

## SPIS TREŚCI NUMERU 4 (347)

Cząstki na szczytach gór <i>Grzegorz Brona</i>	str. 1
Dzielenie trójkąta na trójkąty podobne do niego <i>Andrzej Żak</i>	str. 4
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
Aktualności	str.11
O unoszeniu się ciał na wodzie <i>Andrzej Hryczuk</i> <i>Robert Żak</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Kwiecień	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hryniewicz, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Krzysztof Maślanka, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Zdzisław Pogoda, Michał Różyczka, Konrad Rudnicki, Grzegorz Sitarski, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Joanna Udalska, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
  2. Cena prenumeraty na III kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.
  3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
  4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
- Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)
  6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiwi.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wybór artykułów *Małej Delt*y: <http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

**W następnym numerze:**  
 Ekstrema

# Cząstki na szczytach gór

Grzegorz BRONA

Powszechnie wiadomo, że w celach naukowych w góry udają się geolodzy, archeolodzy, botanicy oraz zoologowie. Wiadomo również, że budują tutaj swoje potężne teleskopy astronomowie. Ale co może badać w górach fizyk? Okazuje się, że góry to wymarzone miejsce pracy dla fizyka. Miejsce, w którym prowadzi on badania i szuka odpowiedzi na zagadki zadawane przez Wszechświat.

W 1765 roku Charles Augustin de Coulomb odkrył dziwne zjawisko, nazwane elektrycznym prądem ciemnym. Otóż zaobserwował on zagadkową ucieczkę ładunku z naładowanych i izolowanych ciał. W drugiej połowie wieku XIX zagadnieniu temu poświęcono bardzo dużo czasu, ale bez rezultatów. Nad problemem tym pracowali tak wielcy fizycy, jak Joseph John Thomson (uznawany za odkrywcę elektronu) czy Ernest Rutherford (odkrywca jądra atomowego). Niestety, prąd ciemny wciąż pozostawał tajemnicą.

Na początku XX wieku ojciec Theodore Wulf, jezuita, przeprowadził eksperyment, który przyczynił się do wyjaśnienia tego zjawiska. Postanowił on zmierzyć poziom promieniowania na szczycie Wieży Eiffla. Przewidywał, że promieniowanie będzie mniej intensywne. Naukowcy wierzyli bowiem, że naturalne promieniowanie, powodujące jonizację umożliwiającą powstawanie prądu ciemnego, pochodzi przede wszystkim z powierzchni Ziemi. Tymczasem okazało się, że intensywność promieniowania na szczycie wieży była wyższa niż rejestrowana u jej podstawy. Wynik był tak zaskakujący, że inni naukowcy postanowili go jak najszybciej zweryfikować. W latach 1911–1912 Victor Hess, przy współpracy z Wulfem, wykorzystując balon (zdjęcie) wyposażony w specjalną aparaturę, przeprowadził serię pomiarów promieniowania na różnych wysokościach.



I rzeczywiście okazało się, że wraz z wysokością intensywność promieniowania rośnie! Ale skąd bierze się ten efekt?

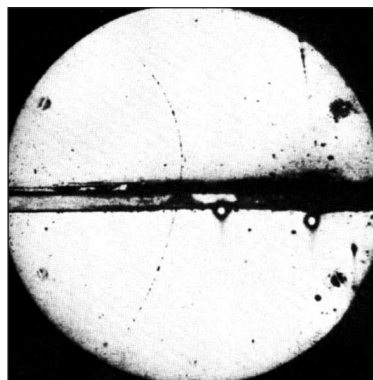
1

Jedyną możliwą odpowiedzią było stwierdzenie, że promieniowanie obserwowane na dużych wysokościach pochodzi nie z Ziemi, lecz z kosmosu! W taki właśnie sposób odkryto promieniowanie kosmiczne. W 1936 roku za odkrycie promieniowania kosmicznego Victor Hess został uhonorowany Nagrodą Nobla.

Jak dziś wiemy, promieniowanie kosmiczne dociera do nas z głębi kosmosu. Składa się ono z bardzo szybko poruszających się cząstek materii, takich jak protony, cząstki alfa (czyli jądra helu) oraz z jąder cięższych pierwiastków. Cząstki te docierając do atmosfery Ziemi, oddziałują wielokrotnie z jej atomami. W oddziaływaniach tych, podobnie jak w zderzeniach w akceleratorach, powstaje bardzo dużo tzw. cząstek wtórnych. Zdarza się, że jedna cząstka promieniowania pierwotnego powoduje powstanie setek, a nawet tysięcy cząstek promieniowania wtórnego. To właśnie te cząstki powodują jonizację powietrza.

Ale dlaczego naukowcy tak bardzo interesują się tymi maleńkimi cząstkami i co jest w nich tak tajemniczego, aby poświęcać tyle czasu na ich badanie?

Przez pierwszą połowę XX wieku promieniowanie kosmiczne stanowiło praktycznie jedyne źródło wysokoenergetycznych cząstek i było wykorzystywane do badania mikroświata. To właśnie w promieniowaniu kosmicznym Carl Anderson odkrył w 1932 roku pozyton, pierwszy ślad przewidzianej przez Paula Diraca antymaterii (zdjęcie). Później odkryto jeszcze mion (masywniejszą wersję elektronu), pion (nośnik sił jądrowych) oraz cząstki dziwne (zawierające niewystępujący w zwykłej materii kwark dziwny).



Obecnie najciekawsze jest to, że niektóre cząstki pierwotnego promieniowania kosmicznego mają wprost

niewiarygodnie wysokie energie, ponad 100 milionów razy wyższe, niż energie osiągnięte w największych akceleratorach na Ziemi! Przez bardzo długi czas, a może nawet i nigdy, nie zostanie skonstruowane na Ziemi tak wielkie i potężne urządzenie, które będzie w stanie przyspieszyć cząstki do energii spotykanych w pierwotnym promieniowaniu kosmicznym.

Gdzie dziś prowadzi się eksperymenty związane z promieniowaniem kosmicznym? Przede wszystkim wysoko w górach.

Jeśli znajdziemy się na wysokości 6 km nad poziomem morza, to nad naszymi głowami pozostanie zaledwie połowa atmosfery Ziemi. Wysokość sprzyja więc obserwacjom kosmosu, a w szczególności obserwacjom promieniowania kosmicznego. Do rejonów położonych niżej dochodzi bowiem znacznie mniej cząstek promieniowania niż do terenów górskich. Cząstki po prostu grzęzną w atmosferze.

Im wyżej umieszczone jest laboratorium badające promieniowanie kosmiczne, tym mniejsza warstwa atmosfery znajduje się nad nim. Z tego punktu widzenia najlepszym obserwatorium byłoby obserwatorium na prawie 9 kilometrowym Mount Everest. Oczywiście, na wybór lokalizacji laboratorium mają też wpływ inne czynniki, jak łatwość dostępu, odpowiednie warunki pracy, wystarczającej wielkości płaski teren, na którym można rozstawić urządzenia pomiarowe. Z tych powodów lokalizacja stacji badawczej zbyt wysoko w górach jest niemożliwa. Gdyby natomiast na Ziemi istniały tak potężne wzniesienia jak na Marsie (sięgający 25 kilometrów Olympus Mons), które mają dostatecznie płaskie obszary na bardzo dużych wysokościach, laboratoria cząstek kosmicznych byłyby właśnie umiejscawiane na nich. No właśnie, a właściwie dlaczego tak duże wzniesienia na Ziemi nie istnieją? Na to pytanie w bardzo ciekawy sposób spróbował odpowiedzieć były dyrektor ośrodka CERN Victor Weisskopf. Jeśli góra jest za duża i za ciężka, zaczyna się zapadać w Ziemię. Jeżeli wyzwolana energia potencjalna jest wystarczająca do stopienia części skały, która się zapadła, to góra nadal będzie się zapadać.

Rozumowanie to wykazuje odwrotnie proporcjonalną zależność między maksymalną wysokością gór a natężeniem pola grawitacyjnego, dającą w wyniku najwyższe góry wysokości 4,9 km na Ziemi oraz 9 km na Marsie, co zgadza się mniej więcej z rzeczywistością.

Nie mogąc liczyć na górę wielkości Olympus Mons, naukowcy swoje laboratoria umieścili trochę niżej.

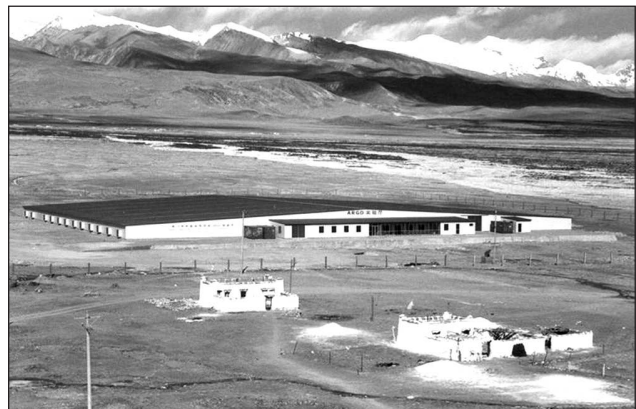
Jednym z nich jest Laboratorium Chacaltaya na górze Chacaltaya niedaleko La Paz (Boliwia). Znajduje się na wysokości 5220 metrów i jest najwyżej położonym

stałym laboratorium fizycznym na Ziemi. Dokonuje się w nim badań promieniowania kosmicznego, używając zestawu niewielkich liczników scyntylicyjnych, komór emulsyjnych oraz kalorymetrów hadronowych.



Kolejnym miejscem jest góra Roque de los Muchachos (wyspa La Palma, 100 km na zachód od Teneryfy), na której znajdują się teleskopy astronomiczne oraz zespoły detektorów promieniowania kosmicznego: CLUE, HEGRA i MAGIC (zdjęcie powyżej). Rejestrują one pojawienie się w atmosferze błysków światła emitowanego przez przechodzące przez atmosferę wysokoenergetyczne cząstki promieniowania kosmicznego (efekt Czerenkowa).

Laboratorium HiRes znajduje się na pustyni w stanie Utah (USA) na wysokości 1500 metrów. Przechodząca przez atmosferę cząstka promieniowania kosmicznego wzbudza atomy. HiRes wykorzystuje zespół teleskopów obserwujących atmosferę i poszukujących światła emitowanego przez te wzbudzone atomy.



Laboratorium ARGO-YBJ (zdjęcie) znajduje się natomiast w Tybecie w Chinach na wysokości 4300 metrów. Wykorzystuje się tam detektory wykrywające przechodzące przez nie cząstki promieniowania kosmicznego. Detektory pokrywają obszar około 6500 metrów kwadratowych. Jest to więc największy zespół detektorów promieniowania kosmicznego na Ziemi.

Podstawowym pytaniem, na które chcą odpowiedzieć fizycy pracujący w owych górskich eksperymentach, jest zagadka mechanizmu akceleracji (czyli przyspieszania) cząstek do tak ogromnych energii. Nie potrafimy bowiem dzisiaj określić, gdzie we Wszechświecie znajdują się obiekty zdolne aż tak przyspieszać cząstki. Nie potrafimy również zidentyfikować procesu fizycznego, który za to odpowiada. Aby znaleźć odpowiedź na powyższe pytania, fizycy muszą zmierzyć charakterystykę energetyczną promieniowania kosmicznego (czyli zależność liczby rejestrowanych cząstek danego typu od ich energii). A że zakres energii cząstek jest bardzo szeroki, potrzebnych jest wiele eksperymentów, które, uzupełniając się, są w stanie dokonać pomiarów całego widma.

Obecnie istnieje kilka teorii mówiących o pochodzeniu tych cząstek. Zakłada się, że niskoenergetyczna część promieniowania to cząstki emitowane przez zwykle gwiazdy (tzw. wiatr gwiazdowy). Cząstki o wyższej energii mogą natomiast pochodzić z rejonów, w których wybuchła supernowa. W czasie wybuchu supernowej wyzwolana jest olbrzymia ilość energii. Jeśli część tej energii zostaje spożytkowana na przyspieszenie cząstek, tłumaczyłoby to większą część widma promieniowania kosmicznego. Jednak nawet tak potężne kataklizmy nie potrafią rozpędzić cząstek do najwyższych energii obserwowanych w promieniowaniu kosmicznym. Co we Wszechświecie jest więc na tyle potężne, aby tego dokonać? No cóż, fizycy nie są tego pewni...

Najbardziej prawdopodobnym kandydatem na źródła promieniowania kosmicznego skrajnie wysokich energii wydają się potężne czarne dziury o masach wielu milionów słońc, które najprawdopodobniej znajdują się w centrach odległych radiogalaktyk. Silne przyciąganie grawitacyjne czarnej dziury powoduje, że materia ją otaczająca zaczyna na nią opadać, tworząc „wir” w kształcie dysku (dysk akrecyjny). Część materii może być wyrzucona z ogromną prędkością z tego dysku wzdłuż osi jego obrotu. Strugi wyrzucanej materii powodują powstanie gigantycznych fal uderzeniowych, w których mogą być przyspieszane cząstki.

Inna teoria sugeruje, że cząstki promieniowania kosmicznego o najwyższych energiach powstają w wyniku zderzeń dwu galaktyk. Jeszcze bardziej egzotyczne teorie postulują, że Wszechświat jest wypełniony relikdami pozostałymi po Wielkim Wybuchu, zwanymi defektami topologicznymi. Te hipotetyczne obiekty to „struny kosmiczne”, „ściany domen” oraz „monopole”. W tej chwili fizycy nie mają żadnych dowodów na to, że obiekty te rzeczywiście istnieją. Jednak gdyby faktycznie istniały, to mogłyby się one samoistnie rozpadać. W rozpadach tych wyzwolana by była ogromna ilość energii, wystarczająca do wyprodukowania cząstek promieni kosmicznych o najwyższych obserwowanych energiach. Samo udowodnienie związku między promieniowaniem kosmicznym a defektami topologicznymi stanowiłoby ważną wskazówkę odnośnie tego, jak wyglądał Wszechświat zaraz po Wielkim Wybuchu.

Niebo nad górami zasnulo się chmurami. Tysiące cząstek promieniowania kosmicznego przechodzą właśnie przez warstwy powietrza we wzbierającej ciemnej chmurze. Cząstki te powodują dodatkową jonizację powietrza (efekt, który po raz pierwszy został zaobserwowany przez Coulomba 250 lat temu). Zjonizowane atomy stają się jądrami kondensacji pary wodnej. Za chwilę spadnie deszcz...



**Rozwiązanie zadania M 1023.**

Niech  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  będą kątami wewnętrznymi w trójkącie  $ABC$ , odpowiednio przy wierzchołkach  $A, B$  i  $C$ , a kąty  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  kątami wewnętrznymi w trójkącie  $R_2R_3C$  przy wierzchołkach  $R_2$  i  $R_3$  odpowiednio. Wtedy

$$|\sphericalangle R_2CR_3| = \alpha + \beta \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ACB| = \gamma_1 + \gamma_2.$$

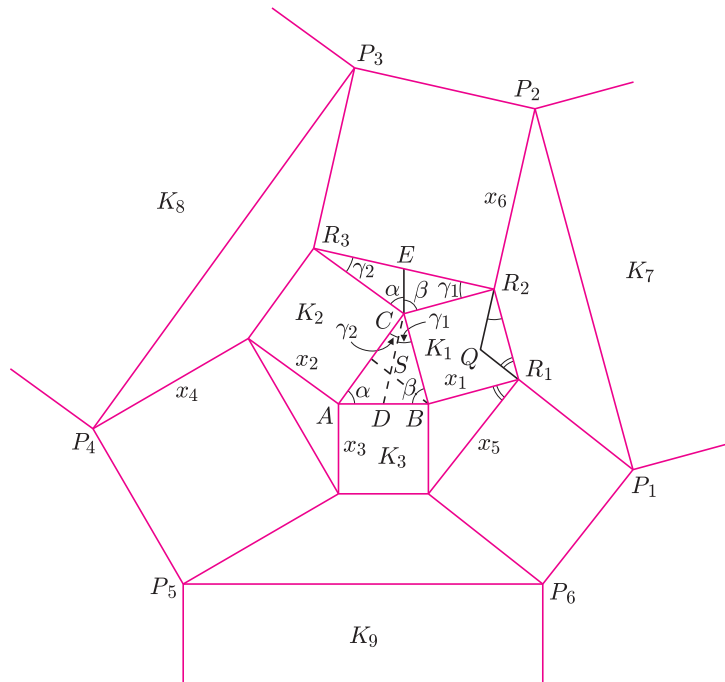
Niech teraz  $D$  będzie takim punktem na boku  $AB$ , że  $|\sphericalangle DCB| = \gamma_2$ , a punkt  $E$  takim punktem na boku  $R_2R_3$ , że  $|\sphericalangle R_2CE| = \beta$ . Wówczas

$$\triangle CR_2E \equiv \triangle BCD \quad \text{oraz} \quad \triangle CR_3E \equiv \triangle ACD.$$

Zatem  $D$  i  $E$  są środkami boków odpowiednio  $AB$  i  $R_2R_3$ . W analogiczny sposób dzielimy kąt  $ABC$ . Niech  $S$  będzie punktem przecięcia środkowych trójkąta  $ABC$ . Mamy

$$|SC| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}x_6 = \frac{1}{3}x_6.$$

Przesuniemy teraz trójkąt  $SBC$  o wektor  $\overrightarrow{BR_1}$  i oznaczmy przez  $Q$  obraz punktu  $S$  w tym przesunięciu. Punkty  $Q, R_2$  i  $P_2$  są współliniowe (dlaczego?), podobnie jak punkty  $Q, R_1$  i  $P_1$ . Oczywiście  $\triangle QR_1R_2 \equiv \triangle SBC$ . Zatem  $|QR_2| = \frac{1}{3}x_6$  i analogicznie  $|QR_1| = \frac{1}{3}x_5$ . Stąd trójkąty  $\triangle QP_1P_2$  i  $\triangle QR_1R_2$  są podobne w skali 4:1. Zatem kwadraty  $K_7, K_8, K_9$  mają boki cztery razy dłuższe od odpowiednio  $K_1, K_2, K_3$ , co kończy dowód.



# Dzielenie trójkąta na trójkąty podobne do niego

Andrzej ŻAK

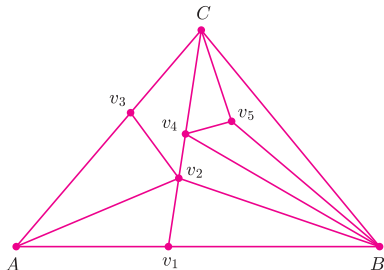
## Przyjęte oznaczenia:

Dzielony będzie trójkąt  $ABC$  o kątach  $\alpha, \beta, \gamma$ , przy czym  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . W powstałym w wyniku podziału grafie oznaczymy przez  $E$  zbiór krawędzi. Liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka  $v$  nazywamy stopniem wierzchołka i oznaczamy  $\deg v$ . Ponadto:

- $V_b$  – zbiór wierzchołków na bokach trójkąta, różnych od  $A, B, C$ ;
- $V^4$  – zbiór wierzchołków grafu leżących wewnątrz trójkąta i wewnątrz boku pewnego trójkąta podziału;
- $V^6$  – zbiór wierzchołków grafu leżących wewnątrz pewnego odcinka, niebędącego bokiem żadnego trójkąta podziału;
- $V^3$  – zbiór pozostałych wierzchołków grafu.

## Przykład:

Na poniższym rysunku jest:  
 $v_1, v_3 \in V_b, v_2 \in V^6, v_4 \in V^4, v_5 \in V^3$ .



Jak zazwyczaj,  $|X|$  oznacza liczbę elementów zbioru  $X$ .

**Wzór Eulera** dotyczący grafu płaskiego orzeka, że liczba obszarów ograniczonych, które wyznaczają krawędzie grafu, plus liczba jego wierzchołków jest równa liczbie krawędzi plus 1.



## Rozwiązanie zadania M 1022.

Niech  $x_1, \dots, x_6$  będą odpowiednio długościami boków kwadratów  $K_1, \dots, K_6$  oraz niech  $\alpha, \beta, \gamma$  będą kątami w trójkącie  $ABC$ . Korzystając z twierdzenia kosinusów, otrzymamy równości

$$\begin{aligned} x_4^2 &= x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \cos \alpha, \\ x_5^2 &= x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \cos \beta, \\ x_6^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \cos \gamma, \\ x_1^2 &= x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \cos \alpha, \\ x_2^2 &= x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 \cos \beta, \\ x_3^2 &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe równości, otrzymamy tezę

$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Każdy zapewne wie, że trójkąt można podzielić na dwa trójkąty podobne do niego wtedy i tylko wtedy, gdy jest on prostokątny,

bo jest to inne sformułowanie twierdzenia Pitagorasa (wraz z twierdzeniem do niego odwrotnym). Oczywiście jest więc, że trójkąt prostokątny można podzielić na dowolną liczbę trójkątów do niego podobnych. Dlatego zajmę się dzieleniem trójkątów nieprostokątnych.

Moje zainteresowanie tym problemem wzięło się z pytania: czy nieprostokątny trójkąt można podzielić na pięć trójkątów podobnych do niego? Przed dalszą lekturą proponuję Czytelnikom znalezienie takiego podziału. Moje, zrazu bezowocne, rozważania doprowadziły do wniosku, że tylko jeden trójkąt można podzielić w ten sposób, a taki podział też jest tylko jeden. Było na ten temat (jak się później dowiedziałem) zadanie przygotowawcze XXV Olimpiady Matematycznej; o jedyności nie było tam mowy. Tutaj dowodzę tej jedyności, a także rozważam sprawę podziału trójkąta nieprostokątnego na inną liczbę części niż 5.

Najpierw dwa lematy kombinatoryczne dotyczące dowolnego podziału, niekoniecznie na trójkąty podobne.

**Lemat 1.** Dla podziału trójkąta na  $n$  trójkątów zachodzi (patrz oznaczenia na marginesie)

$$|E| = \frac{1}{2}(3(n+1) + |V_b| + |V^4|).$$

Istotnie, obchodząc trójkąt dokoła, stwierdzamy, że na brzegu jest  $3 + |V_b|$  krawędzi. Niech  $k$  będzie liczbą odcinków, na których leżą wierzchołki z  $V^4$ ; dzielą one te odcinki na  $|V^4| + k$  krawędzi oraz wyznaczają boki  $m_i + 1$  trójkątów po jednej i  $n_i + 1$  trójkątów po drugiej stronie każdego z nich ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Wobec tego krawędzie te są bokami  $\sum_{i=1}^k (m_i + 1)(n_i + 1) = |V^4| + 2k$  trójkątów. Natomiast każda z nieuwzględnionych dotąd krawędzi jest bokiem dokładnie dwóch trójkątów. Mamy więc

$$\begin{aligned} |E| &= 3 + |V_b| + |V^4| + k + \frac{1}{2}(3n - (3 + |V_b|) - (|V^4| + 2k)) = \\ &= \frac{1}{2}(3(n+1) + |V_b| + |V^4|). \end{aligned}$$

**Lemat 2.** Dla podziału na  $n$  trójkątów zachodzi

$$(*) \quad |V^3| + |V^6| = \frac{1}{2}(n - 1 - |V_b| - |V^4|).$$

Korzystając ze wzoru Eulera, mamy bowiem

$$|E| + 1 = n + (3 + |V_b| + |V^3| + |V^4| + |V^6|),$$

co po podstawieniu wartości  $|E|$  z lematu 1 daje tezę.

Teraz żądamy już, by trójkąt dzielić na nieprostokątne trójkąty podobne, choć niekoniecznie podobne do niego. Oto nasuwające się uwagi.

**Uwaga 1.** Suma dowolnych dwóch kątów utworzonych przez krawędzie grafu jest różna od  $180^\circ$ .

Istotnie – będzie to przecież suma dwóch (niekoniecznie różnych) kątów trójkąta nieprostokątnego.

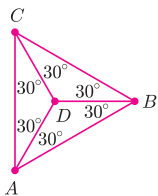
**Uwaga 2.** Żadnego trójkąta nie można podzielić na dwa podobne trójkąty nieprostokątne.

Przy podziale na dwa, przy jednym z boków tworzą się kąty przyległe, co jest sprzeczne z uwagą 1.

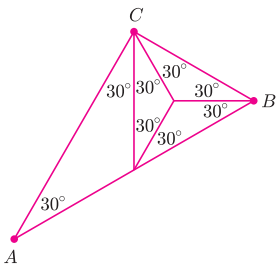
Z uwagi 1 wynika też bezpośrednio

**Uwaga 3** (uzasadniająca oznaczenia).

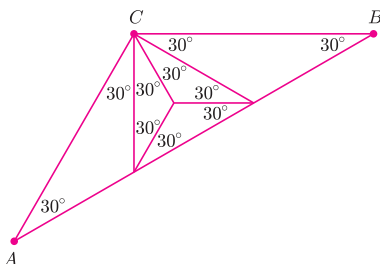
Jeśli  $v \in V^3$ , to  $\deg v \geq 3$ ,  
 jeśli  $v \in V^4$  lub  $v \in V_b$ , to  $\deg v \geq 4$ ,  
 jeśli  $v \in V^6$ , to  $\deg v \geq 6$ .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



**Rozwiązanie zadania F 593.**

Przy rzucie bez rozbiegu maksymalny zasięg rzutu wynosi  $l \approx v_0^2/g$ , gdzie  $v_0$  jest prędkością nadawaną kamieniowi przez siłę mięśni sportowca. Przy rzucie z rozbiegiem kamień uzyskuje jeszcze dodatkową prędkość poziomą  $v$ , a składowa pionowa prędkości w chwili rzutu  $v_0 \sin \alpha_0$  nie zmienia się. A zatem nie zmienia się też czas lotu, który wynosi  $t \approx \frac{2v_0}{g} \sin \alpha_0$ , co dla  $\alpha_0 = 45^\circ$  daje  $t \approx \sqrt{2} \frac{v_0}{g}$ . Dodatkowo pokonana odległość wynosi więc  $\Delta l \approx tv \approx \sqrt{2l/gv}$  (bo  $v_0 \approx \sqrt{lg}$ ). Dla przykładowych danych  $v \approx 10$  m/s i  $l \approx 50$  m dostajemy  $\Delta l \approx 30$  m.



**Rozwiązanie zadania F 594.**

W czasie przemieszczenia  $t$  na długość samochodu  $l$  jego środek ciężkości nabierze pionowej prędkości  $v \approx gl/V_{\text{samochodu}}$  i prędkości kątowej  $\omega \approx v \cdot 2/l \approx 2g/V_{\text{samochodu}}$ . Zatem liczba obrotów samochodu wynosi  $n \approx t_{\text{spadania}} \omega / (2\pi) \approx \sqrt{2gH} / (\pi V_{\text{samochodu}}) \approx 1,5$  dla poziomej prędkości  $V_{\text{samochodu}}$  równej 30 m/s.

Czytelnikowi pozostawiam sprawdzenie, że słuszna jest

**Uwaga 4.** Jeśli w grafie nie ma wierzchołków wewnętrznych, to  $|V_b| = 0$  lub  $|V_b| = 3$ .

Jako wskazówkę podam, że mój dowód polegał na wykazaniu, że żaden z wierzchołków ze zbioru  $V_b$  nie może być połączony z dwoma wierzchołkami z tegoż zbioru leżącymi na jednym z pozostałych boków trójkąta – przypuszczenie takie prowadzi do stwierdzenia, że zbiór  $V_b$  jest nieskończony.

I w ten sposób doszliśmy do sprawy liczby podziałów.

**Lemat 3.** Jedynie trójkąt równoboczny można podzielić na trzy podobne trójkąty i jest to podział jedyny, a trójkąty są nawet przystające.

**Dowód.** Jak to zrobić, wie każdy (rysunek 1). Dowieść należy tylko jedyności. Oczywiście jest, że  $|V^4| = |V^6| = 0$ . Wzór (\*) przybiera więc postać  $|V^3| = 1 - \frac{1}{2}|V_b|$ . Zatem  $|V_b| = 2$  albo  $|V_b| = 0$ . Pierwszy przypadek prowadzi do  $|V^3| = 0$ , co powoduje sprzeczność z uwagą 4. W drugim przypadku mamy  $|V^3| = 1$  – oznaczmy ten jedyny wierzchołek przez  $D$ . Musi on być połączony ze wszystkimi wierzchołkami trójkąta. Kąty wokół wierzchołka  $D$  nie mogą być wszystkie różne, bo wtedy ich suma (suma kątów trójkąta!) jest równa  $180^\circ$ , a przecież ma to być kąt pełny. Gdyby tylko dwa z nich były równe – np.  $2\gamma + \beta = 360^\circ$  – to po odjęciu od tego stronami  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  otrzymalibyśmy  $\gamma - \alpha = 180^\circ$ , a więc  $\gamma > 180^\circ$  – sprzeczność. Stąd wszystkie kąty przy wierzchołku  $D$  są równe  $120^\circ$ .

Rozpatrzmy dwa przypadki:

- i) – kąty powstałe przy wierzchołku  $C$  są równe. Wówczas trójkąty  $ACD$  i  $BCD$  są przystające, z czego wynika, że  $|AD| = |BD|$ , skąd wynika, że  $\alpha = \beta = 30^\circ$ , a to prowadzi do sytuacji z rysunku 1.
- ii) – kąty przy wierzchołku  $C$  są różne, czyli w sumie dają  $\alpha + \beta = 60^\circ$ , co prowadzi do tego samego wniosku.

Trójkąt i podział przedstawione na rysunku 1 są zatem jedynymi możliwymi podziałami trójkąta na trzy nieprostokątne trójkąty podobne.

Zapewne każdy z Czytelników w tym miejscu powie, że już wie, jaki trójkąt można podzielić na cztery nieprostokątne trójkąty podobne (rysunek 2 – dzielony trójkąt jest prostokątny!), a jaki na pięć nieprostokątnych trójkątów podobnych (rysunek 3). W tym ostatnim przypadku otrzymujemy nawet podział na trójkąty podobne do dzielonego. Zajmijmy się więc teraz tylko takimi podziałami.

**Lemat 4.** Każdy trójkąt można podzielić na cztery podobne do niego trójkąty; w przypadku trójkąta nieprostokątnego podział taki jest jeden.

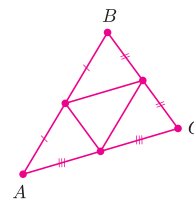
**Dowód.** Każdy wie, jaki podział jest dobry (rysunek 4); pozostaje wykazać jedynność dla trójkąta nieprostokątnego. Wzór (\*) dopuszcza następujące cztery przypadki:

- i)  $|V^4| = 0, |V_b| = 3, |V^3| = 0,$
- ii)  $|V^4| = 0, |V_b| = 1, |V^3| = 1,$
- iii)  $|V^4| = 1, |V_b| = 2, |V^3| = 0,$
- iv)  $|V^4| = 1, |V_b| = 0, |V^3| = 1.$

Należy wyeliminować ostatnie trzy możliwości.

W przypadku ii) i iii) musiałby istnieć odcinek łączący wierzchołek trójkąta  $ABC$  z jego przeciwległym bokiem, a więc powstałyby dwa trójkąty. Jedyną możliwością byłoby, aby jeden z nich był podzielony na trzy trójkąty. Z lematu 3 wynika, że cała sytuacja przedstawiałaby się jak na rysunku 2, a przecież tam trójkąt dzielony nie jest podobny do części podziału (i jest prostokątny).

W przypadku iv) wierzchołek ze zbioru  $V^3$  musiałby być połączony ze wszystkimi wierzchołkami dzielonego trójkąta, co daje podział na trzy. Jednak wobec uwagi 2 żaden z nich nie może być podzielony na dwa podobne trójkąty. Tym samym sytuacja z przypadku i) jest dla trójkąta nieprostokątnego jedyna.



Rys. 4

Zanim przejdziemy do dowodu kolejnego lematu, potrzebna jest

**Uwaga 5.** Przy podziale trójkąta nieprostokątnego na podobne do niego trójkąty, jeśli jeden z boków trójkąta  $ABC$  (np.  $AB$ ) byłby również bokiem takiego trójkąta podziału, którego trzeci wierzchołek  $D$  leżałby wewnątrz trójkąta  $ABC$ , to w trójkącie  $ABD$  kąt przy wierzchołku  $D$  nie byłby mniejszy od żadnego z pozostałych, a w trójkącie  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $C$  nie byłby większy od żadnego z pozostałych (rys. 5).

Wynika stąd, że w takim podziale  $|V_b| \geq 1$ .

**Lemat 5.** Istnieje tylko jeden trójkąt nieprostokątny dający się podzielić na pięć trójkątów podobnych do niego.

**Dowód.** Ponieważ znamy już taki trójkąt, więc pozostaje jedynie wykazanie jedyności.

Najpierw przypuścimy, że w otrzymanym grafie istnieje odcinek łączący wierzchołek z przeciwległym bokiem. Dzieli on więc wyjściowy trójkąt na dwa trójkąty. Zatem jeden z nich musi się dzielić na cztery podobne trójkąty nieprostokątne. Podział opisany w lemacie 4 nie jest dobry, bo przy nim istniałby wierzchołek na boku dzielonego trójkąta, z którego wychodziłyby tylko trzy krawędzie wbrew uwadze 3. Zatem musi być to sytuacja z rysunku 2, co prowadzi do podziału z rysunku 3.

Pozostaje do rozpatrzenia sytuacja, gdy odcinka łączącego wierzchołek z przeciwległym bokiem nie ma.

Zauważmy, że musi być  $|V^6| = 0$ , natomiast  $|V^4|$  nie może przekroczyć 1 – w przeciwnym razie trójkątów podziału byłoby co najmniej 6. Mamy zatem dwa przypadki:

- i)  $|V^4| = 0$ ,
- ii)  $|V^4| = 1$ .

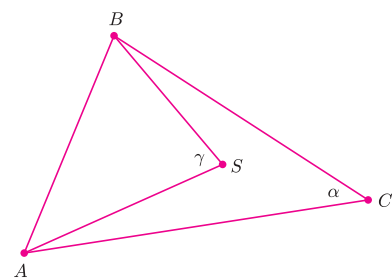
Rozpatrzę pierwszy z nich. Przypuścimy, że udało się taki podział zrealizować. Ze wzoru (\*) wynika (wobec  $|V^3| \geq 1$  i  $|V_b| \geq 1$ ), że  $|V^3| = 1$  i  $|V_b| = 2$ . Przy braku odcinka łączącego punkt ze zbioru  $V_b$  z przeciwległym wierzchołkiem oba punkty z  $V_b$  są połączone krawędzią. Dzieli to wyjściowy trójkąt na trójkąt i czworokąt. Zatem czworokąt musi być podzielony na cztery części (bo znów gdyby trójkąt był podzielony na trzy części, to odcinek dzielący czworokąt na dwa łączyłby wierzchołek wyjściowego trójkąta z przeciwległym bokiem). Zatem sytuacja musi wyglądać tak, jak na rysunku 6.

Na mocy uwagi 5 wiemy, że przy wierzchołku  $C$  trójkąta  $ABC$  jest kąt  $\alpha$  (przypominam: nie większy od żadnego z pozostałych – patrz oznaczenia na początku artykułu), a  $\sphericalangle Bv_3A = \gamma$ , co wynika z uwagi 5. Przyjmijmy ze względu na symetrię, że  $\sphericalangle CAB = \beta$  i  $\sphericalangle CBA = \gamma$ . Ponieważ oba są podzielone na mniejsze, więc musi być  $\beta = 2\alpha$  i  $\gamma = 2\beta$  (gdyby było  $\gamma = \alpha + \beta$ , trójkąt byłby prostokątny, podobnie niemożliwe jest  $\gamma = 2\alpha$ ).

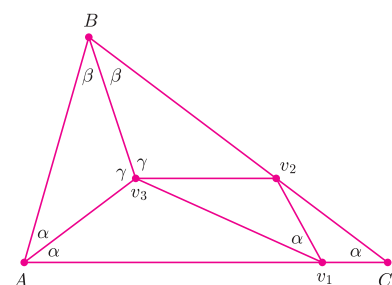
Stąd znamy wartości tych kątów, mianowicie  $\gamma = 2\beta = 4\alpha = 4 \cdot \frac{180^\circ}{7}$ . Wobec tego wokół wierzchołka  $v_3$  muszą występować trzy kąty  $\gamma$  i jeden kąt  $\beta$ , bo tylko tak można z czterech takich kątów uskładać kąt pełny. Zatem  $\sphericalangle Bv_3v_2 = \gamma$ , a więc  $|v_3v_2| = |Av_3|$ , bo trójkąty  $Bv_3v_2$  i  $Bv_3A$  są przystające. Ponieważ  $\sphericalangle Av_1v_3 \neq \alpha$  i  $\sphericalangle Cv_1v_2 \neq \alpha$ , więc  $\sphericalangle v_3v_1v_2 = \alpha$ . Boki leżące naprzeciwko kątów  $\alpha$  (najmniejszych) są najkrótszymi bokami w swoich trójkątach – stąd w trójkącie  $v_1v_2v_3$  jest  $|v_3v_2| < |v_1v_3|$ , a w trójkącie  $Av_1v_3$  jest  $|v_1v_3| < |Av_3|$ . Łącznie mamy więc  $|v_3v_2| < |Av_3|$ , choć poprzednio stwierdziliśmy, że są to odcinki równe. Sprzeczność – taki podział okazał się niemożliwy.

Wzór (\*) dzieli sytuację z przypadku ii) na dwie: albo jest  $|V^3| = 1$  i  $|V_b| = 1$ , albo  $|V^3| = 0$  i  $|V_b| = 3$ . Pierwsza z nich prowadzi do sprzeczności z uwagą 5, druga do sprzeczności z uwagą 3, już bez rachunku boków i kątów. Ale sprawdzenie tego pozostawiam Czytelnikowi.

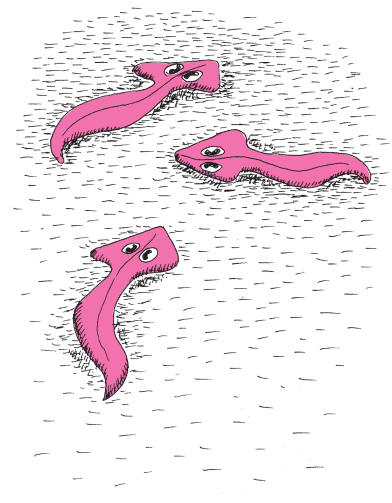
Na szczęście podział trójkątów na większą liczbę podobnych do nich to już prosta sprawa.

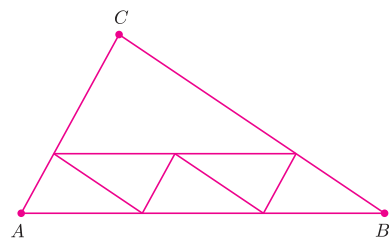


Rys. 5



Rys. 6





Rys. 7

**Lemat 6.** Każdy trójkąt możemy podzielić na dowolną parzystą, większą od 2, liczbę podobnych do niego trójkątów.

Oto konstrukcja dla  $n = 2k$ . Jeden z boków (np.  $AB$ ) dzielimy na  $k$  równych części, następnie rysujemy odcinki równoległe do boków dzielonego trójkąta, jak na rysunku 7 (gdzie  $k = 3$ ). Z twierdzenia Talesa wynika, że powstałe trójkąty są podobne i realizują wobec tego żądany podział.

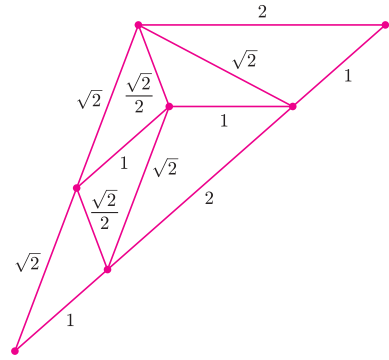
**Lemat 7.** Każdy trójkąt można, dla  $n > 5$ , podzielić na  $n$  podobnych do niego trójkątów.

Istotnie, z poprzedniego lematu wiadomo, że można trójkąt podzielić na dowolną parzystą, większą od dwóch liczbę podobnych do niego trójkątów. Dzieliąc zatem trójkąt na 4 części, a następnie jeden z tych czterech trójkątów na  $2k$  trójkątów podobnych do niego, otrzymujemy podział na  $4 + 2k - 1 = 2k + 3$  części dla dowolnego  $k > 1$ .

Zreasumujemy zatem uzyskane rezultaty opisujące możliwość dzielenia trójkątów nieprostokątnych na podobne do nich trójkąty:

- żadnego nie da się podzielić na 2 ani na 3,
- każdy da się podzielić na 4,
- tylko jeden da się podzielić na 5,
- każdy da się podzielić na dowolną liczbę części większą od pięciu.

Można zapytać jeszcze, czy istnieją specjalne podziały na większą niż pięć liczbę części, np. podziały, w których  $|V^4| = 0$  (tzw. podział symplecjalny lub triangulacja). Przykład trójkąta, który można w ten sposób podzielić na 6 części, prezentuje rysunek 8.

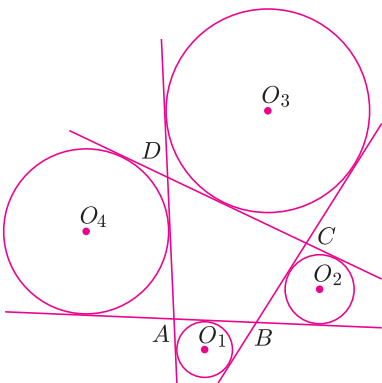


Rys. 8

## Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delty!

Rozwiąż w kwietniu majowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: <http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



Rys. 1



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 593.** Oszacować, na ile dalej sportowiec może rzucić kamieniem, jeśli rzut wykona z rozbiegu, a nie z miejsca.

Rozwiązanie na str. 5

**F 594.** Oszacować liczbę obrotów wykonanych przez samochód spadający w kilometrową przepaść na swojej pełnej prędkości.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

**M 1021.** Każdy z okręgów o środkach  $O_1, O_2, O_3, O_4$  jest styczny zewnętrznie do czworokąta wypukłego  $ABCD$  i przedłużeń dwóch jego przeciwległych boków (rysunek 1). Wykazać, że punkty  $O_1, O_2, O_3, O_4$  leżą na jednym okręgu.

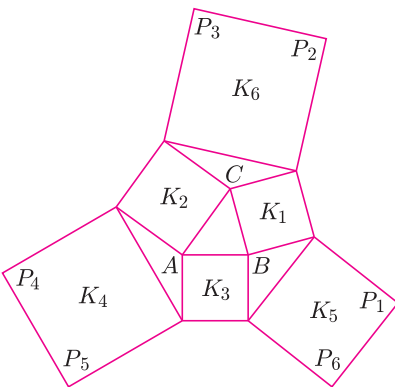
Rozwiązanie na str. 16

**M 1022.** Startując od dowolnego trójkąta  $ABC$ , zbudowano kwadraty  $K_1, K_2, \dots, K_6$  jak na rysunku 2. Wykazać, że suma pól kwadratów  $K_4, K_5, K_6$  jest trzy razy większa od sumy pól kwadratów  $K_1, K_2, K_3$ .

Rozwiązanie na str. 4

**M 1023.** Do konstrukcji z poprzedniego zadania dorysujemy jeszcze kwadraty  $K_7, K_8, K_9$  oparte na odcinkach  $P_1P_2, P_3P_4$  i  $P_5P_6$ . Wykazać, że suma ich pól jest 16 razy większa od sumy pól kwadratów  $K_1, K_2, K_3$ .

Rozwiązanie na str. 3



Rys. 2



# 5

# mała delta

## Wyprowadź wzór

Zapytano mnie, czy w przygotowywanej Wielkiej Encyklopedii mają być hasła *pryzma* i *pryzmatoid*. Odpowiedziałem, że nie, bo to nazwy regionalne – choćby po angielsku *prism* oznacza graniastosłup. Potem jednak doszedłem do wniosku, że drugie z tych hasła warto zamieścić, bo w wielu poradnikach i słownikach matematycznych nie ma tego hasła i odpowiedniego wzoru na objętość.

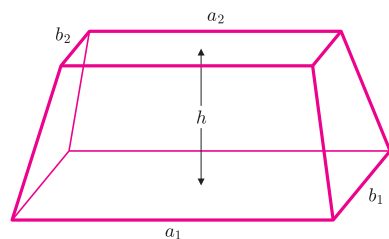
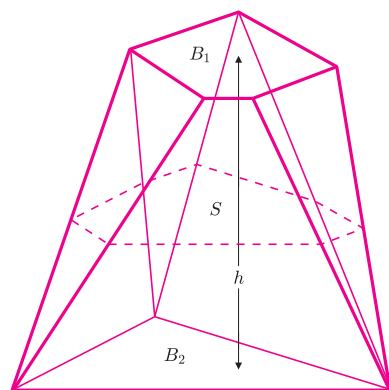
Pryzmatoid to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są równoległe i zawierają wszystkie jego wierzchołki. Wynika z tego, że pozostałe ściany są trójkątami i trapezami. Jeśli pola podstaw będą odpowiednio równe  $B_1$  i  $B_2$ , a pole przekroju pryzmatoidu płaszczyzną równoległą do podstaw i jednakowo od nich odległą będzie równe  $S$ , to objętość pryzmatoidu będzie równa

$$(*) \quad \frac{1}{6}h \cdot (B_1 + B_2 + 4S),$$

gdzie  $h$  to odległość podstaw (czyli wysokość).

Jak widać, szczególnymi przypadkami pryzmatoidu są graniastosłupy, ostrosłupy i ostrosłupy ścięte, wreszcie pryzmy. Te ostatnie są bowiem wielościanami mającymi dwie podstawy będące prostokątami, ściany boczne zaś trapezami równoramiennymi. Zatem mogą się wśród nich trafiać pewne ścięte ostrosłupy i graniastosłupy.

Oczywiście, wzory na objętości wszystkich wymienionych wielościanów dadzą się uzyskać jako szczególne przypadki wzoru (\*) – sprawdzenie tego może sprawić przyjemność. Do Czytelników wyrafinowanych kieruję problem: a jak wyprowadzić wzór na objętość pryzmatoidu? Ciekawe (= niewymęczone) rozwiązania zamieścimy.



Jeśli przyjmujemy oznaczenia z rysunku, to objętość pryzmy będzie równa

$$\frac{1}{6}h \cdot (a_1b_1 + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_2b_2).$$

## Procentowa zagadka

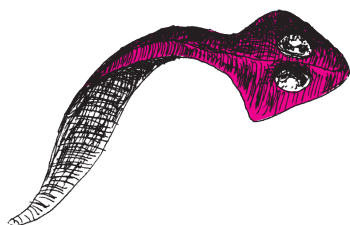
Otrzymaliśmy informację, że boki prostokąta należy powiększyć o 20% i o 25%.

Informacja nie zawierała jednak instrukcji, jak to zrobić. Można ją bowiem (dla prostokąta o bokach długości  $a$  i  $b$ , gdy  $a > b$ ) odczytać na sześć sposobów.

1. powiększamy bok  $a$  o 20%, a bok  $b$  o 25%;
2. powiększamy bok  $b$  o 20%, a bok  $a$  o 25%;
3. powiększamy bok  $a$  o 20%, a potem jeszcze raz o 25%;
4. powiększamy bok  $b$  o 20%, a potem jeszcze raz o 25%;
5. powiększamy bok  $a$  o 25%, a potem jeszcze raz o 20%;
6. powiększamy bok  $b$  o 25%, a potem jeszcze raz o 20%.

Chodzi o to, by otrzymać prostokąt o największym polu. Który sposób wybrać (oczywiście może to zależeć od  $a$  i  $b$ )?

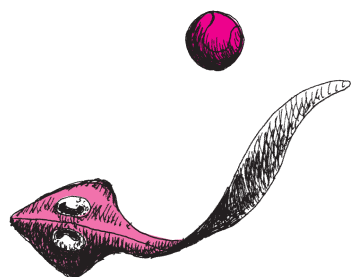
Odpowiedź zamieszczamy w numerze.





## Wszystko, co lata, jest odrzutowcem

Dziwne, dlaczego tak mało ludzi o tym wie, podczas gdy wszystkie niezbędne na ten temat wiadomości zyskujemy już w szkole. Mianowicie dowiadujemy się tam o zasadzie zachowania pędu. Pęd to iloczyn masy poruszającego się ciała i jego prędkości. Dla dowolnej liczby wzajemnie na siebie działających ciał zasada zachowania pędu mówi, że suma pędów wszystkich ciał jest niezmienna.

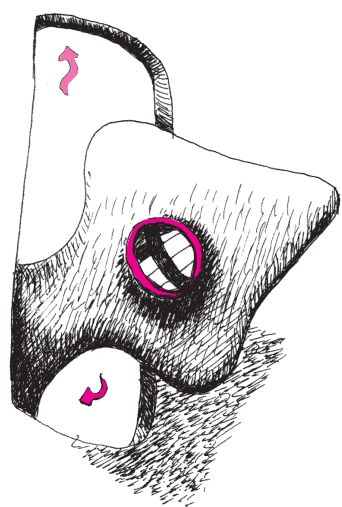


A ma ona ogromne konsekwencje. Przede wszystkim wynika z niej, że żeby jakieś ciało ruszyło, czyli żeby nabrało pędu „w przód”, inne ciało musi nabrać takiego samego pędu „w tył”. Na tej zasadzie porusza się np. statek, rozpędza bowiem w tył porcje wody, dzięki czemu sam płynie w przód. Dokładnie tak samo jest z samolotem, tyle że w tym przypadku rzecz dzieje się w powietrzu. Nie jest przy tym istotne, czy powietrze jest rozpędzane w tył przez śmigło czy przez turbinę. Inaczej mówiąc, samolot zwany odrzutowym zdecydowaną wyższość siły ciągu zawdzięcza wcale nie wyrzucaniu gazów spalinowych, tylko powietrza. Oto dowód.

Dane techniczne silnika Boeinga 747 mówią, że pojedynczy silnik zużywa paliwo w tempie w przybliżeniu 1 kg/s. Do spalenia kilograma paliwa wystarczy 16 kg powietrza, tymczasem silnik Boeinga przepuszcza przez siebie powietrze w ilości co najmniej o rząd wielkości większej, i to przy spokojnym locie poziomym. Ciąg (równy iloczynowi masy wyrzucanej na sekundę i jej prędkości) powstaje więc w wyniku wyrzucania w tył powietrza w tempie rzędu 200 kg/s z prędkością 300–500 m/s. W gazach opuszczających silnik spalin jest nie więcej niż 10%, bo paliwo służy praktycznie tylko do napędzania turbiny, która w gruncie rzeczy jest śmigłem, tyle że obudowanym. Każdy samolot zwany śmigłowym (nawet helikopter) jest właściwie odrzutowcem, bo lata dzięki odrzutowi masy powietrza, a rodzaj silnika (łukowy czy turbinowy) nie ma znaczenia. Silnik może być nawet mięśniowy – dzięki odrzutowi powietrza latają przecież owady i ptaki.

Inaczej jest z silnikiem raketowym. Rakieta zabiera ze sobą oprócz paliwa również utleniacz, dzięki czemu może latać poza atmosferą. Zatem siła ciągu silnika raketowego pochodzi rzeczywiście z gazów spalinowych. Wymagania stawiane takiemu silnikowi są dużo większe, bowiem aby rakieta w ogóle wystartowała, ciąg jej silników musi być większy od jej ciężaru startowego. Przykładowo, silniki wahadłowca kosmicznego zużywając podczas startu paliwo (proch i wodór z tlenem) w tempie niemal 10 t/s, wyrzucają gazy z prędkością około 3500 m/s. Daje to ciąg równy bez mała 35 MN, zdolny unieść i rozpędzić wahadłowiec o masie startowej 2000 t.

A jak to jest z szybowcem?



## Błądzenie we mgle

Każdy z nas słyszał historie o wędrowcach zagubionych we mgle, na pustyni czy w zamieci, którzy bładzili, chodząc w kółko, natrafiając parokrotnie na własne ślady i wyobrażając sobie, że ... idą prosto w jednym kierunku. Zjawisko takiego błędzenia zbadano m.in. w znanym doświadczeniu wykonanym na placu Św. Marka w Wenecji. Plac ten ma kształt prostokąta o wymiarach 175 m na 82 m. Eksperyment polegał na tym, że wypuszczano ludzi ze środka krótszego boku z zawiązanymi oczami. Mieli oni za zadanie dotrzeć do przeciwległego boku, wszyscy jednak trafiali na punkty położone na dłuższych bokach prostokąta.

Przyczynę tego zjawiska łatwo zrozumieć, gdy wyobrazimy sobie samochód-zabawkę, w której lewe koła są większe od prawych. Samochodzik taki będzie poruszał się po okręgu. Ponieważ my mamy zwykle jedną nogę silniejszą od drugiej, kroki stawiane przez nas lewą i prawą nogą są różnej wielkości. Jeżeli różnica ta wynosi 1 mm, to po tysiącu kroków jedna noga przejdzie drogę o 1 m dłuższą niż druga. Możliwe to jest tylko wtedy, gdy nasze nogi poruszają się po okręgach o wspólnym środku. Jeżeli mamy jakiś punkt odniesienia, możemy korygować na bieżąco kierunek ruchu, w przeciwnym razie zbaczamy z prostej drogi.

Przyjmijmy, że odległość między lewą i prawą nogą wynosi 10 cm i lewą nogą stawiamy dłuższe kroki. Jeżeli prawa noga będzie poruszać się po okręgu o promieniu  $R$  metrów, to lewa po okręgu o promieniu  $R + 0,1$  metrów. Zatem różnica przebytych dróg wynosi (w metrach)

$$2\pi(R + 0,1) - 2\pi R = 2\pi \cdot 0,1,$$

czyli w przybliżeniu 63 cm. Przyjmijmy, że długość kroku wynosi 0,7 m, a lewą nogą robimy kroki o  $x$  metrów dłuższe niż prawą. Na pokonanie okręgu o promieniu  $R$  metrów potrzebujemy zatem  $\frac{2\pi R}{0,7}$  kroków.

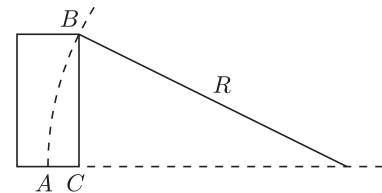
Lewą nogą wykonamy  $\frac{2\pi R}{2 \cdot 0,7}$  kroków. Mnożąc zatem tę liczbę przez  $x$ , uzyskujemy różnicę dróg przebytych lewą i prawą nogą. Mamy równanie:

$$\frac{2\pi R}{2 \cdot 0,7} \cdot x = 2\pi \cdot 0,1,$$

które daje nam zależność między różnicą kroków i promieniem koła, po którym będziemy „błądzili”:  $Rx = 0,14$ . Gdy, na przykład,  $x = 0,001$  m = 1 mm, poruszamy się po kole o promieniu 140 m, w zamieci nie uda nam się przejść nawet przez pas pola szerokości 150 m! Gdy  $x = 0,1$  mm = 0,0001 m, różnica trudna do zauważenia, promień koła wynosi 1400 m, bez dużej dozy szczęścia nie wydostaniemy się z pasa lasu szerokości 3 km. Zazwyczaj zagubieni wędrowcy poruszają się po kole o promieniu 80–100 m, co odpowiada różnicy kroków około 1,5 mm.

Wróćmy do doświadczenia na placu Św. Marka.

Wyruszamy z punktu  $A$  na rysunku. Aby dojść do przeciwległego boku, musimy „trafić” co najmniej w punkt  $B$ . Ponieważ  $|AC| = 41$  m,  $|BC| = 175$  m, to promień koła, po którym trzeba się poruszać, można łatwo wyliczyć.

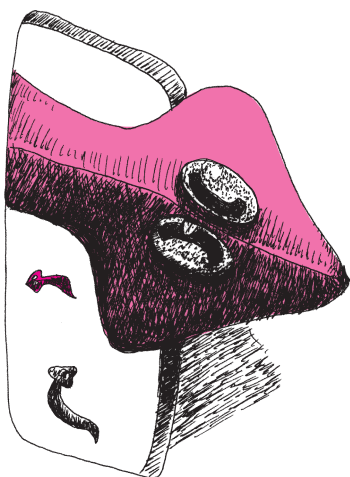
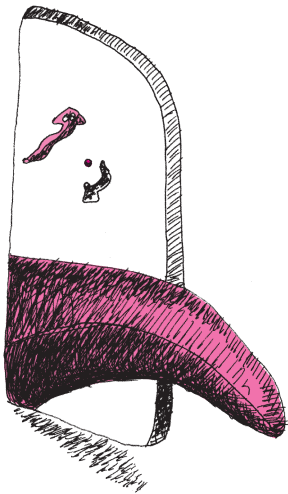


Wynosi on około 375 m, co odpowiada różnicy kroków 0,4 mm. Dojść do przeciwległego boku mógł zatem tylko ktoś o różnicy kroków między prawą i lewą nogą mniejszej niż 0,4 mm.

Czasami opisane wyżej zjawisko tłumaczy się nierówną długością nóg. Ale „nierównymi” nogami można stawiać równe kroki i poruszać się po prostej.

Podobne zjawisko zachodzi przy płynięciu łódką we mgłę. Silniej wiosłujemy prawą lub lewą ręką i poruszamy się po kole. Gdy na odcinku długości  $a$  zbaczamy o odcinek długości  $b$ , poruszamy się po kole o promieniu  $\frac{a^2 + b^2}{2b}$ . Łatwe rachunki dotyczące tej sytuacji zostawiam Czytelnikom.

Małą Deltę przygotowali: Marek KORDOS, Tomasz KWAST, Leszek SIDZ.



## Regularność zgrubień sopli

Niestety, materiału do własnych obserwacji chyba już w tym sezonie nie będzie. No, chyba że ktoś wybiera się jeszcze w wysokie góry. Chodzi o sople. Często udekorowane są one regularnymi, opasującymi je zgrubieniami. W odróżnieniu od płatków śniegu, z których (podobno) żadne dwa nie są takie same, wzorki na soplach są bardzo podobne. Okazuje się, że długość fali grubości sopla wynosi zawsze około 8 mm, niezależnie od temperatury powietrza, średnicy sopla czy szybkości ściekania wody. Do niedawna obserwacja ta nie miała wyjaśnienia. Nie jest to wcale takie dziwne. Zjawisko tworzenia się sopli jest tylko na pierwszy rzut oka proste i zrozumiałe. W rzeczywistości mamy tu do czynienia z bardzo skomplikowanym fenomenem. Sopol rośnie wtedy, gdy ścieka po nim cienka warstewka wody. Aby opisać to zjawisko, należy rozpatrzyć krystalizację, związane z nią ciepło topnienia i krzepnięcia (ciepło utajone), laminarny przepływ między dwiema powierzchniami: ciecz–lód i ciecz–powietrze, parowanie cieczy oraz transport ciepła.

Przy omawianiu rośnięcia kryształów podobna modulacja powierzchni jest zazwyczaj wyjaśniana za pomocą teorii Mullinsa–Sekerka’i, która opiera się na niestabilności Laplace’a i efekcie Gibbsa–Thomsona, które kolejno omówimy.

Z dobrym przybliżeniem lód sopla ma stałą temperaturę. Rozkład temperatury powietrza spełnia wtedy równanie Laplace’a, inaczej mówiąc, temperatura zależy tylko od odległości od osi sopla. Jeżeli przyjmiemy dodatkowo, że zewnętrzna temperatura jest niższa od temperatury sopla (co odpowiada tworzeniu się sopla, a nie jego topnieniu), to wtedy różnica temperatury na granicy sopol–powietrze będzie większa tam, gdzie powierzchnia sopla jest wypukła, a mniejsza tam, gdzie jest wklęsła. Powoduje to, że lód będzie się szybciej odkładał w miejscach wypukłych, gdyż tam odbiór ciepła utajonego będzie szybszy. To oznacza, że krótkofalowe nieregularności średnicy sopla będą rosły szybciej niż długofalowe. To właśnie nazywane jest niestabilnością Laplace’a.

Powierzchnia stałego obiektu ma pewną gęstość energii własnej. Jeżeli cząsteczka przyłącza się do powierzchni w miejscu jej wypukłości, to pole powierzchni rośnie, a więc i całkowita energia powierzchniowa rośnie. I odwrotnie, przyłączenie cząsteczki w miejscu wklęsłym powoduje zmniejszenie się pola, a z nim całkowitej energii powierzchniowej. W takim razie temperatura topnienia będzie mniejsza w punktach wypukłych niż wklęsłych. To jest właśnie efekt Gibbsa–Thomsona, który sprawia, że fluktuacje grubości mają tendencję do znikania. Działa on w przeciwną stronę niż niestabilność Laplace’a.

Niestety, proste zastosowanie łączącej oba efekty teorii Mullinsa–Sekerka’i nie jest możliwe. Po pierwsze, warstwa wody spływająca po sopolu jest za cienka, aby powodować niestabilność Laplace’a, a po drugie,

obserwowana krzywizna fluktuacji jest za mała, aby działał efekt Gibbsa–Thomsona.

Autorzy pracy [1] odnaleźli jednak dwa mechanizmy spełniające podobnie konkurencyjną rolę jak w teorii Mullinsa–Sekerka’i. Chodzi o dyfuzję ciepła na granicy lód–woda oraz woda–powietrze. Z rozwiniętej przez nich teorii wynika, że efekty związane z dyfuzją ciepła na granicy woda–powietrze powodują skracanie się długości fali powstających zgrubień, a związane z granicą woda–lód odwrotnie – wydłużanie się tej długości fali. Ustala się równowaga pomiędzy tymi konkurencyjnymi mechanizmami, powodująca powstawanie zgrubień o długości fali rzędu 8 mm niezależnie od temperatury otoczenia, średnicy sopla i szybkości spływania wody. Od czynników tych zależy jednak amplituda powstających zgrubień i szybkość ich narastania. Od tej ostatniej zależy również przewidywana szybkość przemieszczania się zgrubień po sopolu. Miało to być zweryfikowane doświadczalnie, aby ostatecznie potwierdzić prawdziwość teorii. A, że praca ukazała się przed zimą, to może na wiosnę ostateczne wyniki ujrzą światło dzienne?

## Maksymalna liczba kaczek

Na pewno z wiosną puszcza lody, co umożliwi puszczenie kaczek. Ta uwielbiana przez dzieci zabawa doczekała się niedawno naukowego opracowania [2]. W końcu nie tylko dzieci cieszy obserwowanie odbijających się od powierzchni wody kamieni. Jest to dyscyplina, w której rozgrywane są nawet mistrzostwa świata. Chodzi o wykonanie rzutu o tytułowej „maksymalnej liczbie kaczek”. Rekord świata wynosi obecnie 38 odbić [3].

Każdy intuicyjnie wie, jak wykonać dobry rzut, bo chyba każdy kiedyś to próbował robić. Najlepsze kamienie są raczej płaskie i okrągłe. Należy rzucić mocno, płasko, nadając kamieniowi jak największą rotację.

Czy intuicja ta znajduje potwierdzenie przy naukowym podejściu do problemu? Uproszczony model zjawiska rozważany w publikacji [2] raczej to potwierdza. Maksymalna liczba odbić zależy od spowalniania ruchu postępowego i od destabilizacji ruchu wirowego na skutek kolejnych odbić. Okazuje się, że chociaż efekt spowalniania ruchu postępowego można zniwelować przez zwiększenie prędkości początkowej, to narastająca destabilizacja ruchu wirowego i tak ograniczy maksymalną liczbę kaczek. Z przedstawionej teorii wynika, że aby pobić rekord świata, należy rzucić kamień z początkową prędkością co najmniej 12 m/s i z rotacją ponad 14 obrotów na sekundę. Przy czym zwiększanie tylko jednego z parametrów nie pomoże. Powodzenia!

Piotr ZALEWSKI

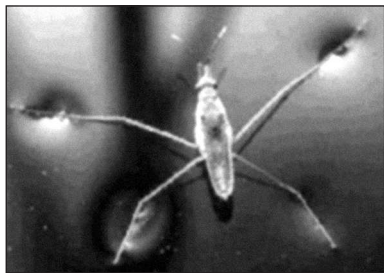
[1] *Surface instability of icicles*, N. Ogawa, Y. Furukawa, Phys. Rev. E **66**(2002)041202,

[2] <http://www.stoneskipping.com>

[3] *The physics of stone skipping*, L. Bocquet, Am. J. Phys. **71**(2003)150

# O unoszeniu się ciał na wodzie

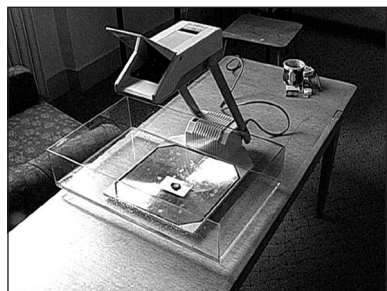
Andrzej HRYCZUK, Robert ŻAK



Rys. 1. Nartnik (nartnikowate *Gerridae*, poślizgowate *Hydrometridae*).  
Foto: Internet.

Już w starożytności stwierdzono, że ciała gęstsze od wody, umieszczone na jej powierzchni, toną. Któż z nas nie widział jednak pływającej igły, monety lub nartnika?

W poniższym tekście chcielibyśmy zająć się statyką pływających ciał, a konkretnie lekkiej, niezwilżalnej karty, o gęstości większej od gęstości wody. Zacniemy od przedstawienia doświadczenia, które pozwoli nam uzmysłowić sobie kilka wiążących się, a przede wszystkim interesujących w tym zagadnieniu zjawisk. Naczynie z wodą umieszczamy na rzutniku pisma, następnie delikatnie kładziemy na powierzchni wody kartę (w naszym przypadku o wymiarach w milimetrach  $86,5 \times 53,5 \times 0,8$  i masie 4,95 g, a więc o gęstości  $\rho$  około  $1,34 \text{ g/cm}^3$ ). Mimo że gęstość karty jest większa od gęstości wody, to nie tonie ona, ze względu na istnienie dobrze znanych sił napięcia powierzchniowego. Na ekranie zobaczymy cień karty otoczony ciemną obwódką (zdjęcie 2c), spowodowaną meniskiem tworzącym się dookoła karty (rysunek 3). Będziemy teraz stopniowo dociążać kartę, mierząc szerokość obwódki.



Rys. 2a. Zdjęcie układu doświadczalnego.

Zastanówmy się, jakich wyników należałoby się spodziewać. Szerokość obwódki zależy od krzywizny menisku. Mierzenie tej szerokości pozwala na kontrolowanie zmiany kształtu menisku. Wydawałoby się, że krzywizna menisku, a więc i szerokość obwódki, powinny rosnać wraz z masą karty, aż do momentu, w którym karta osiągnie masę graniczną, przy której utonie. Okazuje się, że jest inaczej!

Wyniki naszych pomiarów przedstawione są na wykresie (rysunek 4). Widzimy, że istotnie punkty doświadczalne układają się w pewną rosnącą zależność, jednakże po osiągnięciu maksimum (dla masy 11,9 g) obserwowana szerokość menisku zaczyna maleć. Dlaczego tak się dzieje? Czyżby, od pewnego momentu, krzywizna menisku rzeczywiście się zmniejszała? Wydaje się to niemożliwe... i tak jest w istocie!

Pozorne zmniejszanie się krzywizny menisku jest spowodowane specyfiką układu pomiarowego. Uzyskany wynik implikuje istnienie sytuacji przedstawionej na rysunku 5. Od pewnego momentu obserwujemy nie cały menisk, ale jedynie jego część nie zasłanianą przez kartę. Powstawanie takiej sytuacji jest faktem zaskakującym, a przez to interesującym.

Zastanówmy się, jakie można stąd wyciągnąć wnioski ilościowe. Rozpatrzmy kartę znajdującą się w położeniu przedstawionym na rysunku 3. Powszechnie wiadomo, że ciśnienie pod powierzchnią wody zależy od głębokości i opisane jest wzorem

$$p_1(y) = p_0 + \rho gy,$$

gdzie  $p_0$  jest ciśnieniem atmosferycznym,  $\rho$  gęstością wody, a  $y$  głębokością. Natomiast do ciśnienia zewnętrznego musimy dodać dodatkowe ciśnienie wynikające z napięcia powierzchniowego.

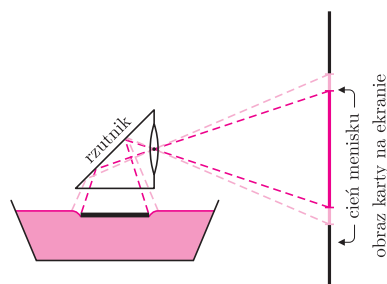
$$\Delta p(y) = \sigma K(y),$$

gdzie  $\sigma$  jest współczynnikiem napięcia powierzchniowego, a  $K(y)$  krzywizną (parametrem opisującym „wygięcie” powierzchni w danym punkcie). Tak więc całkowite ciśnienie zewnętrzne wyniesie

$$p_2(y) = p_0 + \sigma K(y).$$

Układ jest w równowadze, więc ciśnienie wewnętrzne musi być równe ciśnieniu wewnętrznemu, co prowadzi do warunku

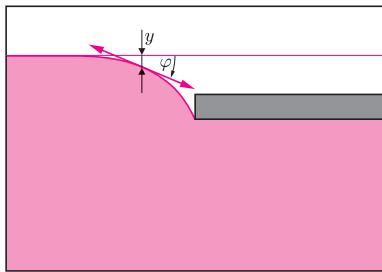
$$\rho gy = \sigma K(y).$$



Rys. 2b. Schemat układu doświadczalnego.



Rys. 2c. Widok karty na ekranie.



W ten sposób znaleźliśmy związek między głębokością a krzywizną menisku na tej głębokości. Zastąpienie krzywizny funkcją pokazanego na rysunku 3 kąta  $\varphi$  nie jest trudne, ale wymaga rozwiązania równania różniczkowego. Nie wglębiając się w przekształcenia matematyczne, podajemy od razu wynik:

$$y = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Jak widać, maksymalne zanurzenie otrzymujemy dla  $\varphi = \pi$ . Przy większym obciążeniu karta musi zatonać.

Rys. 3. Utrzymująca się na wodzie karta.

Korzystając z prawa Archimidesa, definicji siły napięcia powierzchniowego i warunku równowagi sił, możemy w prosty sposób otrzymać zależność zanurzenia karty  $y$  od jej całkowitej masy  $m$  (w sytuacji odpowiadającej rysunkowi 5):

$$F_w + F_n = F_g$$

$$ab(y + c)\rho + 2(a + b)\sigma \sin \varphi(y) = mg.$$

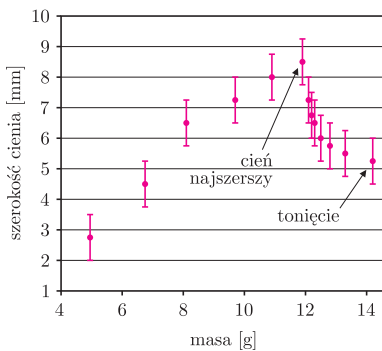
$F_w$ ,  $F_n$  i  $F_g$  są, odpowiednio, siłami wyporu, napięcia powierzchniowego i grawitacji, natomiast  $a$ ,  $b$ ,  $c$  to wymiary karty.

Porównajmy teraz oczekiwane i zmierzone wartości całkowitej masy karty. Maksymalnej szerokości cienia menisku oczekujemy dla  $\varphi = \pi/2$ , a zatonięcia karty dla  $\varphi = \pi$ . W doświadczeniu uzyskaliśmy, odpowiednio, 11,9 g oraz 14,2 g, natomiast po wstawieniu danych liczbowych do powyższego wzoru (napięcie powierzchniowe wody wynosi  $\sigma = 0,072 \text{ N/m}^2$ ) otrzymujemy wartości 14,4 g oraz 16,3 g. Uzyskaliśmy zgodność (lub jak kto woli – niezgodność) na poziomie 15%.

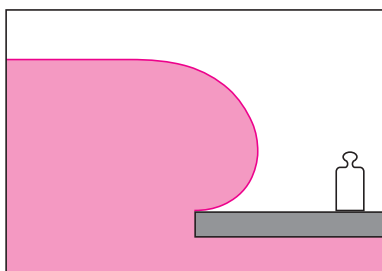
Spróbujmy odnaleźć podstawowe źródła tej niezgodności. Po pierwsze, oczywiste jest, że jasność cienia wywołanego krzywizną zmienia się w sposób ciągły, a my obieraliśmy pewien punkt, do którego mierzyliśmy szerokość cienia. Po drugie, pominęliśmy dokładne rozpatrzenie kształtu menisku w rogach karty. Ponadto dotychczas milcząco zakładaliśmy, że karta obciążona jest równomiernie, co nie do końca zgadza się z rzeczywistością. Karta ulega niewielkiemu przechyleniu, co sprawia, że może ona zatonać, zanim spełniony będzie warunek  $\varphi = \pi$ .

Wreszcie dociążanie karty w przypadku bliskim masie granicznej następuje duże trudności, gdyż niewielkie nawet zachwianie stabilności karty powoduje jej zatonięcie. Ze względu na dwa ostatnie aspekty oczekivalibyśmy, że karta będzie tonąć przed osiągnięciem obciążenia maksymalnego z punktu widzenia teorii. Jeżeli chodzi natomiast o punkt odpowiadający  $\varphi = \pi/2$ , to główny błąd może wiązać się z przechodzeniem punktu styku karty z wodą z dolnej (rysunek 3) na górną (rysunek 5) powierzchnię karty. Zważywszy na powyższe czynniki, zgodność teorii z doświadczeniem możemy uznać za satysfakcjonującą.

Na zakończenie chcielibyśmy podkreślić pewien, naszym zdaniem, zaskakujący fakt. Na początku stwierdziliśmy, że niektóre małe obiekty (jak nasza karta) położone na wodzie nie toną, ze względu na istnienie sił napięcia powierzchniowego. Jest to oczywiście prawdą. Jednakże nie wystarczy uwzględnić wypadkową sił napięcia powierzchniowego. Po odrobinę bliższym przyjrzeniu się naszej teorii widzimy, iż tak naprawdę siła ta przy maksymalnym zanurzeniu dąży do zera! Na czym więc zasadza się rola napięcia powierzchniowego? Sprawia ono, że powierzchnia wody nie zostaje przerwana, choć karta znajduje się dobre kilka milimetrów poniżej poziomu otaczającej ją wody...



Rys. 4. Zależność szerokości cienia od całkowitej masy karty.



Rys. 5. Utrzymująca się na wodzie, maksymalnie obciążona karta.

Zwiększając dowolny bok  $p$  razy zwiększamy tym samym pole  $d$  razy. Zatem w każdym z przypadków pole zwiększamy o 50%.

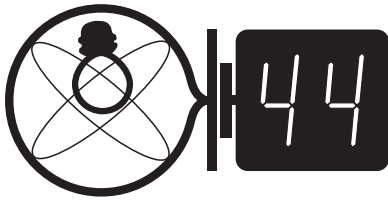


Autorzy artykułu, wraz z Janem Guttem (kapitanem), Jackiem Wołowiczem i Anną Zlatkes, tworzyli zespół XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, który pod opieką mgr. Stanisława Lipińskiego wygrał ubiegłoroczny

**Finał Międzynarodowego Turnieju Młodych Fizyków**, Odessa 2002.

Zachęcamy do opracowania innych problemów TMF w postaci artykułów o podobnej formie. Przygotowywane już są zadania 6,11,12 i 17 2000/2001 oraz 4,6,11,13 i 16 2001/2002.





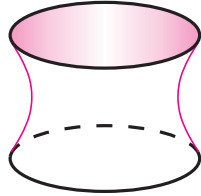
Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2003

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z fizyki nr 356, 357

**356.** Z cienkiego drutu wykonano dwa jednakowe kółka o promieniu  $r_0$ . Kółka zetknięto i zwilżono wodą z mydłem (tylko sam brzeg, wewnątrz kółek nie było pokryte błonką), a następnie powoli rozsuwano w kierunku prostopadłym do ich płaszczyzny (rysunek 1). Na jaką maksymalną odległość można je odsunąć, żeby łącząca je błonka nie przerwała się?



Rys. 1

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2002

**348.** Ciężarek o masie  $m$  wisi na nici  $A$ , która owija się wokół dwóch bloków ruchomych (rysunek 2). Osie tych bloków są połączone inną nicią  $B$  przełożoną przez blok nieruchomy; ponadto na osi górnego bloku działa sprężyna o stałej sprężystości  $k$ . Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka. Pominąć masę bloków.

**348.** Załóżmy, że osi górnego bloku ruchomego przesunie się w górę o  $z$ . Wtedy osi dolnego bloku przesunie się w dół o ten sam odcinek  $z$ , czyli lewy odcinek nici  $A$  wydłuży się o  $z$ , a środkowy o  $2z$ . Aby łączna długość nici  $A$  pozostała niezmienną, prawy odcinek musi ulec skróceniu o  $3z$ , co oznacza podniesienie ciężarka w górę o  $x = 4z$ .

Analizując z kolei występujące w zadaniu siły, stwierdzamy, że wszystkie trzy odcinki nici  $A$  napięte są jednakową siłą  $F$ , oba odcinki nici  $B$  napięte są jednakową siłą równą  $2F$ , a siła wywierana przez sprężynę wynosi  $4F$ . Gdy więc wskutek przesunięcia osi górnego bloku o  $z$  siła wywierana przez sprężynę zmniejszy się o  $kz$ , siła działająca ze strony nici  $A$  na ciężarek zmaleje o  $(1/4)kz = (1/16)kx$  – tak, jakby wisił na sprężynie o stałej sprężystości  $k' = (1/16)k$ . Zatem szukany okres drgań  $T$  jest dany wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k'}} = 8\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

**349.** Przy założeniu, że klimatyzator jest doskonałą maszyną cieplną, ciepło pobrane z wnętrza  $dQ_w$  i ciepło oddane do otoczenia  $dQ_o$  spełniają związek

$$\frac{dQ_w}{T} = \frac{dQ_o}{T_1},$$

gdzie  $T$  jest aktualną temperaturą w pokoju.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Obok rozwiązania analitycznego lub numerycznego dopuszczalna jest też odpowiedź oparta na przeprowadzonym doświadczeniu.

**357.** Siły jądrowe wiążą jądra atomowe tak mocno, że podwyższenie temperatury materii nawet do kilkunastu milionów stopni nie jest w stanie wpłynąć na budowę wewnętrzną jąder. Dlaczego więc rozpad izotopu berylu  ${}^7\text{Be}$  zachodzi we wnętrzu Słońca znacznie wolniej niż w laboratorium ziemskim?

Przypominamy treść zadań:

**349.** Objętość powietrza zawartego w pokoju wynosi  $V = 40 \text{ m}^3$ , jego temperatura (równa temperaturze zewnętrznej)  $T_1 = 35^\circ\text{C}$ , a ciśnienie jest równe  $p = 10^5 \text{ Pa}$ . Jaka jest minimalna ilość energii elektrycznej, którą musi pobrać z sieci klimatyzator, żeby obniżyć temperaturę w pokoju do wartości  $T_2 = 25^\circ\text{C}$ ? Przyjąć, że przepływ ciepła przez ściany i okna można pominąć, a powietrze jest gazem dwuatomowym.

Praca  $dW$  prądu zasilającego klimatyzator jest równa

$$dW = dQ_o - dQ_w = dQ_w(T_1/T - 1).$$

W czasie oziębiania powietrza w pokoju ciśnienie pozostaje stałe (oczywiście pokój nie jest hermetyczny!), więc z zewnątrz wchodzi do środka szparami ciepłe powietrze. Liczba moli powietrza w pokoju jest równa

$$n = pV/RT,$$

a jej zmiana wynikająca ze zmiany temperatury dana jest wzorem

$$dn = -\frac{pV}{RT^2}dT.$$

Ciepło pobrane z wnętrza pokoju  $dQ_w$  należy więc przyrównać do sumy dwóch wyrażen – ciepła odebranego przy oziębieniu  $n$  moli powietrza o  $dT$  oraz ciepła odebranego podczas oziębiania  $dn$  moli powietrza od temperatury  $T_1$  do temperatury  $T$ :

$$dQ_w = -nC_p dT + C_p(T_1 - T)dn$$

(pamiętajmy, że  $dT < 0$ ), gdzie  $C_p$  jest ciepłem molowym powietrza przy ogrzewaniu (lub oziębianiu) pod stałym ciśnieniem, dla gazu dwuatomowego równym  $(7/2)R$ .

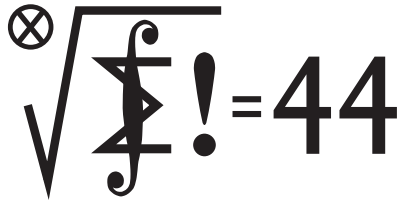
Po przekształceniach dochodzimy do równania

$$dW = -\frac{pVC_p}{RT} \frac{T_1}{T} \left( \frac{T_1}{T} - 1 \right) dT.$$

Całkowanie od  $T_1$  do temperatury końcowej  $T_2$  prowadzi do wyniku

$$W = \frac{pVC_p}{R} \frac{(T_1 - T_2)}{2T_1^2} = 7883 \text{ J}.$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA



Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2003

**459.** W czworokącie  $ABCD$  boki  $BC$  i  $DA$  mają jednakową długość. Symetralne boków  $AB$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$ . Wykazać, że punkt  $P$  leży na symetralnej odcinka łączącego środki boków  $BC$  i  $DA$ .

**460.** Dowieść, że dla  $n \in \mathbb{N}$  oraz dla  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \langle 0; \pi/4 \rangle$  zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{(\operatorname{tg} x_1)(\operatorname{tg} x_2) \dots (\operatorname{tg} x_n)} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \dots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \dots + \cos^2 x_n}}$$

Zadanie **460** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Krakowa.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2002** Przypominamy treść zadań:

**451.** Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  losujemy podzbiór sześciocioelementowy. Wyznaczyć te liczby naturalne  $n$ , dla których bardziej prawdopodobne jest wylosowanie zbioru zawierającego co najmniej jedną parę liczb kolejnych niż wylosowanie zbioru bez takiej pary.

**451.** Zadanie ma sens dla  $n \geq 6$ . Weźmy dowolny sześciocioelementowy zbiór  $A \subset \{1, \dots, n\}$  ( $n \geq 6$ ); jego elementy tworzą sześciocyfrowy ciąg rosnący  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ . Zbiór  $A$  nie zawiera pary liczb kolejnych wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_{i+1} - a_i > 1$  dla  $i = 1, \dots, 5$ , czyli dokładnie wtedy, gdy ciąg  $(b_1, \dots, b_6)$  określony wzorem  $b_i = a_i - i + 1$  jest rosnący. Wyrazy takiego ciągu tworzą sześciocioelementowy zbiór  $B \subset \{1, \dots, n-5\}$ . Na odwrót, sześciocyfrowy rosnący ciąg  $b_1 < \dots < b_6$  ( $\leq n-5$ ) generuje ciąg  $(a_1, \dots, a_6)$  dany wzorem  $a_i = b_i + i - 1$ , o różnicach  $a_{i+1} - a_i > 1$ .

Mamy więc bijekcję między rodziną sześciocioelementowych podzbiorów zbioru  $\{1, \dots, n\}$  bez pary liczb kolejnych oraz rodziną wszystkich sześciocioelementowych podzbiorów zbioru  $\{1, \dots, n-5\}$ . Należy wobec tego wyznaczyć te liczby  $n \geq 6$ , dla których zachodzi nierówność  $\binom{n-5}{6} < \frac{1}{2} \binom{n}{6}$ . Przepiszmy ją w postaci

$$p_n := \frac{n-5}{n} \cdot \frac{n-6}{n-1} \cdot \frac{n-7}{n-2} \cdot \frac{n-8}{n-3} \cdot \frac{n-9}{n-4} \cdot \frac{n-10}{n-5} < \frac{1}{2}.$$

Ciąg o wyrazach  $k_n = \frac{n-5}{n}$  jest rosnący; ciąg o wyrazach  $p_n = k_n k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} k_{n-4} k_{n-5}$  jest także rosnący. A ponieważ  $p_{48} < \frac{1}{2} < p_{49}$ , zatem warunek, o który chodzi w zadaniu, jest spełniony tylko przez liczby naturalne  $n = 6, 7, 8, \dots, 48$ .

**452.** Niech  $\mathbf{w} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$  będzie dowolnym wektorem długości jednostkowej w  $\mathbb{R}^3$ ; tworzy on z osiami układu współrzędnych kąty  $\alpha, \beta, \gamma$ . Jeżeli koło o średnicy  $d$  leży w płaszczyźnie prostopadłej do wektora  $\mathbf{w}$ , to rzut tego koła na każdą z osi jest odcinkiem, a długości tych odcinków wynoszą

$$d |\sin \alpha|, \quad d |\sin \beta|, \quad d |\sin \gamma|.$$

Koło takie da się umieścić w prostopadłościanie  $a \times b \times c$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\sin \alpha| \leq \frac{a}{d}, \quad |\sin \beta| \leq \frac{a}{d}, \quad |\sin \gamma| \leq \frac{c}{d}.$$

Równość

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

(wyrażająca jednostkową długość wektora  $\mathbf{w}$ ) jest równoważna równości

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2.$$

**452.** Dla danych liczb dodatnich  $a, b, c$  wyznaczyć największą średnicę, jaką może mieć koło zawarte w prostopadłościanie o krawędziach długości  $a, b, c$ .

Przyjmując

$$\sin^2 \alpha = x, \quad \sin^2 \beta = y, \quad \sin^2 \gamma = z,$$

sprowadzamy zadanie do następującego:

wyznaczyć największą liczbę  $d > 0$ , dla której istnieją liczby  $x, y, z \in \langle 0; 1 \rangle$  spełniające warunki

$$(*) \quad x + y + z = 2; \quad x \leq \frac{a^2}{d^2}, \quad y \leq \frac{b^2}{d^2}, \quad z \leq \frac{c^2}{d^2}.$$

Rozważymy dwa przypadki.

**1°.**  $a^2 \leq b^2 + c^2, \quad b^2 \leq c^2 + a^2, \quad c^2 \leq a^2 + b^2.$

Jeśli istnieją liczby  $x, y, z$  o podanych własnościach, to

$$2 = x + y + z \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2},$$

czyli

$$d \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

Można tu uzyskać równość: liczby

$$x = \frac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z = \frac{2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

należą do przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$  i spełniają warunki  $(*)$  dla  $d = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/2}$ .

**2°.** Niech na przykład  $c^2 > a^2 + b^2$ .

Jeżeli liczby  $x, y, z$  istnieją, to ze związków

$$x + y = 2 - z \geq 1 \quad \text{oraz} \quad x + y \leq \frac{a^2 + b^2}{d^2}$$

wnosimy, że

$$d \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tu też można mieć równość: liczby

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad z = 1$$

należą do przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$  i spełniają warunki  $(*)$  dla  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

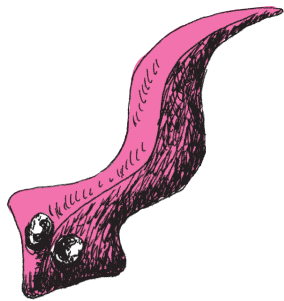
Sytuacja jest analogiczna, gdy  $a^2 > b^2 + c^2$  lub  $b^2 > c^2 + a^2$ .

Zestawiając wyniki uzyskane w obu rozważonych przypadkach, mamy odpowiedź: dla zadanych liczb  $a, b, c > 0$  największa możliwa średnica  $d$  ma długość

$$d_{\max} = \min \left\{ \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}, \sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{b^2 + c^2}, \sqrt{c^2 + a^2} \right\}.$$



## Patrz w niebo



### Rozwiązanie zadania M 1021.

Mamy

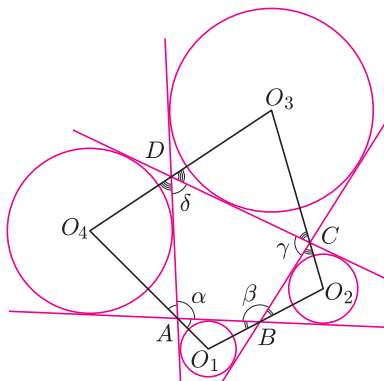
$$|\sphericalangle O_4 O_1 O_2| = 180^\circ - \left( \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \beta}{2} \right) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Podobnie  $|\sphericalangle O_2 O_3 O_4| = \frac{\gamma + \delta}{2}.$

Zatem

$$|\sphericalangle O_4 O_1 O_2| + |\sphericalangle O_2 O_3 O_4| = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180^\circ$$

i na czworokącie  $O_1 O_2 O_3 O_4$  można opisać okrąg.



Większość astronomów jest zgodna co do tego, że w centrum wielu galaktyk znajduje się czarna dziura o masie milionów lub nawet miliardów mas Słońca. Nie ma jednak zgodnej odpowiedzi na pytanie, jak te czarne dziury tam się znalazły. Najlepiej bodaj opracowana teoria głosi, że centralna czarna dziura rośnie stopniowo wskutek wchłaniania materii traconej przez masywne gwiazdy. Mechanizm ten dobrze tłumaczy własności np. galaktyki M87, wielkiej eliptycznej galaktyki w gromadzie galaktyk w Pannie. Czarna dziura byłaby więc tu obiektem „rodziny”.

Istnieje jednak pogląd konkurencyjny, głoszony przez zespół astronomów z Tokio. Według niego wielkie galaktyki, takie jak M87, powstały wskutek złączenia się w przeszłości co najmniej dwóch mniejszych galaktyk zawierających już każda swoją czarną dziurę. Tu więc czarne dziury byłyby „imigrantami”. Do takich wniosków doszli astronomowie tokijscy na podstawie nowych analiz rozkładu jasności powierzchniowej galaktyk. Generalnie jasność powierzchniowa galaktyk jest oczywiście większa w pobliżu centrum, ale w galaktykach małych pik jasności centralnej jest bardzo wyraźny. Taką niewielką galaktyką z bardzo jaskrawym jądrem jest np. M32, najjaśniejsza galaktyka satelitarna Wielkiej Mgławicy w Andromedzie. W galaktykach wielkich jasność też rośnie ku centrum, ale dość łagodnie. Według Japończyków jest to możliwe właśnie, gdy taka galaktyka powstała z dwóch innych i do dziś w jej centrum znajdują się dwie czarne dziury. To one, zachowując stale swoją tożsamość i niewątpliwie obiegając się wzajemnie, nie pozwalają gwiazdom skupić się w jedno jaskrawe jądro. Japończycy podkreślają, że przewaga ich modelu nad innymi polega na dwóch faktach. Po pierwsze, zgodnie z tym modelem każda czarna dziura z osobna powstaje według standardowego scenariusza, a po drugie, łączenie się małych galaktyk w wielkie (galaktyczny kanibalizm) jest zjawiskiem – jak się wydaje – dość częstym i uznanym przez większość badaczy.

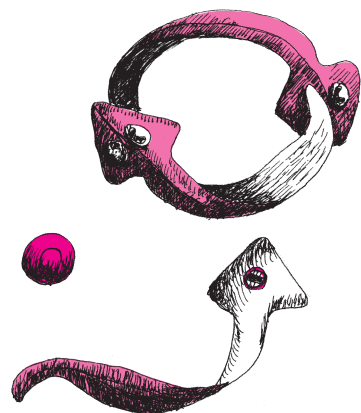
Tomasz KWAST

## Kwiecień

Wysoko na niebie widzimy w wiosenne wieczory okazały gwiazdozbiór Lwa, w którym najjaśniejszą gwiazdą jest Regulus. Ku zachodowi widać jasnego Procjona w Małym Psie, a ku wschodowi Spikę w Pannie. Na południe od linii tych gwiazd widać mało co, gdyż na wielkim obszarze brak jest tam jasnych gwiazd. Tymczasem właśnie w całej okazałości – o ile pozwala na to przejrzystość powietrza i nie przeszkadzają miejskie światła – można by tam zobaczyć najdłuższy gwiazdozbiór całego nieba, Hydrę, ciągnący się wzdłuż całego południowego horyzontu. Jego najjaśniejsza gwiazda ma jasność 2,16 mag i nazywa się Alphard. Z arabskiego oznacza to „osamotniona”, co sugeruje, że jest jedyną jasną gwiazdą w gwiazdozbiórce, i zresztą w okolicy. Jej drugą nazwę, Cor Hydrae, czyli Serce Hydry, wprowadził Tycho Brahe. Gwiazda jest pomarańczowym olbrzymem typu K3, odległym o 60 pc. W Hydrze znajdują się m.in. dwie bogate gromady galaktyk, ale niedostępne dla amatorskich teleskopów. Za pomocą amatorskiego teleskopu można próbować dostrzec dwie złączone galaktyki NGC 4038 i 4039 w sąsiadującym z Hydrą Kruku, tzw. Anteny. Mają one jednak jasność 11 mag, toteż obserwator powinien dysponować teleskopem o średnicy co najmniej 10 cm.

Venus jest na granicy Wodnika i Ryb, świeci więc jako Gwiazda Poranna. Mars znajduje się na granicy Strzelca i Koziorożca i wschodzi około północy. Jowisz jest w Raku, a więc widać go wieczorem, a zachodzi po północy. Wreszcie Saturn jest w Byku, przez co około północy zachodzi. W połowie miesiąca można wieczorami próbować szukać Merkurego, gdyż 16 IV znajdzie się najdalej kątowo od Słońca. Nów Księżycy wypada 1 IV, a pełnia 16 IV. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych gwiazd w kwietniu nie będzie.

T. K.



Drodzy Czytelnicy! Wśród Was jest 10 typów ludzi: ci, którzy lubią posługiwać się układem dwójkowym oraz ci, którzy tego nie lubią. Każdy z Was miał 1000000 okazji, aby zajrzeć do  $\Gamma$ -limatiasu.

## KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (2)

**Zadanie:** (XLVI Olimpiada Matematyczna, II stopień, zadanie 6): Kwadrat o boku długości  $n$  dzielimy na  $n^2$  kwadratów jednostkowych. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których taki kwadrat można pociąć wzdłuż linii tego podziału na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3.

*Rozwiązanie:* Bez trudu stwierdzamy, że podział kwadratu jest możliwy, gdy  $n$  jest parzyste lub podzielne przez 3, gdyż wówczas możemy podzielić kwadrat tylko na kwadraty o boku odpowiednio 2 lub 3.

Główna trudność polega na udowodnieniu, że w przypadku, gdy  $n$  jest liczbą nieparzystą niepodzielną przez 3, żądany podział nie jest możliwy. Udowodnimy to kilkoma sposobami.

W dalszym ciągu założymy, że  $n$  jest liczbą nieparzystą niepodzielną przez 3. Kwadraty jednostkowe, na które podzielono duży kwadrat, będziemy nazywać polami. Wszelkie kwadraty o bokach 2 lub 3, do których będziemy się odwoływać, utworzone są odpowiednio z 4 lub 9 pól.

*Sposób I:* W pola kwadratu wpisujemy liczby 1 i  $-1$ , wypełniając co drugi rząd (począwszy od pierwszego) jedynkami, a pozostałe rzędy minus jedynkami (rys. 1).

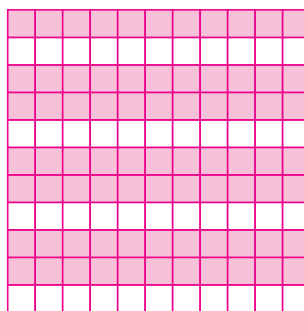
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Rys. 1

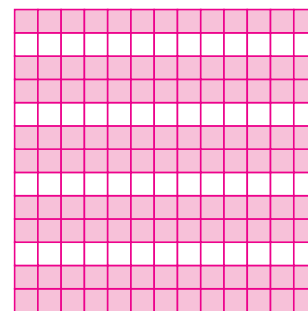
Wówczas suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa  $n$ , nie jest więc podzielna przez 3.

Tymczasem każdy kwadrat o boku 2 zawiera liczby o sumie 0, a każdy kwadrat o boku 3 zawiera liczby o sumie  $\pm 3$ . Zatem jakakolwiek figura dająca się pokryć kwadratami o bokach 2 lub 3 zawiera w swoich polach liczby o sumie podzielnej przez 3. Jak wcześniej ustaliliśmy, kwadrat o boku  $n$  taką figurą nie jest.

*Sposób II:* Pokolorujmy pola kwadratu rzędami tak, aby niepokolorowane zostały pola co trzeciego rzędu, poczynając od rzędu drugiego (rys. 2 i 3).



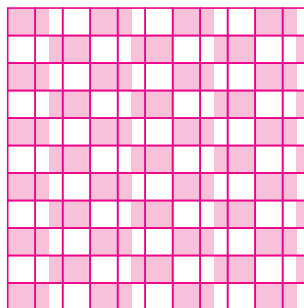
Rys. 2



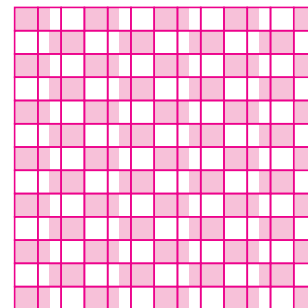
Rys. 3

Wówczas liczba pokolorowanych pól kwadratu jest nieparzysta. Każdy kwadrat o boku 2 zawiera 2 lub 4 pokolorowane pola, natomiast każdy kwadrat o boku 3 zawiera 6 pól pokolorowanych. Tak więc każdy kwadrat o boku 2 lub 3 zawiera parzystą liczbę pól pokolorowanych.

*Sposób III:* Pomalujmy kwadrat w szachownicę, której pola są prostokątami o bokach 1 i 1,5 (rys. 4 i 5).



Rys. 4



Rys. 5

Wówczas pole powierzchni pomalowanej jest o 1 większe od pola powierzchni niepomalowanej. Tymczasem każdy kwadrat o boku 2 lub 3 jest zamalowany dokładnie w połowie.

*Sposób IV:* Wypełnijmy pola kwadratu liczbami jak na rys. 6 i 7.

1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0

Rys. 6

1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1

Rys. 7

Wówczas każdy kwadrat o boku 2 lub 3 zawiera liczby o sumie podzielnej przez 3, podczas gdy suma liczb wpisanych w pola dużego kwadratu przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Za miesiąc piąty sposób rozwiązania.

Korespondencję do  $\Gamma$ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl