



SPIS TREŚCI NUMERU 3 (346)

Pytanie za milion dolarów: jak płynie woda? <i>Witold Sadowski</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Gdzie strumyk płynie z wolna <i>Grzegorz Derfel</i>	str. 4
Twierdzenie bez założeń? <i>Krzysztof Oleś</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Co udowodnił Preda Mihăilescu? <i>Jerzy Browkin</i>	str.10
Aktualności	str.11
Osobliwości i fraktalna niezupełność czasoprzestrzeni klasycznych <i>Wiesław Zajiczek</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Marzec	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:
Cząstki na szczytach gór

W dniu 2 stycznia 2003 roku

zmarł

Krzysztof Ernst

fizyk

profesor zwyczajny,

wieloletni dziekan Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego,
kierownik Zakładu Optyki Instytutu Fizyki Doświadczalnej,
znakomity naukowiec i nauczyciel akademicki,
popularyzator nauki, autor *Delta*.

Dla wielu – wspaniały Przyjaciel i Kolega.

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hrynkiewicz, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Krzysztof Maślanka, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Zdzisław Pogoda, Michał Różyczka, Konrad Rudnicki, Grzegorz Sitarski, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Joanna Udalska, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem TeX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII – na I kwartał roku następnego,

do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,

do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,

do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie; wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiw.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetowa wersja *Malej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Pytanie za milion dolarów: jak płynie woda?

Witold SADOWSKI

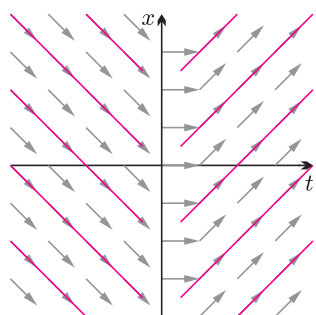
W roku 2000 Clay Mathematics Institute z Massachusetts ogłosił listę siedmiu problemów matematycznych, za których rozwiązanie oferowana jest nagroda po milionie dolarów za każdy problem, o czym pisaliśmy już w *Delcie* 7/2000. Trzem z tych problemów poświęcone były weekendowe wykłady VI Festiwalu Nauki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW we wrześniu 2002 r. Niniejszy artykuł jest szkicem odczytu o równaniu Naviera–Stokesa. O dwóch pozostałych problemach, tj. o hipotezie Poincaré i hipotezie Riemanna będzie można natomiast przeczytać w *Delcie* jeszcze w tym roku.

Ch. Doering i J.D. Gibbon: „Wcale nie jest jasne, czy jeden z podstawowych modeli mechaniki klasycznej o wielkim zastosowaniu w inżynierii nie jest sprzeczny. Ten podejrzany model to równanie Naviera–Stokesa opisujące dynamikę nieściśliwego płynu”.

(*Applied Analysis of the Navier–Stokes Equations*)

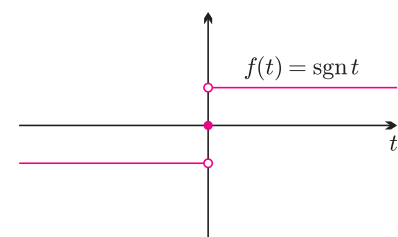
R.P. Feynman: „Próbowano już zatamować wodę za pomocą praw i równań (...); woda przerwała tamę i wymknęła się naszym próbom zrozumienia jej przepływu” (*Feynmana wykłady z fizyki*)

Zanim zajmiemy się problemem zasadniczym, tj. istnieniem rozwiązań równania opisującego przepływ wody, rozważmy pewną nieskomplikowaną sytuację. Wyobraźmy sobie mianowicie, że w każdym punkcie płaszczyzny zaczepiliśmy wektor jednostkowy o kierunku wyznaczonym przez współrzędne $[1, f(t, x)]$, gdzie f to pewna funkcja, t pierwsza współrzędna, którą zwać będziemy czasem, a x – to druga współrzędna. Spójrzmy, jak mogłoby to wyglądać dla czterech różnych funkcji f .

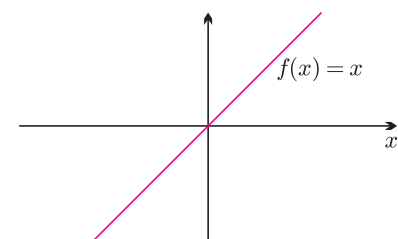


Rys. 1. $f(t, x) = \text{sgn } t$

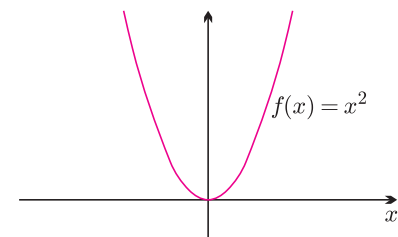
$$\text{sgn } t = \begin{cases} 1, & \text{gdym } t > 0 \\ 0, & \text{gdym } t = 0 \\ -1, & \text{gdym } t < 0 \end{cases}$$



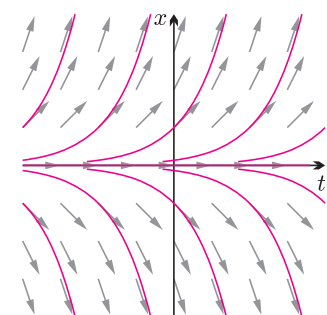
Rys. 5



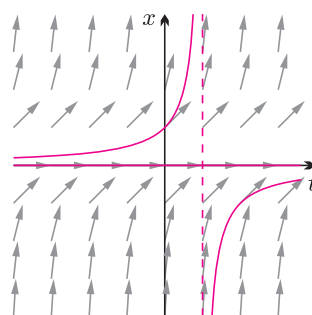
Rys. 6



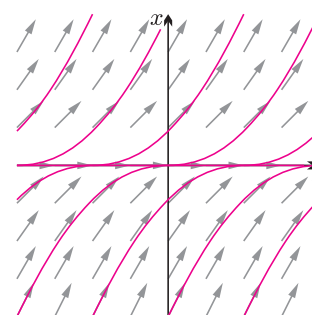
Rys. 7



Rys. 2. $f(t, x) = x$



Rys. 3. $f(t, x) = x^2$



Rys. 4. $f(t, x) = \sqrt{|x|}$

Zaznaczone kolorem krzywe najlepiej, jak to możliwe, przylegają do narysowanych wektorów (wektory są do nich styczne). Mówimy, że krzywe te są rozwiązaniami równania różniczkowego zwyczajnego:

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

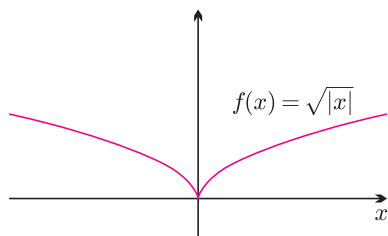
Rozwiązania te są jednoznaczne, jeśli przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi nie więcej niż jedna krzywa.

Jak widzimy, na pierwszym rysunku nie da się poprowadzić żadnej krzywej przez oś x -ów: jedyną kandydatką ma równanie $x = |t| + c$, gdzie c to pewna stała, ale krzywa ta ma kant na osi x i żaden wektor nie przylega do niej w tym punkcie odpowiednio ściśle. Krzywe z rysunku 2 możemy przedłużać nieograniczenie w stronę dowolnie dużych czasów t (każda krzywa ma równanie $x(t) = c \cdot e^t$, gdzie c to pewna stała). Widać też, że przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna krzywa. Na rysunku 3 narysowana krzywa to hiperbola. Ma ona asymptotę pionową, co oznacza, że w skończonym czasie wartość rozwiązania $x(t)$ osiąga wartość nieskończoną i nie da się owego rozwiązania przedłużyć nieograniczenie w stronę coraz większych czasów t . Wreszcie na rysunku 4 na brak rozwiązań nie można narzekać, dają się one przedłużyć nieograniczenie w czasie, ale przez każdy punkt na osi t przechodzi wiele krzywych stanowiących rozwiązanie. Nie jest ono zatem jednoznaczne.

Od czego zależy, czy dane równanie różniczkowe ma jednoznaczne rozwiązania określone dla dowolnych czasów? Spójrzmy na wykresy funkcji f (margines).

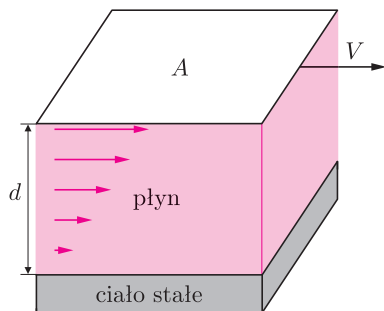
Na rysunku 5 widzimy, że funkcja $f = \text{sgn } t$ jest nieciągła w punkcie $t = 0$. Jest to dokładnie ten punkt, wokół którego nie dało się stworzyć rozwiązania. Na rysunku 6 funkcja $f(x) = x$ jest ciągła i tempo jej wzrostu jest zawsze takie samo. Funkcja $f(x) = x^2$ (rys. 7) jest ciągła, ale tempo jej wzrostu jest coraz większe i nie da się go globalnie (tzn. dla wszystkich x) ograniczyć.

Wreszcie funkcja $f(x) = \sqrt{|x|}$ jest ciągła, ale tempo jej zmian jest nieograniczone



Rys. 8

Jeżeli w sytuacji przedstawionej na poniższym rysunku ciągniemy płaską płytkę o powierzchni A z prędkością v , to siła, jakiej musimy użyć, jest proporcjonalna do wyrażenia $\frac{AV}{d}$. Współczynnik proporcjonalności nazywamy lepkością cieczy i oznaczamy ν .



Liczba Reynoldsa to liczba

$$Re = \frac{V \cdot D \cdot \rho}{\nu},$$

gdzie V to średnia prędkość przepływu, ρ – gęstość cieczy, a D – typowy rozmiar (np. średnica opływającego walca).

Dla odważnych

Równanie Naviera–Stokesa (a ściślej: układ równań N-S dla płynu nieściśliwego) ma postać

$$\frac{du_i}{dt} - \frac{1}{Re} \Delta u_i + (u \cdot \nabla) u_i + \frac{dp}{dx_i} = f_i,$$

przy warunku

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

gdzie $i = 1, 2, 3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ to prędkość, p – to ciśnienie, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – siły zewnętrzne, Re – liczba Reynoldsa oraz

$$\Delta u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2},$$

i

$$(u \cdot \nabla) = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Nie jest natomiast rozstrzygnięte, czy w płaskim przypadku stacjonarnym, tzn. takim, w którym prędkość w każdym punkcie nie zmienia się w czasie, rozwiązania są jednoznaczne dla dowolnych sił zewnętrznych i dowolnych lepkości; wiadomo tylko, że jest tak dla sił zewnętrznych niezbyt dużych w porównaniu z lepkością.

przy zbliżaniu się do zera. Jest to właśnie to miejsce, w którym rozwiązania równania różniczkowego stawały się niejednoznaczne. Okazuje się, że nasze luźne obserwacje mają uzasadnienie w podstawowym twierdzeniu teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Mówi ono, że rozwiązanie równania różniczkowego (*) istnieje, gdy funkcja f jest ciągła. Jednoznaczność rozwiązania gwarantuje warunek nałożony na tempo wzrostu funkcji f . Ma być ono nie większe niż tempo wzrostu pewnej funkcji liniowej. Dokładniej, ma zachodzić tzw. warunek Lipschitza:

$$(**) \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|,$$

gdzie L to pewna stała zwana stałą Lipschitza. Jeśli warunek taki jest spełniony dla wszystkich t , x i y z pewnego otoczenia pewnego punktu (t_0, x_0) , to rozwiązanie przechodzące przez punkt (t_0, x_0) jest jednoznaczne przynajmniej przez pewien – być może niedługi – czas. Jeśli warunek (**) jest spełniony z tą samą stałą L dla dowolnych x, y, t , to rozwiązania są globalne (można je przedłużać dowolnie daleko) i jednoznaczne. Teoria równania (*) jest więc prosta i ogólna.

Okazuje się jednak, że w przypadku równań, w których poszukiwana funkcja g zależy od kilku zmiennych i w których występują funkcje określające tempo zmiany funkcji g w różnych kierunkach (tzw. pochodne cząstkowe), a także tempo zmiany tempa zmiany tych funkcji itd. (czyli tzw. pochodne cząstkowe wyższych rzędów), sytuacja dramatycznie się komplikuje. Tak, że teoria tych równań (zwanymi równaniami cząstkowymi) w żadnym razie nie jest tak ogólna i elegancka jak teoria równań zwyczajnych i rozbija się na dziesiątki teorii poszczególnych niemal równań. Jednym z najważniejszych – ze względu na wagę zastosowań – jest właśnie równanie Naviera–Stokesa opisujące przepływ wody. Jest ono po prostu zapisem II prawa dynamiki Newtona z wyszczególnieniem sił zewnętrznych (takich jak np. grawitacja), ciśnienia oraz sił związanych z lepkością cieczy. W równaniu Naviera–Stokesa pojawia się jeden parametr, który silnie rzutuje – jak podpowiada doświadczenie – na rozwiązanie równania. Parametrem tym jest tzw. liczba Reynoldsa. Dla małych wartości tej stałej przepływ płynu jest laminarny. Woda natrafiająca przykładowo na przeszkodę w postaci walca będzie go opływać w bardzo regularny sposób. Zwiększając liczbę Reynoldsa (tzn. zwiększając np. prędkość przepływu), spowodujemy, że przepływ stanie się mniej regularny: za walcem utworzą się dwa pola wirów. Przy jeszcze większej liczbie Reynoldsa wiry zaczną się odrywać, aż w końcu za walcem pojawi się cała turbulenta smuga.

Już z tego pobieżnego opisu widać, że równanie Naviera–Stokesa kryć w sobie może wiele niespodzianek i dopuszczać bardzo skomplikowane rozwiązania. I rzeczywiście sytuacja nie jest prosta, gdyż nie znamy odpowiedzi na następujące, podstawowe pytanie:

Czy jeśli w pewnej chwili prędkość cieczy określona jest w każdym punkcie jakiegoś trójwymiarowego obszaru Ω pewną gładką (można to rozumieć potocznie: ciągłą, bez kątów, ostrzy, itd.) funkcją $u(x_1, x_2, x_3)$, to czy w dowolnej chwili w przyszłości będzie ona określona równie regularną i jednoznacznie wyznaczoną funkcją, o ile ewolucja prędkości będzie dana równaniem Naviera–Stokesa z gładkimi siłami zewnętrznymi?

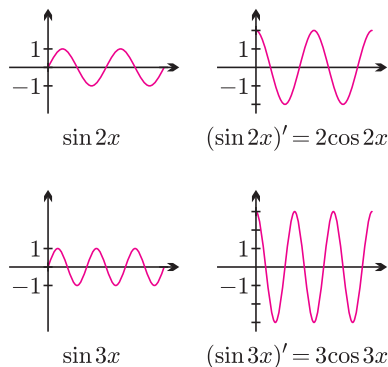
Innymi słowy, czy równanie Naviera–Stokesa daje się równie dobrze rozwiązać jak równanie różniczkowe zwyczajne, w którym prawa strona spełnia warunek Lipschitza? Albo jeszcze inaczej: czy równanie Naviera–Stokesa nie „produkuje” w skończonym czasie anomalii?

W tej chwili nikt nie zna odpowiedzi na to pytanie. Wiadomo co prawda, że gdy obszar Ω jest dwuwymiarowy, to wszystko jest w porządku: istnieją jednoznaczne regularne rozwiązania. W przypadku trójwymiarowym wiadomo, że istnieją regularne rozwiązania określone na pewnym początkowym przedziale czasu, ale nie wiadomo, czy da się je przedłużyć nieograniczenie w czasie (tzn., czy nie natrafimy na ten sam kłopot, co na rysunku 3). Wiadomo też, że istnieją rozwiązania mniej regularne, ale za to określone dla dowolnych czasów.

W najprostszym przypadku – gdy rozpatrujemy przepływ jednowymiarowy (!) – składnik nieliniowy ma postać $u \cdot \frac{du}{dx}$. Gdyby rozwiązanie było postaci np. $u = \sin nx$, to składnik nieliniowy dałby:

$$\sin nx \cdot n \cos nx = \frac{n}{2} \sin 2nx.$$

Wprowadziłby zatem do równania drgania na mniejszej skali, a wraz z nimi znaczny wzrost pochodnej przestrzennej (czyli tempa wzrostu prędkości na małych kawałkach), co dla $n = 2$ i $n = 3$ obrazują rysunki.



Kłopot z nimi jest taki, że nie wiemy, czy są one jednoznaczne (tzn., czy nie natrafimy na sytuację z rysunku 4). Skąd biorą się te problemy? Otóż z grubsza biorąc analogiczną rolę do stałej Lipschitza pełni w równaniu Naviera–Stokesa maksymalna wartość tempa, w jakim rośnie prędkość na małych odcinkach w obszarze Ω . Gdybyśmy potrafili to maksymalne tempo wzrostu prędkości oszacować dla wszystkich możliwych czasów przez tę samą stałą, już moglibyśmy planować, na co wydamy milion dolarów z Clay Mathematics Institute. Ale nie potrafimy. Może brakuje nam metod, może inteligencji, by te metody wymyślić. A może po prostu zrobić się tego nie da. Może równanie Naviera–Stokesa produkuje rozmaite anomalie, może tempo wzrostu prędkości na małych odcinkach bywa nieograniczone? Są pewne intuicje, które właśnie takie rozwiązanie podpowiadają. Fizycy wskazują w tym miejscu na mechanizm, jaki pojawia się w sytuacji trójwymiarowej, a nie ma miejsca w przepływie płaskim. Otóż jeśli wyobrazimy sobie mały „walec wodny”, który rozciąga się wraz z przepływem (tzn. z „grubego robi się chudy”) i którego punkty („cząsteczki”) obracają się tak, że oś ich obrotu jest równoległa do kierunku przepływu, to dostrzeżemy, że aby moment pędu został zachowany, cząstki muszą zwiększyć prędkość wirowania. W ten sposób lokalnie prędkość wirów może silnie wzrastać. Patrząc od strony czysto matematycznej dostrzegamy, że całe zło bierze się z pewnego składnika nieliniowego w równaniu, który „pompuje energię” do małych skal długości (patrz margines).

Tak czy inaczej, sytuacja jest nerwowa. Jeśli równanie Naviera–Stokesa nie ma jednoznacznych i regularnych rozwiązań dla dowolnych czasów, to przeczy zasadzie determinizmu, a ponadto – jeśli przenosi fluktuacje do dowolnie małych skal – jest w pewnym sensie sprzeczne, gdyż wprowadzone zostało w oparciu o separację skal długości.

Na szczęście woda nic sobie z tych problemów nie robi i płynie dalej.

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delt!

Rozwiąż w marcu kwietniowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: <http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1018. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$1 + f(x) = f\left(\frac{-x}{x+1}\right)$$

dla dowolnego $x > -1$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie na str. 12

M 1019. Dla pewnego $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ i dowolnego $x \in \mathbb{R}$ funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x-a) - f(x+a) = [\sqrt{f(x)} - f(x+a)]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Wykazać, że f jest funkcją okresową.

Rozwiązanie na str. 6

M 1020. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy $|f(x)| \leq 1$ oraz $f(x) + f\left(x + \frac{13}{42}\right) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$. Wykazać, że f jest funkcją okresową.

Rozwiązanie na str. 7

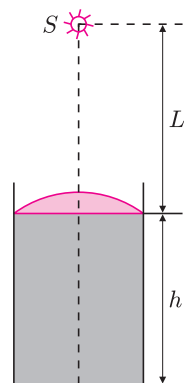
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 591. Na powierzchni cieczy znajdującej się w wysokim naczyniu (rys. 1) pływa płaskowypukła soczewka o ogniskowej F . Znaleźć wysokość poziomu cieczy w naczyniu h , jeśli obraz punktowego źródła światła S , położonego w odległości L od soczewki, znajduje się na dnie naczynia. Współczynnik załamania cieczy wynosi n . Przyjąć, że odległość L jest bardzo duża.

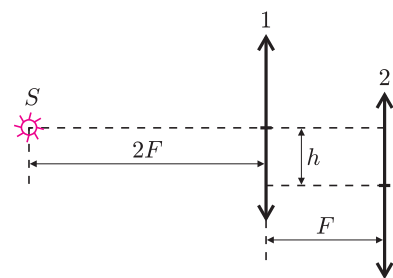
Rozwiązanie na str. 16

F 592. Dwie soczewki skupiające o takich samych ogniskowych równych F znajdują się w odległości F od siebie (rys. 2). Osie optyczne obu soczewek są równoległe i odległe o h . Znaleźć odległość między źródłem światła S położonym w odległości $2F$ od pierwszej soczewki na jej osi optycznej oraz jego obrazem S' .

Rozwiązanie na str. 13



Rys. 1



Rys. 2

Gdzie strumyk płynie z wolna

Grzegorz DERFEL

Symbol \dot{x} oznacza prędkość,
a \ddot{x} – przyspieszenie.

Lepieżnik wyłusiał (*Petasites kablikianus*) to okazałych rozmiarów bylina porastająca brzegi górskich potoków. Jej bardzo duże liście pochylone nad wodą bywają częściowo zanurzone. W wyniku szczególnego splotu warunków zdarza się, że taki dotykający nurtu liść wpada w zamaszyste drgania. W zastygłym powietrzu wieczoru ten niespokojny ruch w zacisznym zakolu strumienia wydaje się czymś tajemniczym. Osobliwość tego zjawiska polega na tym, że oscylacje te wywołane są jednostajnym bodźcem, jakim jest przepływ wody.

Rezygnując z próby uwzględnienia całej złożoności drgań liścia, zbudujemy uproszczony jednowymiarowy model tego zjawiska. Jego istotną cechą będzie nieliniowość. W naszym modelu liść jest reprezentowany przez masę m , która może przesuwać się wzdłuż poziomej osi x . Masa jest częściowo zanurzona w wodzie płynącej z prędkością V w dodatnim kierunku osi x . Działa więc na nią siła oporu zależna od prędkości masy względem wody, $b(V - \dot{x})$, która powoduje wychylenie masy z położenia równowagi $x = 0$. Wychyleniu temu przeciwdziałają siła sprężysta równa $-kx$. Równanie ruchu masy ma postać

$$m\ddot{x} = -kx + b(V - \dot{x}).$$

Dla dalszych rozważań podzielimy obie strony przez m , otrzymując

$$(*) \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 x + B(V - \dot{x}),$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ oraz $B = b/m$. Istotne znaczenie ma fakt, że współczynnik B nie jest stały, ponieważ zależy od głębokości, na jaką liść się zanurza. Głębokość ta zmienia się, ponieważ wychylenia w poziomie wpływają na położenie liścia w pionie, tak że w rzeczywistości zatacza on zamkniętą krzywą o owalnym kształcie. Widać więc, że współczynnik oporu należałoby uzależniać od pionowej współrzędnej liścia, co wymagałoby rozpatrywania ruchu przynajmniej w dwóch wymiarach. Można jednak zauważyć, że zmiany głębokości zanurzenia mają podobny przebieg w czasie, jak zmiany poziomej prędkości liścia. Wykorzystamy to podobieństwo w naszym jednowymiarowym modelu i wyrazimy współczynnik oporu jako funkcję \dot{x} .

Kształt funkcji $B(\dot{x})$ pokazany na rysunku 1 uwzględnia fakt, że zmiany współczynnika B mają ograniczony zakres, nawet gdy prędkość osiąga duże wartości. W naszym modelu dla analitycznego przedstawienia funkcji $B(\dot{x})$ wykorzystamy – dość dowolnie – funkcję arcus tangens:

$$B(\dot{x}) = \beta - \gamma \arctg(\alpha \dot{x}),$$

gdzie α , β i γ są stałymi. Z powodu zależności współczynnika B od \dot{x} równanie (*) jest nieliniowe i niemożliwe do analitycznego rozwiązania. Jednak to dzięki zmienności B dochodzi do rozkołysania liścia. Gdy bowiem zrezygnujemy z niej, przyjmując $\gamma = 0$ lub $\alpha = 0$, czyli $B = \beta$, dostajemy liniowe równanie różniczkowe

$$(**) \quad \ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \beta V,$$

które przewiduje, że po nieskończenie długim czasie ruch zamiera. Odpowiednie rozwiązanie ma postać zależną od relacji między ω_0 a wielkością $\lambda = \beta/2$. Gdy $\omega_0^2 - \lambda^2 > 0$, opisuje ono drgania o częstotliwości

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

zanikające w położeniu równowagi $x_s = \beta V / \omega_0^2$:

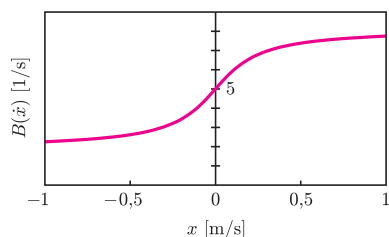
$$x(t) = x_s + A \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \phi),$$

gdzie A i ϕ są stałymi zależnymi od warunków początkowych.

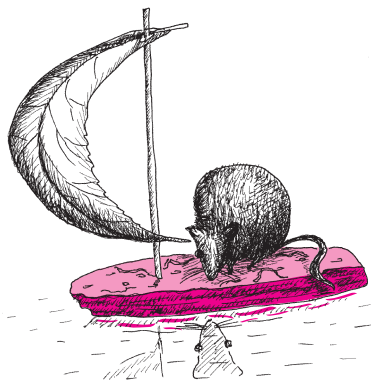
W przeciwnym przypadku rozwiązanie przewiduje aperiodyczny ruch także zmierzający do x_s . (Oczywiście proporcjonalność x_s do V jest ograniczona do prędkości prądu, przy których liść nie łamie się i nie niszczy.)

Aby zbadać charakter rozwiązań nieliniowego równania (*) uwzględniającego $\gamma \neq 0$ i $\alpha \neq 0$, rozważmy małe wychylenia ξ z położenia x_s :

$$x(t) = x_s + \xi(t).$$



Rys. 1



Wykorzystując fakt, że prędkości $\dot{x}(t) = \dot{\xi}(t)$ również są małe, można użyć przybliżenia

$$B(\dot{x}) \approx \beta + \gamma\alpha\dot{x} = \beta + \gamma\alpha\dot{\xi}.$$

Pomijamy też pojawiający się w równaniu (*) składnik z $\dot{\xi}^2$. W efekcie otrzymujemy znów rozwiązywalne równanie liniowe

$$(***) \quad \ddot{\xi} + (\beta - \gamma\alpha V)\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0.$$

Jego rozwiązanie ma cechy podobne do rozwiązania równania (**).

W szczególności gdy

$$\omega_0^2 - (\beta - \gamma\alpha V)^2 > 0,$$

zawiera ono czynnik wykładniczy, tym razem z wykładnikiem $\lambda = (\beta - \gamma\alpha V)/2$, którego znak zależy od prędkości prądu:

$$\xi(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \phi).$$

W wodzie stojącej lub płynącej leniwie współczynnik λ jest dodatni i kołysanie liścia ustaje. Jednak gdy prędkość nurtu przekracza wartość krytyczną $V_k = \beta/(\gamma\alpha)$, czynnik wykładniczy rośnie z czasem, co odpowiada wahaniom narastającym.

(Stosownie do upraszczających założeń poczynionych przy wyprowadzeniu równania (***) wynik ten jest poprawny tylko dla małych drgań, więc nie należy przywiązywać wagi do sugerowanego funkcją eksponencjalną wzmagania się drgań w nieskończoność.)

Pora teraz na – numeryczne z konieczności – rozwiązanie pełnego nieliniowego równania ruchu (*). Trzeba tylko ustalić w miarę realistyczne wartości parametrów układu. Rozsądne wydaje się przyjęcie $m = 0,02$ kg i $k = 0,5$ N/m. Swobodny liść kołysze się wtedy z okresem około 1,25 s. Parametry α , β i γ można dobrać tak, aby ruch wyglądał jak najbardziej prawdopodobnie, np. $\alpha = 5$ s/m, $\beta = 5$ s⁻¹ i $\gamma = 2$ s⁻¹, co daje prędkość krytyczną około 0,5 m/s. Przykłady rozwiązań $x(t)$ przedstawione są na rysunku 2.

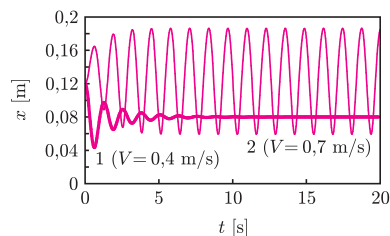
Liść zanurzony w powoli płynącym potoku nie kołysze się trwale – początkowo wychylony szybko uspokaja się (krzywa 1). W bystrzejszym nurcie równie szybko ustalają się znaczne wahania (krzywa 2). Rysunek 3 przedstawia zależność ich amplitudy od prędkości wody.

Progowy charakter wzbudzenia drgań jest wyraźnie widoczny. Energia rozkołysanego liścia pochodzi z niewyczerpalnego praktycznie źródła, jakim jest przepływ wody.

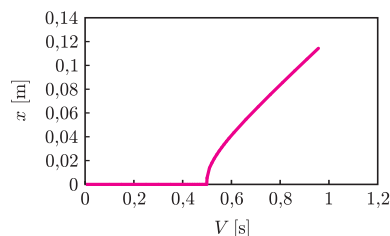
Z powyższej analizy wynika, że jeśli prędkość prądu jest mała, to istnieje położenie równowagi, w którym liść spoczywa i do którego asymptotycznie zmierza po dowolnym wychyleniu. Takie dążenie można przedstawić w płaszczyźnie (x, \dot{x}) – tak zwanej przestrzeni fazowej (rys. 4).

Punkt równowagi osiągnąony po długim czasie jest przykładem atraktora zwanego ogniskiem. „Przyciąga” on stany układu zadane dowolnymi warunkami początkowymi (krzywa 1). Jeśli natomiast prędkość wody przewyższa krytyczną, to wspomniane położenie równowagi przestaje istnieć. W jego miejsce pojawia się atraktor w postaci zamkniętej krzywej zwany cyklem granicznym. Tory na płaszczyźnie fazowej zbliżają się do niego od wewnątrz (jak krzywa 2) lub z zewnątrz (jak krzywa 3), zależnie od warunków początkowych.

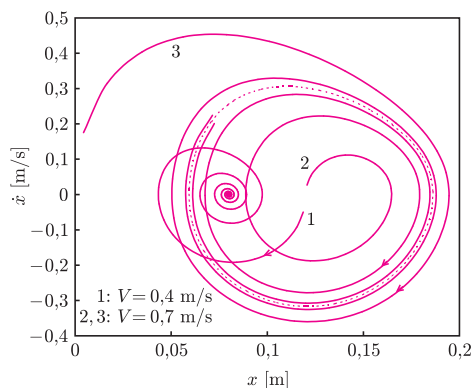
Zachowanie układu polegające na zastąpieniu punktu stałego cyklem granicznym odpowiadającym ruchowi okresowemu wskutek zmiany parametrów układu nosi nazwę bifurkacji Hopfa. Bifurkacja Hopfa jest często spotykana w zachowaniu nieliniowych układów fizycznych, chemicznych i biologicznych. Praktyczne znaczenie ma np. bifurkacja prowadząca do wzbudzenia wibracji skrzydła samolotu lub wału turbiny, co może mieć katastrofalne następstwa. Kołysanie liścia lepiężnika jest niegroźnym przypadkiem, do którego obserwacji zachęcam miłośników górskiej przyrody.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Twierdzenie bez założeń?

Krzysztof OLEŚ

Sam tytuł wydaje się odrobinę prowokujący – brak założeń jest już przecież pewnym warunkiem na twierdzenie nałożonym. . . Lubimy jednak sytuacje, w których nie musimy zapamiętywać zbyt wielu faktów generujących kolejne. Zajmiemy się więc spostrzeżeniem, w którym o rozważanym zbiorze założymy jedynie to, iż jest on m -elementowym podzbiorem płaszczyzny. Zaczniemy jednak od przypomnienia pewnego twierdzenia, które w *Delcie* już się pojawiło [3].

Twierdzenie 1 (Helly, 1913)

Jeśli \mathcal{F} jest skończoną, co najmniej trójelementową, rodziną podzbiorów wypukłych płaszczyzny o tej własności, że każda jej trójelementowa podrodzina ma przekrój niepusty, to $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Przypomnijmy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$ zwiemy wypukłym, jeśli zachodzi następujący warunek

$$\forall a, b \in A \quad \forall t \in [0, 1] \quad ta + (1 - t)b \in A,$$

który całkowicie pokrywa się z naszą intuicją dotyczącą wypukłości (czyżbyśmy się nazbyt rozmarzyli?) – wystarczy spojrzeć na powyższy parametryczny zapis odcinka domkniętego.

Niestety, przekrój nieskończonych rodzin złożonych z podzbiorów wypukłych płaszczyzny (które mają własność „podrodzinną”) może być zbiorem pustym, co pokazują przykłady obok.

Mamy tutaj do czynienia z pewnymi pułapkami. Za każdym razem wszystko psuje ucieczka w nieskończoność (w niej dopiero widzimy – albo i nie – pustość interesującego nas przekroju). Przy czym: w rozważaniu dotyczącym półpłaszczyzn dodatkowym defektem jest ich nieograniczoność, w drugim przypadku problemem staje się otwartość kół (co to dokładnie oznacza – tego na razie nie wiemy, ale zaraz uruchomimy definicje). Czy możliwa jest malutka poprawka? **Możliwa!** Posłużymy się pojęciem *zwartości*, które w przypadku płaszczyzny oznacza ni mniej, ni więcej jak tylko (?): **a** ograniczoność, **b** domkniętość. Cudownie! Literka **a** nie dziwi: po prostu zbiór jest ograniczony, jeśli można go wpisać w pewne koło. A co z literką **b**? Cóż: zbiór jest domknięty, jeśli jego dopełnienie jest otwarte (pani Ewa Szumańska powiedziałaaby w tej chwili: „już po wszystkim”). . .

Przypatrzmy się więc bliżej otwartości (co na to UE?).

Zbiór nazywamy otwartym, jeśli dla każdego jego punktu istnieje koło, którego jest on środkiem, zawarte w interesującym nas podzbiornie płaszczyzny. Dla rozwiania jakichkolwiek wątpliwości: kołem o środku w punkcie $x = (x_0, y_0)$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(x, r) := \left\{ (w, z) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(w - x_0)^2 + (z - y_0)^2} \leq r \right\}.$$

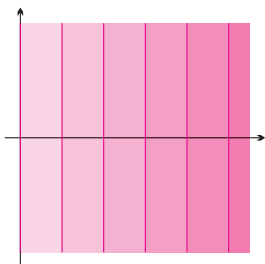
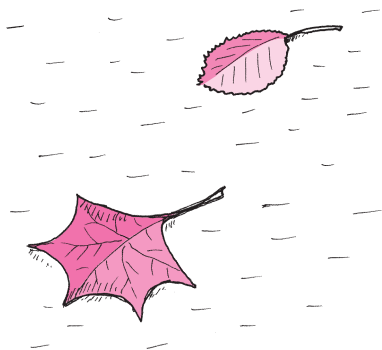
W tym miejscu warto zauważyć, że zbiór, który nie jest otwarty, nie musi być domknięty – może wymyślimy przykładzik? W ostateczności spójrzmy na stronę 16.

Czas na poprawione twierdzenie Helly’ego.

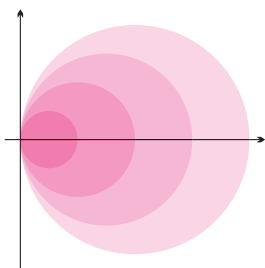
Twierdzenie 2

Jeśli \mathcal{F} jest co najmniej trójelementową rodziną zwartych i wypukłych podzbiorów płaszczyzny o tej własności, że każda jej trójelementowa podrodzina ma przekrój niepusty, to $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Można być zaskoczonym – powyższe twierdzenie wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 [2], okazuje się bowiem, że *zwartość* ma wiele wspólnego ze skończonością [1]. Przejdźmy do obiecanego twierdzenia.



Powyżej rozpatrujemy zstępujący nieskończony ciąg półpłaszczyzn, niżej zaś rozpatrujemy zstępujący nieskończony ciąg kół otwartych.



Rozwiązanie zadania M 1019.

Niech $g(x) = f(x) - f(x + a)$. Wówczas nasze równanie można zapisać w postaci

$$g(x - a) + g(x) = \lfloor \sqrt{g(x)} \rfloor.$$

Zatem $g(x) \geq 0$ oraz $\lfloor \sqrt{g(x)} \rfloor - g(x) \geq 0$. Ale dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\lfloor \sqrt{t} \rfloor - t \geq 0 \iff t = 0 \text{ lub } t = 1 \iff$$

$$\iff \lfloor \sqrt{t} \rfloor - t = 0.$$

Zatem $g(x - a) = 0$, więc $g \equiv 0$, skąd wynika, że f jest funkcją okresową o okresie a .



Rozwiązanie zadania M 1020.

Niech $g(x) = f(x + \frac{1}{6}) - f(x)$.
Z równości podanej w zadaniu mamy $g(x + \frac{1}{6}) = g(x)$, skąd $g(x+1) = g(x)$.
Mamy

$$f(x+1) - f(x) = \sum_{i=0}^5 g\left(x + \frac{i}{6}\right).$$

Prawą stronę tej równości oznaczmy przez $h(x)$. Oczywiście $h(x+1) = h(x)$, skąd $f(x+n) - f(x) = n \cdot h(x)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ale f jest funkcją ograniczoną, więc $h = 0$ i f jest funkcją okresową o okresie 1.

Twierdzenie 3 (o punkcie podziału)

Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest dowolnym zbiorem m -elementowym, to istnieje punkt $p \in \mathbb{R}^2$ o tej własności, że każda domknięta półpłaszczyzna wyznaczona przez prostą przechodzącą przez p zawiera co najmniej $\frac{m}{3}$ punktów zbioru A .

Uff... Brak założeń okupiliśmy dosyć nużącą tezą, ale rysowanie pozwoli nam przyswoić ją sobie, a poza tym wykaże jej dziwaczność – jak bowiem znaleźć taki punkt, gdy zbiór A ma, dajmy na to, $136 \cdot 10^7$ punktów?

Dowód: Niech B będzie takim kołem, że $A \subseteq B$, ponadto oznaczmy

$$\forall C \subseteq \mathbb{R}^2 \quad |C|_A := \text{liczba elementów zbioru } C \cap A.$$

Rozważając rodzinę \mathcal{F} , złożoną z domkniętych półpłaszczyzn F o własności $|F|_A > \frac{2}{3}m$, wykażemy, że każde trzy elementy rodziny $\mathcal{G} := \{F \cap B : F \in \mathcal{F}\}$ mają punkt wspólny (należący do zbioru A).

Ustalmy zatem $F_1 \cap B, F_2 \cap B, F_3 \cap B \in \mathcal{G}$. Wystarczy wykazać, że

$$\exists a \in A \quad a \in F_1 \cap F_2 \cap F_3, \quad \text{czyli} \quad |F_1 \cap F_2 \cap F_3|_A \neq 0.$$

Ponieważ dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$ mamy $|F|_A > \frac{2}{3}m$, to

$$\forall F \in \mathcal{F} \quad |\mathbb{R}^2 \setminus F|_A < \frac{1}{3}m.$$

Przypuśćmy, że $|F_1 \cap F_2 \cap F_3|_A = 0$.

Otrzymujemy wtedy $|\mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cap F_2 \cap F_3)|_A = m$ oraz

$$\begin{aligned} m = |\mathbb{R}^2 \setminus (F_1 \cap F_2 \cap F_3)|_A &= |(\mathbb{R}^2 \setminus F_1) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus F_2) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus F_3)|_A \leq \\ &\leq |\mathbb{R}^2 \setminus F_1|_A + |\mathbb{R}^2 \setminus F_2|_A + |\mathbb{R}^2 \setminus F_3|_A < \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}m = m. \end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność daje

$$|F_1 \cap F_2 \cap F_3|_A \neq 0.$$

Elementy rodziny \mathcal{G} są zbiorami wypukłymi (zarówno półpłaszczyzna domknięta, jak i koło są zbiorami wypukłymi, a przekrój zbiorów wypukłych jest – oczywiście – zbiorem wypukłym) i zwartymi (jako zbiory ograniczone i domknięte) na płaszczyźnie, zatem z twierdzenia 2 otrzymujemy

$$\exists p \in \mathbb{R}^2 \quad p \in \bigcap \mathcal{G}.$$

Ustalmy teraz dowolną półpłaszczyznę domkniętą \tilde{F} wyznaczoną przez prostą l przechodzącą przez punkt p . Mamy wykazać, że $|\tilde{F}|_A \geq \frac{m}{3}$.

Z pewną nieśmiałością – przypuśćmy, że $|\tilde{F}|_A < \frac{m}{3}$.

Otrzymujemy wtedy: $|\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{F}|_A > \frac{2}{3}m$, niech zatem

$$\{w_1, \dots, w_k\} := (\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{F}) \cap A,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{2}{3}m$. Niech ponadto $w \in \{w_1, \dots, w_k\}$ będzie jednym z punktów o własności

$$d(w, l) = \min\{d(w_1, l), \dots, d(w_k, l)\},$$

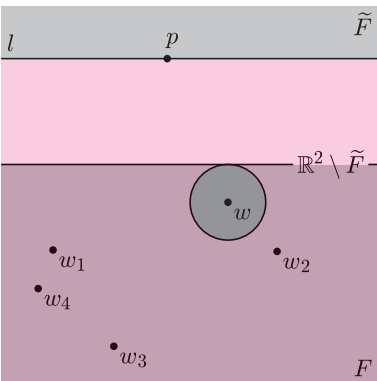
przy czym $d(x, l)$ oznacza odległość punktu x od prostej l . Z otwartości zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{F}$ otrzymujemy istnienie takiego $r > 0$, że $B(w, r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{F}$. Jedna ze stycznych do $B(w, r)$ równoległych do l wyznacza taką półpłaszczyznę domkniętą F , że: $F \cap B \in \mathcal{G}$ oraz $p \notin F \cap B$.

Dzięki upragnionej sprzeczności dostajemy $|\tilde{F}|_A \geq \frac{m}{3}$, co kończy dowód.

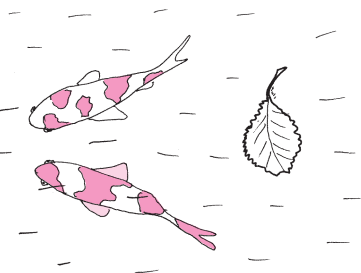
Największa trudność w zastosowaniu twierdzenia Helly'ego polega na wymyśleniu rodziny, do której należy je zastosować – tak było w przypadku transwersali [3], tak jest i tutaj.

Bibliografia

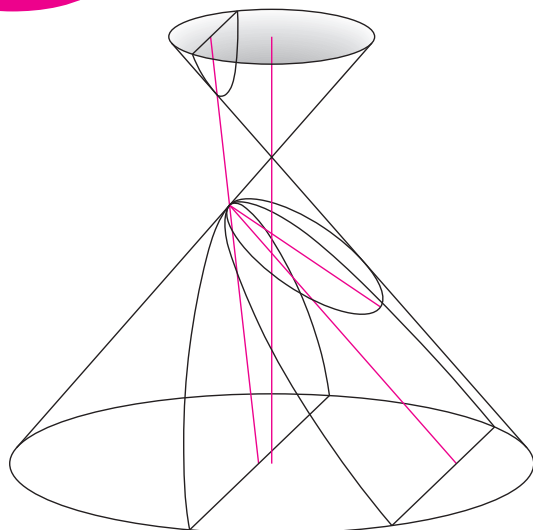
- [1] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia*, PWN 1980
- [2] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa 1995
- [3] K. Oleś, *O pewnej trudności w rysowniu odcinków*, Delta nr 11/2001 (330)
- [4] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press 1994



Idea doboru półpłaszczyzny domkniętej F w dowodzie twierdzenia.



Stożkowe samą linijką



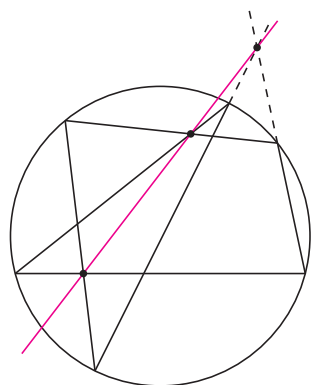
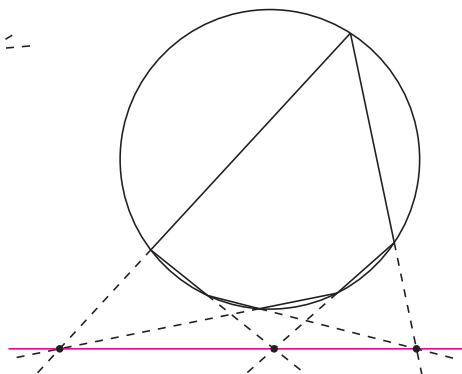
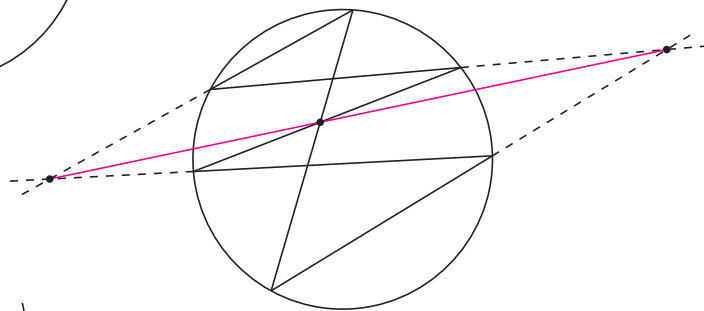
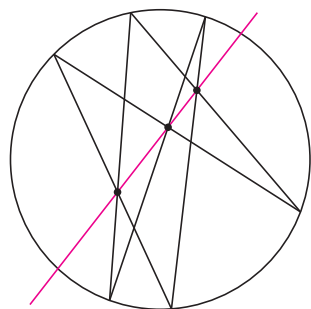
Stożkowe to elipsy, parabole i hiperbole. Nazwa bierze się stąd, że można każdą z nich uzyskać, przecinając stożek obrotowy płaszczyzną. Gdy płaszczyzna ta tworzy z osią stożka kąt większy niż jego tworzące – powstaje elipsa (przy kącie prostym – okrąg; to też jest elipsa, choć specjalna). Gdy te kąty są równe – parabola. A gdy kąt płaszczyzny z osią jest mniejszy – hiperbola (jak łatwo zauważyć, płaszczyzna przecina wtedy stożek po obu stronach wierzchołka).

Pomysł, aby narysować stożkową samą linijką, wydaje się absurdalny. A jednak...

Zacznijmy od sprawy „prostszej”, choć nie mniej absurdalnej: narysować okrąg samą linijką. Jest to szczególny przypadek poprzedniego zadania.

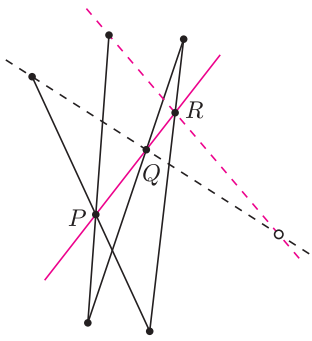
W poprzednim numerze *Delty* Zdzisław Pogoda pisał o twierdzeniu Menelaosa i jego niezliczonych konsekwencjach. Wśród nich było dowiedzione twierdzenie Pascala, które brzmi:

Proste zawierające przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w okrąg, jeśli się przecinają, to na jednej prostej (nazywa się ją prostą Pascala). Oto kilka rysunków ilustrujących to twierdzenie (prosta Pascala jest narysowana kolorem).



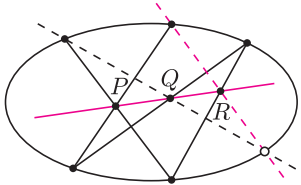
Twierdzenie to (również gdy nie pamięta się jego dowodu) pozwala na wykonanie czegoś bardzo zbliżonego do narysowania linijką okręgu. Gdy bowiem mamy pięć punktów leżących na okręgu, to samą linijką można skonstruować (jeśli istnieje) drugi punkt przecięcia tego okręgu z dowolnie narysowaną prostą przechodzącą przez jeden z nich. W ten sposób, zmieniając tę prostą możemy (samą linijką!) skonstruować tyle punktów tego okręgu, ile nam się spodoba. Ale jak to zrobić?

Zanim przeczyta się sąsiednią stronę – warto samemu spróbować rozwiązać to zadanie.

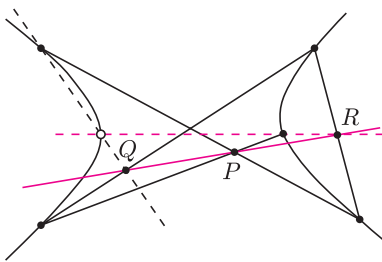


Oto przepis. Punkty łączymy w dowolnej kolejności łamaną złożoną z czterech odcinków (tu wybraliśmy taką kolejność, aby rysunek był mały). Oznaczamy przez P punkt przecięcia prostych zawierających jej pierwszy i czwarty bok. Teraz bierzemy jakąkolwiek prostą przez pierwszy z punktów (na rysunku jest przerywana) – to na niej znajdziemy drugi punkt nienarysowanego okręgu. Oznaczamy przez Q punkt jej przecięcia z prostą zawierającą trzeci bok łamanej. Prosta PQ (na rysunku ciągła kolorowa) przecina prostą zawierającą drugi bok łamanej w punkcie R . Prosta łącząca ostatni wierzchołek łamanej z punktem R (przerywana kolorowa) przecina czarną linię przerywaną w punkcie leżącym na nienarysowanym okręgu. (Gdyby któreś z przecinanych prostych okazały się równoległe, należy zmienić kolejność punktów i powtórzyć konstrukcję.)

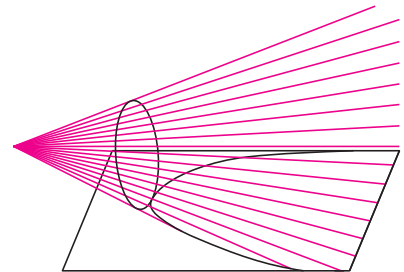
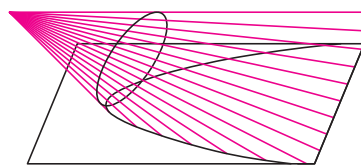
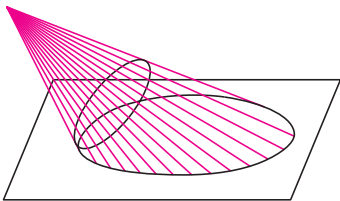
Dlaczego? Porównując otrzymany rysunek z pierwszym z rysunków ilustrujących na poprzedniej stronie twierdzenie Pascala, każdy z Czytelników z pewnością znajdzie odpowiedź. Podpowiemy może, że na rysunku jest sześciokąt i jego (narysowana ciągłą linią kolorową, jak na poprzedniej stronie) prosta Pascala.



A co będzie, gdy punkty obierzemy nie na okręgu, lecz byle jak, aby tylko żadne trzy nie leżały na jednej prostej? Przecież konstrukcja da się przeprowadzić i wtedy. Polecam sprawdzić to na kilku wybranych piątkach punktów, w każdym przypadku rysując po kilka przerywanych czarnych prostych. Obok nasze dwa przykłady.



Na kolejnym rysunku dorysowana dodatkowo została elipsa, a na następnym – hiperbola. To żart czy też dla nich twierdzenie Pascala, na którym opierała się konstrukcja, również jest prawdziwe? Tu akurat odpowiedź jest pozytywna i łatwa do uzyskania. Jeśli wyobrazimy sobie, że narysowany na sąsiedniej stronie stożek to promień z punktowego źródła światła, to rysunek ten powinien przekonać nas, że każda ze stożkowych jest cieniem, jaki rzuca na płaszczyznę oświetlony punktowym źródłem światła okrąg. Dla tych, którzy nie zobaczyli, mamy pomocnicze schematyczne rysunki.



Jeśli więc mamy narysowaną sytuację z twierdzenia Pascala dla okręgu, to rzucając odpowiednio cień, otrzymamy taką samą sytuację dla elipsy, paraboli czy hiperboli. I w ten sposób przekonujemy się, że twierdzenie Pascala jest prawdziwe dla każdej stożkowej. Podana konstrukcja pozwala zatem, gdy dane jest pięć punktów dowolnej ze stożkowych, znajdować jej dalsze punkty na różnych prostych przechodzących przez jeden z nich.

Ale czy dowolne pięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zawsze leży na jednej ze stożkowych? Okazuje się, że tak, a fakt ten nazywa się twierdzeniem Braikenridge'a–Maclaurina. Tak więc przytoczona konstrukcja zawsze produkować będzie dowolną liczbę punktów jakiejś stożkowej.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

1. Liczbę naturalną nazywamy **potęgą**, jeżeli ma postać n^d , gdzie liczby n i d są naturalne i $d \geq 2$. W szczególności każdy kwadrat liczby naturalnej jest potęgą. Na przykład wszystkie potęgi mniejsze od 100 to: $1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 16 = 2^4 = 4^2, 25 = 5^2, 27 = 3^3, 32 = 2^5, 36 = 6^2, 49 = 7^2, 64 = 2^6 = 4^3 = 8^2, 81 = 3^4 = 9^2$. Widać od razu, że większość potęg tu wypisanych to kwadraty i że wśród tych potęg tylko 8 i 9 są kolejnymi liczbami naturalnymi.

2. Od dawna bezskutecznie poszukiwano innych kolejnych liczb naturalnych, które są potęgami i w 1844 roku E. Catalan sformułował przypuszczenie, że liczb takich nie ma. Chodzi więc o dowód, że równanie

$$(1) \quad x^m - y^n = 1$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n, x, y , gdzie $m \geq 2, n \geq 2$, różnych od $x = n = 3, y = m = 2$. Oczywiście wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy m i n są liczbami pierwszymi, podobnie jak przy badaniu równania Fermata $x^n + y^n = z^n$ można przyjąć, że liczba n jest pierwsza.

3. Rozpatrywano różne przypadki szczególnie równania (1) i uzyskano pewne wyniki częściowe. Na przykład udowodniono, że żadne z następujących równań nie ma rozwiązań (poza $3^2 - 2^3 = 1$), gdzie $x, y \geq 1, m, n \geq 2$:

$$\begin{aligned} 3^m - 2^n &= \pm 1 && \text{(Lewi ben Gerson (1288–1344)),} \\ x^2 - y^3 &= \pm 1 && \text{(L. Euler, 1738),} \\ x^m - y^2 &= 1 && \text{(V.A. Lebesgue, 1850),} \\ x^2 - y^n &= 1 && \text{(Chao Ko, 1965).} \end{aligned}$$

Korzystając z wyników Lebesgue'a i Chao Ko, można więc przyjąć, że wykładniki m i n w równaniu (1) są liczbami pierwszymi nieparzystymi.

4. Udowodniono też kilka ważnych własności hipotetycznego rozwiązania równania (1), które znacznie ograniczyły możliwość istnienia takiego rozwiązania. Mianowicie

Twierdzenie 1 (J.W.S. Cassels, 1953, 1960). *Jeżeli liczby naturalne x, y i liczby pierwsze nieparzyste p, q spełniają równanie*

$$(2) \quad x^p - y^q = 1,$$

to p dzieli y i q dzieli x .

Twierdzenie 2 (R. Tijdeman, 1976). *Istnieje taka stała C , że każde rozwiązanie równania (1) spełnia $m, n, x, y < C$.*

5. Z twierdzenia Tijdemana wynika oczywiście, że liczba rozwiązań równania (1) jest skończona. Niestety oszacowania stałej C występującej w tym twierdzeniu były zbyt duże, co nie pozwalało na przeszukanie wszystkich możliwych liczb m, n, x, y przy użyciu komputerów. Na przykład udowodniono, że każde rozwiązanie równania (2) spełnia $x, y < \exp(\exp(\exp(\exp(730))))$ (M. Langevin, 1976), gdzie $\exp(t) = e^t$, i $e = 2,71828 \dots$ jest podstawą

logarytmów naturalnych, oraz

$$p, q < 1,6 \cdot 10^{26} \quad (\text{M. Mignotte, 1992}).$$

Oszacowania te potem były ulepszone, lecz ciągle były zbyt duże.

6. Udowodniono też, posługując się komputerami, że w poszukiwanym rozwiązaniu równania (2) wykładniki nie mogą być zbyt małe:

$$(3) \quad p > 10^5 \quad \text{i} \quad q > 10^5$$

(K. Inkeri (1964, 1990) oraz M. Mignotte i Y. Roy (1995, 1997)). W 1999 roku P. Mihăilescu udowodnił, że zachodzą podzielności $p^2 \mid q^{p-1} - 1$ i $q^2 \mid p^{q-1} - 1$, co pozwoliło znacznie rozszerzyć obliczenia przy użyciu komputerów. Wykorzystując to M. Mignotte wzmocnił warunek (3) do następującej postaci: $p > 10^7$ i $q > 10^7$. Otrzymano też wiele innych warunków, które musi spełniać hipotetyczne rozwiązanie p, q, x, y równania (2). Miały one postać nierówności lub podzielności. Na przykład: $x > 4pq^p$ oraz $p^{q-1} \mid x - 1$. Warunki te ciągle jeszcze nie wystarczały do sprawdzenia, że równanie (2) nie ma rozwiązań poza $3^2 - 2^3 = 1$.

7. Dopiero w 2002 roku P. Mihăilescu zastosował z powodzeniem inną metodę badania rozwiązań równania (2), która w połączeniu z dotychczasowymi wynikami omówionymi wyżej i pewnymi ich ulepszeniami pozwoliła udowodnić, że poszukiwanych rozwiązań nie ma.

8. Omówienie metod użytych przez Mihăilescu wykracza poza zakres wiadomości, którymi rozporządza przeciętny czytelnik *Delty*.

Zainteresowanych odsyłam więc do prac oryginalnych, a tu tylko wspomnę, że z równaniem (2) Mihăilescu wiąże tak zwany pierścień grupowy $\mathcal{F}_q[G]$ grupy cyklicznej G mającej $(p-1)/2$ elementów o współczynnikach w q -elementowym ciele \mathcal{F}_q . Gdyby istniało poszukiwane rozwiązanie równania (2), to ideały tego pierścienia grupowego miałyby pewną własność. Z drugiej strony, bezpośrednio dowodzi się, że tej własności nie mają. Otrzymujemy więc sprzeczność, a zatem poszukiwane rozwiązanie nie istnieje.

Tak więc po 158 latach hipoteza Catalana została udowodniona i to w stosunkowo prosty sposób.

9. Czytelników pragnących dokładniej zapoznać się z historią badania hipotezy Catalana odsyłam do książki Paulo Ribenboima *Catalan's Conjecture*, Academic Press 1994 (liczy ona ponad 350 stron!), w której omówione zostały szczegółowo wyniki na ten temat uzyskane przed 1994 rokiem. Nowsze wyniki sięgające roku 1999 zostały przedstawione w przeglądowej pracy M. Mignotte'a *Catalan's conjecture just before 2000* zamieszczonej w poświęconym pamięci K. Inkeriego tomie *Number Theory*, de Gruyter, Berlin 2001, który zredagowali M. Jutila i T. Metsänkylä.

Potwierdzenie odkrycia pierwszej pozasłonecznej planety „tranzytowej”

Na początku zeszłego roku polskie i nie tylko polskie rubryki popularnonaukowe obiegrała wiadomość o masowym odkryciu kandydatek na pozasłoneczne planety przez zespół astronomów Obserwatorium Uniwersytetu Warszawskiego OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment) [1].

To właśnie osiągnięcie (jedno z wielu) umożliwiło przyznanie Andrzejowi Udalskiemu, kierownikowi i *spiritus movens* OGLE, Nagrody Fundacji na rzecz Nauki Polskiej z dziedziny nauk ścisłych za rok 2002.

Jak takie kandydatki „wyglądają”, można obejrzeć na tylnej okładce tego numeru (reklamującej naszego współwydawcę – Wydział Fizyki UW, którego częścią jest Obserwatorium UW). Metoda użyta przez zespół OGLE polega na poszukiwaniu przejścia (tranzytu) pozasłonecznej planety przed jej gwiazdą. Oczekiwane jest okresowe zmniejszenie jasności z „płaskim dnem” – przez cały czas przejścia planeta zasłania określoną część gwiazdy. Tak właśnie wyglądają zmierzone przez OGLE przebiegi jasności prawie sześćdziesięciu gwiazd (dokładne dane i oryginalne wykresy można znaleźć na internetowym serwerze zespołu OGLE [2]). Wydaje się to bardzo proste, ale wcale takie nie jest. Najlepszym dowodem jest to, że pomimo olbrzymiej popularności poszukiwań planet pozasłonecznych tylko polskiemu zespołowi to się udało. I to w zasadzie „przy okazji”. Poszukiwanie planetopodobnych obiektów było swojego rodzaju testem trzeciej fazy eksperymentu OGLE.

Zanim przejdziemy do sedna sprawy, warto przypomnieć historię tego przedsięwzięcia. Sama nazwa wskazuje na główny cel naukowy OGLE – poszukiwanie przypadków mikrosoczewkowania grawitacyjnego. Ponad dziesięć lat temu metodę tę, polegającą na odnajdywaniu wyjaśnień gwiazd na skutek przejść ciemnych obiektów przez linię widzenia, zaproponował Bohdan Paczyński. Sam nie bardzo jednak wierzył w możliwość praktycznego sprawdzenia swojego pomysłu, gdyż sukces mógłby zapewnić tylko systematyczny przegląd milionów gwiazd. Jedynie wtedy można było mieć nadzieję, że przed którąś z nich „przedefiluje” obiekt zbyt ciemny, żeby można go było widzieć, ale wystarczająco masywny, żeby (zgodnie z Ogólną Teorią Względności) skupić światło gwiazdy i tym sposobem zdradzić swoją obecność. Metoda ta pozwalałaby na oszacowanie liczebności takich obiektów, a tym samym stwierdzenie, jaka część galaktycznej ciemnej materii jest w nich zawarta (obiekty te znane są pod akronimem MACHO – MAsive Compact Halo Object). Szybko okazało się jednak, że kamery CCD, wspierane odpowiednim oprogramowaniem, są w stanie wykonać benedyktyńską pracę przeglądu milionów gwiazd. Jednym z pierwszych zespołów, które podjęły tego typu badania, był właśnie zespół OGLE. W pierwszej fazie, w latach 1992–1995, korzystał on z jednometrowego teleskopu zlokalizowanego w Obserwatorium Las Campanas w Chile, a będącego własnością Carnegie Institution z Waszyngtonu. Pomimo spektakularnych osiągnięć (m.in. odkrycie pierwszego przypadku mikrosoczewkowania w naszej Galaktyce) od początku zespół OGLE starał się o własny

teleskop. Stał on w tym samym obserwatorium w 1996 roku. Początkowo został wyposażony w pojedynczy sensor CCD o 2048×2048 pikselach. W tej fazie, oprócz odkrycia wielu przypadków mikrosoczewkowania czy uruchomienia systemu monitorowania tych zjawisk w czasie ich trwania, zespół OGLE doprowadził do małej rewolucji w astronomii, precyzyjnie wyznaczając odległość do Obłoków Magellana, służącą jako podstawowy szczebel skali odległości we Wszechświecie [3]. Było to możliwe dzięki dokładnym, choć prowadzonym znowu tylko „przy okazji”, pomiarom tysięcy gwiazd zmiennych czterech różnych rodzajów, używanych jako tzw. świece standardowe.

Wreszcie w 2001 roku warszawski teleskop doczekał instalacji ośmiu sensorów CCD o 2048×4096 pikselach. Jakość tej matrycy, zaprojektowanej i częściowo osobiście wykonanej przez Udalskiego, jest unikalna w skali światowej. Jednym z pierwszych testów tej jakości było właśnie, prowadzone przez trzydzieści kilka dni „zdjęciowych”, poszukiwanie tranzytów planetopodobnych obiektów. Niestety, samo stwierdzenie takiego tranzytu nie jest jednoznaczne z odkryciem planety (fakt ten został zbagatelizowany przez media). Do potwierdzenia potrzebne jest zmierzenie za pomocą efektu Dopplera odpowiednio małej wartości zmian prędkości gwiazdy, zgodnych w fazie z efemerydami kandydatki na planetę, wyznaczonymi dzięki obserwacji tranzytów. Do tego typu badania potrzebne są największe teleskopy. Takiego teleskopu nie można użyć do przeglądania milionów gwiazd! Trzeba wcześniej wiedzieć, na którą gwiazdę skierować olbrzyma.

Na początku stycznia ukazała się praca zespołu [4], który podjął się sprawdzenia kandydatek OGLE, m.in. za pomocą dziesięciometrowego teleskopu Keck I na Hawajach. Większość kandydatek okazało się układami podwójnymi, część ma za małą jasność nawet dla największych teleskopów. Z pozostałych dwie nadal są podejrzane, a jedna OGLE-TR-56 uzyskała potwierdzenie. Jest to najdalsza znana planeta pozasłoneczna. Ma mniej więcej wielkość Jowisza i obiega swoją gwiazdę po bardzo bliskiej ($0,023$ j.a.) orbicie. Jest tak gorąca, że najprawdopodobniej padają na niej żelazne deszcze.

Czy jednak 1/60 sukcesu to nie trochę za mało? Wcale nie. Po pierwsze, jest to jak na razie jedyny przypadek odkrycia planety poprzez jej tranzyt. Po drugie, układy podwójne gwiazdy i brązowego karła są co najmniej tak samo poszukiwane jak planety. Po trzecie, tego typu badanie pozwala oszacować w sposób systematyczny liczebność podobnych obiektów w galaktykach. W końcu, to dopiero przygrywka III fazy OGLE.

Piotr ZALEWSKI

- [1] *The OGLE. Search for Planetary and Low-Luminosity Object Transits in the Galactic Disk. Results of 2001 Campaign*, A. Udalski i inni, *Acta Astronomica* **52**(2002)1-37, Dodatek: *Acta Astronomica* **52**(2002)115-128
- [2] <http://www.astrouw.edu.pl/~ogle>
- [3] *The OGLE. Stellar Distance Indicators in the Magellanic Clouds and Constraints on the Magellanic Cloud Distance Scale*, A. Udalski, *astro-ph/0010151* 7/10/2000
- [4] *A new extrasolar giant planet*, M. Konacki, G. Torres, S. Jha, D.D. Sasselov, *astro-ph/0301052* 4/01/2003

Osobliwości i fraktalna niezupełność czasoprzestrzeni klasycznych

Wiesław ZAJICZEK

Na gruncie kosmologii powstało wiele matematycznych modeli, które pretendują do opisywania struktury i ewolucji Wszechświata. Znaczna część tych modeli wywodzi się z ogólnej teorii względności Einsteina. Chociaż wciąż nie znamy jednoznacznej odpowiedzi na pytanie o ilościowy opis przeszłej i przyszłej ewolucji tegoż Wszechświata, to jednak prawdziwie trudnym problemem jest zrozumienie natury tzw. osobliwości, w których załamują się dotychczas znane prawa fizyki. Być może rozwiązanie przyniosą próby zespolenia dwóch teorii o całkowicie odmiennej strukturze matematycznej, a mianowicie wspomnianej wyżej ogólnej teorii względności z mechaniką kwantową. Towarzyszyć temu może wypracowanie całkiem odmiennej geometrii, od tej, z którą spotykamy się na co dzień.

Polskie Towarzystwo Fizyczne, wraz z Polskim Towarzystwem Chemicznym, ogłaszają konkurs pod nazwą

Komputerowo Wspomagany Eksperyment Szkolny w przedmiotach przyrodniczych.

W konkursie mogą uczestniczyć uczniowie szkoły średniej oraz w osobnej kategorii nauczyciele, studenci i pracownicy szkoły wyższej. Przedmiotem konkursu są doświadczenia, w których komputer będzie zastosowany jako przyrząd pomiarowy oraz maszyna matematyczna do przetwarzania wyników tego doświadczenia.

Zgłoszenia przyjmowane są do 1 maja 2003, a termin przesyłania omówień upływa 31 maja 2003.

Informacje szczegółowe dostępne są pod adresem ifnt.fizyka.amu.edu.pl/dydaktyka/konkurs2.htm

Chcąc wyjaśnić zagadnienie osobliwości, zacznijmy od pojęcia czasoprzestrzeni. Mówiąc prosto, stanowi ona obiekt geometryczny powstały na drodze połączenia przestrzeni trójwymiarowej (której szczególnym przypadkiem może być płaska przestrzeń euklidesowa) oraz jednowymiarowego czasu. Często określa się ją również jako continuum czasoprzestrzenne. Obiekt ten wyposażony jest w tzw. strukturę metryczną odpowiedzialną m.in. za możliwość dokonywania pomiarów odległości. Przy czym do wyrażenia na odległość między dwoma ustalonymi punktami wchodzi również przyrost czasu pomiędzy nimi, który mierzony jest np. w metrach, analogicznie jak w pomiarach długości znanych z życia codziennego. Dokonana w ten sposób geometryzacja pozwala na przedstawianie ewolucji danego układu fizycznego w postaci krzywej skierowanej w przyszłość. Każdemu punktowi takiej krzywej można przypisać czas własny oraz wartości trzech współrzędnych przestrzennych. Ze względu na skończoność maksymalnej wartości prędkości rozchodzenia się sygnałów fizycznych w czasie, każdemu punktowi czasoprzestrzeni odpowiada stożek świetlny i czasowy, wewnątrz którego możliwa jest dalsza ewolucja, zaś jego opuszczenie możliwe byłoby tylko przy prędkościach nadświetlnych. W ogólności pole grawitacyjne powoduje, iż czasoprzestrzeń, którą dostajemy po rozwiązaniu słynnych równań Einsteina dla danego pola grawitacyjnego, jest zakrzywiona – wtedy też stożki świetlne w rozmaity sposób pochyłają się względem siebie. W szczególności rozwiązanie tych równań prowadzi do pewnych patologicznych sytuacji, które nazywamy właśnie osobliwościami. Może to być np. urywanie się pewnych krzywych oznaczające, iż po pewnym czasie informacje o układach reprezentowanych przez te krzywe są bezpowrotnie tracone. Ponadto np. w osobliwościach typu czarnych dziur krzywizna jest tak silna, że dane stożki świetlne pochyłają się na tyle, by żaden sygnał fizyczny nie mógł się wydostać do wnętrza czasoprzestrzeni.

Interesujące są pewne własności dotyczące struktur przyczynowych czasoprzestrzeni, które mają związek z występowaniem osobliwości. Określenie tychże struktur może opierać się przykładowo na porządkowaniu danego zbioru stożków świetlnych, zależnie od tego, który z nich jest wcześniejszy. Zajmując się tym zagadnieniem, zauważyłem, iż ciekawe rezultaty daje rozważenie konfiguracji stożków wykazujących wiele cech samopodobieństwa. W tym celu wpraw na płaszczyźnie euklidesowej skonstruowałem na drodze rekurencyjnych odwzorowań odcinków – samopodobne figury zwane fraktalami. Odwzorowania, które wykorzystałem, były złożeniami obrotów i skalowania tychże odcinków. Następnym krokiem było uitożsamienie niektórych końców odcinków z punktami początkowymi krzywych w czasoprzestrzeni. Inne zaś końce uitożsamiałem z punktami nie należącymi do samej czasoprzestrzeni, lecz do jej brzegu. W klasycznej teorii osobliwości kosmologicznej, jedną z prób badania własności tychże patologicznych „obiektów” było dołączenie ich do czasoprzestrzeni na brzegu w postaci tzw. punktów idealnych (np. punktów



Rozwiązanie zadania M 1018. Zauważmy, że

$$\frac{-x}{x+1} + 1 = x$$

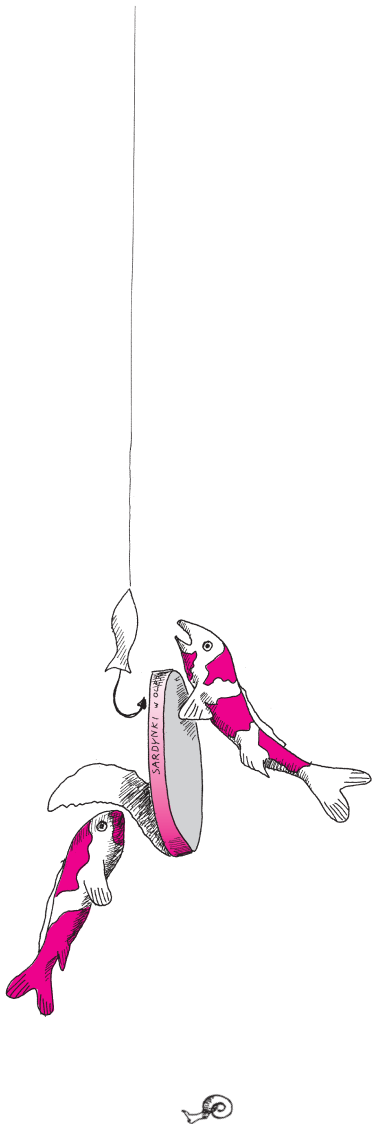
oraz $\frac{-x}{x+1} > -1$ dla $x > -1$.

Wynika skąd, że

$$1 + f\left(\frac{-x}{x+1}\right) = f(x),$$

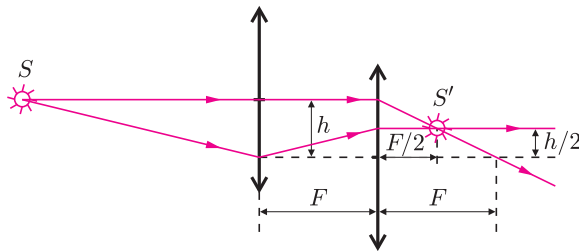
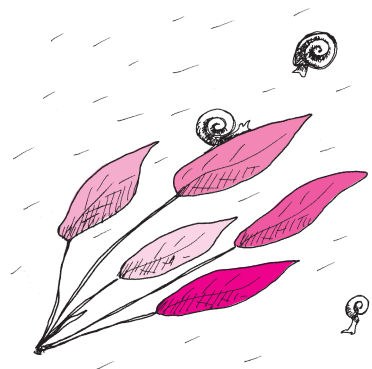
co przeczy równości podanej w zadaniu.

w nieskończoności). W mojej strukturze również przyjąłem, iż te końce krzywych, które należą do brzegu czasoprzestrzeni – stanowią osobliwości. Podejście takie umożliwiło mi znalezienie analogii pomiędzy niespełnieniem tzw. hipotezy kosmicznego cenzora a patologiami w strukturze przyczynowej (stożków świetlnych). W najprostszej wersji hipoteza ta głosi, że nie jest możliwe zaobserwowanie punktów osobliwych z wnętrza czasoprzestrzeni. W przypadku np. czarnych dziur osobliwości okryte są horyzontem zdarzeń, tak iż nie jest możliwe śledzenie dalszej ewolucji układu fizycznego, jeśli odpowiadająca mu krzywa przedostała się przez tenże horyzont. Wracając do mojego pomysłu, prowadzi on do wniosku, że ewentualne niespełnienie tejże hipotezy ujawnia się w braku możliwości pewnych rekurencyjnych uporządkowań stożków świetlnych. To z kolei jest analogiczne do ogólnie przyjętego stwierdzenia, że czasoprzestrzeń nie zawiera osobliwości (spełniających i niespełniających hipotezę kosmicznego cenzora), jeżeli każdą krzywą można dowolnie przedłużyć zarówno w przeszłość, jak i w przyszłość. Inną analogią, którą zauważyłem, rozważając te struktury fraktalne, był związek pomiędzy przejściem od pojęcia przestrzeni (tzw. rozmaitości) płaskiej do zakrzywionej – a przejściem od czasoprzestrzeni modelowanej przez tzw. geometrię przemienną do nieprzemiennej. Na co dzień z własnością przemienności spotykamy się np. przy dodawaniu czy mnożeniu liczb rzeczywistych, natomiast nieprzemienne jest np. mnożenie macierzy. W przypadku czasoprzestrzeni niezerowa krzywizna prowadzi do tego, że operacja różniczkowania wykazuje swego rodzaju nieprzemienność. Natomiast, jak się okazuje, wykonywanie niektórych iteracji stożków świetlnych w nieskończoność prowadziłyby np. do występowania krzywych, które byłyby skierowane w przeszłość, lub też na przemian w przeszłość i w przyszłość, co z fizycznego punktu widzenia wydaje się być nierealistyczne. Takie patologie mogłyby się ujawnić dopiero w bardzo małych skalach (np. rzędu rozmiarów planckowskich) po odpowiednim doborze przeskalowania zmniejszającego odcinki w mojej strukturze. Sugeruje to, hipotezę, iż w małych skalach przestaje obowiązywać znana geometria przestrzeni jako zbioru punktów w zwykłym znaczeniu. Od dawna bowiem przypuszcza się, że w pobliżu osobliwości zaczynają obowiązywać efekty kwantowej grawitacji, której pełna teoria jeszcze nie istnieje. W stadium rozwojowym są jednak pewne modele oparte na geometrii nieprzemiennej, w których próbuje się połączyć ogólną teorię względności z mechaniką kwantową. W modelach tych jednak nieprzemienność prowadzi do nieistnienia tychże punktów, a zatem także i czasu w ujęciu klasycznym. Dynamika układów modelowana jest przy użyciu zmieniających się stanów. Techniki fraktalne w pewien sposób wskazują na konieczność wyboru innej geometrii do opisu osobliwości – choć sformułowane zostały na gruncie pojęć teorii klasycznej.



Rozwiązanie zadania F 592.

Rozpatrzmy dwa promienie wychodzące ze źródła światła. Niech pierwszy biegnie wzdłuż osi optycznej pierwszej soczewki. Zatem na niej nie będzie załamany. Druga soczewka załamie go tak, że przetnie jej oś optyczną w jej ognisku. Niech drugi promień przechodzi przez punkt przecięcia płaszczyzny pierwszej soczewki z osią optyczną drugiej soczewki. Ponieważ odległość od źródła światła do pierwszej soczewki wynosi $2F$, promień ten po załamaniu będzie biegł symetrycznie do kierunku padania, a po drugim załamaniu będzie równoległy do osi optycznej drugiej soczewki (ponieważ wychodzi on z jej ogniska) – patrz rysunek poniżej.



Obraz źródła światła znajduje się więc w odległości $f/2$ od powierzchni drugiej soczewki i w odległości $h/2$ od osi optycznych obu soczewek. Otrzymujemy zatem: $SS' = \frac{1}{2}\sqrt{49F^2 + h^2}$.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 V 2003

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

342 ($WT = 3,00$) i **343** ($WT = 2,00$)

z numeru 9/2002

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	43,22
Aleksander Surma	– Myszków	42,81
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	28,89
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,25
Leszek Grzanka	– Chechło	12,38

Zadania z fizyki nr 354, 355

Redaguje Jerzy B. BROJAN

354. Na końcach nieważkiego pręta o długości $2l = 2$ m zamocowane są dwa małe ciała, każde o masie m . Ile wynosi okres małych wahań tego pręta wokół pozycji pionowej, jeśli punkt zawieszenia pokrywa się ze środkiem pręta?

Rozważyć dwa przypadki:

- a) pole grawitacyjne jest radialne (skierowane do środka Ziemi), a jego natężenie ma jednakową wartość g w okolicy górnego i dolnego ciała,
b) pole grawitacyjne jest takie, jakby cała masa Ziemi była skupiona w jej środku.

355. Chemik pozostawił w otwartym naczyniu ciekły azot, który powoli parował. Po pewnym czasie analiza wykazała, że w azocie jest domieszka tlenu. W miarę ubywania azotu procent tlenu rósł, aż ostatnia partia cieczy składała się wyłącznie z ciekłego tlenu. Na tej podstawie chemik wywnioskował, że zrealizowane zostało marzenie alchemików – wykryta została transmutacja pierwiastków. Czy to prawda? Wyjaśnić, co się stało.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2002

346. Pionowa membrana drga harmonicznym wzduż osi pionowej z częstotliwością $f = 100$ Hz. Ile wynosi amplituda tych drgań, jeśli leżące na membranie ziarenka piasku podskakują na wysokość $h = 2$ cm względem środkowego położenia membrany?

347. Jacek i Placek dostali w schronisku po kubku bardzo gorącej herbaty.

– Parzy! – zawołał Jacek.

– Nic na to nie mogę poradzić – powiedziała bufetowa – chyba że dam wam po dodatkowym kubku, żebyście sobie rozlali i żeby szybciej wystygło.

346. Oderwanie się ziarenka piasku od membrany nastąpi w momencie, gdy jego przyspieszenie będzie skierowane w dół i zrówna się z przyspieszeniem ziemskim:

$$a = A\omega^2 \sin(\omega t) = g,$$

gdzie A jest szukaną amplitudą drgań, a $\omega = 2\pi f$.

Prędkość ziarenka w tym momencie wynosi

$v = A\omega \cos(\omega t)$. Dana wysokość h jest sumą wysokości w chwili oderwania się oraz wysokości rzutu pionowego $v^2/2g$, czyli

$$h = A \sin(\omega t) + (A\omega \cos(\omega t))^2/2g.$$

Przekształcając to równanie znajdujemy

$$A = \frac{\sqrt{g(2h\omega^2 - g)}}{\omega^2} \approx 1 \text{ mm}.$$

347. Kubki mają pewną pojemność cieplną, więc w wyniku przelania herbaty do drugiego kubka jej temperatura się obniży. Im więcej herbaty

Przypominamy treść zadań:

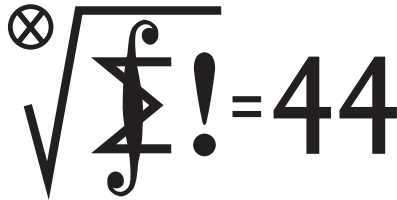
– Świetnie! – ucieszył się Jacek, rozlał zawartość swojego kubka po połowie, zaczął kilka minut i zlał z powrotem. – Wciąż jeszcze za gorąca! – skrzywił się.

Tymczasem Placek również zlał swoją herbatę do jednego kubka i oświadczył:

– Moja wcale nie jest za gorąca.

Czy rzeczywiście mógł lepiej ostudzić swoją herbatę, jeśli jedyną przyczyną był inny jej podział na dwie części? Obaj zlał herbatę do kubków, w których herbata była na początku.

przelejemy, tym wyższa będzie jej temperatura początkowa i tym wyższe będzie tempo odpływu ciepła z drugiego kubka. Co do pierwszego kubka, to jego początkowa temperatura nie zależy od ilości przelanej herbaty. Przyjmijmy, że tempo odpływu ciepła z kubka do otoczenia zależy tylko od jego temperatury, ale nie od ilości zawartego w nim płynu. Przy tym założeniu początkowe tempo odpływu ciepła z obu kubków do otoczenia będzie tym wyższe, im więcej herbaty przelejemy; tym więcej energii pozostawimy też w drugim kubku po przelaniu herbaty z powrotem. Pełna analiza problemu z uwzględnieniem zmian temperatury następujących w miarę upływu czasu jest trudna (trzeba przyjąć jakieś założenia co do zależności tempa odpływu ciepła od temperatur kubka i otoczenia). Analiza numeryczna wskazuje, że na ogół nie opłaca się przelać całej herbaty, ale w każdym wypadku lepiej jest przelać więcej, niż połowę.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2003

Zadania z matematyki nr 457, 458

Redaguje Marcin E. KUCZMA

457. Na płaszczyźnie jest dany zbiór złożony z $2n$ punktów ($n \geq 2$), których obie współrzędne są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle 1; n \rangle$. Dowieść, że pewne cztery punkty tego zbioru są wierzchołkami równoległoboku.

458. Wyznaczyć najmniejszą liczbę a , taką że nierówność

$$(1 - a) \sin x + a \operatorname{tg} x > x$$

jest spełniona dla wszystkich $x \in (0; \pi/2)$.

Zadanie 458 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2002

Przypominamy treść zadań:

449. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają układ równań

$$y = x^2 - 2, \quad z = y^2 - 2, \quad x = z^2 - 2.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $x + y + z$.

450. Niech $n, m > 1$ będą ustalonymi liczbami całkowitymi i niech $Z(k)$ oznacza zdanie:

Równanie $x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = y^n$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich $x_1 < x_2 < \dots < x_k < y$.

Wykazać, że jeżeli zdania $Z(m), Z(m+1), \dots, Z(2m-2)$ są prawdziwe, to dla każdej liczby całkowitej $k \geq m$ zdanie $Z(k)$ jest prawdziwe.

449. Trójka (x, y, z) tworzy orbitę iteracyjną funkcji $f(t) = t^2 - 2$; zatem każda z liczb x, y, z jest pierwiastkiem równania $f(f(f(t))) - t = 0$, które po rozłożeniu lewej strony na czynniki przybiera postać

$$(t + 1)(t - 2)(t^3 - 3t + 1)(t^3 + t^2 - 2t - 1) = 0.$$

Liczby -1 i 2 są punktami stałymi funkcji f ; natomiast każdy z wielomianów

$$P(t) = t^3 - 3t + 1 \quad \text{oraz} \quad Q(t) = t^3 + t^2 - 2t - 1$$

ma trzy pierwiastki rzeczywiste – co widać na przykład z nierówności $P(0) > 0 > P(1)$ oraz $Q(-1) > 0 > Q(0)$. Z łatwych do sprawdzenia tożsamości

$$P(f(t)) = P(t)(P(t) - 2), \quad Q(f(t)) = Q(t)(Q(t) - 2t^2 + 2)$$

wynika zaś, że jeśli jedna z liczb x, y, z jest pierwiastkiem któregoś z tych wielomianów, to pozostałe dwie są pozostałymi pierwiastkami tego samego wielomianu.

Wniosek: rozważany układ ma następujące rozwiązania (x, y, z) : $(-1, -1, -1)$, $(2, 2, 2)$ oraz (t_1, t_2, t_3) (trójka pierwiastków wielomianu P) i (t_4, t_5, t_6) (trójka pierwiastków wielomianu Q) – każda z nich w pewnym porządku cyklicznym. Odpowiednie wartości sumy $s = x + y + z$ wynoszą $s = -3$, $s = 6$ oraz (zgodnie ze wzorem Viète'a) $s = 0$ i $s = -1$.

450. Indukcja: wykażemy, że dla $k \geq m$ zdanie $Z(k)$ implikuje zdanie $Z(m+k-1)$. Wobec założonej prawdziwości zdań $Z(k)$ dla $k = m, \dots, 2m-2$ wyniknie stąd prawdziwość $Z(k)$ dla wszystkich $k \geq m$.

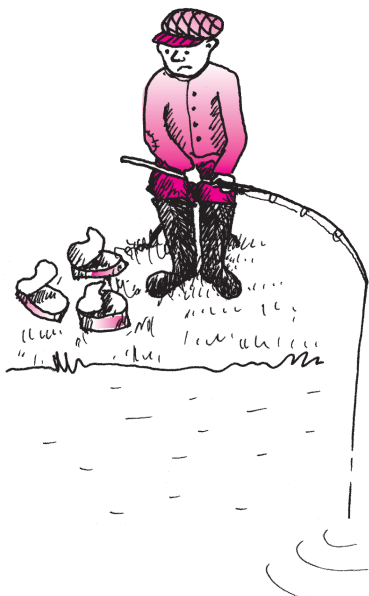
Ustalmy więc $k \geq m$. Zakładamy słuszność zdań $Z(m)$ oraz $Z(k)$:

$$\begin{aligned} \exists a_1 < \dots < a_m < b: \quad a_1^n + \dots + a_m^n &= b^n, \\ \exists c_1 < \dots < c_k < d: \quad c_1^n + \dots + c_k^n &= d^n. \end{aligned}$$

Zatem $b^n c_1^n + \dots + b^n c_k^n = b^n d^n$, czyli

$$\begin{aligned} (a_1^n + \dots + a_m^n)c_1^n + b^n c_2^n + \dots + b^n c_k^n &= b^n d^n, \\ (a_1 c_1)^n + \dots + (a_m c_1)^n + (b c_2)^n + \dots + (b c_k)^n &= (b d)^n. \end{aligned}$$

Liczby w nawiasach po lewej stronie ostatniej równości tworzą ciąg długości $m+k-1$, ściśle rosnący. To kończy krok indukcyjny $Z(k) \Rightarrow Z(m+k-1)$ i dowodzi tezy zadania.





Rozwiązanie zadania F 591.

Z równania soczewki w powietrzu mamy:

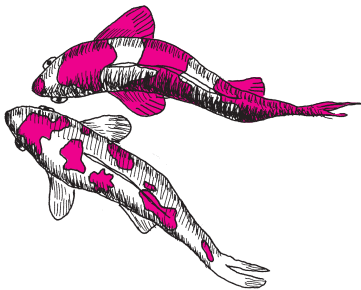
$$\frac{1}{L} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \text{ stąd } f = \frac{FL}{L-F}.$$

Z prawa załamania promienia wychodzącego z soczewki i wpadającego do cieczy:

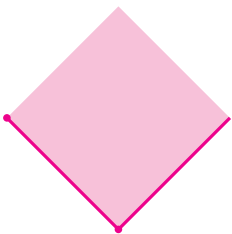
$$\sin \alpha \sin \beta = n,$$

gdzie α – kąt w powietrzu a β – kąt w cieczy, mamy, że dla małych kątów $\alpha \approx \beta n$. Jeśli obraz w powietrzu znajduje się w odległości f od granicy powietrze-soczewka, a odległość od granicy ciecz-soczewka to h , mamy:

$$f \alpha \approx h \beta, \text{ i stąd } h = f n = n \frac{FL}{L-F}.$$



Rysunek do pytania ze strony 6.



Większość zbiorów, o których pomyślimy, to szukane przykładziki...

Patrz w niebo

Gromady kuliste gwiazd to – jak sama nazwa wskazuje – gromady gwiazd obdarzone niemal dokładnie kulistą symetrią. Znamy ich ponad sto (w naszej Galaktyce), obserwuje się je również w innych galaktykach. Gwiazdami tworzącymi gromady kuliste są bardzo stare gwiazdy o niskiej zawartości pierwiastków cięższych od helu nazywane gwiazdami II populacji. Ich liczba w gromadzie może sięgać miliona w obszarze o rozmiarach kilkudziesięciu parseków, dlatego gęstość gwiazd, zwłaszcza w centralnych częściach gromad, bywa milion razy większa niż gęstość gwiazd w okolicy Słońca. Gromady kuliste obiegają centrum Galaktyki po rozmaicie spłaszczonych i rozmaicie usytuowanych orbitach, tworząc stale sferycznie symetryczną otoczkę Galaktyki.

Gromady kuliste do dziś są obiektami dość tajemniczymi: nie wiadomo, skąd się wzięły, albo inaczej – w jaki sposób powstały. Wydaje się, że same galaktyki powstały z ogromnych obłoków gazowych o rozmiarach setek kiloparseków i masach rzędu biliona mas Słońca. Przy zapadaniu się takiego obłoku najwcześniej powinny powstawać gwiazdy w jego centrum. Najmasywniejsze z nich, stosunkowo szybko osiągnąwszy stadium supernowej, eksplodowałyby, rozpraszając z wielką energią swoją materię w ciągle jeszcze zapadającym się obłoku protogalaktycznym. To zderzenie mas gazu prowadziło do ich rozbicia na fragmenty o masach rzędu milionów mas Słońca, z których z czasem powstałyby właśnie gromady kuliste. Taki mechanizm, zdaniem jego zwolenników, tłumaczy symetryczne rozmieszczenie gromad, ich raczej duże odległości od centrum Galaktyki i niską zawartość ciężkich pierwiastków w gwiazdach. Konkurencja jednak przypuszcza, że wielki obłok protogalaktyczny mógł zostać zasypany większą ilością innych obłoków mniejszych i gromady powstały w wyniku ich właśnie zderzeń, jeżeli tylko przy zderzeniu materia osiągała dostatecznie dużą gęstość. Rzadkość takich zderzeń tłumaczyłaby, dlaczego gromady kuliste zawierają jedynie kilka procent gwiazd całego halo galaktycznego. Problem istnieje więc nadal.

Tomasz KWAST

Marzec

Droga Mleczna w marcowe wieczory rozciąga się z północy na południe w zachodniej stronie nieba. Ginie pod południowym horyzontem na obszarze gwiazdozbiorów Ruffy i Kompas, które w naszych szerokościach geograficznych trudno zobaczyć, gdyż nie zawierają jasnych gwiazd. Druga dwójka gwiazdozbiorów, Kil i Żagle, jest w Polsce niewidoczna, a z pierwszą razem stanowiła kiedyś rozległy gwiazdozbiór Okrętu Argo. Najjaśniejsza gwiazda Ruffy oznaczona jest ζ , czyli aż szóstą literą greckiego alfabetu (w Kompasie jest normalnie, najjaśniejsza jest α). W północnej części Ruffy można przez lornetkę dostrzec w Drodze Mlecznej trójkę gromad otwartych: M46 (6 mag, a więc na granicy zasięgu nieuzbrojonego oka), M47 (4,5 mag, w zasadzie powinna więc być widoczna nawet bez pomocy lornetki) i NGC 2423 (najsłabsza z tej trójki, 6,9 mag). W przestrzeni gromady te dzielą odległości setek parseków (od nas odległe są odpowiednio o 1800, 1150 i 670 pc).

Wenus jest w Koziorożcu, a Mars w Strzelcu, obie te planety wschodzą więc przed wschodem Słońca. Jowisz jest w Raku, przez co w marcowy wieczór widać go wysoko w kierunku południowym. Saturn jest w Byku i widać go wieczorem na południowym zachodzie nieba. Nów Księżyca wypada 3 III, a pełnia 18 III. Żadnych zakryć planet ani jasnych gwiazd w marcu nie będzie, ale 21 III o godz. 2 (obowiązującego jeszcze czasu środkowoeuropejskiego) nastąpi wiosenna równonoc, czyli po prostu zacznie się astronomiczna wiosna.

T. K.

KOLOROWANKI –

NUMEROWANKI (1)

Zadanie 1: Na szachownicy 8×8 ułożono 21 klocków o wymiarach 3×1 tak, aby każdy klocek pokrywał całkowicie 3 pola. Które z pól mogło pozostać wolne?

Rozwiązanie I: Pokolorujmy (dla przejrzystości zamiast kolorować numerujemy) pola szachownicy jak na rysunku 1. Każdy klocek pokrywa pola z numerami 1, 2, 3.

Ponieważ na szachownicy są 22 pola z liczbą 2, pozostać niepokryte musi jedno z pól z takim właśnie numerem (rys. 2). Ale które?

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Rys. 1

Rys. 2

Ponumerujemy teraz pola szachownicy w nieco inny sposób (rys. 3). I tym razem są 22 pola z numerem 2, więc tylko takie pole może zostać niepokryte. To pozostawia nam cztery pola (a tak uczciwie mówiąc, to istotnie tylko jedno, ze względu na symetrię).

Nietrudno wypełnić szachownicę klockami tak, aby niepokryte pozostało to właśnie pole (rys. 4).

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

Rys. 3

Rozwiązanie II: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rys. 5. Wówczas każdy klocek pokrywa pola o sumie liczb równej 2. Suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 44, a ponadto 21 klocków pokrywa pola o sumie liczb 42. Niepokryte zostaje więc pole z liczbą 2.

Rys. 4

1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1

Rys. 5

Zadanie 2: Na szachownicy 8×8 ułożono 12 klocków o wymiarach 5×1 tak, aby każdy klocek pokrywał całkowicie 5 pól. Które cztery pola pozostały niepokryte?

Rozwiązanie: Wpiszmy w pola szachownicy liczby jak na rys. 6. Wówczas każdy klocek pokrywa pola o sumie liczb równej 6, zatem 12 klocków pokrywa pola o sumie liczb 72. Suma wszystkich liczb wpisanych w pola szachownicy jest równa 84. Niepokryte zostają więc pola z sumą liczb równą 12, zatem muszą to być cztery pola z liczbą 3 położone w środku szachownicy. Podanie przykładu ułożenia klocków pozostawiamy Czytelnikowi.

2	2	2	0	0	2	2	2
2	2	2	0	0	2	2	2
2	2	2	0	0	2	2	2
0	0	0	3	3	0	0	0
0	0	0	3	3	0	0	0
2	2	2	0	0	2	2	2
2	2	2	0	0	2	2	2
2	2	2	0	0	2	2	2

Rys. 6

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (35')

Wyjaśnienie oszustwa (35): Błędny jest dowód tego, że z prawdziwości twierdzenia dla $n = 3$ wynika prawdziwość dla $n + 1 = 4$.

Błąd polega na tym, że wówczas dowolne $n - 1 = 2$ punkty spośród danych czterech są współliniowe, ale nie można mówić o prostej wyznaczonej przez punkt(y) $A_1, A_2, \dots, A_{n-2} = A_1$, gdyż pojedynczy punkt prostej nie wyznacza.

Poza tym jednym błędnym wynikaniem (oraz tym, że

dla $n = 2$ i $n = 3$ prawdziwość twierdzenia uzyskujemy bez indukcji), dowód jest poprawny. Jeśli jakoś dobrniemy do $n = 4$, czyli jeśli jakoś udowodnimy lub założymy, że dowolne cztery punkty przestrzeni, w której żyjemy, leżą w jednej płaszczyźnie, to teza twierdzenia jest prawdziwa dla każdego n , a przedstawiony poprzednio dowód jak najbardziej poprawny! Poprawnie udowodnione jest bowiem wynikanie tezy twierdzenia dla $n + 1$ z tezy dla n , dla każdego $n \geq 4$. No cóż, indukcja jest jak łańcuch: jeśli na 1000000 ogniów wytrzyma 999999, to nie jest to powód do specjalnej radości.

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl