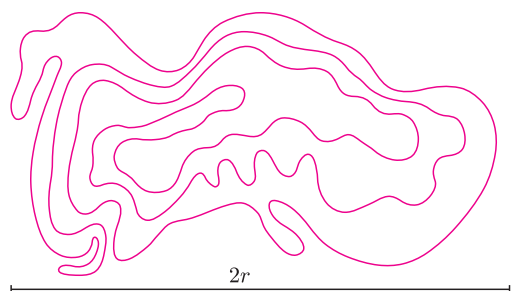
Niektórzy Czytelnicy powiedzą może, że przecież wszystkie punkty są okrągłe. Sens sformułowania

twierdzenia Gage'a i Hamiltona jest następujący: Przypuśćmy, że krzywe γ_t powstają w wyniku ewolucji krzywiznowej z γ_0 . Jeśli tuż przed chwilą zniknięcia t_* będziemy γ_t oglądać przez mikroskop, to ujrzymy niemal idealny okrąg. Ścisłej, jeśli $\tilde{\gamma}_t$ oznacza jednokładne powiększenie γ_t w takiej skali, żeby pole wewnątrz $\tilde{\gamma}_t$ było równe polu wewnątrz początkowej krzywej γ_0 , to $\tilde{\gamma}_t$ jest bardzo bliskie okręgu: dla $t \rightarrow t_*$ krzywizna $\tilde{\gamma}_t$ zbiega do stałej w tempie wykładniczym, a wszystkie pochodne krzywizny są zbieżne do zera.

Okazuje się, że krzywe niewypukłe (takie, jak np. zawijas z rysunku 3) wcale nie znikają w jakiś bardziej widowiskowy sposób. Mówi o tym dość zaskakujące

Twierdzenie 2 (M. Grayson, 1987).

Każda zamknięta krzywa płaska podlegająca ewolucji krzywiznowej w skończonym czasie stanie się wypukła.



Rys. 3. Ewolucja krzywiznowa zmieni tę krzywą w brzeg obszaru wypukłego, a potem w „okrągły punkt”. Stanie się to w czasie krótszym niż czas życia okręgu o promieniu r .

Z obu twierdzeń wynika, że wszystkie płaskie krzywe zamknięte kurczą się wskutek ewolucji krzywiznowej do okrągłych punktów.

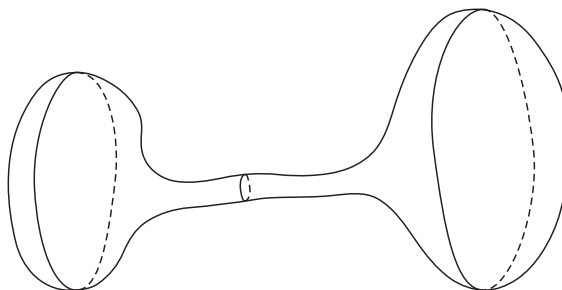
Gdy do rozważań doda się jeden wymiar, życie stanie się ciekawsze. Rozpatrzmy gładką powierzchnię $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ – taką, jak np. powyginana sfera, torus, czy precel – która rozpoczyna ewolucję średniokrzywiznową. Prędkość każdego punktu jest równa iloczynowi średniej krzywizny i wektora normalnego (zwrot ustalamy tak, by każda powierzchnia, która jest brzegiem zbioru wypukłego, kurczyła się do wewnątrz).

Przypomnijmy: aby mierzyć zakrzywienie powierzchni $S \subset \mathbb{R}^3$ w ustalonym punkcie $p \in S$, rozpatruje się wszystkie przekroje S płaszczyznami przechodzącymi przez p i prostopadłymi do płaszczyzny stycznej w p do S . Każdy przekrój to pewna krzywa płaska; krzywizna tej krzywej zależy w sposób ciągły od kierunku cięcia. Istnieją zatem dwa przekroje, zawierające krzywe o najmniejszej i największej krzywiznie; owe krzywizny to *krzywizny główne* powierzchni S w punkcie p , a ich średnia arytmetyczna to właśnie krzywizna średnia. Więcej na ten temat – w podręcznikach geometrii różniczkowej i w *Delcie* 10/1996.

Niektóre własności ewolucji krzywiznowej na płaszczyźnie obowiązują i w tym przypadku. Wciąż mamy zakaz wyprzedzania, a kurcząca się sfera pozostaje sferą. G. Huisken udowodnił odpowiednik twierdzenia 1: powierzchnie, które ograniczają zbiory wypukłe, kurczą się do okrągłych punktów. (Definicja okrągłego punktu w przestrzeni jest podobna do

definicji okrągłego punktu na płaszczyźnie; chodzi o to, że oglądając powierzchnię tuż przed zniknięciem przez mikroskop, widzimy niemal idealną sferę.)

Natomiast twierdzenie 2 nie ma swojego odpowiednika. Przez pewien czas znane były eksperymenty numeryczne, wskazujące, iż powierzchnia w kształcie hantelki o odpowiednio masywnych ciężarkach i długiej rączce wcale nie skurczy się do okrągłego punktu: ścianki wąskiej rurczki powpadają na siebie, zanim pokażne, krągłe bąble zdążą się zmniejszyć. Niepewny eksperyment komputerowy nie zastąpi jednak dowodu. . .



Rys. 4. Hantelek.

Ścisły kontrprzykład podał w 1989 r. wspomniany już Grayson. Główna idea wykorzystuje częsty zabieg: większość równań można znacznie uprościć, rozpatrując rozwiązania obdarzone jakąś symetrią.

Grayson rozumował przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że hantelek Γ_0 kurczy się do okrągłego punktu po czasie t_* . Umieścmy Γ_0 wewnątrz nieskończonej, okresowej powierzchni obrotowej S_0 , złożonej z dużych obłych bąbli złączonych wąziutkimi rurkami. Powierzchnia S_0 będzie ewoluować nie krócej niż Γ_0 ; to wynika z zakazu wyprzedzania. Znając promień (a więc czas życia) sfery mieszczącej się w każdym bąblu, można oszacować t_* z dołu. Z drugiej strony, stosunkowo proste równanie ewolucji powierzchni obrotowej S_t startującej z S_0 pozwala oszacować tempo, w jakim zmniejsza się pole podłużnego przekroju osiowego każdej z cienkich rurek. Okazuje się, że po czasie t_* owo pole musiałyby stać się ujemne! Zatem hantelek nie kurczy się do okrągłego punktu, o ile rurka jest dostatecznie wąska i długa, a bąble pokażne.

Elastyczna błona oddzielająca dwa obszary o różnych ciśnieniach, na przykład bańka mydlana, jest powierzchnią o stałej średniej krzywiznie. Rozumowanie Graysona można dostosować do równania, opisującego ruch błony pod wpływem zmiennej różnicy ciśnień, spowodowanej np. dmuchaniem w bańkę mydlaną. Każdy wie, że w przestrzeni trójwymiarowej można przez słomkę wydmuchiwac bańki (i trzeba dmuchać dość mocno i w miarę regularnie – w przeciwnym razie bańka pryska albo zaczyna się kurczyć).

A biedne Płaszczaiki muszą się, niestety, zabawiać inaczej.

Zasada minimum (dla liczb naturalnych) orzeka, iż w każdym niepustym podzbiorsze zbioru liczb naturalnych \mathbb{N} istnieje liczba najmniejsza. Ten intuicyjnie oczywisty fakt wyraża bardzo ważną własność zbioru \mathbb{N} , gdyż blisko wiąże się z innym kluczowym twierdzeniem dotyczącym tego zbioru, a mianowicie z zasadą indukcji matematycznej. Przeanalizujmy ten związek w ogólniejszej sytuacji. Niech A będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

- Powiemy, że dla zbioru A prawdziwa jest zasada minimum, jeśli jest on niepusty i w każdym jego niepustym podzbiorsze istnieje liczba najmniejsza.
- Powiemy, że dla zbioru A prawdziwa jest zasada indukcji, jeśli istnieje w nim liczba najmniejsza a_0 oraz dowolny zbiór $X \subset A$, spełniający warunki:
 - (1) $a_0 \in X$,
 - (2) dla każdej liczby $a \in A$ większej od a_0 , z tego, że wszystkie liczby $x \in A$, mniejsze od a , należą do X , wynika, że $a \in X$,
 jest równy całemu zbiorowi A .

Obie powyższe zasady są naturalnymi uogólnieniami swoich klasycznych wersji dla zbioru liczb naturalnych. W szczególności, zasada indukcji dla \mathbb{N} to po prostu jedna z postaci zasady indukcji matematycznej. Ogólnie, zasadę indukcji dla zbioru A stosuje się w sytuacji, gdy chcemy udowodnić, że każdy element tego zbioru ma jakąś rozpatrywaną własność W – należy wówczas właśnie wykazać, że zbiór $X = \{x \in A : W(x)\}$, złożony z tych wszystkich elementów zbioru A , które mają własność W , jest równy zbiorowi A . W tym celu sprawdzamy, że najmniejszy element a_0 zbioru A ma własność W (tzn. $a_0 \in X$), a następnie bierzemy dowolny element $a \in A$, większy od a_0 , przyjmujemy jako założenie indukcyjne, że każda liczba x ze zbioru A , mniejsza od a , ma dowodzoną własność (tzn. $x \in X$) i w końcu korzystając z tego założenia wykazujemy, że własność tę ma również liczba a (tzn. $a \in X$).

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, dla jakich podzbiorsze zbioru liczb rzeczywistych prawdziwe są sformułowane wyżej zasady. Zacznijmy od zasady minimum, gdyż sprawdzenie, czy dany zbiór ją spełnia, jest na ogół łatwe.

Zasada ta, oczywiście, jest prawdziwa dla każdego niepustego podzbiorsze zbioru \mathbb{N} , a także dla dowolnego niepustego zbioru skończonego $A \subset \mathbb{R}$. Oto kilka kolejnych przykładów zbiorów, spełniających zasadę minimum:

- (1) $A_1 = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$,
- (2) $A_2 = \{m - \frac{1}{n} : m \in \{1, 2, 3\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$,
- (3) $A_3 = \{m - \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Sprawdźmy, na przykład, że zasada minimum jest prawdziwa dla zbioru A_3 – stąd już będzie wynikało, że jest ona również prawdziwa dla zbiorów A_1 i A_2 , gdyż zawierają się one w zbiorze A_3 .

Niech więc X będzie niepustym podzbiorem zbioru A_3 . Stosując dwukrotnie „zwykłą” zasadę minimum dla zbioru liczb naturalnych, znajdujemy najpierw liczbę

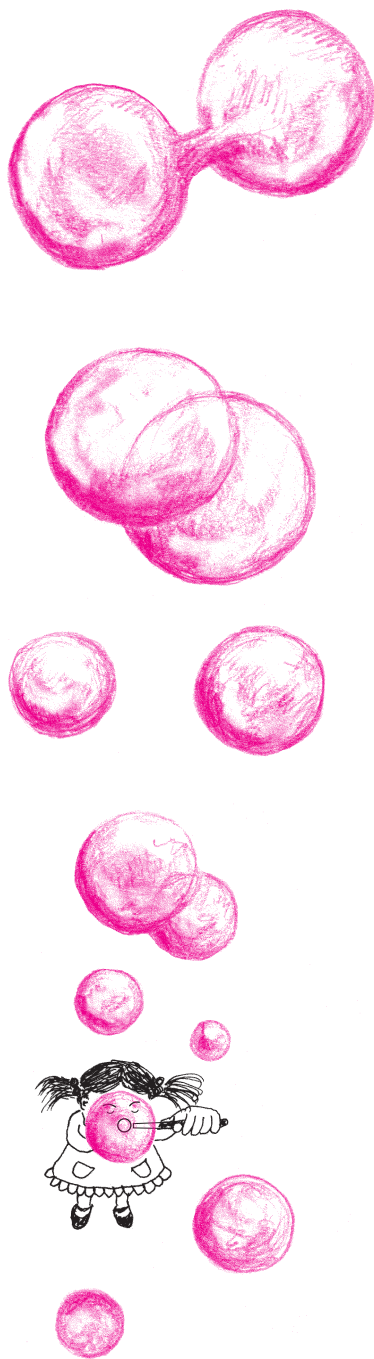
$$m_0 = \min \left\{ m \in \mathbb{N} : m - \frac{1}{n} \in X \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N} \right\},$$

a następnie liczbę

$$n_0 = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : m_0 - \frac{1}{n} \in X \right\}.$$

Jest oczywiste, że liczba $m_0 - \frac{1}{n_0}$ jest najmniejszym elementem zbioru X .

Innymi słowy, jeśli liczbę $m - \frac{1}{n}$ oznaczymy za pomocą pary jej „współrzędnych” $\langle m, n \rangle$, to znalezienie najmniejszej spośród liczb tej postaci, należących do zbioru X , polega na wskazaniu tej z odpowiadających im par, która jest pierwsza w porządku „alfabetycznym” – m_0 jest najmniejszą możliwą pierwszą współrzędną, a n_0 najmniejszą spośród drugich współrzędnych rozpatrywanych par o pierwszej współrzędnej m_0 .



Zasady minimum nie spełniają natomiast zbiory takie jak \mathbb{R} , zbiór wszystkich liczb wymiernych \mathbb{Q} ani zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} , gdyż w żadnym z nich nie ma liczby najmniejszej. Nie jest ona też prawdziwa dla żadnego przedziału domkniętego $[a, b]$, gdzie $a < b$ (w przedziale otwartym (a, b) nie ma liczby najmniejszej), a zatem również dla żadnego zbioru zawierającego taki przedział.

Ogólniej, zasada minimum nie jest prawdziwa dla żadnego nieprzeliczalnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$. Istotnie, można udowodnić, że jeśli zbiór A jest nieprzeliczalny, to jego podzbiór Y , zdefiniowany w następujący sposób

$$Y = \{a \in A : \text{zbiór } (-\infty, a) \cap A \text{ jest nieprzeliczalny}\}$$

jest niepusty i nie ma elementu najmniejszego.

Co z prawdziwością zasady indukcji dla zbiorów rozważanych powyżej? Można by w każdym przypadku sprawdzić, że jest ona prawdziwa, jeśli zbiór spełnia zasadę minimum, i fałszywa w przeciwnym razie. Wynika to jednak z ogólnego twierdzenia, ukazującego sygnalizowany na początku artykułu związek indukcji z zasadą minimum.

Twierdzenie. *Dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*

- (1) dla zbioru A prawdziwa jest zasada indukcji,
- (2) dla zbioru A prawdziwa jest zasada minimum.

Dowód. Załóżmy najpierw, że dla danego zbioru A prawdziwa jest zasada indukcji; wykażemy, że jest też dla niego prawdziwa zasada minimum. Niech więc Y będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru A ; chcemy stwierdzić, że zbiór ten ma element najmniejszy. Przypuśćmy więc, że jest przeciwnie. Wyniknie stąd, wbrew przyjętemu założeniu, że Y jest zbiorem pustym i otrzymana w ten sposób sprzeczność zakończy tę część dowodu.

Zastosujemy zasadę indukcji dla zbioru A do jego podzbioru X , złożonego z tych liczb ze zbioru A , które nie należą do Y . Niech a_0 będzie najmniejszą liczbą w zbiorze A . Mamy

- (1) $a_0 \in X$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy $a_0 \in Y$ i liczba a_0 byłaby najmniejszym elementem zbioru Y , wbrew przyjętemu założeniu;
- (2) niech $a \in A$ będzie dowolną liczbą większą od a_0 . Zróbmy założenie indukcyjne, że każda liczba $x \in A$, mniejsza od a , należy do zbioru X . To jednak znaczy, że żadna z nich nie należy do zbioru Y , więc gdyby liczba a do niego należała, to byłaby jego najmniejszym elementem, znowu wbrew temu, co założyliśmy. Zatem $a \in X$.

Na mocy zasady indukcji dla zbioru A wnioskujemy z powyższego, że $X = A$, ale to znaczy, że zbiór Y jest pusty.

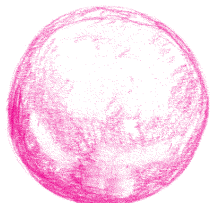
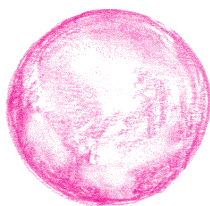
Założmy teraz, że dla danego zbioru A prawdziwa jest zasada minimum; wykażemy, że jest też dla niego prawdziwa zasada indukcji. Niech więc a_0 będzie najmniejszym elementem zbioru A i weźmy dowolny zbiór $X \subset A$, spełniający warunki:

- (1) $a_0 \in X$,
- (2) dla każdej liczby $a \in A$, większej od a_0 , z tego, że wszystkie liczby $x \in A$, mniejsze od a , należą do X , wynika, że $a \in X$.

Chcemy wykazać, że $X = A$. Przypuśćmy więc, że jest przeciwnie, tzn. zbiór Y , złożony z tych elementów zbioru A , które nie należą do X , jest niepusty.

W takim razie na mocy zasady minimum dla zbioru A w zbiorze Y jest liczba najmniejsza a . Wówczas $a > a_0$, gdyż $a_0 \in X$ na mocy warunku (1). Ponadto wszystkie liczby $x \in A$, mniejsze od a , należą do zbioru X , ponieważ a jest najmniejszą liczbą, która do niego nie należy. To jednak, wobec warunku (2) implikuje, że $a \in X$, czyli $a \notin Y$ i otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Powyższą dyskusję związku zasady minimum z zasadą indukcji można w znaczący sposób uogólnić. Jest to punkt wyjścia dla bardzo ciekawej teorii tzw. zbiorów dobrze uporządkowanych.



Rozwiązanie zadania F 595.

Objętość gazu, wylatującego przez otwór o powierzchni S z prędkością v w czasie t , wynosi $vSt \sim V/2$. Prędkość wylotu powietrza można oszacować albo z jego temperatury:

$$mv^2/2 \sim 3kT/2 = 3RT/(2N_A),$$

albo po prostu przyrównać prędkość gazu do prędkości dźwięku $c \approx 3 \cdot 10^2$ m/s.

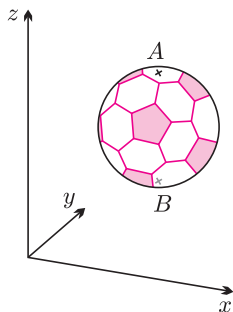
Niech objętość satelity $V \approx 1$ m³ i $S \approx 10^{-4}$ m², a $v \approx 3 \cdot 10^2$ m/s.

Wtedy $t \sim V/(2vS) \approx 10$ s.

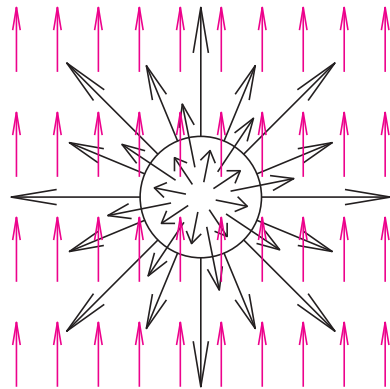
Precyzyjniej: gradient funkcji $V(x, y, z)$ to wektor

$$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right].$$

Jak widać, żeby w ogóle mówić o gradiencie, trzeba wiedzieć, że funkcja V jest różniczkowalna. W całym artykule będziemy zakładać, że funkcja V jest gładka, tzn. różniczkowalna dowolną liczbę razy.



Rys. 1a



Rys. 1b

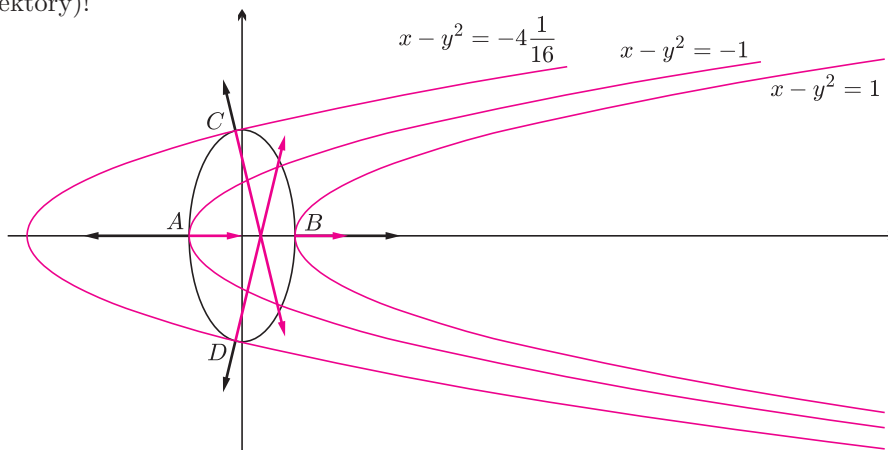
Gradient funkcji skalarnej V – oznaczany ∇V – to taki wektor, który w danym punkcie przestrzeni wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji V . Im jest dłuższy, tym wzrost funkcji większy. Trzeba jednak uczciwie przyznać, że gradient nie jest „doskonały” i ma pewną wadę: jeśli wzrost funkcji jest bardzo subtelny, to gradient go nie zauważy. Jeżeli więc gradient jest w pewnym punkcie wektorem zerowym, to nie należy od razu oczekiwać, że funkcja jest w otoczeniu tego punktu stała, tylko że tempo jej wzrostu jest wolniejsze niż liniowe.

Gradient jest przydatny z różnych względów, ale w szczególności pomocny jest w poszukiwaniu punktów, w których funkcja osiąga wartości maksymalne i minimalne. Zauważmy bowiem, że jeśli gradient jest w pewnym punkcie X niezerowy, to funkcja nie może mieć w tym punkcie ekstremum. Rzeczywiście: wartości funkcji V w stronę zwrotu gradientu (dostatecznie blisko punktu X) będą większe niż w punkcie X , a z „tyłu”, tj. w stronę przeciwną do zwrotu gradientu – mniejsze. Nie może być więc w punkcie X ani maksimum, ani minimum funkcji V . Jedyną więc szansą na ekstremum jest wtedy, gdy gradient znika. Stąd ogólna metoda poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych: najpierw znajdujemy „podejrzane” punkty, czyli takie, w których gradient znika, a potem – bardziej „brutalnymi” metodami śledczymi – badamy, które z podejrzanych punktów naprawdę są minimami bądź maksimami.

A co robić w sytuacji, gdy maksimum (lub minimum) funkcji V szukamy wśród takich punktów (x, y, z) , które spełniają pewien dodatkowy warunek, np. leżą na pewnej powierzchni (kuli, elipsoidzie, paraboloidzie, etc.)? Jasne jest, że w tym przypadku poszukiwanie punktów, w których znika gradient funkcji V , nie doprowadzi nas do wszystkich podejrzanych. Niech bowiem przykładowo funkcja V będzie odległością danego punktu w pokoju od podłogi i szukamy ekstremum funkcji V na powierzchni piłki o promieniu R i środku w punkcie (x_1, y_1, z_1) . W sytuacji jak na rysunku 1a szukamy zatem ekstremów funkcji $V(x, y, z) = z$ na powierzchni o równaniu $F(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - R^2 = 0$. Widzimy, że w punkcie B mamy minimum V na powierzchni piłki, a w punkcie A maksimum. Ale ani w A , ani w B gradient V nie jest równy zeru! Narysujmy jednak pola wektorowe gradientu funkcji V i gradientu funkcji F na powierzchni piłki (rys. 1b). Okazuje się, że w punktach ekstremalnych wektory ∇V oraz ∇F są równoległe. Czy to przypadek?

Rozważmy inną sytuację. Niech $V(x, y) = x - y^2$. Poszukamy maksymalnej i minimalnej wartości funkcji V na elipsie o równaniu $F(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$. Z rysunku 2 wynika, że funkcja V osiąga maksimum w punktach A i B oraz minimum w punktach C i D . I znów we wszystkich tych punktach gradient funkcji V (kolorowe wektory) jest równoległy do gradientu funkcji F (czarne wektory)!

Może się też zdarzyć, że przyjdzie nam szukać ekstremów na powierzchni, która ma brzeg (na przykład na górnej połowie sfery wraz z równikiem). Wtedy trzeba osobno sprawdzać jeszcze sam brzeg (we wspomnianym przypadku równik).



Rys. 2. Parabola $x - y^2 = -4\frac{1}{16}$ jest styczna do elipsy $x^2 + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ w punktach C i D . Wychodząc np. z punktu C i idąc po elipsie, trafimy do wartości funkcji V większych niż w C . Dlaczego?

Wszystkie nasze obserwacje prowadzą zatem do wniosku, że ekstremów funkcji V przy warunku $F(x, y, z) = 0$ należy szukać wśród takich punktów, dla których

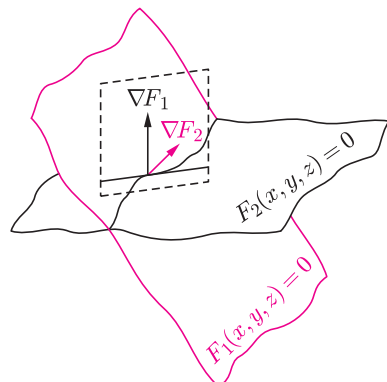
$$(*) \quad \nabla V = \lambda \nabla F,$$

gdzie λ to pewna liczba rzeczywista, zwana mnożnikiem Lagrange'a. Wystarczy chwila zastanowienia, by zrozumieć, dlaczego tak jest. Otóż maksimum (lub minimum) funkcji V na powierzchni $F(x, y, z) = 0$ (lub $F(x, y) = 0$) może być osiągnięte tylko wtedy, gdy w każdym kierunku **stycznym do powierzchni** liniowy wzrost funkcji V znika. Innymi słowy, liniowy wzrost funkcji V może mieć tylko składową prostopadłą do powierzchni $F = 0$, czyli równoległą do gradientu F .

No dobrze, ale dlaczego w tytule pojawiły się mnożniki, a nie mnożnik Lagrange'a? Nietrudno to wytłumaczyć: przecież możemy nałożyć więcej niż jeden warunek na poszukiwane punkty i szukać ekstremów wśród punktów (x, y, z) , dla których $F_1(x, y, z) = 0$ oraz $F_2(x, y, z) = 0$ dla pewnych funkcji F_1 i F_2 . Odpowiada to szukaniu ekstremów na przecięciu pewnych powierzchni. Spoglądając na rysunek 3, widzimy, że gradient funkcji V nie może mieć składowej stycznej do krzywej l , musi zatem leżeć w płaszczyźnie wyznaczonej przez gradient funkcji F_1 i gradient funkcji F_2 . Innymi słowy, musi być ich liniową kombinacją, tzn.

$$(**) \quad \nabla V = \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2,$$

gdzie λ_1 i λ_2 to pewne liczby rzeczywiste zwane mnożnikami Lagrange'a. Czytelnik obdarzony n -wymiarową wyobraźnią (dla $n \geq 4$) z łatwością wskaże przykłady, gdy mnożników Lagrange'a potrzeba będzie jeszcze więcej.



Rys. 3



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 595. Oszacować czas zmniejszenia się o połowę ciśnienia powietrza wewnątrz sztucznego satelity Ziemi, mającego w ścianie otwór o średnicy rzędu 1 centymetra.

Rozwiązanie na str. 9

F 596. Ile ruchów pompki potrzeba do nadmuchania piłki futbolowej?

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1024. Znaleźć największą wartość wyrażenia

$$xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},$$

gdzie $-1 \leq x, y \leq 1$.

Rozwiązanie na str. 16

M 1025. Suma nieujemnych liczb x_1, x_2, \dots, x_n wynosi 1. Jaką maksymalną wartość może przyjąć

$$x_1 \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_3} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{x_n} ?$$

Rozwiązanie na str. 5

M 1026. Liczby $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ są dodatnie oraz $k < n$.

Założmy, że liczby x_{k+1}, \dots, x_n są ustalone. Jak należy wybrać x_1, \dots, x_k ,

by zminimalizować $\sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j}$?

Rozwiązanie na str. 5



5

mała delta

Czworokąt o najmniejszym obwodzie

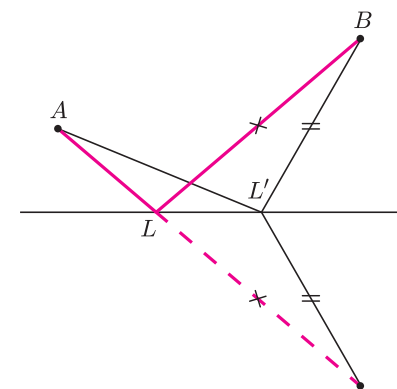
wpisany w prostokąt, czyli mający na każdym boku prostokąta po jednym wierzchołku, to każdy równoległobok mający boki równoległe do przekątnych tego prostokąta. Stąd wynika, że to minimum obwodu jest osiągalne na nieskończenie wiele sposobów, bowiem przez każdy punkt prostokąta przechodzi bok co najmniej jednego takiego minimalnego równoległoboku, a przez zdecydowaną większość punktów – nawet dwóch. Wartość tego minimum to dwie przekątne prostokąta. Aby się o tym przekonać, wystarczy chwilę pomyśleć o lustrze.

Jeśli chcemy odbitym od lustra promieniem światła oświetlić jakiś przedmiot, powinniśmy skierować ten promień w to miejsce lustra, gdzie ten przedmiot widzimy. Bowiem światło, zgodnie z tak zwaną zasadą Fermata, biegnie zawsze po najkrótszej drodze. W przestrzeni jednorodnej jest nią zawsze odcinek. To, co widzimy w lustrze, jest symetryczne względem lustra, a wobec tego odcinki łączące dowolny punkt lustra z przedmiotem i jego odbiciem są tej samej długości.

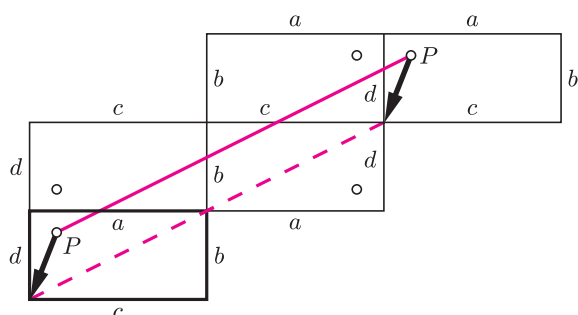
Zatem, zgodnie z rysunkiem 1, na mocy tak zwanej nierówności trójkąta (orzekającej, że suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego), światło wybierze właśnie drogę oznaczoną na rysunku kolorem.

A co to ma do prostokąta? Wyobraźmy sobie, że ma on boki z luster. W takiej sytuacji, patrząc w którekolwiek z nich, widzicie będziemy oczywiście nieskończenie wiele luster. Interesuje nas jednak, w którym najbliższym z nich zobaczymy siebie od tyłu – to będzie właśnie pokazywało, jak pobiegnie promień światła odbijający się od czterech luster i wyznaczający tym samym, zgodnie z zasadą Fermata, minimalny obwód czworokąta wpisanego w nasz lustrzany prostokąt. Rysunek 2 pokazuje taki (kolorowy) przebieg promienia – w kolejnych lustrach widzimy następne, aż w czwartym zobaczymy siebie z tyłu. Dla jasności ponazywane zostały również kolejne widoczne lustra. Rysunek 3 pokazuje to, co się naprawdę dzieje – promień obiegający lustrzany pokój. Na rysunku 4 jest inny czworokąt wpisany w prostokąt, a na rysunku 5 – porównanie jego długości z długością drogi promienia.

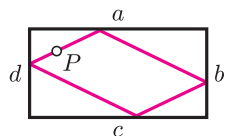
A skąd informacja, że droga takiego promienia jest zawsze, dla każdego punktu początkowego, równa dwóm długościom przekątnych? Widać to z rysunku 2, gdzie strzałki pokazują przesunięcie promienia informujące nie tylko o jego długości, lecz także o jego kierunku (a skąd wiadomo, że co drugi bok jest równoległy do drugiej przekątnej?).



Rys. 1. $AL + LB < AL' + L'B$.



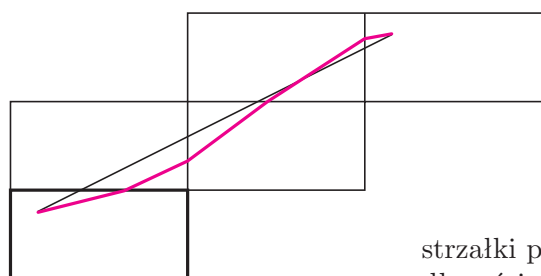
Rys. 2



Rys. 3

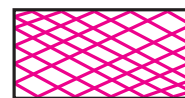


Rys. 4



Rys. 5

Jak widać, minimum może być osiągalne w niesłychanie wielu sytuacjach (rys. 6), choć intuicja lubi fałszywie podpowiadać, że jest ich skończenie wiele.



Rys. 6

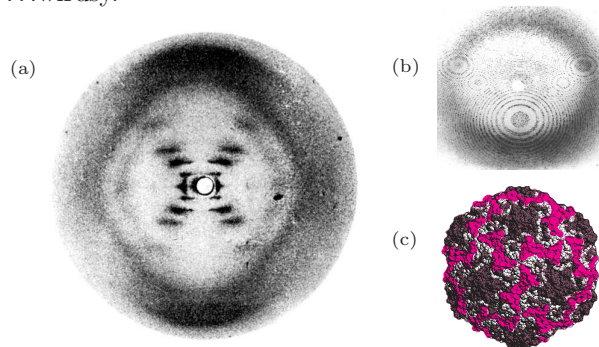
Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Pół wieku struktury DNA

25 kwietnia 1953 roku ukazała się w *Nature* praca Jamesa Watsona i Francisca Cricka opisująca strukturę kwasu dezoksyrybonukleinowego jako podwójnej helisy, której gałęzie połączone są parami zasad adenina–tymina i guanina–cytozyna, co wyjaśniało mechanizm replikacji DNA, dając klucz do zrozumienia działania kodu genetycznego. Odkrycie to nie byłoby możliwe bez otrzymanego przez Rosalindę Franklin rentgenogramu (zdjęcie), wskazującego na helikalność struktury tego związku.

Bibliograficzne szczegóły tego wydarzenia były ostatnio szeroko opisywane – nie będziemy robić konkurencji wysokonakładowej prasie. Warto jednak zatrzymać się nad tym, że jedno z największych odkryć biologii XX wieku nie zaistniałoby bez odpowiedniego rozwoju, a następnie wykorzystania metod fizycznych. Czy coś zmieniło się pod tym względem w ciągu ostatnich 50 lat? Tak, zmieniło się. Obecnie bez odpowiednio zaawansowanych metod fizycznych w biologii molekularnej w ogóle nie ma czego szukać! Można powiedzieć, że jeżeli ktoś chciałby wnieść coś nowego do biologii, to powinien zacząć od studiowania fizyki. Nie jest to jednak jedyna różnica. Badania nad DNA nie tylko wykorzystują metody fizyczne. Replikacyjne zdolności i strukturalne własności DNA wykorzystywane są już poza biologią. Za pomocą DNA prowadzi się obliczenia, wykorzystując metody rozwinięte, między innymi, na potrzeby sekwencjonowania ludzkiego

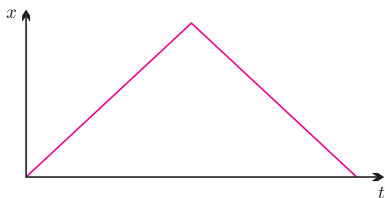
genomu. Cząsteczek DNA użyto jako „konstrukcji nośnej” dla cząsteczek barwnika, otrzymując folię, która w najbliższym czasie powinna posłużyć do produkcji mikroskopijnych laserów, świecących w dowolnych (różnorodność barwników) kolorach. Za pomocą kropeł podobnego do DNA związku otrzymano bardzo czułe fotodetektory o mikronowych rozmiarach. Niezwykle półprzewodnikowe własności podobnych substancji mogą doprowadzić do kolejnego etapu miniaturyzacji urządzeń elektronicznych. DNA jest wreszcie jednym z najbardziej obiecujących materiałów do produkcji... nanorobotów. A udoskonalane metody obrazowania pozwalają zobaczyć np. powodujące katar... a-a-A-psik! ...przepraszam, muszę kończyć... a-a-A-psik! ...wirusy.



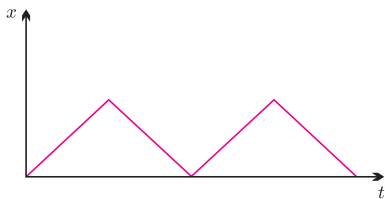
Jeden z historycznych rentgenogramów DNA otrzymanych przez Rosalindę Franklin (a), współczesny rentgenogram Rhinovirusa 14 (b) i jego przestrzenny model (c).

Piotr ZALEWSKI

Niezrealizowane minimum



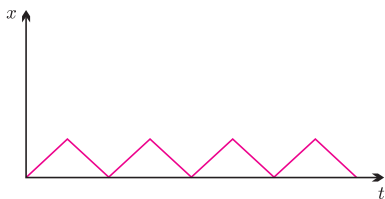
Prosty przykład funkcji, która nie osiąga swego skończonego kresu dolnego można podać bez trudu. Wyobraźmy sobie bowiem, że idziemy z punktu A do punktu B omijając punkt C , leżący na odcinku AB . Funkcja $F(x)$ jest równa długości drogi x . Jasne jest, że kres dolny $F(x)$ na wszelkich dozwolonych drogach jest równy długości odcinka AB , a jednak żadna dozwolona droga (tj. omijająca punkt C) nie ma takiej długości.



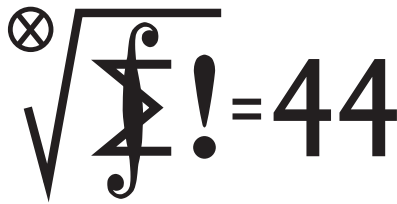
Rozpatrzmy inny, mniej trywialny przykład. Po odcinku AB kursuje samochód dostawczy. Kierowca płaci właścicielowi ciężarówki za jej wynajęcie w godzinach 10.00 – 16.00 wedle następującej stawki:

$$G = \text{pole pod wykresem funkcji } |x(t)| + |v(t) - 60|,$$

na przedziale $t \in 10.00\text{--}16.00$, gdzie t to czas, $x(t)$ oddalenie od A , a v prędkość ciężarówki (właścicielowi zależy, by kierowca zanadto się nie oddalał i jeździł ciągle z tą samą szybkością). Przypuśćmy dalej, że ciężarówka ma tę magiczną własność, że może zmienić prędkość skokowo (np. z -60 na $+60$) w skończonej liczbie chwil. Pierwszego dnia kierowca jedzie do B i wraca do A jadąc wciąż z prędkością ± 60 (w B skokowo zmienia prędkość). Drugiego dnia dwukrotnie wykonuje kurs do połowy trasy z A do B , trzeciego dnia 4 kursy do $1/4$ trasy, itd. wciąż jeżdżąc z prędkością ± 60 , co przedstawiają rysunki. Widać, że kierowca płaci właścicielowi coraz mniej i w końcu może płacić dowolnie mało. Ale nie może nic nie zapłacić, bo wtedy musiałyby jechać prawie zawsze (tj. zawsze poza skończoną liczbą chwil) z prędkością ± 60 , a jednocześnie w ogóle nie opuszczać punktu A . A to nie jest możliwe.



Grzegorz ŁUKASZEWICZ



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2003

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 461, 462

461. Dane są funkcje ciągłe f oraz g ; każda z nich jest ściśle monotonicznym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb rzeczywistych \mathbb{R} na ten sam zbiór. Wiadomo ponadto, że $f(0) = g(0)$ oraz

$$f^{-1}(g(x)) + g^{-1}(f(x)) = 2x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wykazać, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

462. Rozważamy rozbita zbioru wszystkich dodatnich liczb całkowitych na sumę dwóch zbiorów rozłącznych A, B .

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2003

453. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 3y = u^2 \\ y^2 + 3x = v^2 \end{cases}$$

w dodatnich liczbach całkowitych x, y, u, v .

453. Niech liczby całkowite $x, y, u, v > 0$ spełniają podany układ; przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $x \geq y$. Wówczas $u^2 = x^2 + 3y < (x + 2)^2$, skąd $u = x + 1$ i $3y = 2x + 1$. Podstawiamy $x = (3y - 1)/2$ do drugiego równania układu:

$$v^2 = y^2 + \frac{9y - 3}{2} < (y + 3)^2$$

i widzimy, że $v = y + 1$ lub $v = y + 2$. To daje alternatywę

$$\frac{9y - 3}{2} = 2y + 1 \quad \text{lub} \quad \frac{9y - 3}{2} = 4y + 4$$

i dwa rozwiązania (x, y, u, v) rozważanego układu: $(1, 1, 2, 2)$ oraz $(16, 11, 17, 13)$; a po wycofaniu założenia, że $x \geq y$, jeszcze trzecie rozwiązanie $(11, 16, 13, 17)$.

454. Wykażemy, że stała $C = e$ jest dobra. Przyda się w tym celu nierówność

$$(*) \quad k! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^k \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

Oto jej uzasadnienie:

$$\begin{aligned} e^k &= e \cdot e \cdot \dots \cdot e > \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \\ &= 2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \dots \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{(k+1)^k}{k!} \end{aligned}$$

i nierówność $(*)$ jest wykazana.

Niech teraz a_1, a_2, \dots, a_n będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Przyjmijmy

$$x_k = \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n.$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

- (a) Czy istnieje takie rozbitcie, w którym żaden ze zbiorów A, B nie zawiera nieskończonego (i niestałego) ciągu arytmetycznego?
- (b) Czy istnieje takie rozbitcie, w którym żaden ze zbiorów A, B nie zawiera nieskończonego (i niestałego) ciągu geometrycznego?

Zadanie **462** zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Przypominamy treść zadań:

454. Znaleźć taką stałą C , by dla każdej liczby naturalnej n oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n > 0$ zachodziła nierówność:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq C \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

(im mniejsza stała C , tym wyższa ocena za rozwiązanie).

Korzystając kolejno z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną, a następnie z nierówności $(*)$ oraz z nierówności między średnią geometryczną i średnią harmoniczną, mamy dla $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_k} &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} = \\ &= (k!)^{1/k} \left(a_1 \cdot \frac{a_2}{2} \cdot \frac{a_3}{3} \cdot \dots \cdot \frac{a_k}{k}\right)^{1/k} > \\ &> \frac{k+1}{e} \cdot \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{k}{a_k}} \end{aligned}$$

a zatem

$$x_k < \frac{e}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k \frac{i}{a_i}.$$

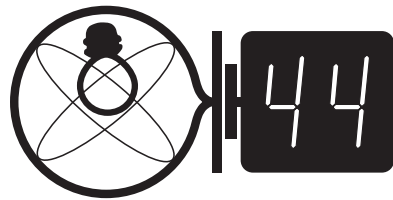
Stąd zaś (wobec tożsamości $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &< e \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k \frac{i}{a_i} = \\ &= e \sum_{i=1}^n \frac{i}{a_i} \sum_{k=i}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < e \sum_{i=1}^n \frac{i}{a_i} \cdot \frac{1}{i}, \end{aligned}$$

czyli, ostatecznie,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} < e \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

Rozważana nierówność jest więc dla każdego układu liczb $a_1, \dots, a_n > 0$ spełniona ze stałą $C = e$.



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VII 2003

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
344 ($WT = 1,60$), **345** ($WT = 3,70$),
346 ($WT = 2,02$) i **347** ($WT = 3,16$),
z numerów 10/2002 i 11/2002

Andrzej Nowogrodzki	-	Chocianów	43,22
Aleksander Surma	-	Myszków	43,21
Marek Wójcicki	-	Szczecin	39,67
Andrzej Idzik	-	Bolesławiec	31,58
Tomasz Wietecha	-	Tarnów	27,43
Marian Łupieżowicz	-	Gliwice	19,16

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
445 ($WT = 1,56$) i **446** ($WT = 2,19$)
z numeru 9/2002

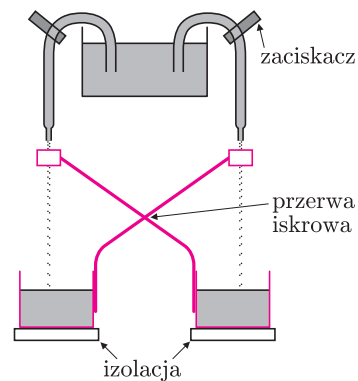
Marcin Peczański	-	Latchorzew	46,05
Tomasz Rawlik	-	Braunschweig	44,27
Janusz Olszewski	-	Suwałki	38,52
Tomasz Wietecha	-	Tarnów	35,40

Znów kolejka „weterańska”: Marcin Peczański zostaje czwartym Weteranem Klubu 44M; a Weteran Tomasz Rawlik zalicza piątą czterdziestoczwieropunktową okrążenie.

Zadania z fizyki nr 358, 359

Redaguje Jerzy B. BROJAN

358. Przedstawione na rysunku obok urządzenie (zaprojektowane przez Kelvina) składa się z naczynia z wodą, z którego spływa ona cienkimi strugami do dwóch naczyń poniżej niego. Do każdego z dolnych naczyń przyspawano drut, na końcu którego znajduje się pierścień z blachki otaczający spadającą strugę wody, przy czym woda powinna się dzielić na krople właśnie wewnątrz pierścienia. Po pewnym czasie w miejscu krzyżowania się drutów (gdzie odległość między nimi jest niewielka) zaczynają przeskakiwać iskry. Objaśnić działanie przyrządu.



359. Drut miedziany o kształcie spiralnym ma n zwojów, pole przekroju poprzecznego spirali wynosi S , a utworzona w ten sposób sprężyna ma stałą sprężystości k . Na sprężynie zawieszono ciężarek o masie m , a końce sprężyny przyłączono do źródła napięcia $U = U_0 \sin \omega t$. Obliczyć amplitudę drgań ciężarka po długim czasie (tzn. gdy można pominąć zjawiska przejściowe – można tu założyć, że występuje niewielkie tłumienie elektryczne i mechaniczne) oraz przesunięcie środka drgań względem jego położenia, gdy prąd nie płynie. Pominąć masę drutu. Przyjąć, że pole magnetyczne spirali jest takie, jak nieskończenie długiej zwojnicy.

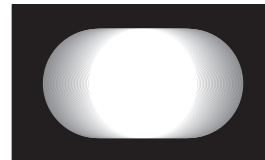
Wskazówka. Przy tym założeniu siła ścisnąca zwojnicę (działająca na końce wzdłuż osi) dana jest wzorem $F = (1/2)\mu_0 S (In/l)^2$, gdzie l – długość zwojnicy, I – natężenie prądu. (Wyprowadzenie tego wzoru było przed 11 laty tematem odrębnego zadania w naszej lidze.)

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2003

Przypominamy treść zadań:

350. Na gładkiej poziomej powierzchni stoi miotacz o masie M , początkowo nieruchomy. Jeśli praca mięśni miotacza w czasie rzutu jest ustalona, to pod jakim kątem α do poziomu miotacz powinien wyrzucić kulę o masie m , żeby zasięg rzutu był maksymalny? Pominąć rozmiary miotacza i opór powietrza.

351. Światło słoneczne przechodzi prostopadle przez szczelinę o wymiarach 3×60 mm i tworzy „zajęczka” (rys.) na ekranie w zaciemnionym pomieszczeniu. Podać przybliżoną wartość odległości ekranu od szczeliny. Pozostałe niezbędne dane wziąć z tablic. Uwaga: wielkość rysunku nie odpowiada rzeczywistości, więc nie należy się kierować jego ogólnym rozmiarem.



350. Oznaczmy pracę miotacza symbolem E , prędkość nadaną kuli (względem układu inercjalnego) przez v , a prędkość uzyskaną przez samego miotacza wskutek odrzutu przez V . Zasady zachowania pędu i energii wyrażają się równaniami

$$MV = mv \cos \alpha$$

i

$$2E = MV^2 + mv^2.$$

Eliminując V , wyznaczamy zależność v od α :

$$v^2 = \frac{2ME}{m(m \cos^2 \alpha + M)}.$$

Zasięg rzutu ukośnego jest proporcjonalny do $v^2 \sin 2\alpha$ (wyprowadzenie jest podane w każdym podręczniku), więc zadanie sprowadza się do wyznaczenia kąta α , dla którego wyrażenie

$$\frac{\sin 2\alpha}{m \cos^2 \alpha + M}$$

ma maksymalną wartość. Przed różniczkowaniem wygodnie jest wyrazić mianownik przez $\cos 2\alpha$.

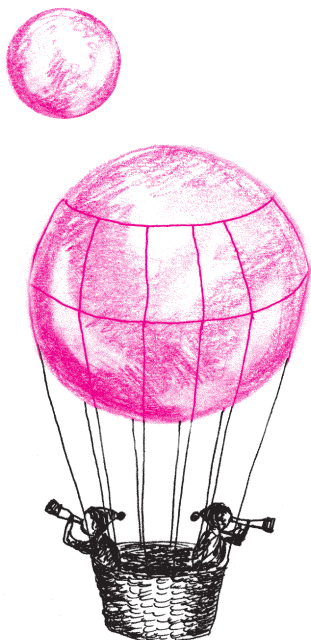
Po przekształceniach otrzymujemy wynik

$$\cos 2\alpha = -\frac{m}{m + 2M}.$$

Oczywiście, gdy $M \gg m$, powracamy do znanego wyniku $\alpha = 45^\circ$.

351. Każdy punkt szczeliny daje na ekranie obraz o kształcie koła (co wynika z kształtu tarczy słonecznej), a cała szczelina daje obraz powstały wskutek nałożenia się kół pochodzących od poszczególnych punktów. Jeśli oznaczymy średnicę kół przez d , a długość szczeliny przez l , to rozmiary „zajęczka” wynoszą d i $d + l$ (szerokość szczeliny pomijamy). Na rysunku stosunek tych rozmiarów wynosi około 1,4 – stąd wykorzystując daną wartość $l = 6$ cm, znajdujemy $d \approx 15$ cm. Ponieważ kątowa średnica Słońca jest równa $32' = 0,0093$ rad, więc ekran jest odległy od szczeliny o $(15 \text{ cm})/0,0093 \approx 16$ m. Szerokość szczeliny jest istotna tylko o tyle, że usprawiedliwia pominięcie efektów dyfrakcyjnych – uwzględniając długość fali świetlnej, można obliczyć, że rozmycie dyfrakcyjne wynosi około 3 mm, czyli znacznie mniej od d .

Patrz w niebo



Niektórzy teoretycy zajmujący się powstaniem Układu Słonecznego są zdania, że Uran i Neptun nie miały prawa powstać w odległości odpowiednio 19 i 30 j.a. od Słońca. Według nich na peryferiach młodego Układu Słonecznego mgławica protoplanetarna była tak rozrzedzona, że obie te planety do dziś nie mogłyby osiągnąć aktualnych mas.

Mogły jednak narodzić się bliżej Słońca, tam gdzie powstawał Jowisz i Saturn. Każda z czterech planet zbierała tyle budulca, na ile pozwalała jego ilość i przypadek, ale z upływem czasu sytuacja planet o małej masie zaczynała coraz bardziej różnić się od sytuacji planet masywnych. W zbiorowiskach wielu cząstek obowiązuje bowiem tzw. zasada ekwipartycji energii. Głosi ona, że jeżeli cząstki wymieniają stale energię, to każda cząstka uzyska jej w końcu w przybliżeniu tyle samo, przynajmniej średnio. Czy cztery cząstki stanowią już „zbiorowisko” – można by dyskutować, niewątpliwie jednak nawet w tak mało liczonym zbiorze istnieje tendencja do rozkładania energii „po równo”. Wobec tego cząstki o małej masie, czyli przyszły Uran i Neptun, musiały uzyskać większe prędkości i znaleźć się dalej od Słońca niż masywny Jowisz i Saturn. Po okresie ich chaotycznego ruchu nastąpiła stabilizacja orbit wskutek oddziaływania z licznymi drobnymi ciałami, niewchłoniętymi jeszcze przez żadną planetę, grającymi tu rolę ośrodka stawiającego opór.

Niedawno grupa kanadyjskich badaczy wykonała stosowne symulacje komputerowe, w których regularnie obserwowano takie właśnie wyrzucanie mniej masywnych planet na peryferie Układu Słonecznego. Komputerowy odpowiednik Neptuna był wyrzucany nawet na ponad 40 j.a. od Słońca. Obie mniejsze planety dość szybko, bo już po 5 milionach lat, osiągały stabilne orbity. W przybliżeniu połowa symulacji dawała obraz Układu Słonecznego bardzo zbliżony do oryginału, nawet pod względem rozmiarów orbit czterech wielkich planet.

Tomasz KWAST

Maj

Późnym wieczorem w maju prawie nie widać Drogi Mlecznej. Ciągnie się ona od wschodu do zachodu nisko nad północnym horyzontem, a zatem blisko zenitu musi znajdować się północny biegun naszej Galaktyki. Jego okolice, czyli obszar wyznaczony przez Wielką Niedźwiedzicę, Wolarza, Pannę i Lwa, jest fragmentem nieba najslabiej przesłanianym przez materię międzygwiazdową Galaktyki skupioną w płaszczyźnie Drogi Mlecznej, zatem widać tam liczne galaktyki i gromady galaktyk – ale dopiero przez teleskopy, a najlepiej na zdjęciach. W Pannie znajduje się bardzo bogata gromada galaktyk, stanowiąca centrum lokalnej supergromady. Należy do niej także nasza Galaktyka i kilka galaktyk okolicznych, z których najjaśniejsze są M31 w Andromedzie i M33 w Trójkącie – ich jednak w majowe wieczory nie widać, gdyż są po drugiej stronie Drogi Mlecznej, czyli pod horyzontem. Najjaśniejsze galaktyki w gromadzie Panny są w przybliżeniu 9 wielkości gwiazdowej, więc przez 15-centymetrowy teleskop powinny być w zasadzie widoczne, ale tylko podczas dobrej pogody w bezksiężycowe noce. Odległe są od nas bądź co bądź o około 15 Mpc.

Wenus jest na granicy Ryb i Barana, a więc blisko Słońca i wschodzi na krótko przed jego wschodem. Mars jest w Koziorożcu i koło północy wschodzi. Jowisz jest w Raku, widać go więc wieczorem, a Saturn w Byku, a zatem w zasadzie też widać go wieczorem, ale jest już blisko Słońca. 7 V Merkury przejdzie przed tarczą Słońca, przy czym środek zjawiska nastąpi około godz. 9 czasu letniego. Nów Księżyca wypada 1 V, a pełnia 16 V i nastąpi wtedy całkowite zaćmienie Księżyca (środek około godz. 6, a więc już go nie zobaczymy). 29 V Księżyc zakryje Wenus, ale środek zakrycia nastąpi około godz. 6, a więc również będzie już dzień. Wreszcie 31 V wypadnie drugi w maju nów Księżyca i nastąpi wtedy obrączkowe zaćmienie Słońca, jego środek nastąpi około godz. 6.

T. K.



Rozwiązanie zadania F 596.
Liczba ruchów pompki potrzebnych do napompowania piłki wynosi

$$n = m_p/m \sim V_p \rho_p / V \rho$$

(przy każdorazowym pompowaniu do środka piłki dostaje się taka sama ilość powietrza: $m \sim p_0 l S \mu / (RT)$), a m_p jest masą powietrza w piłce nadmuchanej: $m_p = (4/3)\pi r^2 \rho \mu / (RT)$). Przyjmując promień piłki $r \approx 10$ cm, ciśnienie $p \approx 1,5 p_0$, objętość roboczą pompki $V = l S \approx 2 \cdot 10^2$ cm², otrzymujemy $n \approx 30$.



Rozwiązanie zadania M 1024.
Istnieją takie $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, że $x = \cos \alpha$, $y = \cos \beta$. Szukamy zatem maksymalnej wartości wyrażenia

$$\cos \alpha \cos \beta + \sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \cos(\alpha - \beta).$$

Naturalnie $\cos(\alpha - \beta) \leq 1$ z równością dla $\alpha = \beta$.

KOLOROWANKI –

NUMEROWANKI (3)

Przed miesiącem zaprezentowaliśmy cztery rozwiązania poniższego zadania. Dziś sposób piąty.

Zadanie: (XLVI Olimpiada Matematyczna, stopień II, zadanie 6): Kwadrat o boku długości n dzielimy na n^2 kwadratów jednostkowych. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których taki kwadrat można pociąć wzdłuż linii tego podziału na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3.

Sposób V: Patrząc na rysunki 8–11, od razu widzimy..., że zupełnie nic nie widzimy.

Czyżby losowa sieczka liczb miała być rozwiązaniem zadania?

2	0	-1	0	2
0	-2	3	-2	0
-1	3	-4	3	-1
0	-2	3	-2	0
2	0	-1	0	2

Rys. 8

4	-3	1	0	1	-3	4
-3	2	0	-1	0	2	-3
1	0	-2	3	-2	0	1
0	-1	3	-4	3	-1	0
1	0	-2	3	-2	0	1
-3	2	0	-1	0	2	-3
4	-3	1	0	1	-3	4

Rys. 9

2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2
-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3
2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2

Rys. 10

4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4

Rys. 11

1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1

Rys. 12

A jednak. Suma liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 4, natomiast każdy kwadrat o boku 2 lub 3 zawiera liczby o sumie 0. Zaraz, zaraz, ale jak to stwierdzić?

Bez trudu widzimy, że na rysunku 12 suma liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 1, natomiast suma liczb w polach dowolnego kwadratu o boku 2 lub 3 jest równa 0.

Takież własności mają też numeracje powstałe z obrotu numeracji przedstawionej na rysunku 12 o kąty 90° , 180° i 270° . Wysumowanie, pole po polu, tych czterech numeracji daje to, co widzimy na rysunku 11.

Dowiedliśmy po pięciokroć, że kwadratu o boku n nie da się podzielić na kwadraty o bokach 2 lub 3, jeśli n jest liczbą nieparzystą niepodzielną przez 3. Ale wobec tego chcielibyśmy to zrobić w możliwie najlepszym przybliżeniu, tzn. usuwając z dużego kwadratu jedno pole, które w podziale nie będzie brało udziału. Czy da się to zrobić i które pole należy usunąć?

Dla $n = 1$ oczywiście **TAK**, ale chyba nie o takie rozwiązanie nam chodziło.

Przy $n = 5$ popatrzmy na rysunek 8. Zgodnie z własnościami numerowania podanymi w sposobie V, musimy usunąć takie pole, aby suma liczb w pozostałych polach była równa 0. Musi więc to być pole z liczbą 4. Jednak takiego pola nie znajdujemy, więc kwadratu o boku 5 nie da się podzielić na kwadraty o bokach 2 lub 3 nawet po usunięciu z niego jednego pola.

Dla $n = 7$ rysunek 9 wskazuje nam, że musimy usunąć pole narożne. Wówczas suma liczb w pozostawionych polach jest równa 0, ale nic z tego. Chwila zastanowienia pokazuje, że wokół usuniętego pola narożnego nie da się przeprowadzić podziału na kwadraty o bokach większych od 1.

Dla $n = 11$ (rysunek 10) jedyne pole z czwórką to pole środkowe. Po usunięciu tego pola podział na kwadraty, z których każdy ma bok 2 lub 3, jest nietrudny, pozostawiamy go więc Czytelnikowi.

Dla $n = 13$ (rysunek 11) mamy 9 pól z liczbą 4. Jednak pola narożne, jak wcześniej ustaliliśmy, nie wchodzą w rachubę. Podobnie, nie da się rozpocząć podziału wokół pola przylegającego do boku dużego kwadratu. Znowu pozostaje tylko pole środkowe. Po jego usunięciu podział na żądane kwadraty jest nietrudny.

Podobne rozważania dla $n = 17$ i $n = 19$ (rysunek 13 i 14) pokazują,

że po usunięciu jednego pola podział jest możliwy. Pole, które należy usunąć, nie jest polem środkowym, ale jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do symetrii. Jest to pole z liczbą 4, nieleżące przy brzegu kwadratu.

2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2
-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3
2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1
0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0
2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2

Rys. 13

4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0	-1	3	-4	3	-1	0
1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1	0	-2	3	-2	0	1
-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3	2	0	-1	0	2	-3
4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4	-3	1	0	1	-3	4

Rys. 14

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl