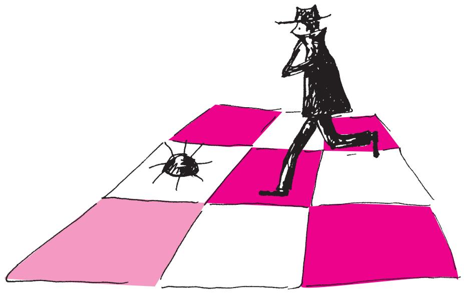


SPIS TREŚCI
NUMERU 1 (344)

W następnym numerze:

Zderzenie Ziemi z planetoidą

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem TEX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 122640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

   Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie; wybór artykułów archiwalnych: **http://www.wiw.pl**

Wybór artykułów w języku angielskim: **http://www.mimuw.edu.pl/delta/**

Internetowa wersja *Małej Delty*: **http://eduseek.ids.pl/delta/**

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

O stałej gry w sapera

Jerzy TYSZKIEWICZ

W matematyce „prawie każdy" oznacza zwyczajowo „każdy z wyjątkiem, być może, skończonej liczby".

Prawie każdy z Czytelników grał w sapera – prostą grę komputerową dołączaną do systemu Windows (istnieje także wersja działająca pod Linuksem).

W wersji „dla początkujących" na tablicy 8×8 umieszczonych jest losowo 10 min, w miejscach nieznanych graczowi. Gracz ma je zlokalizować, przy czym, po kliknięciu na pole z miną „wylatuje w powietrze", czyli przegrywa, a po kliknięciu na pole wolne od miny otrzymuje od komputera informację o łącznej liczbie min znajdujących się na polach sąsiednich i gra dalej.

Nawet najlepszy i najbardziej doświadczony gracz, rozpoczynając grę, nie ma pewności, że zakończy ją odkryciem wszystkich min. Pierwsze kliknięcie wykonuje na ślepo, bez żadnej informacji, po czym z prawdopodobieństwem 10/64 wylatuje w powietrze. Są też inne sytuacje, w których myślenie nie pomaga, jak np. ta poniżej.

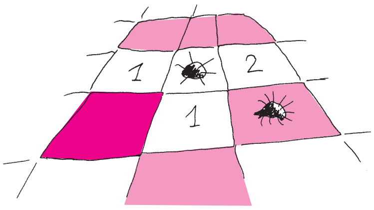
1	1	1	1	1	1	1	1
		1			1		

W ten sposób chociaż lepszy gracz ma większe prawdopodobieństwo wygranej, to jednak dla żadnego gracza prawdopodobieństwo to nie przekracza 54/64, a tak naprawdę, na skutek istnienia nierozwiązywalnych konfiguracji, takich jak wskazana powyżej, jest ono nawet ostro mniejsze od tej liczby.

Dla uniknięcia matematycznego rozpatrywania pojęcia intuicji czy, jak kto woli, szóstego zmysłu graczy, formalnie należałoby mówić o prawdopodobieństwie sukcesu *strategii*, która podaje sposób zagrania w każdej możliwej zastanej konfiguracji na planszy, przy czym dopuszczamy możliwość ruchu losowego, ze z góry przez strategię ustalonymi prawdopodobieństwami poszczególnych posunięć.

Oczywiście, istnieje kres górny wszystkich prawdopodobieństw sukcesu. Jest to pewna liczba z przedziału $(0, 54/64]$. Można tę liczbę nazwać *stałą gry w sapera*.

Wyznaczenie tej stałej w sposób analityczny wydaje się całkowicie niemożliwe: wszystkich układów min jest $\binom{64}{10}$, a możliwych strategii nieskończenie wiele.



Podejściem praktycznie wykonalnym jest badanie empiryczne: z jaką częstością udaje się nam wygrać przy grze z maksymalnie wytężoną uwagą. Oczekujemy na pomysły i wyniki Czytelników. Bardzo interesujące wydaje nam się pytanie, czy stała gry w sapera dla początkujących jest większa od stałej gry w sapera dla średnio zaawansowanych (pole 16×16 i 40 min, czyli taka sama gęstość, jak dla początkujących).

Rozwiązanie zadania F 588.

Koraliki będą się wznosić pod warunkiem, że odpowiednie składowe sił odpychania kulombowskiego będą większe od sił ciężkości:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} > mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Jeśli koraliki zatrzymają się, nie osiągnąwszy końców prętów, to z zasady zachowania energii

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L + 2h\operatorname{ctg}\alpha}\right) = 2mgh$$

dostajemy maksymalną wysokość h

$$h = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 mgL} - \frac{L}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Wynik ten jest poprawny dla $h \leqslant \sin\alpha$, tzn. przy

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \leqslant mgL \operatorname{tg}\alpha (L + 2l\cos\alpha).$$

W przypadku przeciwnym koraliki wylecą z prętów. Z zasady zachowania energii mamy prędkość koralika na końcu pręta

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L + 2h\operatorname{ctg}\alpha}\right) - 2mgl\sin\alpha.$$

Tylko składowa pionowa tej prędkości odpowiada za wysokość, na jaką wzniesie się koralik

$$h = l\sin\alpha + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Zatem poprawnym wynikiem przy

$$q^2 > 4\pi\varepsilon_0 mgl \operatorname{tg}\alpha (L + 2l\cos\alpha)$$

jest

$$h = l\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{q^2 l\cos\alpha\sin^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 mgL(L + 2l\cos\alpha)}.$$

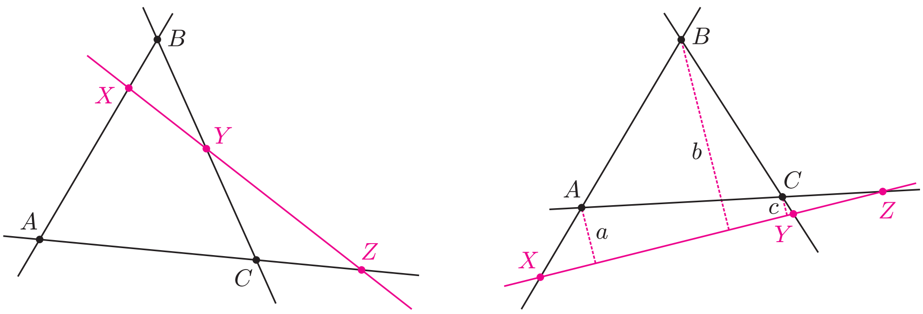
Twierdzenie–wytrych

Zdzisław POGODA

Istnieją twierdzenia, które można wykorzystywać do dowodu wielu innych twierdzeń, które niemal jak wytrychy radzą sobie w przeróżnych, wydawałoby się nietypowych, sytuacjach. Jednym z takich „narzędzi” jest twierdzenie Menelaosa. Podaje ono warunek na współliniowość punktów leżących na prostych zawierających boki trójkąta. Przypomnijmy jego sformułowanie.

Twierdzenie (Menelaos). Trzy punkty X, Y i Z, leżące na prostych zawierających boki trójkąta odpowiednio AB, BC i CA, są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek

$$(*)\qquad \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CZ}}{\overrightarrow{ZA}}=-1.$$



a) b)

Rys. 1

Stosunek wektorów oznacza symbolicznie ich współczynnik proporcjonalności, gdyż te z jednego „ułamka” są równoległe. Liczba -1 po prawej stronie równości wskazuje, że jeden z wyróżnionych punktów albo wszystkie trzy leżą na przedłużeniach boków, a nie na bokach.

Twierdzenie to należy do klasycznej geometrii, ale dawno już zniknęło z programów szkolnych. Dowód jego jest bardzo prosty. Ograniczymy się do wersji „odcinkowej” twierdzenia.

Gdy punkty X, Y i Z są współliniowe, to wystarczy zrzutować prostopadle wierzchołki trójkąta na prostą wyznaczoną przez te punkty. Następnie każdą z proporcji na podstawie twierdzenia Talesa zamieniamy na stosunek długości odcinków łączących wierzchołki trójkąta z ich rzutami prostokątnymi i dostajemy żądaną równość. Zachodzi bowiem

$$\frac{AX}{XB}=\frac{a}{b},\qquad \frac{BY}{YC}=\frac{b}{c},\qquad \frac{CZ}{ZA}=\frac{c}{a}.$$

Rozumowanie w drugą stronę jest typowe w takich przypadkach: niech będzie spełniony warunek $(*)$ dla długości (a więc z jedynką po prawej stronie). Prosta przechodząca przez punkty X i Y wyznacza na prostej CA punkt Z'. Zgodnie z tym, co przed chwilą pokazaliśmy, punkty X, Y i Z' spełniają warunek

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ'}{Z'A}=1.$$

Z obu tych równości wynika, że $\dfrac{CZ}{ZA}=\dfrac{CZ'}{Z'A}$ i w konsekwencji $Z=Z'$, co wobec współliniowości X, Y, Z' dowodzi współliniowości punktów X, Y i Z.

Z twierdzenia Menelaosa prosto wynika twierdzenie Cevy. Przypomnijmy je.

Twierdzenie (Ceva). Trzy proste przechodzące przez wierzchołki A, B i C dowolnego trójkąta i przecinające boki AB, BC i CA odpowiednio

Rozwiązanie zadania M 1012.
Nie wprost. Załóżmy, że spełnionych jest $\binom{7}{3}$ nierówności postaci

$$|\vec{a}_{i_1}+\vec{a}_{i_2}+\vec{a}_{i_3}|^2 > |\vec{a}_{i_4}+\vec{a}_{i_5}+\vec{a}_{i_6}+\vec{a}_{i_7}|^2.$$

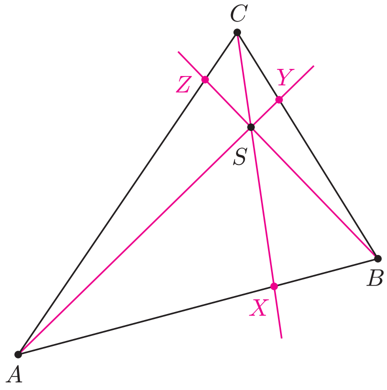
Zapiszmy te nierówności, używając iloczynu skalarnego ($\circ$) i zsumujmy stronami:

$$\tfrac{3}{7}\binom{7}{3}\sum_{k=1}^{7}(\vec{a}_k\circ\vec{a}_k)+6\binom{7}{3}\binom{7}{2}^{-1}\sum_{l<m}(\vec{a}_l\circ\vec{a}_m)>$$
$$>\tfrac{4}{7}\binom{7}{3}\sum_{k=1}^{7}(\vec{a}_k\circ\vec{a}_k)+ +12\binom{7}{3}\binom{7}{2}^{-1}\sum_{l<m}(\vec{a}_l\circ\vec{a}_m).$$

Po drobnych uproszczeniach otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{7}(\vec{a}_k\circ\vec{a}_k)+2\sum_{l<m}(\vec{a}_l\circ\vec{a}_m)<0.$$

Ale lewa strona nierówności to $|\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_7|^2$!



Rys. 2

w punktach X, Y i Z przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CZ}}{\overrightarrow{ZA}}=1.$$

Tym razem wszystkie trzy wyróżnione punkty leżą na bokach trójkąta (jak na rysunku 2) albo dokładnie dwa punkty leżą na przedłużeniach.

Załóżmy, że proste przecinają się w punkcie S. Zastosujemy twierdzenie Menelaosa dwukrotnie: najpierw do trójkąta AXC i prostej przechodzącej przez punkty Z, S i B, czyli

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XS}}{\overrightarrow{SC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CZ}}{\overrightarrow{ZA}}=-1,$$

a następnie do trójkąta XBC i prostej, na której leżą punkty A, S i Y, skąd

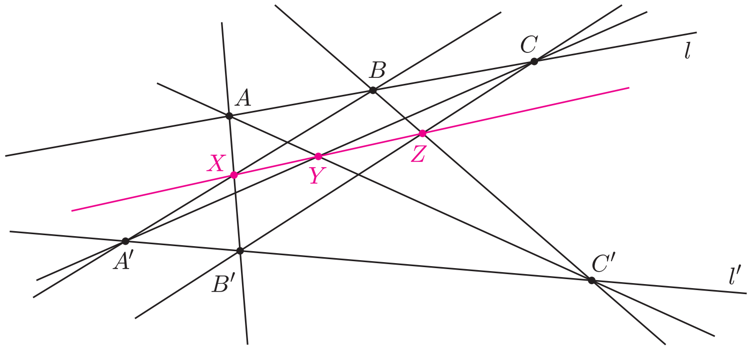
$$\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CS}}{\overrightarrow{SX}}=-1.$$

Jeśli teraz pomnożymy ostatnie równości stronami i skrócimy zbędne wyrażenia, to dostaniemy tezę.

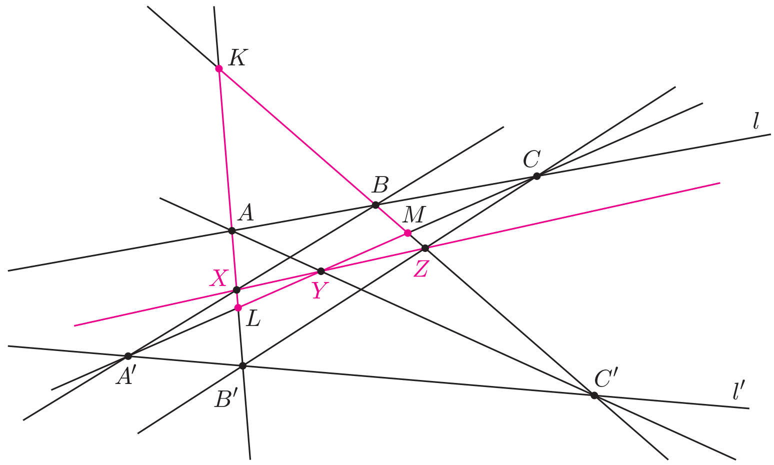
Czytelnik zechce sam sprawdzić, że dowód w drugą stronę można poprowadzić analogicznie jak w twierdzeniu Menelaosa.

Kolejnym twierdzeniem, które można udowodnić, posługując się „wytrychem”, jest bardzo ważne w geometrii rzutowej

Twierdzenie (Pappus). Na prostej l wybieramy trzy różne punkty A, B i C, a na prostej l' punkty A', B' i C'. Punkty X, Y i Z, o ile istnieją, powstałe odpowiednio w wyniku przecięcia prostych AB' i $A'B$, AC' i $A'C$ oraz BC' i $B'C$ są współliniowe (rys. 3a, 3b).

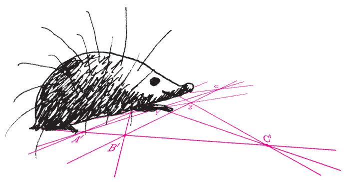


Rys. 3a



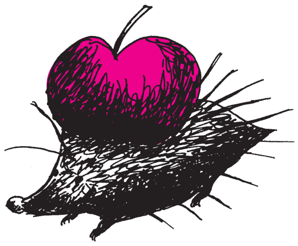
Rys. 3b

Proste $A'Y$, $C'B$ i $B'A$ wyznaczają trójkąt, którego wierzchołki oznaczmy K, L i M. Do tego trójkąta oraz odpowiednio dobranych pięciu prostych zastosujemy twierdzenie Menelaosa. Wyróżnione proste przechodzą przez



Rozwiązanie zadania M 1013.
Niech P będzie środkiem sfery i $\overrightarrow{a}_i=\overrightarrow{PM_i}$. Wówczas

$$\sum_{k<l}|M_kM_l|^2=\sum_{k<l}(\overrightarrow{a}_k-\overrightarrow{a}_l\circ\overrightarrow{a}_k-\overrightarrow{a}_l)=$$
$$=n\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{a}_k\circ\overrightarrow{a}_k)-\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{a}_k\circ\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{a}_k\right)<$$
$$<n\cdot n-0=n^2.$$



następujące trójki punktów $\{Y, C', A\}$, $\{A', B, X\}$, $\{C, Z, B'\}$, $\{C, B, A\}$, i $\{A', C', B'\}$. Mamy więc odpowiednie zależności:

$$\frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MC'}}{\overrightarrow{C'K}}\cdot\frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{AL}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{LA'}}{\overrightarrow{A'M}}\cdot\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}}\cdot\frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{CM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}}\cdot\frac{\overrightarrow{KB'}}{\overrightarrow{B'L}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{CM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BK}}\cdot\frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{AL}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{LA'}}{\overrightarrow{A'M}}\cdot\frac{\overrightarrow{MC'}}{\overrightarrow{C'K}}\cdot\frac{\overrightarrow{KB'}}{\overrightarrow{B'L}}=-1.$$

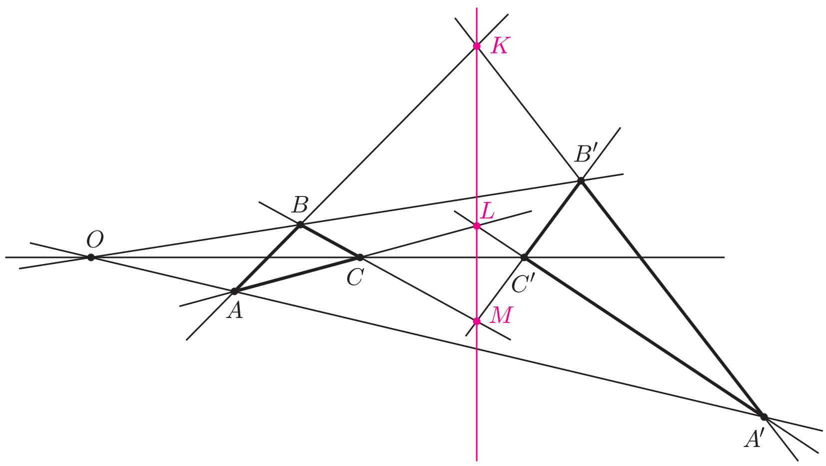
Jeśli teraz pomnożymy pierwsze trzy stronami i podzielimy przez iloczyn ostatnich dwóch, to dostaniemy równość

$$\frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}}\cdot\frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}}=-1,$$

co oznacza, że punkty X, Y i Z są współliniowe.

Innym ważnym twierdzeniem w geometrii rzutowej jest twierdzenie Desarguesa. Ono również może być udowodnione za pomocą twierdzenia Menelaosa. Twierdzenie Desarguesa można wypowiedzieć na przykład tak:

Twierdzenie (Desargues). Jeśli proste przechodzące przez pary wierzchołków A i A', B i B' oraz C i C' trójkątów ABC i $A'B'C'$ przecinają się w jednym punkcie, to punkty przecięcia prostych zawierających boki AB i $A'B'$, AC i $A'C'$ oraz BC i $B'C'$ – o ile istnieją – są współliniowe.



Rys. 4

Oznaczmy przez O punkt przecięcia prostych przechodzących przez wierzchołki i, odpowiednio,
K – punkt przecięcia prostych zawierających boki AB i $A'B'$,
L – punkt przecięcia prostych zawierających boki AC i $A'C'$,
M – punkt przecięcia prostych zawierających boki BC i $B'C'$.

Następnie zastosujmy twierdzenie Menelaosa do trójkąta ACO i trójki punktów $\{L, C', A'\}$, do trójkąta BAO i trójki $\{K, A', B'\}$ oraz wreszcie do trójkąta CBO i trójki punktów $\{M, B', C'\}$. Dostaniemy zależności

$$\frac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{A'A}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{B'B}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{C'C}}=-1.$$

Mnożąc je stronami i wykonując niezbędne skrócenia, dojdziemy do równości

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LC}}=-1.$$

Rozwiązanie zadania F 587.
Cząstka powinna dotrzeć do takiego punktu, w którym siły działające na ładunek q_3 od ładunków q_1 i q_2 będą równe. Zatem w większej odległości działanie ładunku q_1 będzie silniejsze:

$$\frac{q_3|q_2|}{(l+r)^2}=\frac{q_3|q_1|}{r^2},$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{l}\left(\sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}}-1\right),$$

$$\frac{1}{r+l}=\frac{1}{l}\left(1-\sqrt{\frac{|q_2|}{|q_1|}}\right).$$

Z prawa zachowania energii mamy

$$4\pi\varepsilon_0\frac{mv^2}{2}=\frac{|q_3q_2|}{l+r}-\frac{|q_3q_1|}{r}=$$

$$=\frac{|q_3|}{l}\left(|q_1|+|q_2|-2\sqrt{|q_1||q_2|}\right),$$

stąd

$$v=\sqrt{\frac{2|q_3|}{4\pi\varepsilon_0 ml}\left(\sqrt{|q_2|}-\sqrt{|q_1|}\right)^2}$$

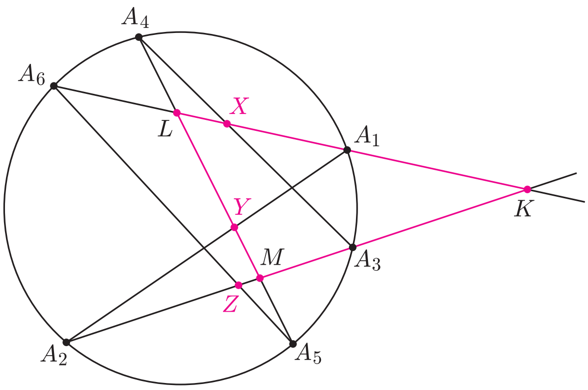
dla $|q_2|>|q_1|$, $v=0$ dla $|q_2|\leqslant|q_1|$.

Stosując teraz twierdzenie Menelaosa do trójkąta CBA i trójki punktów $\{M, K, L\}$, stwierdzamy, że punkty K, L i M leżą na jednej prostej.

Tę prostą nazywa się osią perspektywy trójkątów, punkt O środkiem perspektywy. Dlatego też twierdzenie Desarguesa można wypowiedzieć elegancko: jeśli dwa trójkąty mają środek perspektywy, to mają również oś perspektywy. Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne i może Czytelnik zechce sam spróbować je udowodnić.

Na koniec zastosujemy twierdzenie Menelaosa do jeszcze jednego ważnego twierdzenia z geometrii rzutowej – twierdzenia Pascala. Wypowiemy je w wersji specjalnej dla okręgu, pochodzącej prawdopodobnie od Pascala.

Twierdzenie (Pascal). Proste zawierające przeciwległe boki sześciokąta wpisanego w okrąg przecinają się w punktach leżących na jednej prostej (o ile wspomniane proste mają punkty wspólne).



Rys. 5

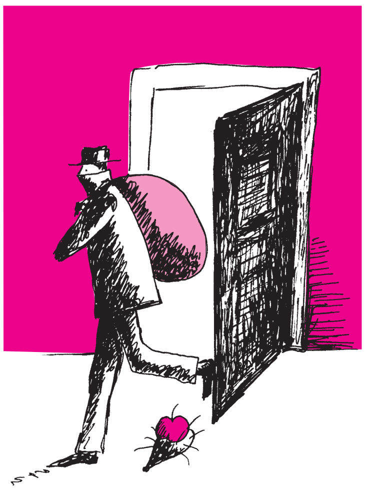
Rozumowanie jest analogiczne jak w przypadku twierdzenia Pappusa, tylko twierdzenie Menelaosa wykorzystujemy trzykrotnie, a nie pięciokrotnie. Jeśli przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku, to stosujemy „wytrych” do trójkąta LMK i kolejno trzech trójek punktów $\{Y, A_2, A_1\}$, $\{A_4, A_3, X\}$ i $\{A_5, Z, A_6\}$. Mamy odpowiednio

$$\frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA_2}}{\overrightarrow{A_2K}} \cdot \frac{\overrightarrow{KA_1}}{\overrightarrow{A_1L}} = -1, \qquad \frac{\overrightarrow{LA_4}}{\overrightarrow{A_4M}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA_3}}{\overrightarrow{A_3K}} \cdot \frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} = -1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LA_5}}{\overrightarrow{A_5M}} \cdot \frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KA_6}}{\overrightarrow{A_6L}} = -1.$$

Jak we wszystkich poprzednich przykładach, mnożymy równości stronami i skracamy co się da, ale tym razem wykorzystujemy jeszcze zależności

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KA_1} \cdot \overrightarrow{KA_6} &= \overrightarrow{KA_3} \cdot \overrightarrow{KA_2}, \\ \overrightarrow{LA_4} \cdot \overrightarrow{LA_5} &= \overrightarrow{LA_1} \cdot \overrightarrow{LA_6}, \\ \overrightarrow{MA_3} \cdot \overrightarrow{MA_2} &= \overrightarrow{MA_4} \cdot \overrightarrow{MA_5}. \end{aligned}$$



Dla Czytelnika znającego własności potęgi względem okręgu są to równości oczywiste. Czytelnik nieznający tego pojęcia bez większych problemów powinien sam je wykazać, wykorzystując własności okręgu i np. trójkątów podobnych. Po skróceniu z zależności

$$\frac{\overrightarrow{LY}}{\overrightarrow{YM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MZ}}{\overrightarrow{ZK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KX}}{\overrightarrow{XL}} = -1$$

i, oczywiście, z twierdzenia Menelaosa mamy tezę.

Pokazaliśmy kilka zastosowań jednego z trochę już zapomnianych twierdzeń klasycznej geometrii do dowodu najważniejszych twierdzeń geometrii rzutowej. Być może Czytelnik zechce wskazać jeszcze inne zastosowania tego twierdzenia–wytrychu.

Urodzeni pod dobrą datą

Urodziłem się 24 maja pewnego odległego roku i bardzo się cieszę, gdy spotykam ludzi urodzonych tego samego dnia (mniejsza o rok). Jaką mam szansę na takich natrafić w grupie, powiedzmy, 30 przypadkowo dobranych osób? Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia się w niej jeszcze co najmniej jednej osoby urodzonej 24 maja?

Dla uproszczenia obliczeń przyjmiemy, że rok ma zawsze 365 dni, a każdy z tych dni jest tak samo prawdopodobnym dniem urodzenia dowolnej osoby (przecież nie znamy prawdziwych dat!). Inaczej mówiąc, dla każdej osoby prawdopodobieństwo tego, że urodziła się ona 24 maja, jak i dowolnego innego ustalonego dnia, jest równe $\frac{1}{365}$, natomiast prawdopodobieństwo, że urodziła się w dniu innym niż 24 maja, jest równe $\frac{364}{365}$.

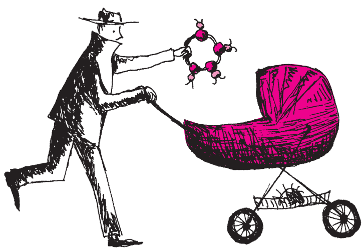
Umawiamy się, że gdy wszystkie pojedyncze zdarzenia (zwane elementarnymi) są równie prawdopodobne, prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia złożonego ze zdarzeń elementarnych jest stosunek liczby takich zdarzeń, które spełniają nasze oczekiwania, do liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych. Na przykład, prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby parzystej na sześciennej kostce jest równe $\frac{1}{2}$, gdyż mamy trzy możliwe wyniki parzyste (2, 4 i 6), a wszystkich możliwych wyników jest sześć.

Zacznijmy zatem od sprawdzenia szans na to, że nikt w 30-osobowej grupie nie urodził się 24 maja – oprócz mnie. Każdy z pozostałych 29 członków grupy spełnia ten warunek z prawdopodobieństwem $\frac{364}{365}$, a prawdopodobieństwo, że spełnią go wszyscy jednocześnie, jest równe iloczynowi tych prawdopodobieństw, czyli $\left(\frac{364}{365}\right)^{29}$, co jest w przybliżeniu równe 0,92. W takim razie prawdopodobieństwo, że chociaż jedna osoba urodziła się tego samego dnia co ja, jest równe 0,08. Mała szansa!

A jaka jest szansa, że jakiekolwiek dwie (co najmniej) osoby z 30-osobowej, przypadkowo dobranej grupy urodziły się tego samego dnia, już niekoniecznie 24 maja? Podobnie jak poprzednio, obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, a więc tego, że każda z tych osób urodziła się innego dnia. Jak to się może zdarzyć? Pierwsza osoba (nie ma znaczenia, którą uznamy za pierwszą, którą za drugą itd.) mogła się urodzić dowolnego z 365 dni (365 możliwości), druga powinna była się urodzić w jeden z pozostałych 364 dni (364 możliwości), trzecia miałaby do wyboru już tylko 363 możliwości, wreszcie trzydziestej zostałoby już do dyspozycji tylko 336 dni. Taki układ można otrzymać na $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 337 \cdot 336$ sposobów, natomiast wszystkich możliwych układów dni urodzin jest 365^{30}. W takim razie prawdopodobieństwo tego, że wszyscy członkowie grupy będą mieli różne dni urodzin, jest równe

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 337 \cdot 336}{365^{30}},$$

a to w przybliżeniu 0,2936. Tak więc prawdopodobieństwo znalezienia się dwóch osób z tym samym dniem urodzin, wynosi nieco ponad 0,7! Duża szansa! Nietrudno obliczyć, podobnie jak to zrobiliśmy tu dla 30 osób, że już w grupie 23-osobowej prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch osób urodzonych tego samego dnia jest większe od $\frac{1}{2}$.

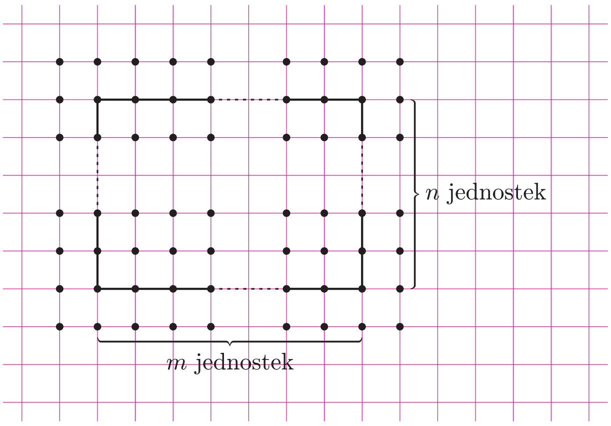


Pole w kropkach

Obliczanie pól wielokątów nie zawsze bywa czynnością lekką i przyjemną. Są jednak sytuacje, kiedy do ustalenia pola dowolnego wielokąta, wypukłego lub wklęsłego, wystarczy umiejętność dodawania, dzielenia przez dwa i... dobry wzrok.

Wyobraźmy sobie, że na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych każdy punkt, którego obie współrzędne są całkowite, zaznaczamy kropką. Otrzymujemy w ten sposób kratę pokrywającą całą płaszczyznę (dlatego te punkty nazwiemy punktami *kratowymi*), w której każde dwa sąsiednie punkty leżące na jednej prostej równoległej do osi (jednej lub drugiej) są oddalone o jedną jednostkę.

Narysujmy prostokąt o bokach równoległych do osi i o wierzchołkach w punktach kratowych.



Rys. 1

Oczywiście jego pole jest równe mn, co oznacza, że prostokąt składa się z mn pojedynczych kwadracików o boku 1. Znajdźmy liczbę tych kwadracików nieco inaczej, przyporządkowując kwadracikowi np. jego górny prawy róg. Każdy punkt kratowy znajdujący się wewnątrz prostokąta jest prawym górnym rogiem pewnego kwadracika, więc mamy kwadracików co najmniej

$$(m-1)(n-1).$$

Z kolei spośród punktów kraty leżących na obwodzie prostokąta prawymi górnymi rogami kwadracików są tylko te, które znajdują się na prawym i górnym boku prostokąta – oprócz prawego dolnego i lewego górnego wierzchołka – a tych jest

$$m+n-1.$$

Razem jest ich zatem

$$(m-1)(n-1)+m+n-1=mn.$$

Wszystko się zgadza, co nie powinno dziwić. Nieco dziwniejsze może się wydać to, że w podobny sposób można obliczyć pole dowolnego wielokąta o wierzchołkach w punktach kraty. Dokładniej, jeśli w oznacza liczbę wewnętrznych punktów kratowych wielokąta, b liczbę punktów kratowych leżących na jego obwodzie, a

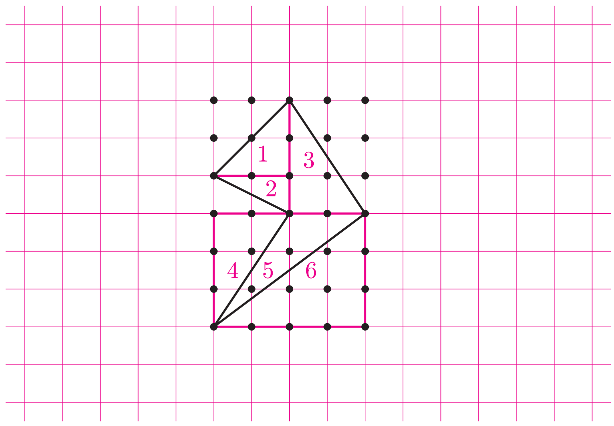
$$w+\frac{b}{2}-1$$

nazwiemy *liczbą kropkową* tego wielokąta, to mamy twierdzenie (Picka):

Pole wielokąta jest równe jego liczbie kropkowej.

Aby się o tym przekonać, zauważmy dwa fakty.

- Po pierwsze, jeśli jakiś wielokąt można rozbić na kilka mniejszych (też o wierzchołkach w punktach kratowych), to jego liczba kropkowa jest sumą liczb kropkowych jego składowych. (Co się dzieje z punktami kratowymi, należącymi do dwóch sąsiednich wielokątów składowych?) W szczególności możemy stąd wywnioskować, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych równoległych do osi (gdyż każdy taki trójkąt jest połową odpowiedniego prostokąta).
- Po drugie, każdy wielokąt możemy „wymodelować”, składając lub odejmując trójkąty prostokątne, jak na rysunku.



Rys. 2. Pole wielokąta $= P_1 + P_2 + P_3 + P_{4+5+6} - P_4 - P_6$.

A do czego jest potrzebny dobry wzrok? Żeby nie przegapić żadnej kropki!

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

Protokół posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Skrót pracy nagrodzonej złotym medalem zamieścimy w *Delcie* 3/2003.

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Marek Kordos, Witold Sadowski, Paweł Strzelecki, Agnieszka Wojciechowska, Jarosław Wróblewski na posiedzeniu w dniu 5 września 2002 roku w Łodzi postanowiło:

1) Przyznać złoty medal i nagrodę w wysokości 700 złotych Wiesławowi Zajiczkowi z Zespołu Szkół Mechaniczno-Elektrycznych w Żywcu za pracę *Matematyczne modele osobliwości czasoprzestrzeni klasycznych.*
2) Nie przyznawać medalu srebrnego.
3) Przyznać medal brązowy i nagrodę w wysokości 400 złotych Łukaszowi Lachowi z Zespołu Szkół Mechaniczno-Elektrycznych w Żywcu za pracę *Rozwiązywanie wybranych problemów planimetrii i algebry przy zastosowaniu liczb zespolonych.*
4) Przyznać medal brązowy i nagrodę w wysokości 400 złotych Krzysztofowi Rutczyńskiemu z I LO im. Stefana Żeromskiego w Kielcach za pracę *Anatomia zbioru Mandelbrota i jej związek z ciągiem Fibonacciego.*
5) Przyznać wyróżnienie i nagrodę w wysokości 300 złotych Jakubowi Staromłyńskiemu z Zespołu Szkół im. Oddziału Partyzanckiego AK „Jędrusie" w Połańcu za pracę *Rekurencja i funkcje tworzące.*
6) Przyznać nagrody pieniężne nauczycielom – opiekunom finalistów: mgr Wiesławie Filipowicz z Połańca – 200 zł, mgr Zbigniewowi Góreckiemu z Żywca – 300 zł, mgr Marii Stańczykowskiej z Kielc – 200 zł.

(–) *podpisy członków Jury*

Tradycyjnie redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Ogólnopolskie Sejmiki Matematyków

Od 2003 roku *Delta* będzie informowała również o liczącym sobie blisko ćwierć wieku przedsięwzięciu pod taką właśnie nazwą.

Ogólnopolski Sejmik Matematyków to impreza organizowana przez Pałac Młodzieży im. profesora Aleksandra Kamińskiego w Katowicach oraz przez Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego. Jest to konkurs matematyczny dla młodzieży szkolnej. Przez lata ukształtował się on w następujący sposób.

We wrześniu Jury powołane przez Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego i Pracownię Matematyki katowickiego Pałacu Młodzieży ogłasza tematy na rozpoczynający się rok szkolny. Każdy temat ma kilkuzdaniowe omówienie i bibliografię złożoną z co najmniej dwóch dość dostępnych książek. Tematy te zostają rozesłane do wszystkich ponadpodstawowych szkół w kraju. Uczniowie, którzy chcą ubiegać się o udział w danej edycji Sejmiku, muszą zgłosić swój udział (potwierdzony przez nauczyciela) do końca listopada. I oczywiście przystąpić do działania. Praca powinna być opracowaniem wybranego tematu na podstawie podanej literatury, choć oczywiście można próbować eksperymentu z innymi tematami. Prace muszą być przesłane do Katowic przed końcem semestru, a więc najdalej w początku lutego. Jury wybiera spośród prac najciekawsze i zaprasza ich autorów wraz z nauczycielami na Sejmik. W Sejmiku biorą też udział członkowie Jury, pracownicy Pracowni Matematyki, wolontariusze pomagający w organizacji (zazwyczaj uczestnicy Sejmików sprzed lat), są też zaproszeni goście. Razem około 60 osób.

W 2002 roku Jury zaproponowało 8 tematów, bibliografia liczyła łącznie 19 pozycji, nadesłano blisko 200 prac, na Sejmik zaproszono 16 uczestników.

Proponowanymi tematami były:

Zastosowania twierdzenia Cevy
Funkcja Π
Konstruowalność figur na płaszczyźnie przy użyciu cyrkla i linijki
Funkcje tworzące i rekurencja
Ciągi rekurencyjne
Zastosowania ułamków łańcuchowych
Współczynniki dwumianowe
Rozkładalność wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Właściwy Sejmik to trzydniowe święto matematyki, pełne radości, sportu i ognisk, ale oczywiście najważniejszą jego częścią są dziesięciominutowe referaty uczestników. Na ich podstawie Jury wyłania zwycięzców. Zwycięzcy otrzymują niebagatelną nagrodę – indeks studiów matematycznych na Uniwersytecie Śląskim. Ponadto są nagrody rzeczowe fundowane przez sponsorów. Tymi sponsorami są: Kuratorium Śląskie i Urząd Marszałkowski w Katowicach. Ale są też i inni sponsorzy: w 2002 roku był nim Real z Czeladzi.

Propozycja Jury na rok 2002/2003 to następujące tematy:

Podpisy cyfrowe
Rozwiązywanie równań wielomianowych
Twierdzenie Ptolemeusza i jego zastosowania (chodzi o to o czworokącie)
Fraktale
Zliczanie obiektów kombinatorycznych
Symetria, harmonia, chaos
Charakteryzacje trójkątów (np. funkcje określające, czy trójkąt jest ostro-, prosto- czy rozwartokątny).

Poza laureatami wyłonionymi przez Jury są także laureaci plebiscytu, w którym głosują sami finaliści, a także laureaci plebiscytu, w którym głosują nauczyciele-opiekunowie.

Jest to, jak widać, konkurs bardzo odmienny od naszego Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki – nie odrzuca się prac kompilacyjnych, a nawet się je inspiruje. W efekcie jest to konkurs bardziej masowy. Najważniejsze, że stoi za nim silne środowisko regionalne, które demonstruje, iż może dla popierania aktywnej intelektualnie młodzieży zrobić wiele. Bardzo ważny jest tu udział Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, bo nagrody w postaci indeksu nie można przecenić.

Protokół

posiedzenia Jury XIX Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków

Numer XIX bierze się stąd, że początkowo Sejmiki nie były coroczne.

Jury, po wysłuchaniu prezentacji finalistów XIX OSM, postanowiło przyznać:
• I miejsce Szymonowi Acedańskiemu (VIII LO w Katowicach),
• II miejsce Arkadiuszowi Kramzie (VIII LO w Katowicach) oraz
Michałowi Mosdorfowi (III LO w Białymstoku).

Ponadto Jury postanowiło wyróżnić:
• Grzegorza Palucha (Gimnazjum nr 15 w Lublinie),
• Teresę Wojtala (LO w Bieruniu).

W plebiscycie finaliści wybrali Szymona Acedańskiego, a nauczyciele – Michała Mosdorfa.

Zgodnie z Uchwałą Senatu Uniwersytetu Śląskiego Szymon Acedański, Arkadiusz Kramza oraz Michał Mosdorf są uprawnieni do przyjęcia bez egzaminów na studia matematyczne w Uniwersytecie Śląskim w przeciągu dwóch lat po zdaniu przez nich egzaminu dojrzałości.

Przewodniczący Jury XIX OSM
dr hab. Andrzej Sładek, prof. UŚ

Jeziorowice, dn. 24.05.2002 r.

Po co gitarze pudło rezonansowe?

Rafał DEMKOWICZ-DOBRZAŃSKI

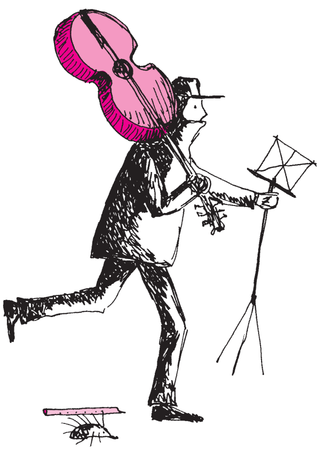
Mikołaj KORZYŃSKI

O tym, że szarpanie strun pozwala wydobywać dźwięki, człowiek przekonał się już dość dawno. Około 7000 lat przed naszą erą nasi uzdolnieni przodkowie skonstruowali coś, co wyglądało jak łuk z paroma cięciwami. Instrument ten mógł służyć do wygrywania różnych melodii, ale raczej nie dla większej publiczności, gdyż nie był zbyt donośny. Z czasem konstruktorzy pogrubili i wyżłobili jeden koniec łuku. Po co? Żeby wydobywane dźwięki uczynić głośniejszymi. I tak właśnie narodziło się pudło rezonansowe. Dalszy rozwój poszedł różnymi ścieżkami i pierwotny łuk z cięciwami przeewoluował do harfy, gitary, skrzypiec, fortepianu itp. Podczas całego tego rozwoju nikt jednak nie śmiał pozbyć się genialnego wynalazku, jakim było pudło rezonansowe. Dzięki niemu dźwięki instrumentów były nie tylko głośne, ale zależnie od kształtów pudła miały również różne barwy.

Jak działa pudło rezonansowe? Każdy (kto choć trochę słyszał o fizyce) odpowie na to pytanie bez trudu. Drgająca struna swoim ruchem powoduje powstanie zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza – fal dźwiękowych. W pudle rezonansowym mamy powietrze, które pobudzone przez docierające do niego fale też zaczyna drgać. Pamiętajmy, że struna ciągle drga, więc nowe bodźce (fale dźwiękowe) wciąż dolatują do pudła. W tych okolicznościach możliwe jest zajście zjawiska zwanego rezonansem – drgania w pudle stają się coraz większe dzięki kolejnym pobudzeniom, aż w końcu są naprawdę głośne. Powietrze w pudle wspomaga więc drgającą strunę i powoduje, że dźwięk jest wielokrotnie głośniejszy niż wtedy, gdyby struna była zamocowana tylko na kawałku patyka. Oczywiście ważne jest, by pudło rezonansowe nie wzmacniało fali dźwiękowej tylko o jednej konkretnej częstotliwości, ale aby było jak najwszechstronniejsze – by wzmacniało dobrze dźwięki z całej skali instrumentu.

Na takim wyjaśnieniu można by poprzestać. Wszystko wydaje się jasne. Jest pudło! Jest głośno! Hurra! No dobrze, ale ktoś sceptyczny może się zacząć zastanawiać: Jeśli mam samą strunę bez pudła rezonansowego i trącę ją palcem – dostarczając jej tym samym pewnej energii, to ona następnie wyemituje tę energię w postaci fal dźwiękowych. Jeśli teraz mam strunę z pudłem rezonansowym i trącę ją palcem, w ten sam sposób, dostarczając jej tej samej energii, to okazuje się, że tym razem słyszę dźwięk znacznie głośniejszy niż poprzednio. Czy wobec tego jest coś nie w porządku z zasadą zachowania energii? Głośniejszy dźwięk oznacza przecież, że więcej energii rozchodzi się w przestrzeń, a struny dostały w obu przypadkach taką samą porcję energii. Czy to oznacza, że pudło rezonansowe – kawałek wyprofilowanego drewna – wyprodukowało energię??? Byłoby to dość oryginalne perpetuum mobile.

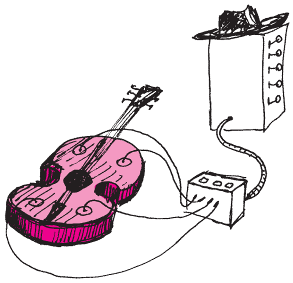
Jeśli ktoś wierzy w fizykę, wie, że wyjaśnienie musi być inne. Ale gdzie szukać ratunku? Tym, którzy chcą się sami zmierzyć z tym problemem, radzimy przerwać czytanie w tym miejscu.



⋆ ⋆ ⋆

Jednym z rozwiązań, jakie można zaproponować, jest takie, że pudło rezonansowe powoduje „ukierunkowanie” energii. To znaczy że głośniej jest z przodu gitary, ale za to z tyłu jest ciszej. Taką hipotezę można łatwo odrzucić eksperymentalnie. Siedząc za kimś, kto gra na gitarze, słyszymy również bardzo dobrze.

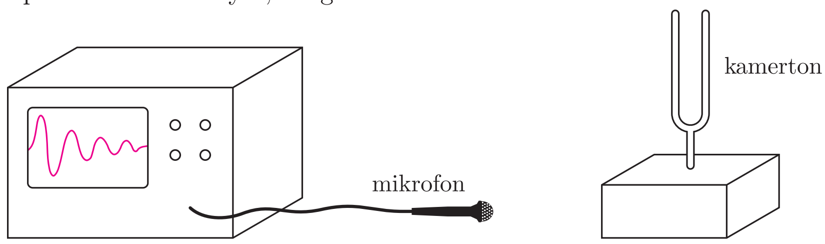
Prawidłowe rozwiązanie musi być więc inne. Gdy struna drga w obecności pudła rezonansowego, istotnie jest głośniej, ale za to struna szybciej wytraca swoje drgania. Oznacza to więc, że całkowita ilość energii wyemitowanej w świat jest taka sama jak w przypadku bez pudła rezonansowego, emitowana jest ona



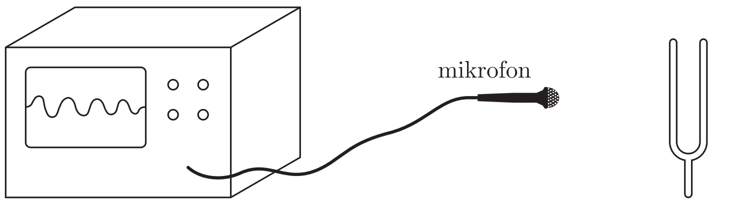
jednak znacznie szybciej. Tak więc obecność pudła rezonansowego powoduje, że strunie szybciej odbierana jest energia. W efekcie dźwięk jest głośniejszy, ale trwa krócej. Pudło rezonansowe powoduje, że struna czuje większy „opór” i przez to szybciej gaśnie. Skąd bierze się ten opór? Oczywiście opór ten to nic innego jak tylko ciśnienie powietrza, a dokładniej fal dźwiękowych, które wzmacniają się w pudle rezonansowym. Wiemy, że gdy ciało porusza się z prędkością v i działa na otoczenie siłą F, to przekazuje otoczeniu moc $P = F \cdot v$. Bez pudła rezonansowego siły, jakie napotyka struna, są znacznie mniejsze – małe są amplitudy fal dźwiękowych – niż w przypadku obecności pudła.

Żeby nasze wywody nie były gołosłowne, dodamy, iż przeprowadziliśmy następujący eksperyment z użyciem kamertonów. Jeden kamerton umieszczony był na pudle rezonansowym, drugi nie.

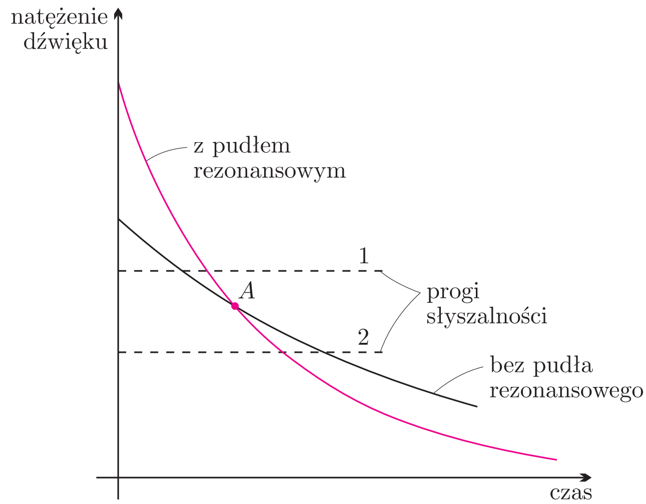
a)



b)



Przy użyciu mikrofonu i oscyloskopu (pokazującego wychylenia membrany mikrofonu) zaobserwowaliśmy, że rzeczywiście dźwięk z kamertonu z pudłem rezonansowym był głośniejszy, ale też szybciej malała jego głośność.



Ktoś może zaprotestować. *Nieprawda! Sprawdziłem. Kamerton z pudłem rezonansowym jest głośniejszy i słychać go dłużej niż kamerton bez pudła!* Zgoda, może się tak zdarzyć, ale to dlatego, że człowiek ma pewien próg słyszalności (patrz wykres), i w pewnych warunkach jego próg słyszalności może być powyżej punktu przecięcia (próg słyszalności nr 1). Wtedy rzeczywiście kamerton z pudłem jest głośniejszy i słyszalny dźwięk trwa dłużej, ale wystarczy zbliżyć się dostatecznie do obu kamertonów, tak by próg słyszalności znalazł się poniżej punktu A (próg słyszalności nr 2) i poczekać dostatecznie długo – w końcu w konkursie głośności zwycięży kamerton bez pudła.

Wizjonerzy eksperymentu

Zgodnie z przewidywaniami ostatnią Nagrodę Nobla z Fizyki „dostała” astrofizyka. Docenione jednak zostały nie najnowsze, naprawdę spektakularne osiągnięcia, tylko wyniki osiągnięte przed wielu laty, a ich wspólnym mianownikiem jest bardziej wizjonerstwo i geniusz eksperymentatorów niż astrofizyka.

Raymond Davis Junior otrzymał nagrodę za pierwszy eksperyment, który umożliwił detekcję docierających z Kosmosu neutrin. Zrealizował szalony pomysł Pontecorvo wykrywania neutrin poprzez reakcję $\nu + {}^{37}\mathrm{Cl} \to {}^{37}\mathrm{Ar} + e^-$. Reakcja ta była proponowana jako sposób rejestracji intensywnego strumienia neutrin pochodzących z reaktora. Już po pierwszych próbach w 1955 roku Davis zaproponował użycie tej reakcji do wykrycia neutrin słonecznych. Realizacja tego pomysłu wymagała wyizolowania pojedynczych atomów radioaktywnego argonu spośród miliona bilionów bilionów atomów chloru! Eksperyment, działający prawie nieprzerwanie przez ćwierć wieku, polegał na umieszczeniu głęboko pod ziemią zbiornika z tonami C_2Cl_4, które co dwa miesiące były przedmuchiwane helem. Hel zabierał powstałe atomy argonu i zostawiał je w filtrze wypełnionym węglem drzewnym i ciekłym azotem. Wyznaczona doświadczalnie efektywność tej metody ekstrakcji wynosiła 95% i pozwoliła na wykrycie 885 rozpadów atomów argonu ${}^{37}\mathrm{Ar}$ w ciągu całego czasu działania eksperymentu. A w ciągu sekundy przez każdy ziemski, zwrócony do Słońca centymetr kwadratowy przenika bilion neutrin słonecznych...

Metoda opracowana przez Davisa jest tak niesamowita, że samo jej zastosowanie warte jest najwyższego uznania. Na tym jednak nie koniec. Wyniki Davisa od początku wskazywały, że strumień neutrin docierających na Ziemię ze Słońca jest o czynnik 2–3 za mały w porównaniu z przewidywaniami standardowego modelu naszej gwiazdy.

Drugim nagrodzonym jest Masatoshi Koshiba, który kierował zespołami eksperymentów Kamiokande, Kamiokande II i SuperKamiokande, o których wielokrotnie pisaliśmy. Oficjalnie jednak został nagrodzony jedynie za udowodnienie, że neutrina rzeczywiście docierają ze Słońca. Było to możliwe, gdyż detektor Kamiokande, wykrywający promieniowanie Czerenkowa wybitych przez neutrina słoneczne elektronów, umożliwia pomiar kierunku, z którego nadlatuje neutrino. Za pomocą Kamiokande zrobiono słynne „zdjęcie Słońca z kopalni”. Drugim astrofizycznym osiągnięciem Kamiokande było zarejestrowanie kilkunastu neutrin pochodzących z wybuchu supernowej SN1987A w Obłoku Magellana. Osiągnięcia te jednak przyćmione zostały przez odkrycie oscylacji neutrin, a tym samym masywności tych cząstek. Związek tego odkrycia z astrofizyką jest najwyżej pośredni. Mało tego, pokazuje, że nierozwiązany przez 30 lat problem neutrin słonecznych, był związany z samymi neutrinami, a nie Słońcem. Wielkim przegranym ostatniego rozdania Nagród Nobla jest eksperyment SNO, który właśnie zaczyna ostatecznie udowadniać występowanie oscylacji neutrin słonecznych (SuperKamiokande udokumentowało ten fakt jedynie w odniesieniu do tzw. neutrin atmosferycznych). Warto jeszcze przypomnieć, że główną motywacją budowy detektorów w Kamiokande było (nadal prowadzone) poszukiwanie rozpadu protonu, a neutrina miały być (przynajmniej początkowo) tylko rodzajem tła...

Ostatni z nagrodzonych, Riccardo Giacconi, zajmował się już czystą astrofizyką. Między innymi jemu zawdzięczamy otwarcie nowego okna na Wszechświat – obserwacje w zakresie promieniowania X. Oprócz niego dwaj inni naukowcy przyczynili się w decydujący sposób do rozwoju tej dziedziny: Bruno Rossi i Herbert Friedman. Niestety, nie doczekali się oni przyznania Nagrody Nobla, z którą, z niewiadomych powodów, zwlekano tyle lat. Dlaczego jednak obserwacja docierających z Kosmosu promieni rentgenowskich jest tak trudna? Okazuje się, że atmosfera jest dla nich nieprzezroczysta (co po chwili zastanowienia nie wydaje się wcale takie dziwne). Obserwacji można właściwie dokonywać tylko z orbity. Już w 1949 roku Friedman ze swoim zespołem odkrył rentgenowskie promieniowanie Słońca, wynosząc licznik Geigera za pomocą trofeum wojennego – rakiety V2. Promieniowanie to okazało się na tyle słabe, że szanse obserwacji gwiazd wydawały się nierealne. Na szczęście Giacconi i Rossi skoncentrowali się na pokonywaniu eksperymentalnych trudności, a nie dywagacjach na temat istnienia wystarczająco silnych źródeł. W 1960 roku zaproponowali budowę teleskopu rentgenowskiego opartego na pomyśle rentgenowskiego mikroskopu: aby ogniskować przenikliwe promieniowanie X, potrzebne są lustra prawie równoległe do kierunku padania i o niezwykle gładkiej powierzchni. Przełomu jednak dokonali jeszcze za pomocą liczników wyposażonych jedynie w kolimatory i wyniesionych w 1962 roku za pomocą rakiety Aerobee. Oficjalnie celem misji była próba wykrycia fluorescencyjnego promieniowania Księżyca (zaobserwowanego dopiero 30 lat później). Zamiast tego odkryto pierwsze pozaukładowe źródło i rentgenowskie promieniowanie tła. To spowodowało lawinę zainteresowania tą dziedziną obserwacji i odkryciem wielu rodzajów „gorących źródeł” Wszechświata, z kandydatami na czarne dziury na czele.

Patrząc na pokazane na okładkach obrazy pozostałości po supernowych (skąd biorą się na nich kolory?) można pomyśleć, że ich piękno jest więcej warte niż wszelkie nagrody. Jeżeliby jednak komuś naprawdę zależało na Nagrodzie Nobla, to przypominamy niezawodny sposób na jej zdobycie: za młodu dokonać wiekopomnego odkrycia, a później długo, długo żyć.

Piotr ZALEWSKI

Profesor Andrzej Schinzel sformułował i zanotował poniższe twierdzenie w przeddzień Zielonych Świąt 2002 podczas XVI Szkoły Historii Matematyki w Turawie koło Opola – po rozmowach z magistrem Stanisławem Śniegockim z Danii.

Twierdzenie. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Liczba m z przedziału (p_n, p_{n+1}^2) jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m = A - B, \tag{$*$}$$

gdzie $\mathrm{NWD}(A, B) = 1$ oraz

$$p_1 p_2 \ldots p_n | AB. \tag{$**$}$$

Dowód. *Konieczność.* Jeżeli m jest liczbą pierwszą z przedziału (p_n, p_{n+1}^2), to przyjmujemy

$$A = p_1 p_2 \ldots p_n + m, \qquad B = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Równość $(*)$ i podzielność $(**)$ jest oczywista.

$$\mathrm{NWD}(A, B) = 1, \text{ bo } \mathrm{NWD}(m, p_1 p_2 \ldots p_n) = 1.$$

Dostateczność. Jeżeli zachodzi $(*)$, $(**)$ oraz $\mathrm{NWD}(A, B) = 1$, to m nie dzieli się przez żadną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$. A ponieważ $p_n < m < p_{n+1}^2$, więc m jest liczbą pierwszą.

Nadesłał Stanisław Śniegocki

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i *Delty!*

Rozwiąż w styczniu lutowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa *Prószyński i S-ka.*

Więcej informacji: http://www.wiw.pl/delta/konkurs

Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1012. Wykazać, że z dowolnych siedmiu wektorów można wybrać trzy, których suma ma długość nie większą od długości sumy pozostałych wektorów.
Rozwiązanie na str. 2

M 1013. Punkty $M_1, \ldots, M_n$ leżą na sferze o promieniu 1. Wykazać, że

$$\sum_{k<l} |M_k M_l|^2 \leqslant n^2.$$

Rozwiązanie na str. 3

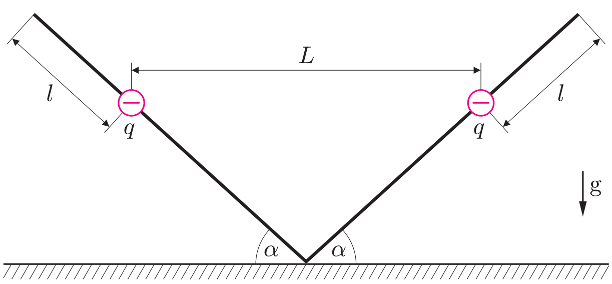
M 1014. Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów $A_0, \ldots, A_4$, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Ponadto

$$A_i A_{i+1} \parallel A_{i+2} A_{i+4} \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, 3, \tag{$*$}$$

gdzie przyjęliśmy $A_{5+i} = A_i$. Wykazać, że $(*)$ zachodzi także dla $i = 4$.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 587. Mamy dwa różnoimienne ładunki punktowe q_1 i q_2 położone w odległości l od siebie. Cząstka o masie m i ładunku q_3 takiego samego znaku co q_2 leci po prostej łączącej oba ładunki od strony q_1. Jaką minimalną prędkość w dużej odległości od układu powinna mieć ta cząstka, żeby dotrzeć do ładunku q_1?
Rozwiązanie na str. 4



F 588. Dwa jednakowe koraliki o masach m i jednakowych ładunkach q zaczynają się ślizgać po dwóch jednakowych sztywnych i nieprzewodzących prętach. Pręty leżą w tej samej pionowej płaszczyźnie, każdy z nich jest nachylony do poziomu pod kątem α (rys.). Na jaką maksymalną wysokość nad początkowym położeniem wzniosą się koraliki? Początkowo koraliki znajdowały się w odległości L od siebie i w odległości l od końców prętów. Zaniedbać siły tarcia.
Rozwiązanie na str. 1

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2003

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z matematyki nr 453, 454

Redaguje Marcin E. KUCZMA

453. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2+3y=u^2 \\ y^2+3x=v^2 \end{cases}$$

w dodatnich liczbach całkowitych x, y, u, v.

454. Znaleźć taką stałą C, by dla każdej liczby naturalnej n oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych $a_1,\ldots,a_n>0$ zachodziła nierówność

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+\ldots+a_n}\leqslant C\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

(im mniejsza stała C, tym wyższa ocena za rozwiązanie).

Zadanie **454** (z podaną przykładową wartością stałej C) zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
441 ($WT=2{,}84$) i **442** ($WT=2{,}12$)
z numeru 5/2002

Bartłomiej Dyda	– Wrocław	42,04
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	42,00
Piotr Kumor	– Olsztyn	41,74
Marcin Peczarski	– Latchorzew	38,65

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2002

Przypominamy treść zadań:

445. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla $x,y\in\mathbb{R}$ równanie

$$f(f(x-y))=f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy.$$

446. Liczby całkowite a, b są związane równością

$$2a^2+a=3b^2+b.$$

Dowieść, że różnica $a-b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

445. Niech f będzie funkcją spełniającą to równanie. Oznaczmy zbiór jej wszystkich wartości przez W oraz przyjmijmy $f(0)=c$. Dla $y=0$ równanie przybiera postać

$$f(f(x))=f(x)-c+cf(x),$$

co można zapisać jako

(1) $\qquad f(w)=(c+1)w-c \quad$ dla $\quad w\in W.$

W szczególności $f(c)=c^2$. Podstawiając w zadanym równaniu $x=y$ otrzymujemy stąd

(2) $\qquad f(x)^2=x^2+c^2 \quad$ dla $\quad x\in\mathbb{R}.$

Podnosimy (1) do kwadratu i uwzględniając wzór (2) dostajemy po redukcji

(3) $\qquad (c^2+2c)w^2=(2c^2+2c)w \quad$ dla $\quad w\in W.$

Przypuśćmy, że $c\neq 0$; wówczas z równości (1) wynika, że $0\notin W$. Dzielimy równanie (3) przez cw, otrzymując w wyniku $(c+2)w=2c+2$ dla wszystkich $w\in W$. To znaczy, że zbiór W jest jednoelementowy, czyli f jest funkcją stałą. Ale żadna funkcja stała nie spełnia wyjściowego równania.

W takim razie $c=0$. Wykażemy, że $W=\mathbb{R}$. Weźmy dowolną liczbę $y\in\mathbb{R}$. W wyjściowym równaniu podstawiamy $x=0$, otrzymując $f(f(-y))=-f(y)$. Z równania (2) mamy zaś $f(y)^2=y^2$; wobec tego

$$y=f(y) \quad \text{lub} \quad y=-f(y)=f(f(-y)).$$

W każdym przypadku $y\in W$.

Zatem istotnie $W=\mathbb{R}$. Wzór (1) daje ostateczną odpowiedź: $f(x)=x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$. Jest to jedyna funkcja spełniająca rozważane równanie.

446. Przekształcamy daną równość:

(4) $\qquad b^2=2a^2-2b^2+a-b=(a-b)(2a+2b+1).$

Każdy dzielnik pierwszy różnicy $a-b$ jest, jak widać, dzielnikiem liczby b, zatem także i liczby a; nie jest więc dzielnikiem liczby $2a+2b+1$. To znaczy, że w rozkładzie liczby $a-b$ występuje w takiej samej potędze, jak w rozkładzie liczby b^2, czyli w potędze parzystej. Stąd wniosek, że liczba $a-b$ jest albo kwadratem liczby całkowitej (teza zadania!) albo „minus kwadratem” – a w takim przypadku czynnik $2a+2b+1$ jest, wobec (4), także „minus kwadratem”:

(5) $\qquad a-b=-c^2, \qquad 2a+2b+1=-d^2.$

Pozostaje wyeliminować ten przypadek. Przypuśćmy wobec tego, że zachodzą związki (5). W drugim z nich mamy po lewej stronie liczbę nieparzystą; zatem $d^2\equiv 1 \pmod 8$, skąd $2a+2b\equiv -2 \pmod 8$, czyli $a+b\equiv -1 \pmod 4$. Zatem liczby a i b są różnej parzystości; z pierwszego równania (5) wnosimy, że $a-b\equiv -1 \pmod 4$. Dodajemy uzyskane związki: $2a\equiv -2 \pmod 4$. To pokazuje, że a jest liczbą nieparzystą; b jest więc liczbą parzystą i mamy sprzeczność z równaniem danym w treści zadania. Sprzeczność kończy dowód.

Zadania z fizyki nr 350, 351

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2003

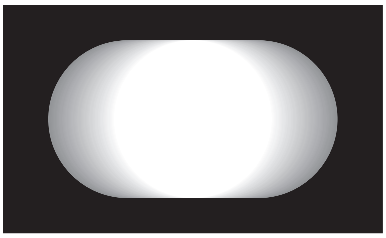
350. Na gładkiej poziomej powierzchni stoi miotacz o masie M, początkowo nieruchomy. Jeśli praca mięśni miotacza w czasie rzutu jest ustalona, to pod jakim kątem α do poziomu miotacz powinien wyrzucić kulę o masie m, żeby zasięg rzutu był maksymalny? Pominąć rozmiary miotacza i opór powietrza.

351. Światło słoneczne przechodzi prostopadle przez szczelinę o wymiarach 3×60 mm i tworzy „zajączka” (rys. 1) na ekranie w zaciemnionym pomieszczeniu. Podać przybliżoną wartość odległości ekranu od szczeliny. Pozostałe niezbędne dane wziąć z tablic.

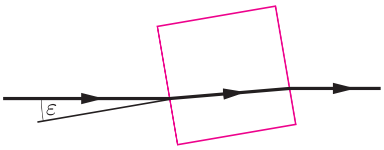
Uwaga: wielkość rysunku nie odpowiada rzeczywistości, więc nie należy się kierować jego ogólnym rozmiarem.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **336** ($WT = 1{,}15$), **337** ($WT = 1{,}00$), **338** ($WT = 2{,}75$) i **339** ($WT = 2{,}70$) z numerów 4/2002 i 5/2002

Aleksander Surma	– Myszków	42,81
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	25,76
Tomasz Wietecha	– Tarnów	14,00



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2002

Przypominamy treść zadań:

342. Czy można tak ustawić dwie radiowe anteny nadawcze i dobrać przesunięcie fazy między sygnałami emitowanymi przez nie, aby natężenie promieniowania wynosiło 0 w kierunkach północnym i wschodnim (i tylko w tych dwóch kierunkach), a było maksymalne w kierunkach południowym i zachodnim? Każda z anten osobno wysyła falę harmoniczną o danej długości λ jednakowo we wszystkich kierunkach poziomych (np. anteny są pionowymi masztami), a natężenie ich promieniowania jest jednakowe.

343. a) Na sześcian o boku $a = 5$ cm wykonany ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}5$ pada pod niewielkim kątem ε promień światła (rys. 2). Podać wzór na wartość przesunięcia równoległego tego promienia.

b) W jednej z metod szybkiego filmowania zamiast migawki stosowany jest obracający się sześcian, umieszczony między obiektywem a taśmą filmową. Taśma porusza się wtedy ruchem jednostajnym, a jednostajny obrót sześcianu powoduje, że każdy kolejny obraz jest względem niej nieruchomy. Jeśli sześcian opisany w punkcie a) wykonuje $f = 200$ obrotów na sekundę, to z jaką prędkością powinna przesuwać się taśma?

c) Jakie zalety może mieć zastosowanie takiego urządzenia zamiast tradycyjnego mechanizmu chwytakowego, w którym film porusza się ruchem skokowym?

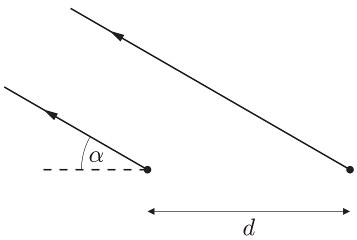
342. Składając dwa drgania harmoniczne o jednakowej amplitudzie A z przesunięciem fazy φ

$$A\sin(\omega t) + A\ \sin(\omega t + \varphi) = 2A\cos(\varphi/2)\sin(\omega t + \varphi/2),$$

otrzymujemy – jak widać – drganie o amplitudzie równej $2A|\cos(\varphi/2)|$. W naszym zadaniu występują dwa źródła przesunięcia fazy – jedno wynika z przesunięcia przestrzennego, czyli

$$\varphi_1 = 2\pi d\cos\alpha/\lambda$$

(gdzie d jest odległością między antenami, a α – kątem kierunkowym, zob. rys. 3), natomiast szukane dodatkowe przesunięcie fazy oznaczmy jako φ_2.



Rys. 3

Zerowa wartość natężenia fali wypadkowej występuje w kierunkach określonych warunkiem

$$\varphi = 2\pi d\cos\alpha/\lambda + \varphi_2 = \pi, 3\pi, 5\pi\ldots$$

a maksymalna wartość – w kierunkach określonych warunkiem

$$\varphi = 2\pi d\cos\alpha/\lambda + \varphi_2 = 0, 2\pi, 4\pi\ldots$$

Ponieważ warunki te są „nieczułe” na odbicie $\alpha \longrightarrow -\alpha$, więc widać, że anteny należy przesunąć względem siebie wzdłuż osi północny wschód–południowy zachód i w pierwszym wzorze podstawić $\alpha = 45°$, a w drugim – $\alpha = 135°$. Warunki zadania będą spełnione, jeśli

$$\varphi_2 = \pi/2, \qquad d/\lambda = \sqrt{2}/4.$$

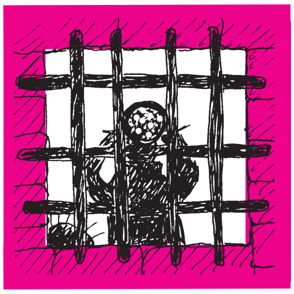
343. a) Dla małych ε kąt załamania jest równy w przybliżeniu ε/n, a kąt odchylenia promienia od kierunku początkowego – $\varepsilon(1 - 1/n)$. Stąd na drodze a przesunięcie promienia wyniesie $a\varepsilon(1 - 1/n)$.

b) Ponieważ prędkość kątowa sześcianu wynosi $2\pi f$, więc „szybkość przesuwania się promienia” (szybkość taśmy) jest równa

$$2\pi a\ f(1 - 1/n) = 20{,}9\ \text{m/s}.$$

c) Jednostajny ruch taśmy przebiega bez szarpania, a więc może być znacznie szybszy od ruchu skokowego. To samo dotyczy ruchu obrotowego sześcianu, jeśli porównamy go z tradycyjną migawką.

Patrz w niebo



Nazwa „ciemna materia” używana na określenie ciągle tajemniczej materii wystepującej – jak się wydaje – w dużych ilościach we Wszechświecie, jest częściowo myląca. Jej natura jest do dziś nieznana, a właściwie wygląda na to, że występuje w kilku postaciach. Jej część mogą zapewne stanowić rozmaite cząstki elementarne (mówi się „egzotyczne” – cokolwiek to znaczy), inna część to ciemne planetopodobne globy, a jeszcze inna część to materia jak najbardziej świecąca, mianowicie bardzo słabe gwiazdy. Popularnym typem takich gwiazd są białe karły, tj. późne stadia ewolucji gwiazd średnio masywnych. Są to gwiazdy wprawdzie gorące, ale małe, dlatego ich jasność absolutna jest znacznie mniejsza niż Słońca. Zrozumiałe, że ich cechy fizyczne, rozmieszczenie, liczebność itd. można badać raczej w okolicy Słońca, bo z wielkiej odległości ich po prostu nie widać.

Ale pracuje przecież Teleskop Hubble'a! W 1995 roku za jego pomocą wykonano pierwsze zdjęcie tzw. Głębokiego Pola Hubble'a (Hubble Deep Field), czyli pewnego obszaru nieba, na którym widać niemal wyłącznie odległe galaktyki – gwiazd należących do naszej Galaktyki jest tam niewiele. Porównanie tego zdjęcia z wykonanym dwa lata później ujawniło pięć obiektów o jasności 28 mag, które w czasie tych dwóch lat zmieniły położenia o kilka setnych sekundy łuku. Początkowo sądzono, że jest to efekt pozorny wynikający z tego, że w odległych galaktykach wybuchły supernowe, powodując przesunięcie „środka jasności” swoich galaktyk. Bardziej drobiazgowa analiza tych obserwacji doprowadziła jednak do wniosku, że muszą to być stare (liczące 12 mld lat) białe karły należące do halo naszej Galaktyki, które naprawdę zmieniają położenie na niebie podczas obiegania jej centrum. Obserwowane cechy i liczebność tych obiektów zgadza się w przybliżeniu z ich parametrami oczekiwanymi na podstawie obserwacji zjawiska soczewkowania grawitacyjnego – oczywiście o ile można wyciągać tak daleko idące wnioski na podstawie tak skąpego jeszcze materiału obserwacyjnego. Pojawiają się przy tym inne zagadki, np. przy szacowanej ilości białych karłów młode galaktyki powinny być jaśniejsze, a ich materia międzygwiazdowa bardziej bogata w ciężkie pierwiastki, niż to się obserwuje. Aby te wszystkie fakty uzgodnić, Teleskop Hubble'a zapewne jeszcze nieraz będzie musiał pracować na granicy swoich możliwości.

Tomasz KWAST

Styczeń

Wysoko w kierunku północnozachodnim widać w styczniowe wieczory Kasjopeję, której pięć najjaśniejszych gwiazd tworzy charakterystyczną rozciągniętą literę W lub – jak kto woli – M. Gwiazdozbiór leży w Drodze Mlecznej, przez co dowolny jego fragment jest bardzo bogaty w gwiazdy i gromady otwarte, co pięknie widać przez lornetkę. Ale Kasjopeja słynie też z tego, czego okiem, uzbrojonym nawet w teleskop, nie widać. Cassiopeia A to silne radioźródło będące pozostałością po supernowej, która wybuchła około 1700 r., przy czym wybuch w ogóle nie został zauważony. Cassiopeia B to inne radioźródło będące pozostałością po Supernowej Tychona Brahego z 1572 r. – ten wybuch widziało wielu ludzi. Wreszcie w odległości rzędu 1 Mpc znajduje się tam spora galaktyka o nazwie Maffei 1 (od nazwiska włoskiego astronoma). Jej obecność ujawniły obserwacje w podczerwieni, bowiem promieniowanie to częściowo przechodzi przez warstwę materii międzygwiazdowej naszej Galaktyki.

Wenus jest na granicy Skorpiona i Wężownika i widać ją przed wschodem Słońca. 11 I osiąga najwieksza kątową odległość od Słońca. Niedaleko w Wadze jest Mars, który oczywiście też wschodzi nad ranem. Jowisz jest na granicy Raka i Lwa i widać go praktycznie przez całą noc, a Saturn w Byku, przez co widać go w drugiej połowie nocy. Nów Księżyca wypada 2 I, a pełnia 18 I. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych gwiazd w styczniu nie będzie. 4 I Ziemia znajdzie się w peryhelium swojej orbity, co nie przeszkadza, że zima jest w pełni.

T. K.

Rozwiązanie zadania M 1014.
Niech $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A_1A_2}$ i $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A_1A_0}$. Wówczas z warunku $(*)$ dla $i = 0, 1$ wynika, że

$$\overrightarrow{A_1A_3} = a\cdot\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

oraz

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{u} + b\cdot\overrightarrow{v},$$

dla pewnych liczb a, b. Zatem

$$\overrightarrow{A_2A_3} = (a-1)\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v},$$

$$\overrightarrow{A_3A_4} = (1-a)\overrightarrow{u} + (b-1)\overrightarrow{v}.$$

Warunki $(*)$ dla $i = 2, 3$ przyjmują postać

$$\frac{a-1}{1} = \frac{1}{b}, \quad \frac{1-a}{1} = \frac{b-1}{-1}.$$

Stąd

$$a = b, \quad a(a-1) = 1$$

i zatem

$$\overrightarrow{A_1A_3} = a\cdot\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{A_4A_0} = \overrightarrow{u} + (a-1)\overrightarrow{v}.$$

01/03 (61)
$\Gamma\lim_{n\to\infty}$atias

O RÓŻNYCH SUMACH POTĘG

Dziś kolej na **różne** sumy **trzynastych potęg**. Różne sumy, czyli przypadki, kiedy sumy równe być nie mogą.

Oto zadanie z Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu z roku 2001.

Zadanie. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13}=z^{13}$$

w liczbach całkowitych nieujemnych

$$a,b,c,\ldots\ldots,y,z\leqslant 100.$$

Uwaga. W równaniu występuje 26 niewiadomych.

Rozwiązanie: Odnotujmy najpierw, że równanie ma trywialne rozwiązania, w których jedna z liczb $a,b,c,\ldots,y$ jest równa z, a pozostałe są zerami. Dla innych rozwiązań zachodzi nierówność

$$z=\frac{z^{13}}{z^{12}}=\frac{a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13}}{z^{12}}<$$
$$<a+b+c+\ldots+y.$$

Ponadto z małego twierdzenia Fermata wynika podzielność $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13|A^{13}-A$, czyli $2730|A^{13}-A$ dla dowolnej liczby całkowitej A. Stąd

$$a+b+c+\ldots+y\equiv a^{13}+b^{13}+c^{13}+\ldots+y^{13}=$$
$$=z^{13}\equiv z(\mathrm{mod}\ 2730),$$

co daje

$$a+b+c+\ldots+y\geqslant z+2730>2730$$

wbrew założeniu, że $a+b+c+\ldots+y\leqslant 2500$.

Jak widzimy z powyższego rozwiązania, otrzymaliśmy twierdzenie mówiące, że trzynasta potęga liczby nie większej od 100 nie daje się w nietrywialny sposób rozłożyć na sumę co najwyżej 25 (można to łatwo zwiększyć do 28) trzynastych potęg.

Nie sposób nie przymierzyć jako wykładnika przecudnej liczby 37 (o trzydziestu siedmiu jej własnościach można było przeczytać w Gammalimatiasie na przełomie tysiącleci).

Otóż z małego twierdzenia Fermata wynika podzielność $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot19\cdot37|A^{37}-A$, czyli $1919190|A^{37}-A$ dla dowolnej liczby całkowitej A. To dowodzi na przykład, że 37-mej potęgi liczby mniejszej od 1000 nie można rozłożyć na sumę mniej niż 1920 37-mych potęg.

Skoro niniejszy Gammalimatias ma numer 61, wypada napomknąć też o sumach 61-szych potęg.

Z małego twierdzenia Fermata wynika podzielność $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot31\cdot61|A^{61}-A$, czyli $56786730|A^{61}-A$ dla dowolnej liczby całkowitej A.

Tak więc 61-sza potęga liczby mniejszej od 1000 nie daje się nietrywialnie przedstawić jako suma mniej niż 56787 61-szych potęg.

Z kolei podzielność $1703601900|A^{62}-A^2$ pokazuje, że 62-ga potęga liczby mniejszej niż 1000 nie rozkłada się na sumę mniej niż 1704 62-gich potęg.

Innym tego typu wykładnikiem jest 73, gdzie mamy $140100870|A^{73}-A$.

Ciekawy jest też przypadek 16-tych potęg. Otóż 16-ta potęga liczby parzystej jest podzielna przez 64 (tak nudne to spostrzeżenie, że pewnie ziewasz, Drogi Czytelniku). Natomiast 16-ta potęga liczby nieparzystej przy dzieleniu przez 64 daje resztę 1. Wniosek stąd, że w jakiejkolwiek równości sum 16-tych potęg, liczby nieparzystych składników po obu stronach dają przy dzieleniu przez 64 tę samą resztę.

Przypuśćmy, że szukamy rozkładu 16-tej potęgi na sumę co najwyżej 63 16-tych potęg. Wobec tego możliwe są dwa przypadki:

a) **16-ta potęga, którą chcemy rozłożyć, jest parzysta.** Wówczas w szukanej sumie wszystkie składniki są parzyste, można więc wszystkie liczby podzielić przez 2, sprowadzając problem do następnego przypadku.

b) **16-ta potęga, którą chcemy rozłożyć, jest nieparzysta.** Wtedy w szukanej sumie 16-tych potęg dokładnie jeden składnik jest nieparzysty. Mamy więc

$$A^{16}=B^{16}+\ldots,$$

gdzie A i B są nieparzyste, a kropki oznaczają sumę 16-tych potęg liczb parzystych. Mamy wówczas

$$2^{16}|A^{16}-B^{16}\ ,$$

czyli

$$2^{16}\left|\left(A^8+B^8\right)\left(A^4+B^4\right)\left(A^2+B^2\right)(A+B)(A-B)\right.$$

Każda z liczb A^8+B^8, A^4+B^4 i A^2+B^2 jest parzysta, ale nie jest podzielna przez 4. Mamy więc

$$2^{13}|(A+B)(A-B)\ ,$$

przy czym jedna z liczb $A+B$ i $A-B$ jest parzysta niepodzielna przez 4, a druga jest podzielna przez 2^{12}. Stąd już nietrudno otrzymać nierówność $A>2^{11}=2048$.

W istocie udało mi się rozłożyć liczbę 2091^{16} na sumę 51 16-tych potęg liczb całkowitych dodatnich.

Identyczne rozumowanie pokazuje, że liczba, której 32-ga potęga rozkłada się na sumę nie więcej niż 127 32-gich potęg, musi być większa niż $2^{32-6}=2^{26}=$ $=67108864$.

Podobnie liczba, której 64-ta potęga rozkłada się na sumę nie więcej niż 255 64-tych potęg, musi być większa niż $2^{64-7}=2^{57}$, a to już jest liczba 18-cyfrowa.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

XXV Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki

Serdecznie zapraszamy

W tym roku postanowiliśmy poświęcić zaproszeniu do udziału w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki całą ośmiostronicową wkładkę. Przyczyną tej decyzji jest chęć wytłumaczenia, na czym ten Konkurs polega, oraz zamiar przedstawienia kilku możliwych tematów prac na ten Konkurs.

Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki to rywalizacja między samodzielnymi pracami badawczymi uczniów szkół licealnych (nie wykluczamy też gimnazjalistów, ale nie ma dla nich żadnych specjalnych ułatwień). Praca badawcza zaś to opracowanie tematu, który w taki sposób, jaki został zaprezentowany w pracy konkursowej, jeszcze opracowany nie został. Ten sposób musi się różnić merytorycznie (czyli z punktu widzenia matematyki) od ujęć dostępnych w literaturze, niezależnie od jej nośnika (a więc publikacji papierowej, internetowej, filmowej itd.). Nie interesuje nas zatem inne ułożenie redakcyjne, opatrzenie innymi komentarzami rzeczy gotowych.

Są zresztą konkursy na twórcze opracowanie tematów matematycznych zaproponowanych przez organizatorów tych konkursów.

Matematyka jest jednak na tyle bogata, że każdy może znaleźć dla siebie wiele nierozwiązanych problemów i nie wszystkie z nich wymagają profesjonalnej techniki i rutyny – często błysk natchnienia, muśnięcie skrzydłem muzy wystarczy, by odkryć coś nowego. Zaproponowane w tej wkładce tematy będą sugerowały pewne okolice, w których można takich odkryć poszukiwać. Nie mamy pewności, że te odkrycia tam są, ale mamy pewną rutynę, która pozwala nam wskazywać te, a nie inne, okolice tak, jak geolog może sugerować, gdzie szukać złota czy diamentów.

Laureaci naszych Konkursów, odbywających się już od ćwierć wieku, rozmaicie ułożyli swoje życie. Są jednak wśród nich wybitni uczeni, a kilku młodszych ma „w kieszeni” medal z urządzanego przez Unię Europejską konkursu na Młodego Uczonego Europejskiego. Konkurs zaowocował także wieloma publikacjami w czasopismach fachowych.

Zapraszamy do udziału.

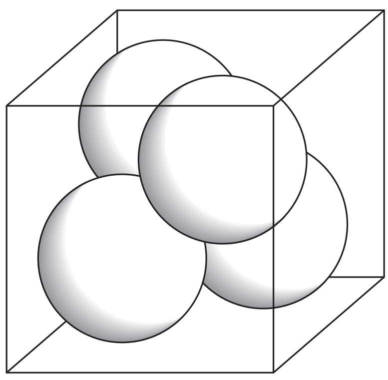
Oblicz wartość funkcji

Oczywiście istnieje wiele funkcji, dla których nie da się obliczyć ich konkretnych wartości i to już dla, zdawałoby się, najprostszych argumentów. Niektóre z takich problemów mają renomę niesłychanie trudnych (choćby problem obliczania liczb Ramseya – patrz np. *Delta* 1/2002 – powszechnie się sądzi, że znalezienie wartości, powiedzmy, $R(6,6)$ długo jeszcze przekraczać będzie ludzkie możliwości).

Ale czasem funkcja nie ma złej sławy. Weźmy choćby funkcję, która odpowiada na pytanie, jak wielkie kule mogą się zmieścić w sześcianie.

Dokładniej: w sześciennym pudełku o krawędzi 1 znajduje się n jednakowych kul; funkcja f przyporządkowuje każdemu n największą wartość $f(n)$ średnicy kul – n kul o takiej średnicy zmieści się jeszcze w pudełku, n kul o większej średnicy umieścić się w pudełku nie da.

Już z samej definicji widać, że f jest funkcją nierosnącą.



Oczywiście $f(1) = 1$. Nie jest specjalnie trudno sprawdzić, że

$$f(2) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \quad f(3) = 2-\sqrt{2} = f(4).$$

I tu jest zaskoczenie: funkcja nie jest ściśle malejąca.

Bez trudu można zauważyć, że np. $f(8) = \frac{1}{2}$. Ale jak obliczyć wartości funkcji dla 5, 6, 7, czy innych wartości nie będących sześcianami? A jak często funkcja przyjmuje te same wartości dla kolejnych liczb naturalnych? Czy „postoje” mogą być dłuższe? Jak długie?

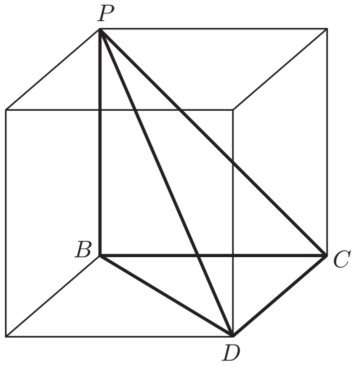
Słowem, pytań jest wiele. Wiele jest też naturalnie zdefiniowanych funkcji do zbadania.

M. K.

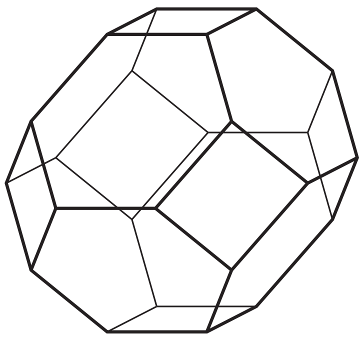
Wypełnianie przestrzeni

Nie jest trudno wypełnić szczelnie przestrzeń jednakowymi sześcianami – każdy wskaże bez trudu kilka sposobów. Jest niemożliwe szczelne wypełnienie przestrzeni jednakowymi czworościanami foremnymi – co drugi potrafi to udowodnić. Trochę trudniej będzie wykazać, że pokazanym na rysunku 1 czworościanem przestrzeń można szczelnie wypełnić.

W *Kalejdoskopie Matematycznym* Steinhausa (i w *Delcie* 9/1996) można znaleźć informacje, jak wypełnić przestrzeń czternastościanami powstałymi przez obcięcie ośmiościanowi foremnemu wszystkich rogów tak, aby wszystkie krawędzie pozostałego wielościanu były równej długości (rys. 2).



Rys. 1. $PB \perp BC \perp CD \perp PB$ i $PB = BC = CD$



Rys. 2

Kolekcja wypełniających przestrzeń wielościanów wypukłych nie jest pełna. Nie wiadomo już np. jak wyglądają wszystkie czworościany, którymi można szczelnie wypełnić przestrzeń. Albo np. pięciościany. Albo czy istnieje górne ograniczenie na liczbę ścian wielościanu wypukłego, którego kopiami da się szczelnie wypełnić przestrzeń? Pytań można postawić bardzo wiele i zapewne na wiele z nich uda się znaleźć odpowiedź.

Oczywiście problem był i jest badany. Można więc znaleźć informacje o tym, co powszechnie wiadomo. Żadna całościowa teoria na ten temat jednak nie została zbudowana.

Hasła: XVIII problem Hilberta, parkietaż, krystalografia.

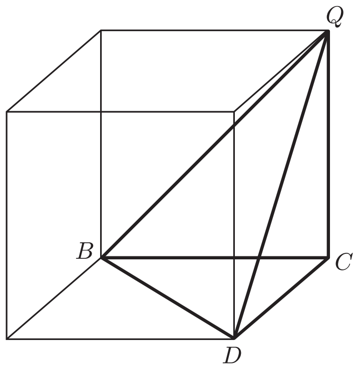
M. K.

Przestrzenne tangramy

Tangram to takie płaskie kostki, z których można ułożyć różne figury. Przestrzenny tangram to takie klocki przestrzenne, z których można ułożyć różne wielościany. Pamiętajmy, że za każdym razem muszą być użyte wszystkie klocki. Czyli równoważne „tangramowo” wielościany mają równe objętości.

Zażądajmy dodatkowo, aby ułożony z takich kostek wielościan był wypukły. Nie jest oczywiste, czy z każdego takiego tangramu można ułożyć choćby dwa różne wypukłe wielościany. Czasami jednak tak się zdarza. Np. czworościan z rysunku 1 można pociąć na mniejsze części – wielościany, z których da się ułożyć sześcian. Nie wiadomo jednak, jaka jest najmniejsza liczba tych mniejszych części.

Ale żadne pocięcie czworościanu foremnego na skończoną liczbę klocków wielościennych nie pozwoli ułożyć z tych klocków sześcianu. Podobnie, żadne pocięcie na skończoną liczbę wielościennych klocków czworościanu z rysunku 3 nie pozwoli na ułożenie z nich sześcianu. Ale czy jakieś klocki z tego czworościanu pozwolą na ułożenie z nich czworościanu foremnego?



Rys. 3. $QC \perp BC \perp DC \perp QC$ i $QC = BC = DC$

Zauważmy, że mamy dość zaskakujący wynik: czworościany z rysunków 1 i 3 nie są „tangramowo” równoważne.

A czy któryś z tych czworościanów jest „tangramowo” równoważny z czternastościanem z rysunku 2?

Dla dowolnego konkretnego wielościanu można poszukać jak najwięcej wielościanów, z którymi jest „tangramowo” równoważny.

Istnieje dość rozwinięta teoria zajmująca się takimi tangramami. Jednak rezultatów dotyczących konkretnych wielościanów jest w niej mało. Stąd pole do popisu.

Hasła: III problem Hilberta, niezmiennik Dehna, równoważność przez rozkład.

M. K.

Liczby niedoskonałe

Pitagorejczycy nadawali duże znaczenie liczbom doskonałym, czyli takim liczbom naturalnym, które są równe sumie swoich dzielników właściwych (różnych od samej tej liczby). Nazwijmy liczbę naturalną *poddoskonałą*, gdy suma jej dodatnich dzielników właściwych jest od niej mniejsza (np. 4), a *naddoskonałą* – gdy suma jej dodatnich dzielników właściwych jest od niej większa (np. 12). Łatwo zauważyć, że liczb poddoskonałych jest nieskończenie wiele, ponieważ każda liczba pierwsza jest poddoskonała. Czy liczb naddoskonałych też jest nieskończenie wiele? Czy istnieją dowolnie długie ciągi kolejnych liczb naddoskonałych? A liczb poddoskonałych? Które liczby – poddoskonałe czy naddoskonałe – są gęściej rozmieszczone wśród liczb naturalnych? A może istnieje granica stosunku liczby liczb naddoskonałych nie większych od n do n? Pytania można mnożyć (niemal) bez ograniczeń.

W. B.

Znaczące współczynniki

Wykres funkcji liniowej

$$f(x) = ax + b$$

zależy od każdego ze współczynników: a decyduje o nachyleniu prostej, b o jej położeniu względem osi współrzędnych. Wiemy, co się dzieje z funkcją kwadratową postaci

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

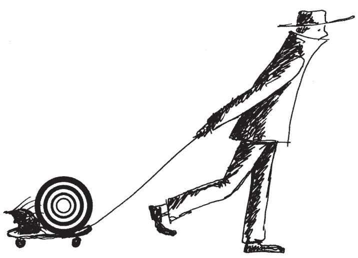
gdy zmieniamy współczynnik a: ramiona paraboli będą zmieniać nachylenie, może nastąpić odwrócenie paraboli. Wiemy także, co się stanie, gdy zmieniać będziemy współczynnik c, a nawet potrafimy powiedzieć, co się dzieje z parabolą, gdy zmieniamy tylko współczynnik b (właśnie, co?). Czy można w podobny sposób opisać znaczenia współczynników wielomianów wyższych stopni, poczynając od stopnia trzeciego? Jak wpływa na wykres zmiana każdego z nich? Pewne intuicje można sobie zapewne wyrobić na podstawie wykresów oglądanych na ekranie komputera lub kalkulatora graficznego, ale czy można je uściślić i opisać matematycznie?

W. B.

Ukryta podzielność

Kiedy wartości wielomianu o współczynnikach całkowitych są dla wszystkich całkowitych argumentów podzielne przez ustaloną liczbę n? Na pewno wtedy, gdy wszystkie współczynniki danego wielomianu są podzielne przez n. To tak oczywisty przypadek, że nawet nie warto o nim wspominać. Ale czy tylko wtedy? Co będzie, kiedy współczynniki wielomianu nie mają wspólnego dzielnika większego od 1? Wtedy mimo wszystko wartości wielomianu mogą być podzielne przez ustaloną liczbę większą od 1!

Najprostszy przykład to wielomian $x^2 + x$, którego wartość dla dowolnej liczby całkowitej x jest parzysta. Podobnie, wartości wielomianu $x^3 + 5x$ są zawsze podzielne przez 6.



I stąd już możesz, drogi Czytelniku, wypłynąć na szerokie wody badacza ukrytych podzielności. Możesz znaleźć mnóstwo takich wielomianów. Może uda Ci się je jakoś sklasyfikować lub udowodnić jakieś twierdzenia o tym, kiedy taka ukryta podzielność na pewno występuje albo kiedy nie występuje. A jak tego będzie mało, zawsze można uciec w wielomiany wielu zmiennych, np. wartość wielomianu $xy^{25} - x^{49}y$ dla dowolnych całkowitych argumentów x i y jest podzielna przez 2730.

Jarosław WRÓBLEWSKI

Wyznaczniki dużych macierzy

Na ogół niewiele da się powiedzieć o wyznaczniku dużej macierzy poza podaniem definicji wyznacznika lub żmudnym wyliczeniem go w konkretnym przypadku.

Ale jeżeli macierz jest szczególnej postaci...

Co to znaczy „szczególnej postaci"? A to już zależy od Waszej inwencji twórczej.

Wyobraźmy sobie, że mamy macierz zbudowaną według prostego przepisu (a raczej ciąg (A_n) macierzy o wzrastających rozmiarach).

Na przykład macierz n na n postaci

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ma dwójki na przekątnej, jedynki bezpośrednio pod i nad przekątną, a poza tym zera.

Ile jest równy wyznacznik macierzy A_n? Nietrudno dostrzec, że $\det A_n = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}$, skąd otrzymujemy $\det A_n = n+1$.

A czemu jest równy wyznacznik macierzy

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

A macierzy

$$C_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

A innych, wymyślonych przez Was macierzy?

Jarosław WRÓBLEWSKI

A jednak całkowite

Liczba

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

jest całkowita dla dowolnych liczb naturalnych m i n. Fakt ten i niezliczone dowody jego są tak znane, że przytaczać ich po prostu nie wypada.

Jeśli jednak rozważymy liczbę

$$\frac{(m+n-1)!}{m!n!},$$

to na ogół nie będzie ona całkowita. Chyba że w jakiś szczególny sposób powiążemy m i n.

Na przykład liczba
$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$
jest całkowita dla każdego n. Nie jest mi znany kombinatoryczny dowód tego faktu, można go jednak udowodnić, wykorzystując nierówność
$$\left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n+1}{k}\right] \leqslant \left[\frac{2n}{k}\right],$$
gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

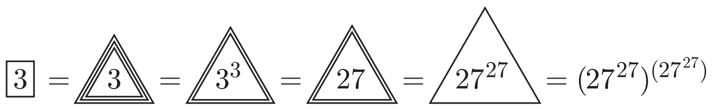
I tu zadanie dla Ciebie, drogi Czytelniku. Znaleźć inne sytuacje, w których liczba
$$\frac{(m+n-1)!}{m!n!}$$
jest całkowita. Mogą to być warunki na m i n (np. m, n większe od 0 i $m+n$ pierwsza) lub przykłady wyrażeń postaci
$$\frac{(an+cn+b+d-1)!}{(an+b)!(cn+d)!},$$
(gdzie a, b, c, d są ustalone) przyjmujących wartość całkowitą dla każdego n. Może uda Ci się udowodnić twierdzenia postaci *jak a, b, c, d są takie a takie, to jest dobrze, a jak są takie a takie, to jest źle.*

Ciekawa byłaby też odpowiedź na pytanie, czy istnieją takie a, b, c, d, że liczba
$$\frac{(an+cn+b+d-2)!}{(an+b)!(cn+d)!}$$
jest całkowita dla każdego n lub rozsądnie ogólny warunek na m i n pociągający całkowitość liczby
$$\frac{(m+n-2)!}{m!n!}.$$

Jarosław WRÓBLEWSKI

Magia liczby

Znana jest konstrukcja liczby mega pochodząca od Hugona Steinhausa i liczby moser pochodząca od Leo Mosera. Liczba a w trójkącie to prostu liczba a^a. Liczba a w prostokącie to liczba a otoczona a trójkątami.



Liczba a w pięciokącie to liczba a otoczona a prostokątami. Liczba mega to liczba 2 w pięciokącie. Moser to liczba 2 otoczona mega-kątem.

Skonstruujmy inną serię wielkich liczb. Dla dowolnych liczb naturalnych b i n przyjmijmy
$$(b,1,n) = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{n \text{ razy}} = b \textcircled{\scriptsize 1} n.$$

Oczywiście znaczek $\textcircled{\scriptsize 1}$ zastępuje tu znak mnożenia.
Dla $k \geqslant 2$ przyjmijmy
$$(b,k,n) = \underbrace{b \textcircled{\tiny k-1} b \textcircled{\tiny k-1} \ldots \textcircled{\tiny k-1} b}_{n \text{ razy}} = b \textcircled{\scriptsize k} n,$$

umawiając się, że działania wykonujemy „od tyłu" (tzn. od prawej do lewej). Jak za pomocą liczb (b,k,n) oszacować z dołu i z góry liczbę mega i moser? A może skonstruujecie inne liczby, które przydadzą się w szacunkach?

Przemysław PANEK i W. S.

Medaliści Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w latach 1978–2001

1978
medal **Z**łoty Paweł Domański (Poznań) *Liczby Fibonacciego*
medal **S**rebrny Urszula Łach (Wodzisław Śląski) *Równania różniczkowe i niektóre ich zastosowania w fizyce*
medal **B**rązowy Bogusława Grzywacz (Wrocław) *Przekształcenie afiniczne płaszczyzny na płaszczyznę w ujęciu analitycznym*

1979
Z Dorota Kuchta i Piotr Ponikowski (XIV LO we Wrocławiu) *Równania diofantyczne pierwszego stopnia*
S Marek Kubowicz (V LO w Krakowie) *Równania funkcyjne*
B Anna Brzezińska (III LO we Wrocławiu) *Nierówności i ich zastosowania*

1980
Z Zbigniew Jelonek (II LO w Krakowie) *Pewna analogia*
S Robert Cozaś (V LO w Krakowie) *Pewne równania rekurencyjne i ich zastosowanie w teorii ułamków łańcuchowych*
B Waldemar Hołubowski (LO w Mysłowicach) *Inwersja*

1981
Z Jarosław Wróblewski (XIV LO we Wrocławiu) *Wokół kongruencji w pierścieniu liczb algebraicznych całkowitych*
S Jacek Rzeźnikowski (II LO w Bydgoszczy) *Elementy geometrii metrycznej*
B Elżbieta Ziarko (LE w Wieliczce) *Metryka miejska i jej konsekwencje w planimetrii*

1982
Z Mariusz Skałba (IV LO w Krośnie) *O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb*
S Janusz Kalinowski (XIV LO we Wrocławiu) *Powierzchnie stopnia drugiego i rysowanie kwadryk za pomocą komputera WANG 2200T*
B Mirosław Matlęga (TB w Cieszynie) *Rozcięcia powierzchni jednostronnych*

1983
Z Jacek Kaleta (LO w Świdnicy) *Twierdzenie o pewnej szczególnej metodzie całkowania*
S Wojciech Wałecki (XIV LO w Warszawie) *O błonach mydlanych*
B Henryk Łukomski (ZSZ w Gliwicach) *Negacje liczb n-cyfrowych oraz otrzymywanie wyników negacji w układzie dziesiątkowym bez zamiany na układ dwójkowy*

1984
Z Michał Wojciechowski (XIV LO w Warszawie) *O pewnym rozkładzie figur środkowo symetrycznych*
S Bogdan Pelc (LO w Mikołowie) *Zastosowanie kongruencji w znajdowaniu cech podzielności w dowolnym układzie liczbowym*
B Joanna Karwowska (XX LO w Krakowie) *Potęgowanie macierzy czwórników*

1985
Z Piotr Hajłasz (XIV LO w Warszawie) *O pewnej metodzie dowodzenia nierówności*
S Bogdan Pelc (LO w Mikołowie) *O pewnym niezmienniku topologicznym wielościanów w przestrzeni n-wymiarowej*

1986
Z Piotr Jędrzejewicz (Toruń) *O pewnych własnościach przestrzeni euklidesowych*

1987
Z Andrzej Żuk (III LO we Wrocławiu) *Opis izometrii wybranych przestrzeni metrycznych*
B Lucyna Dziedzic (LO w Działdowie) *Teoria głodnej kozy*

1988
Z Andrzej Daniluk (V LO w Krakowie) *O pewnych przekształceniach płaszczyzny*
S Adam Czornik (I LO w Bytomiu) *Twierdzenia Steinera i Mascheroniego*

1989
Z Krzysztof Oleszkiewicz (LX LO w Warszawie) *Skacząc po stożkowych*
S Rafał Kapelko (III LO we Wrocławiu) *Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji zmiennej naturalnej*
B Katarzyna Trójca (I LO w Bytomiu) *Granica złożenia funkcji*

1990 – konkurs nie został ogłoszony

1991
Z Marcin Kasperski (IX LO w Warszawie) *27 zbiorów wypukłych bez środka symetrii*
S Grzegorz Zwara (IV LO w Toruniu) *Wspólne punkty stałe wielomianów komutujących*
B Małgorzata Sęk (ZSZ w Wieliczce) *Łamane spiralne*

1992
Z Marek Pycia (I LO w Bielsku-Białej) *Pewne nierówności funkcyjne*
B Krystian Witkowski (V LO w Krakowie) *O pewnych ciągach rekurencyjnych*

1993
S Ilona Królak (LO *Carolinum* w Nysie) *Symbol Newtona – inaczej*
B Roman Wencel (TElek. w Opolu) *Czytając Sierpińskiego*

1994
S Piotr Wojciech Śniady (XIV LO we Wrocławiu) *Geometryczne dowody twierdzeń dotyczących ułamków Fareya*
B Piotr Matusiewicz (THut.-Mech. w Ostrowcu Świętokrzyskim) *Ilustracja geometryczna najczęściej spotykanych średnich algebraicznych*

1995
Z Tomasz Osman (I LO w Kielcach) *Wielowymiarowe uogólnienie twierdzenia Bezouta*
S Krzysztof Krupiński (I LO w Jeleniej Górze) i Karol Tokarczyk (XIV LO we Wrocławiu) *Nakładanie się wielu figur wewnątrz wielokątów*
B Rafał Łochowski (ZSElek. w Radomiu) *Zależności między zbieżnością i rozbieżnością pewnych szeregów*

1996
Z Michał Stukow (I LO w Gdańsku) *Krótka historia dowodu pewnego twierdzenia*
S Adam Osękowski (XIV LO w Warszawie) *Zastosowanie liczb zespolonych w zadaniach geometrycznych*
B Tomasz Kowalski i Artur Wirowski (I LO w Łodzi) *Cechy podzielności liczb*

1997
Z Grzegorz Kapustka i Michał Kapustka (V LO w Krakowie) *O pewnych własnościach parzystokątów wpisanych i opisanych na okręgach*
B Maciej Mostowski (XIV LO w Warszawie) *O wielomianach przyjmujących w liczbach całkowitych wartości będące kwadratami liczb całkowitych*

1998
S Michał Ślęzak i Michał Tkacz (V LO w Krakowie) *Sfera dwunastu punktów*
B Jakub Gismatullin (XIV LO we Wrocławiu) *O pewnych własnościach sumy cyfr*

1999
Z Jakub Onufry Wojtaszczyk (XIV LO w Warszawie) *O liczbie podziałów wielokąta wypukłego na równoległoboki*
S Łukasz Kamiński i Paweł Rochman (IV LO w Toruniu) *Sumy ze współczynnikami Newtona*

2000
S Piotr Sulich (II LO w Olkuszu) *Obrót o kąt na płaszczyźnie: zastosowania i własności*
S Mirosław Żwiryn (XXVI LO w Łodzi) *Wstęp do teorii macierzy nD*

2001
Z Juliusz Jabłecki (III LO we Wrocławiu) *O pewnym równaniu funkcyjnym*
S Piotr Sulich (III LO w Olkuszu) i Maciej Zakarczemny (I LO w Opolu) *Analogia ciągu Fibonacciego i dowolnych rekurencji liniowych*
B Łukasz Brzyski (XII LO w Krakowie) *Prosta Eulera i jej własności*
B Jan Kowal (ZSMech.-Elek. w Żywcu) *Nie tylko cyrklem i linijką*

Rezultaty niektórych zwycięskich prac

Zbigniew Jelonek, *Pewna analogia*

Stożek to zbiór prostych mających wspólny punkt (lub kierunek) i przecinających pewną krzywą stopnia 2; stożek dualny to zbiór płaszczyzn mających wspólny punkt (lub kierunek) i stycznych do pewnej krzywej stopnia 2. Współstożkowość oznacza należenie do tego samego stożka. W pracy podane są analityczne warunki na to, by szóstka prostych (płaszczyzn) była współstożkowa. Wynika z tego wiele geometrycznych faktów, np.: elipsoida jest sferą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje 6 płaszczyzn współstożkowych przechodzących przez jej środek i wycinających z niej przekroje o równych polach.

Jarosław Wróblewski, *Wokół kongruencji w pierścieniu liczb algebraicznych całkowitych*

Liczby algebraiczne całkowite to pierwiastki wielomianów

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0,$$

gdzie c_i są całkowite; zbiór tych liczb oznaczmy przez A. Zbiór liczb postaci $a_1p + a_2\sqrt{p} + \ldots + a_n\sqrt[n]{p}$, gdzie a_i są całkowite, oznaczmy przez Q. Dla $a \in A$ zapiszemy $a \in (b_1, \ldots, b_n) \bmod p$, gdy $(a - b_1) \cdot \ldots \cdot (a - b_n) \in Q$. Główny wynik pracy to twierdzenie *jeśli $a_1, a_2 \in A$ oraz $a_1 \in (b_1, \ldots, b_n) \bmod p$ i $a_2 \in (d_1, \ldots, d_n) \bmod p$, to*
(1) $a_1 + a_2 \in (b_i + d_j) \bmod p$
($b_i + d_j$ to układ złożony ze wszystkich możliwych sum tej postaci dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$);
(2) $a_1 \cdot a_2 \in (b_i \cdot d_j) \bmod p$;
co pociąga za sobą
(3) *dla dowolnego wielomianu $W(x, y)$ o współczynnikach całkowitych $W(a_1, a_2) \in W(b_i, d_j) \bmod p$.*
Wynika z tego wiele konsekwencji, w szczególności np. liczba $(\sqrt{6} + \sqrt{19})^{1980} + (\sqrt{6} - \sqrt{19})^{1980}$ jest liczbą całkowitą, której ostatnią cyfrą jest 2.

Mariusz Skałba, *O pewnym problemie z elementarnej teorii liczb*

W pracy znajduje się ulepszenie dowodu Andrzeja Schinzla twierdzenia, że 7 jest jedyną liczbą pierwszą spełniającą, przy naturalnych x i y, równanie

$$p = (2x^2 - 1)/7 = 2y^2 - 1$$

(patrz W. Sierpiński, *Teoria liczb* cz. II) oraz uogólnienie tego faktu, a mianowicie
Dla $i = 1, 2$ trójmiany kwadratowe $f_i(x)$ mają współczynniki wymierne; Δ_i to ich wyróżniki, a A_i to współczynniki przy x^2. Jeśli $\Delta_1\Delta_2$ jest kwadratem liczby wymiernej oraz $A_1\Delta_2 - A_2\Delta_1 \neq 0$, to istnieje co najwyżej skończenie wiele takich liczb pierwszych p, że $p = f_1(x) = f_2(y)$ dla pewnych x, y całkowitych.

Ponadto podany został też algorytm znajdowania wszystkich tych liczb pierwszych.

Michał Wojciechowski, *O pewnym rozkładzie figur środkowo symetrycznych*

Praca powstała z okazji zamieszczonego w *Wiadomościach Matematycznych* t. XXIII.I zadania: *Udowodnić, że jeżeli F jest płaską figurą ograniczoną, mającą środek symetrii należący do niej, to nie można jej rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające.*

Praca zawiera kontrprzykłady, a więc przykłady figur spełniających założenia i dających się rozłożyć na figury przystające, a nawet spełniające dodatkowe warunki, jak spójność czy przeliczalność. W dalszej części pracy jest dowód, że gdy zażądamy, aby części, na które dzielimy, były nie tylko przystające, ale jeszcze środkowo symetryczne, to podział będzie już niemożliwy.

Krzysztof Oleszkiewicz, *Skacząc po stożkowych*

Praca poświęcona jest poszukiwaniu punktów kratowych na stożkowych danych równaniami

$$x^2 - kxy + y^2 - k = 0,$$

gdzie k jest ustaloną liczbą całkowitą. Podstawowym spostrzeżeniem jest fakt, że gdy punkt (a, b) leży na tej stożkowej, to leżą na niej również punkty $(kb - a, b)$ i $(a, ka - b)$, co – gdy jeden z punktów jest kratowy – pozwala znajdować dalsze takie punkty. Wszystkie znalezione przez powtarzanie tego spostrzeżenia punkty to *trajektoria* punktu (a, b). Uzyskany wynik jest następujący:

- gdy $|k| \leqslant 2$, punkty kratowe istnieją tylko dla $k = 0$ (jeden, $(0, 0)$) i dla $k = 1$ (cztery, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$).
- gdy $k \geqslant 3$, punkty kratowe istnieją tylko dla k będącego kwadratem liczby naturalnej i wtedy każdy z nich należy do trajektorii pewnego z punktów $(0, \sqrt{k})$, $(\sqrt{k}, 0)$, $(0, -\sqrt{k})$, $(-\sqrt{k}, 0)$.
- gdy $k \leqslant -3$, punkty kratowe istnieją tylko dla $k = -5$; są to wówczas punkty z wszystkich trajektorii następujących ośmiu punktów $(1, -2)$, $(-1, 2)$, $(-2, 1)$, $(2, -1)$, $(1, -3)$, $(-1, 3)$, $(-3, 1)$, $(3, -1)$.

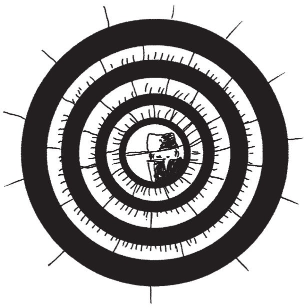
Marek Pycia, *Pewne nierówności funkcyjne*

Nierówność funkcyjna to problem znalezienia wszystkich funkcji, które spełniają dla wszystkich swoich argumentów daną nierówność. W pracy rozważana była nierówność

$$\alpha f(s) + \beta f(t) \leqslant f(as + bt),$$

gdzie $f : (0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, stałe α, β, a, b są dodatnie i $a < 1 < b$. Było to uogólnienie znanego (od niedawna) wyniku dla $\alpha = a$ i $\beta = b$. Podstawowy rezultat pracy to stwierdzenie: *jeśli ta nierówność ma rozwiązanie niezerowe, to ma rozwiązanie potęgowe.* Pozwoliło to na opisanie klas rozwiązań tej, jak też przeciwnej nierówności.

Konkurs Prac Młodych Naukowców organizowany przez Komisję Europejską



Od 1989 roku Komisja Europejska organizuje Konkurs Prac Młodych Naukowców, obejmujący wszystkie dziedziny nauk ścisłych i przyrodniczych. Konkurs polega na współzawodnictwie napisanych wcześniej prac uczestników. Szansę na nagrody mają prace stanowiące kompletne rozwiązanie ciekawego zagadnienia. Na konkurs trafiają, oczywiście, prace o rozmaitym poziomie, jednakże zdobywcy nagród prezentują dzieła na poziomie (co najmniej) niezłej polskiej pracy magisterskiej. Stanowi to poważne wyzwanie dla ewentualnych polskich uczestników. Polska bowiem ma prawo wysyłać na Konkurs swoich reprezentantów (w liczbie trzech) od 1995 roku. W krajach Unii Europejskiej konkurs ma bardzo dużą rangę: zdobycie nagrody w Konkursie jest cenione wyżej niż laury międzynarodowych Olimpiad. Rangę konkursu zapewnia z jednej strony wysoki poziom nagradzanych prac, z drugiej – Jury złożone z wybitnych naukowców. Nie bez znaczenia są wysokie nagrody (nie licząc wyróżnień): trzy pierwsze po 5000 euro, trzy drugie po 3000 euro oraz sześć trzecich po 1500 euro.

Polska czterokrotnie wśród prac zgłaszanych na Konkurs wysłała prace matematyczne. Wszystkie cztery razy autorzy prac zostali nagrodzeni.

W roku 1995, w Newcastle, Marcin Kowalczyk i Marcin Sawicki wywalczyli trzecią nagrodę za pracę *Siła zbioru*. W pracy tej przedstawili oryginalną koncepcję wprowadzenia nowego pojęcia (właśnie tytułowej siły), które uogólnia powszechnie używane sposoby charakteryzowania zbiorów: moc, charakterystykę Eulera, wymiar i miarę (względnie prawdopodobieństwo). Pojęcie to pozwala przyporządkowywać zbiorom wielomiany, których badanie pozwala uzyskać informacje o zbiorach, którym zostały przyporządkowane (*Delta* 3/1997).

W 1996 roku, w Helsinkach, Tomasz Osman i Maciej Kurowski zdobyli drugą nagrodę za pracę *Wielowymiarowe uogólnienie twierdzenia Bezout*, która stanowiła poszerzenie pracy, za którą pierwszy z autorów uzyskał w 1995 roku złoty medal na naszym Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki. Rezultat, w uproszczeniu, jest następujący. Jeśli wielomian n zmiennych rzeczywistych W_1 jest nierozkładalny (tzn. nie jest iloczynem dwóch innych niższego stopnia) oraz przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, a wielomian W_2 zeruje się wszędzie tam, gdzie zeruje się W_1, to wtedy wielomian W_2 dzieli się bez reszty przez wielomian W_1. Dowód wymagał zaawansowanych rozważań natury topologicznej (*Delta* 3/1996).

W 1998 roku, w Porto, Grzegorz i Michał Kapustkowie zdobyli trzecią nagrodę za pracę *O pewnych własnościach parzystokątów wpisanych i opisanych na okręgach* (złoty medal naszego KUPzM w 1997 roku). Główny wynik pracy to twierdzenie, że proste łączące przeciwległe boki parzystokąta wpisanego w pewien okrąg i, równocześnie, opisanego na innym przecinają się w jednym punkcie, a punkty przecięcia prostych zawierających przeciwległe boki leżą na jednej prostej. Kluczowy krok dowodu to stwierdzenie, że dowolny parzystokąt wpisany i opisany na elipsach współśrodkowych jest symetryczny względem ich środka (*Delta* 4/1998).

W 2000 roku, w Amsterdamie, Jakub Onufry Wojtaszczyk zdobył wyróżnienie (tygodniowa praktyka w obserwatorium astronomicznym na Wyspach Kanaryjskich) za pracę *O liczbie podziałów wielokąta wypukłego na równoległoboki* (złoty medal w naszym KUPzM w 1999 roku). Głównym rezultatem pracy jest oszacowanie, na ile różnych sposobów można podzielić $2n$-kąt foremny na romby. Wykorzystywane do tego jest wprowadzone przez Piotra Przytyckiego, kolegę autora, pojęcie nici: ciągu stykających się bokami rombów podziału łączących przeciwległe boki dzielonego wielokąta. Oszacowanie dolne autor uzyskuje przez spostrzeżenie, że $n-1$ nici można uzupełnić n-tą na $\binom{n}{2}+1$ sposobów. Oszacowanie górne to $n^{\binom{n}{2}/2}$ (*Delta* 3/2000).

Warto podkreślić, że wszystkie prace matematyczne, jakie zostały nagrodzone w Konkursie prowadzonym przez Komisję Europejską, pochodziły z Polski.

Polskie jury kwalifikujące prace do Konkursu Prac Młodych Naukowców jest akredytowane przy Krajowym Funduszu na rzecz Dzieci, ul. Chocimska 14, 00-791 Warszawa.

Zaleca się, aby proponowana praca była zakwalifikowana przez odpowiedzialną instytucję naukową, albo była laureatką poważnego konkursu, jak nasz KUPzM.