



SPIS TREŚCI NUMERU 12 (343)

Linie geodezyjne
Tomasz Kwast

Zadania

O średnich i wariancjach
Marek W. Gutowski

Turniej Młodych
Fizyków 2003

Wszystko ze sznurka
Marek Kordos

Mała Delta

Komputer, człowiek, pies...
Michał Szurek

Butelka Kleina

Lok Agnesi

Aktualności

Klub 44

Patrz w niebo

Grudzień

Gammalimatias

str. 1 „Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

str. 1 Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący,
Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hryniewicz,
str. 2 Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak,
Krzysztof Maślanka, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Zdzisław Pogoda,
Michał Różyczka, Konrad Rudnicki, Grzegorz Sitarski, Andrzej Woszczyk,
Wiesław Żelazko – przewodniczący.

str. 3 Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red.,
Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak,
str. 6 Anna Rudnik, Witold Sadowski, Joanna Udalska, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

str. 7 Skład systemem \TeX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

str.10 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**
Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
okresu prenumeraty.

str.13 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

str.13 **Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

str.14 Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

str.15 1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

str.16 2. Cena prenumeraty na II kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.

str.16 3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
„RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

str.16 4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty +
rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane
od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

str.17 Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto:
Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela
„RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana
Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax:
5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII – na I kwartał roku następnego,

do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,

do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,

do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie;
wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiwiw.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetowa wersja *Malej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Twierdzenie-wytrych

Linie geodezyjne

Tomasz KWAST



Każdy ma zapewne jakiś intuicyjny pogląd na to, co to jest linia prosta. Oczywiście cechą prostej jest m.in. to, że jej fragment, wyznaczony przez dwa punkty, jest najkrótszą linią łączącą te punkty. A czy linia najkrótsza musi być linią prostą? Okazuje się, że niekoniecznie, a zależy to od przestrzeni, której to pytanie dotyczy. W przestrzeni euklidesowej jedna z wymienionych własności linii pociąga za sobą nieuchronnie drugą. Ale jeżeli przestrzenią jest np. sfera, to najkrótsza linia łącząca leżące na niej dwa punkty (i leżąca w całości na sferze – to bardzo ważne!) – obrazowana przez naciągniętą między tymi punktami gumkę – jest w oczywisty sposób łukiem koła wielkiego. Rzecz jednak w tym, że jest ona łukiem z punktu widzenia obserwatora zewnętrznego, niemieszkającego w omawianej przestrzeni, tzn. na sferze. Dla mieszkańca sfery (płaszczyzna) jest ona linią „prostą” w tym właśnie sensie, że jest najkrótsza. Takie najkrótsze linie, będące uogólnieniem linii prostych znanych z życia codziennego, nazywają się liniami geodezyjnymi.

Znamy jednak bardziej złośliwe przestrzenie. Dwa punkty na powierzchni bocznej walca można połączyć symboliczną gumką, czyli linią geodezyjną, na dowolnie wiele sposobów, bo można ją poprowadzić rzeczywiście na oko najkrótszą drogą od jednego punktu do drugiego, albo opasawszy po drodze walec dowolną liczbę razy (chyba że oba punkty leżą na okręgu, którego płaszczyna jest prostopadła do osi walca). Aby więc nie kłopotać się tymi subtelnoszciami, definiuje się precyzyjniej linię geodezyjną jako linię lokalnie najkrótszą. Dodanie tego jednego słowa jest bardzo istotne, oznacza ono bowiem, że geodezyjną jest taka linia, której każdy łuk, łączący dwa dostatecznie bliskie punkty, jest łukiem najkrótszym.

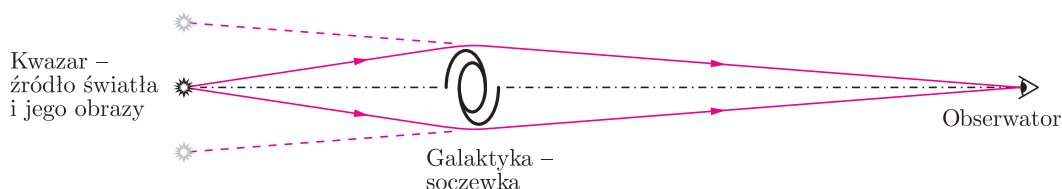
Według ogólnej teorii względności (OTW) fizyczną przestrzeń, w której żyjemy, można uważać za czterowymiarowy zbiór tzw. zdarzeń, tj. punktów, których trzy współrzędne opisują GDZIE coś się stało, a czwarta współrzędna określa KIEDY to się stało. Ta czterowymiarowa czasoprzestrzeń nie jest euklidesowa, lecz powyginana przez znajdujące się w niej masy. Genialność OTW polega m.in. na tym, że pozwoliła zastąpić mechanikę przez geometrię. Na przykład ruch sondy kosmicznej pod wpływem sił grawitacji słonecznej w zwykłej przestrzeni trójwymiarowej to ruch po linii geodezyjnej w czasoprzestrzeni powyginanej przez obecne w niej Słońce. W OTW nie mówi się o siłach, a sonda porusza się bezwładnie po linii geodezyjnej.

Czasoprzestrzeń ma pewną oryginalną cechę: linia geodezyjna łącząca dwa punkty czasoprzestrzeni (zdarzenia) może nie odpowiadać żadnej fizycznej trajektorii czegokolwiek. Na przykład po linii geodezyjnej łączącej zdarzenia „wystąpienie sondy z Ziemi dziś” i „lądowanie sondy na Marsie za pół roku” może odbyć podróż statek kosmiczny. Niemożliwa jest natomiast podróż po linii łączącej zdarzenia „wystąpienie sondy z Ziemi dziś o godz. 12:00” i „lądowanie sondy na Marsie dziś o godz. 12:01”, gdyż nie da się pokonać odległości Marsa od Ziemi w ciągu minuty. Sonda może lecieć do Marsa na różne sposoby (po różnych torach i w różnym czasie, czyli po rozmaitych liniach geodezyjnych), ale światło (poza szczególnymi przypadkami, patrz niżej) nie ma wyboru: drogę z Ziemi na Marsa (przy ustalonej konfiguracji planet) pokonuje tylko ze ściśle określoną prędkością c , ani szybciej, ani wolniej, i po jedynym możliwym torze. Mówi się, że fotony poruszają się po zerowych liniach geodezyjnych.

Trójwymiarowy tor promienia świetlnego (czyli trójwymiarowa część zerowej linii geodezyjnej żyjącej w czterowymiarowej czasoprzestrzeni) to naturalny model linii prostej. Okazuje się, że takich linii „prostych” może przez dwa punkty w przestrzeni trójwymiarowej przechodzić kilka. Niech między odległym kwazarem a obserwatorem znajduje się jakaś galaktyka. Zakrzywia ona w swoim sąsiedztwie czasoprzestrzeń tak, że fotony wysłane z kwazara mogą osiągnąć



Ziemię po różnych torach trójwymiarowych (rysunek) – na ogół też w różnym czasie, ale to już inna sprawa.



Galaktyka działa więc jak soczewka, dlatego nazywa się to zjawisko soczewkowaniem grawitacyjnym. Taka grawitacyjna soczewka jest zazwyczaj bardzo złej jakości – zamiast powiększonego kwazara obserwator widzi albo jego zniekształcony obraz, albo kilka świetlnych plamek na przedłużeniach promieni wpadających do oka, a zależy to od rozkładu masy w galaktyce soczewkującej i od wzajemnego ustawienia kwazara, galaktyki i obserwatora. Na przykład obrazem kwazara może stać się świetlny łuk ze zdjęcia obok.

Uginanie światła przez soczewkę grawitacyjną tak na oko przypomina zwyczajne ugięcie toru cząstki przelatującej z prędkością światła w pobliżu galaktyki grającej rolę soczewki. Jednak jeżeli nawet zapomnieć, że fotony nie mają masy, to mechanika klasyczna zastosowana do tego przypadku daje zły wynik ilościowy, gdyż odchylenie toru takiej cząstki jest inne niż ugięcie promienia świetlnego, które zostało już dawno zmierzone obserwacyjnie (*Delta* 5/1982) i które zgadza się z przewidywaniami OTW. Tak więc soczewkowanie grawitacyjne to naprawdę skutek ugięcia przestrzeni.

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delt!

Rozwiąż w grudniu styczniowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: <http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1009. Czy jedynym rozwiązaniem równania $1^x + 2^x + \dots + x^x = y^y$ w liczbach naturalnych jest $x = 1, y = 1$?

Rozwiązanie na str. 16

M 1010. Wykazać, że równanie $x^3 + y^4 = z^5$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z .

Rozwiązanie na str. 16

M 1011. Znaleźć wszystkie k, l, m spełniające $\underbrace{2^2 \dots 2}_{k \text{ razy}} + \underbrace{3^3 \dots 3}_{l \text{ razy}} = \underbrace{5^5 \dots 5}_{m \text{ razy}}$.

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 585. Z jaką prędkością zacznie się wdzierać powietrze do bańki żarówki próżniowej, w której zrobiono mały otwór? Gęstość powietrza $\rho_0 = 1,29 \text{ g/dm}^3$.
Rozwiązanie na str. 5

F 586. Na wózku mogącym poruszać się poziomo (tarcie pomijamy) umieszczono otwarte od góry naczynie, w którego tylnej ściance znajdował się mały otworek. Całość wystawiono na równomiernie padający deszcz w czasie bezwietrznej pogody. Po pewnym czasie poziom wody ustalił się, a wózek poruszał się ze stałą prędkością v . Na jakiej głębokości znajdował się wtedy otworek?

Rozwiązanie na str. 10



O średnich i wariancjach

Marek W. GUTOWSKI



Wyniki pomiarów

W szkole uczymy się, że lepszy wynik uzyskamy, gdy zamiast pojedynczego pomiaru wykonamy całą ich serię, a za końcowy rezultat uznamy średnią arytmetyczną indywidualnych pomiarów. Dodatkową zaletą tej procedury jest możliwość oszacowania niepewności pomiarowych (*rozrzutu*), zwanych dawniej błędami pomiarów. W szkole, ale i w prawdziwych laboratoriach badawczych, zwykle wykonujemy pomiary w kilkusobowych zespołach. Okazuje się, że odczytywanie tego samego wyniku przez różne osoby niekoniecznie daje takie same rezultaty. Procedura uśredniania, jak można podejrzewać, powinna w jakiś sposób przyczynić się do tego, aby rezultat końcowy był możliwie obiektywny, tj. możliwie najbardziej zbliżony do wartości prawdziwej. Pachnie to jednak trochę poznawaniem praw Przyrody za pomocą głosowania.

Zmienne losowe i centralne twierdzenie graniczne

Wyobraźmy sobie następujące zadanie: policzyć karpie w stawie hodowlanym. Żeby wykonać je rzetelnie, należałoby spuścić wodę ze stawu, „odcedzić” karpie, policzyć je, a w końcu przywrócić stan poprzedni. Takie postępowanie mogłoby bardzo zaszkodzić naszej hodowli, nie mówiąc już o kosztach jej przeprowadzenia (no i gdzie przechować tę wodę?). Musimy więc uciec się do sztuczki: najpierw wylawiamy pełną sieć ryb, a te, które są karpiami, specjalnie znakujemy. Wszystkie złowione ryby wpuszczamy z powrotem do stawu, a po pewnym czasie, np. na drugi dzień, ponawiamy połów i sprawdzamy, jaki ułamek wylowionych powtórnie karpie stanowią te oznakowane. Na podstawie tych danych oraz posilając się hipotezą, że ryby znaczone dobrze wymieszały się z pozostałymi, możemy już oszacować liczbę karpie w naszym stawie. Jeśliby jednak przyszło nam do głowy wykonać podobny pomiar kilka dni później, a nawet w tym samym czasie, lecz w innej części stawu, to otrzymalibyśmy inny wynik. Jeśli tak, to który z nich byłby poprawny? Kłopotliwe pytanie.

Wynik pomiaru jest *zmienną losową*. Nawet, jeśli uwierzymy, że od czasu znakowania do połowu kontrolnego nie zmieniła się ilość karpie (żaden nie zdechł, nic nie padło łupem kłusowników), to i tak za każdym razem możemy uzyskać inny rezultat. Składa się na to szereg czynników, będących poza naszą kontrolą. Czujemy jednakże, czysto intuicyjnie, że średnia z kilku pomiarów da nam wynik bliższy prawdy niż pomiar pojedynczy. Przez chwilę darujemy sobie uzasadnioną, lecz kąśliwą uwagę, że ta średnia może okazać się liczbą niecałkowitą...

Naszą intuicję znakomicie wzmacnia **centralne twierdzenie graniczne**, będące wybitnym i niekwestionowanym osiągnięciem gałęzi matematyki o nazwie *rachunek prawdopodobieństwa*. Orzeka ono, że jeśli mamy ciąg niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, X_3, \dots o jednakowych rozkładach, których

wartości średnie i wariancje istnieją (to znaczy mają skończoną wartość), to ciąg nowych zmiennych losowych

$$Y_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$$

(średnie arytmetyczne) ma granicę. Zmienna losowa

$$Y = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k$$

ma przy tym wartość średnią równą wartości średniej zmiennej X_1 . Co więcej, rozkład, do którego zdąża ciąg zmiennych Y_k , jest gaussowski (normalny). Zamiast X_1 moglibyśmy wypisać nazwę którejkolwiek ze zmiennych z rodziny X_i , gdyż mają one identyczne rozkłady, a więc także wartości średnie i wariancje. Autor usilnie nalega, aby zwrócić uwagę na założenie: zmienne losowe X_i mają mieć **skończone wartości średnie i wariancje**. Założenia twierdzenia można osłabić, nie wymagając, aby zmienne X_i miały identyczne rozkłady.

Przekład centralnego twierdzenia granicznego na język zrozumiały dla eksperymentatorów jest łatwy: średnia arytmetyczna serii pomiarów coraz lepiej odtwarza rzeczywistą wartość średnią wielkości mierzonej w miarę wzrostu liczby pomiarów. Są jednak dwa haczyki:

- twierdzenie nie mówi nic o szybkości zbieżności,
- zbieżność jest w sensie prawdopodobieństwa. Oznacza to, że w miarę wzrostu k – liczby indywidualnych pomiarów – prawdopodobieństwo dużych odchyłeń od prawdziwej wartości średniej maleje do zera. Nie oznacza to w żadnym wypadku, że *każdy* nowy pomiar zbliża nas do prawdziwej wartości średniej albo że to zbliżanie się następuje stale „z jednej strony”, tj. od dołu albo od góry; mogą, a nawet powinny, wystąpić zakłócenia.

Mamy więc problem: średnia z , powiedzmy, 10 pomiarów wcale nie musi być bliższa rzeczywistości,

niż np. średnia z 6 pomiarów. To ile właściwie pomiarów powinniśmy wykonać? Dobrą wskazówkę daje nam tu drugie ważne twierdzenie rachunku prawdopodobieństwa, mianowicie **nierówność Czebyszewa**, prawdziwa dla dowolnej zmiennej losowej X , której wartość średnia $\langle X \rangle$ i wariancja σ^2 są skończone:

$$P(|X - \langle X \rangle| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad \text{dla } a > 0.$$

Kładąc $a = n\sigma(X_1)$ oraz przepisując nierówność dla zmiennej losowej Y_k , której wariancja wynosi

$$\sigma^2(Y_k) = \frac{\sigma^2(X_1)}{k},$$

otrzymamy

$$P(|Y_k - \langle Y \rangle| \geq n\sigma) \leq \frac{1}{kn^2} \quad \text{dla } n > 0.$$

Niestety, ocena ta jest zwykle mocno pesymistyczna i, co gorsza, nie daje się poprawić, gdyż istnieją takie zmienne losowe, dla których powyższa nierówność staje się równością. Jeśli jednak pracujemy ze zmiennymi X_i o rozkładzie normalnym (gaussowskim), to sytuacja jest o wiele lepsza. Najczęściej jednak wcale nie mamy pewności, że nasze zmienne losowe mają rozkład normalny...

W naszym przykładzie z karpiami założenia twierdzenia są spełnione, prawdziwa musi więc też być teza. Ilość ryb jest tak naprawdę ustalona, choć nieznaną, jest to więc niezupełnie „prawdziwa” zmienna losowa (takie „patologiczne” zmienne losowe nazywamy *deterministycznymi*). My jednakże wcale nie badamy bezpośrednio ilości ryb, lecz pewne zmienne losowe będące *estymatorami* tej wielkości – i do nich stosujemy centralne twierdzenie graniczne.

Estymatory

Wynik pomiaru, jak stwierdziliśmy wcześniej, jest zmienną losową. Możemy tę zmienną nazwać *estymatorem* badanej wielkości fizycznej. Inna metoda pomiaru tej samej wielkości fizycznej albo inna procedura przetwarzania surowych wyników to jednocześnie inny estymator. Chciałoby się, żeby estymator używany przez nas był możliwie najlepszy, cokolwiek to znaczy. Tymczasem znane są trzy cechy, które charakteryzują jakość estymatorów. Dobry estymator powinien być *zgodny*, *nieobciążony* i *efektywny*.

Omówimy te cechy kolejno:

- estymator jest *zgodny*, gdy w miarę zwiększania liczby pomiarów jego wartość średnia coraz lepiej przybliża (w sensie prawdopodobieństwa) prawdziwą wartość. Średnia arytmetyczna jest (zazwyczaj) takim estymatorem.
- estymator jest *nieobciążony*, gdy szacuje badaną wielkość raz z dołu, raz z góry – w sposób losowy. Możemy też powiedzieć, że estymator nieobciążony

nie wprowadza niepewności (dawniej: *błędów*) systematycznych.

- estymator jest *efektywny*, kiedy jego wariancja jest niewielka. Estymator o najmniejszej możliwej wariancji nazywa się *najefektywniejszy*.

Okazuje się, że znalezienie najefektywniejszego estymatora, który jednocześnie byłby zgodny i nieobciążony, nie zawsze jest możliwe, można nawet powiedzieć, że zdarza się raczej wyjątkowo.

Wykonując dowolne pomiary fizyczne, jesteśmy skazani na posługiwanie się różnymi estymatorami. Nazywając wartość średnią estymatora wynikiem pomiaru, i uznając jednocześnie, że jego wariancja jest jakąś miarą rozrzutu (albo jak kto woli: skupienia) indywidualnych pomiarów wokół tejże wartości średniej, podajemy końcowy rezultat pomiarów w formie (dyspersja σ , zwana również *odchyleniem standardowym*, jest pierwiastkiem z wariancji, σ^2):

$$\text{wynik} \pm \text{dyspersja}.$$

Przypomina to do złudzenia formę rekomendowaną przez 7 międzynarodowych organizacji, w tym ISO:

$$\text{wynik} \pm \text{niepewność pomiarowa}.$$

Zbieżność ta nie jest przypadkowa, rzeczywiście przez niepewność pomiarową, jeśli nie zaznaczono inaczej, rozumie się właśnie odchylenie standardowe.

Pora na komentarze

Widząc (cudzy) wynik w podanej wyżej postaci, należy go rozumieć w sensie probabilistycznym, czyli mniej więcej tak: wyniki (dostatecznie wielu) pomiarów gromadzą się przede wszystkim wokół liczby podanej jako „wynik”, a ich rozrzut scharakteryzowany jest przez „dyspersję”. W żadnym wypadku nie oznacza to, że *każdy* indywidualny wynik pomiaru mieścił się w przedziale

$$[\text{wynik} - \text{dyspersja}, \text{wynik} + \text{dyspersja}]$$

Często spotyka się stwierdzenie, że w tym przedziale mieści się ok. 68% wszystkich pomiarów, co generalnie także nie jest prawdziwe. Osoba, która tak twierdzi, zakłada bowiem, że zmienna losowa opisująca wyniki pomiarów ma rozkład normalny, co najczęściej mija się z prawdą. Wracając do naszego przykładu ze zliczaniem karp: jeśli przypuścimy, że ilość karp w stawie podlega rozkładowi normalnemu, to tym samym godzimy się na następujące nonsensy:

- prawdopodobieństwo tego, że ilość karp mieści się w przedziale $[1470,2, 1470,7]$ jest różne od zera – a powinno być dokładnie równe zeru,
- szansa, że w stawie pływa ujemna ilość karp, także jest różna od zera,
- najśmieszniejsze jest to, iż prawdopodobieństwo tego, że w stawie znajduje się jakakolwiek całkowita ilość karp, jest zerowe!

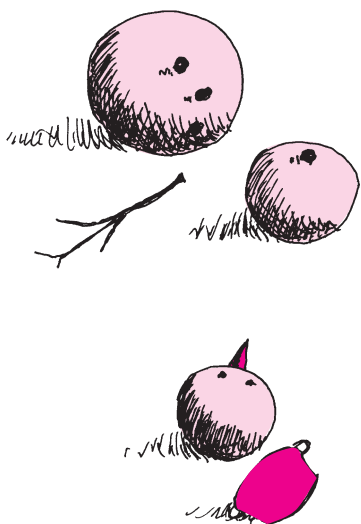
Widzimy, że model probabilistyczny wyników pomiarów jest daleki od ideału. Wartość liczbowa, uznana przez nas za „wynik”, *nie* jest prawdziwą wartością badanej wielkości fizycznej, lecz jedynie jej oszacowaniem (estymatą), a konkretnie wartością średnią ze (skończonej) serii wykonanych pomiarów. Podobnie „dyspersja” jest dyspersją wyników w, jak mówimy, pobranej próbie, a *nie* dyspersją badanej wielkości fizycznej.

Używając modelu probabilistycznego potrafimy odpowiadać na pytania w rodzaju: *jaka jest szansa, że badana wielkość naprawdę mieści się w przedziale $[x_1, x_2]$* ? Powiedzmy, że ta szansa jest równa akurat 0,986. Czy taka odpowiedź rzeczywiście nas zadowala? Czy potrafimy w sposób obiektywny powiedzieć, czy ta szansa jest duża czy mała? Pomyślmy tylko, jaka w XIII wieku była szansa spotkania człowieka, który zgodziłby się z twierdzeniem, że Ziemia jest płaska? Z pewnością większa niż 0,986, a jednak my dziś wiemy *na pewno*, że Ziemia *nie* jest płaska.

Fizyk powinien dobrze wiedzieć, co mierzy i jaka procedura pomiarowa (i opracowania danych) jest odpowiednia do postawionego zadania. Jeśli chce zastosować standardową procedurę uśredniania wyników, to najpierw powinien się upewnić, czy ma to sens, to znaczy czy badana zmienna losowa spełnia założenia centralnego twierdzenia granicznego. Nawet jeśli tak jest, to mimo wszystko można się natknąć na nieoczekiwane komplikacje. Przypuśćmy, że w próbce piasku należy określić średnią wielkość ziaren, ale przeznaczona do badania próbka została przygotowana w sposób złośliwy, przez staranne wymieszanie dwóch wyraźnie różnych rodzajów piasku, w nierównych ilościach. Jeśli nie weźmiemy tego faktu pod uwagę, a jedynie mechanicznie wykonamy mrówczą pracę, to otrzymamy wynik o niewytłumaczalnie wielkiej dyspersji, np. pięciokrotnie większej niż wartość średnia.

Czy to zawsze działa?

Najgorsze zostawiliśmy na koniec. Niestety, zdarzają się przypadki, kiedy procedura uśredniania wielu pomiarów najzwyczajniej zawodzi. Gdyby ktoś np. chciał badać średnią długość trasy pokonywanej przez albatrosa pomiędzy lądowaniami, spotkałby się z czymś niezwykłym. Zwykle albatros żeruje w pewnej okolicy, ale od czasu do czasu wykonuje bardzo długie przeloty do odległych wysp, przynajmniej, że niekoniecznie dobrowolnie. Śledząc średnią długość trasy, wraz ze wzrostem numeru kolejnego przelotu zaobserwowalibyśmy w miarę przyzwoite „ustalanie się” jej wartości średniej. Jednorazowy długi przelot potrafiłby jednak wywrócić całą tę statystykę do góry nogami. Oczywiście, czas życia konkretnego albatrosa jest ograniczony, i chociażby z tego powodu wykona on w swym życiu jedynie skończoną liczbę lotów. Nie ma zatem problemu z wyliczeniem wartości średniej i wariancji, obie muszą okazać się skończone. Jeśli jednak zamiast albatrosów zaczniemy obserwować trwałe obiekty z mikroświata, w którym obowiązują prawa mechaniki kwantowej, to będziemy mieli problem. Istnieją takie wielkości fizyczne, dla których wartości średnie albo wariancje zwyczajnie nie istnieją. Spotykamy je nie tylko wśród zjawisk kwantowych, ale i klasycznych (np. turbulencje, przemiany fazowe), a także w innych, zgoła nieoczekiwanych miejscach: w internecie czy na giełdzie.



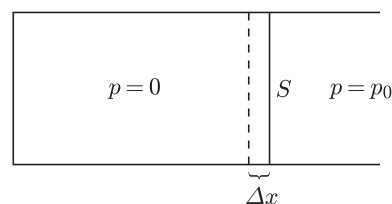
Rozwiązanie zadania F 585.

Dla uproszczenia rozważmy naczynie cylindryczne o przekroju S , przedzielone cienką ścianką, po której jednej stronie mamy $p = 0$, a po drugiej ciśnienie atmosferyczne $p = p_0$. Praca wykonana przez ciśnienie atmosferyczne to $W = p_0 S \Delta x$, a energia kinetyczna wdzierającej się masy powietrza wynosi

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho_0 S \Delta x v^2}{2}.$$

Z zasady zachowania energii $W = E_k$ otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho_0}} \approx 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



1. Ruch latawca. Podczas wietrznych dni widuje się latawce unoszące się na wietrze. Często latawce mocowane na jednej linie wykonują ruchy po stabilnym torze o kształcie ósemki. Dlaczego latawce poruszają się w taki sposób? Czy istnieją inne stabilne torzy?

2. Krople wody. Zbadaj poruszanie się kropeł deszczu na szybie okiennej.

3. Przezroczysta folia. Kawalek przezroczystej folii polietylenowej, umieszczony na drukowanym tekście, nie utrudnia jego odczytania. W miarę zwiększania odległości między folią a tekstem staje się on coraz bardziej zamazany i może nawet przestać być w ogóle czytelny. Zbadaj właściwości folii. Jakie parametry folii są odpowiedzialne za to zjawisko?

4. Jaskrawe plamki. Wydmuchaj bańkę mydlaną i umieść ją na powierzchni cieczy lub na szklanej płytce. Przy oświetleniu słonecznym można na powierzchni bańki zaobserwować jaskrawe plamki. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.

5. Bąble na międzypowierzchni. Pewne ciecze dają się umieścić jedna nad drugą z wyraźną granicą rozdziału. Jeśli ciecze różnią się napięciem powierzchniowym, można zaobserwować ciekawe zjawisko. Wdmuchuj pęcherzyki powietrza o różnej wielkości do dolnej cieczy i obserwuj ich zachowanie w pobliżu powierzchni rozdzielającej ciecze. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.

6. Zamarzanie napojów. Podczas otwierania pojemnika z zimnym (gazowanym) napojem zawarta w nim ciecz czasami zamara. Zbadaj istotne parametry i wyjaśnij to zjawisko.

7. Drgające pudełko. Weź pudełko i podziel je na szereg małych przegródek, poprzedzielanych niskimi ściankami. Rozmieść w przegródkach pewną liczbę małych, stalowych kuleczek. Gdy pudełko wprawi się w pionowe drgania, kuleczki będą niekiedy przeskakiwać z jednej przegródki do drugiej. W zależności od częstotliwości i amplitudy drgań rozkład kuleczek może być stabilny lub niestabilny. Zbadaj to zjawisko i opracuj model dla jego wyjaśnienia.

8. Maszyna cieplna. Zbuduj maszynę cieplną z rurki w kształcie litery U, częściowo wypełnionej wodą (lub inną cieczą), w której jedno z ramion rurki jest połączone kawałkiem

węża z podgrzewanym zbiornikiem wypełnionym gazem, a drugie ramię pozostaje otwarte. Wyprowadzenie cieczy z położenia równowagi może spowodować, że zacznie ona drgać. Od czego zależy częstotliwość tych drgań? Wyznacz diagram pV dla gazu roboczego.

9. Upadający komin. Podczas upadania wysokich kominów obserwuje się niekiedy, że pękają one na dwie części, zanim upadną na ziemię. Zbadaj i wyjaśnij to.

10. Wolframowa żarówka. Opór wolframowego włókna żarówki zależy silnie od temperatury. Zbuduj i zademonstruj urządzenie wykorzystujące tę właściwość.

11. Rozpraszanie światła. Zbuduj optyczne urządzenie do pomiaru stężenia nierozpuszczalnej substancji w wodnym roztworze koloidalnym. Wykorzystaj to urządzenie do pomiaru zawartości tłuszczu w mleku.

12. Gotowane jajko. Zbuduj wiskozymetr torsyjny. Zastosuj go do zbadania i wyjaśnienia różnic występujących między „lepkimi” właściwościami jaj kurzych, które zostały ugotowane do różnego stopnia twardości.

13. Elektroosmoza. Opracuj urządzenie, które będzie osuszało wilgotny piasek wykorzystując napięcie elektryczne, ale bez znaczącego grzania.

14. Wirujący krążek. Opracuj optymalny sposób rzutu krążka „frisbee”, aby uzyskać możliwie jak największy zasięg. Wyjaśnij swoje opracowanie.

15. Wiry. Wykonaj pudełko, które ma otwór w przedniej ściance, a tylną ściankę w postaci membrany. Uderzenie w membranę powoduje powstawanie wirów, rozchodzących się z otworu. Zbadaj to zjawisko i wyjaśnij, co zachodzi podczas wzajemnego oddziaływania dwóch wirów.

16. Dzbanek i lód. Spotyka się niekiedy argumentację, że aby efektywnie chłodzić dzbanek lodem, powinno się lód umieścić nad nim. Oceń, w jakim stopniu ten sposób jest bardziej efektywny od umieszczania lodu pod dzbankiem.

17. Problem Prometeusza. Opisz i zademonstruj mechanizm fizyczny, oparty na tarciu, który umożliwił naszym przodkom rozniecanie ognia. Oceń czas niezbędny do rozniecenia ognia tym sposobem.

Turniej Młodych Fizyków to drużynowe zawody uczniów szkół średnich organizowane pod auspicjami Polskiego Towarzystwa Fizycznego jako impreza komplementarna do Olimpiady Fizycznej. Turniej polega na opracowaniu rozwiązań zadań-problemów i ich przedstawieniu najpierw w formie pisemnej, a następnie w formie referatów i publicznej dyskusji nad przedstawionymi rozwiązaniami. W zawodach turniejowych uczestniczą pięcioosobowe drużyny, ale praca w szkole może być prowadzona przez liczniejsze zespoły.

Etap korespondencyjny (pisemny). Drużyny opracowują rozwiązania dowolnych dziesięciu zadań Turnieju Młodych Fizyków 2003 i przesyłają je do wybranego przez siebie jednego z dwóch regionalnych komitetów organizacyjnych w terminie do 15 lutego 2003 r. Jeśli z danej szkoły uczestniczy w Turnieju kilka drużyn, muszą one wszystkie wybrać ten sam komitet regionalny. Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane oddzielnie na papierze formatu A4 i nie przekraczać 6 stron, wliczając w to rysunki i wykresy. Każda praca powinna zawierać imię i nazwisko autora (autorów). Ponadto do rozwiązań należy dołączyć kartkę z pełną nazwą i adresem szkoły, spisem wszystkich członków drużyny (z podaniem ich klas) oraz imieniem i nazwiskiem nauczyciela – opiekuna drużyny, powinna ona ponadto zawierać dane umożliwiające szybkie przekazanie informacji o ewentualnym zakwalifikowaniu się do dalszych rozgrywek: adres poczty elektronicznej, nr telefonu/telefaksu. Drużyny zakwalifikowane do turnieju właściwego otrzymają pełny tekst regulaminu turniejowego.

Turniej właściwy ma charakter publiczny i polega na prezentacji rozwiązań oraz dyskusji nad nimi. Każda drużyna, a ściślej – jej przedstawiciel, występuje kolejno w roli **referenta** (przedstawia skrótowo własne rozwiązanie - jego główne idee i konkluzje, ewentualnie demonstruje doświadczenie, czas – 10 min.), **oponenta** (analizuje krytycznie referat innej drużyny wytykając wszystkie słabe punkty, czas – 5 min.) oraz **recenzenta** (podkreśla, co było najważniejsze w referacie oraz najcelniejsze w krytyce oponenta,

czas – 3 min.). Wystąpienia podlegają ocenie przez jury, w którym zasiadają m.in. pracownicy naukowcy. Tematy zadań do referowania są każdorazowo określane przez oponentów. Drużyna referująca może poprosić o nowy temat najwyżej trzykrotnie podczas zawodów, dalsze odmowy pociągają za sobą obniżenie punktacji (z tego względu drużyna startująca w turnieju właściwym powinna być przygotowana do przedstawienia rozwiązań więcej niż dziesięciu problemów).

Zawody turniejowe (regionalne) odbędą się 3 kwietnia w Katowicach (Pałac Młodzieży) oraz 5 kwietnia w Warszawie (Instytut Fizyki PAN).

Finał Turnieju, z udziałem najlepszych drużyn z zawodów katowickich i warszawskich, odbędzie się 10 maja w Instytucie Fizyki PAN w Warszawie. Językiem obowiązującym w zawodach finałowych jest język angielski. Zwycięska drużyna (wraz ze swym nauczycielem) będzie reprezentowała Polskę w Turnieju Międzynarodowym.

Turniej Międzynarodowy był dotychczas organizowany w Rosji, Holandii, Polsce, Gruzji, Czechach, Niemczech, Austrii, na Węgrzech, w Finlandii i na Ukrainie. XVI Międzynarodowy Turniej Młodych Fizyków odbędzie się na początku lipca 2003 r. w Uppsali (Szwecja).

Więcej informacji o Turnieju Młodych Fizyków oraz o Turniejach Międzynarodowych można znaleźć na stronie internetowej <http://www.fuw.edu.pl/~ptf/tmf.html>.

Adresy regionalnych komitetów organizacyjnych:

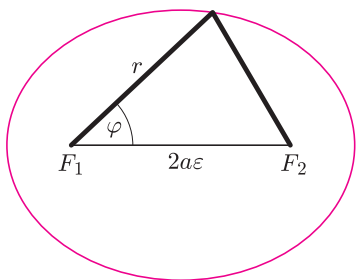
KATOWICE:
Pałac Młodzieży
im. prof. A. Kamińskiego
ul. Mikołowska 26
40-066 Katowice
faks: (0 32) 510 402
e-mail: ula@pm.katowice.pl

WARSZAWA:
Instytut Fizyki
Polskiej Akademii Nauk
Al. Lotników 32/46
02-668 Warszawa
faks: (0 22) 843 0926
e-mail: nadola@ifpan.edu.pl

Wszystko ze sznurka

Wielu uczniów i studentów niepokoi się, gdy jakieś pojęcie ma wiele definicji. Powstaje wtedy problem, która z tych definicji jest najważniejsza. Pytanie to – aczkolwiek bez sensu – jest psychologicznie zrozumiałe: była sobie kiedyś jedna definicja, a z niej powstały następne. Niekiedy przywilej bycia najważniejszą definicją przyznawany jest definicji najprostszej (co daje często nowy problem: co jest najprostsze?).

Ale nie dyskutujemy problemu ogólnego. Zatrzymajmy się na elipsie, która faktycznie ma wiele poręcznych definicji. Mnie najlepsza wydaje się definicja stereometryczna, mówiąca, iż elipsa to wynik *spotkania stożka z płaszczyzną tworzącą z jego osią kąt większy niż tworzące*, żeby zacytować XVII-wieczne dzieło Desarguesa.



Rys. 1

Znając szkolny wzór kosinusów, otrzymujemy stąd natychmiast opis elipsy używany przez Keplera (rys. 1). Mamy

$$r^2 + (2a\varepsilon)^2 - 2 \cdot r \cdot 2a\varepsilon \cdot \cos \varphi = (2a - r)^2.$$

Stąd

$$r^2 + 4a^2\varepsilon^2 - 4ra\varepsilon \cos \varphi = 4a^2 - 4ra + r^2$$

i dzieląc stronami przez $4a$, otrzymujemy $r(1 - \varepsilon \cos \varphi) = a(1 - \varepsilon^2)$, czyli

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

a więc równanie elipsy w układzie biegunowym.

Opis za pomocą kierownicy nie wymaga już niczego poza jej wskazaniem: dla ogniska F_1 jest to prosta prostopadła do prostej F_1F_2 , po przeciwnej stronie niż F_2 i odległa od F_1 o $\frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon}$. Mamy wtedy (rys. 2)

$$\begin{aligned} d = AF_1 + F_1B &= \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon} + \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \cos \varphi = \\ &= \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(1 - \varepsilon \cos \varphi)} (1 - \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon \cos \varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(1 - \varepsilon \cos \varphi)} = \frac{r}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Zatem stosunek odległości punktów elipsy od ogniska i kierownicy jest stały.

Wreszcie równanie we współrzędnych kartezjańskich. Niech ogniska mają współrzędne $(-a\varepsilon, 0)$ i $(a\varepsilon, 0)$ (rys. 3). Zapiszmy długość sznurka:

$$\sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2} = 2a,$$

czyli

$$\sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x^2 + 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + y^2 &= 4a^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}, \\ \varepsilon x - a &= \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}, \\ \varepsilon^2 x^2 - 2a\varepsilon x + a^2 &= x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + y^2, \\ x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 &= a^2(1 - \varepsilon^2) \end{aligned}$$

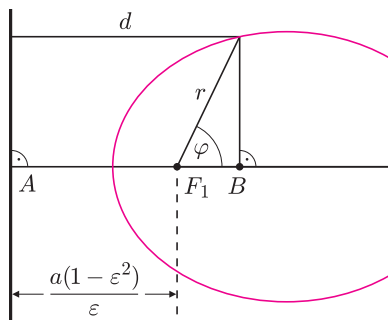
i ostatecznie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1.$$

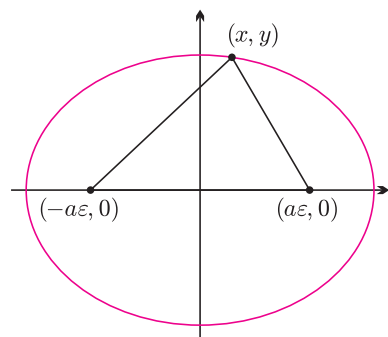
Jak widać, ze sznurka wszystko natychmiast wynika.

Jednak wielu moich kolegów ma płaski umysł i koniecznie chce sprawy krzywych płaskich traktować planimetrycznie, jakby przestrzeń nie istniała. Tu też mam swój typ i spróbuję przekonać Czytelników, że jest to typ trafny. Spełnia on bowiem wszystkie przytoczone wyżej (i jeszcze inne) kryteria doskonałości. Uzyskuje się z niego inne definicje bardzo elementarnie.

Tą definicją jest opis konstrukcji za pomocą sznurka i dwóch gwoździków, do których przywiązane są jego końce: rysujemy na płaszczyźnie te punkty, które uzyskamy naciągając sznurek. Czyli jest to zbiór punktów, których suma odległości od dwóch danych punktów F_1 i F_2 (zwanymi ogniskami) jest stała; oznaczymy ją $2a$. Odległość F_1F_2 musi być mniejsza od $2a$, bo inaczej nie przywiążemy sznurka – niech więc będzie $F_1F_2 = \varepsilon \cdot 2a$, gdzie liczbę ε , zawartą między zerem i jednością, nazywa się *mimośrodem*.



Rys. 2



Rys. 3

Marek KORDOS



Astronomiczna tożsamość dla ciągu Fibonacciego

Trudno chyba o ciąg powszechniej znany w kręgach zbliżonych do matematyki, niż ciąg liczb całkowitych, wymyślony na początku XIII w. przez Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim. Wyrazy tego ciągu, noszącego nazwisko wynalazcy, oznacza się symbolem F_n i definiuje indukcyjnie:

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ oraz } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Otrzymujemy kolejno liczby: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., zwane, a jakże, liczbami Fibonacciego.

Zainteresowanie tym ciągiem jest skutkiem jego licznych interesujących własności. Jedną z nich jest tożsamość

$$(C_n) \quad F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$$

prawdziwa dla każdej dodatniej liczby naturalnej n . Dla dowodu zauważmy, że $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, a stąd

$$\begin{aligned} F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) = F_n^2 + F_{n+1}F_n - F_{n+1}^2 = \\ &= F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2, \end{aligned}$$

zatem

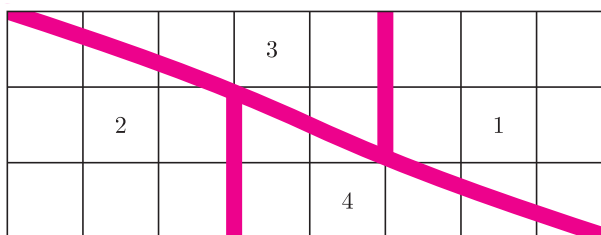
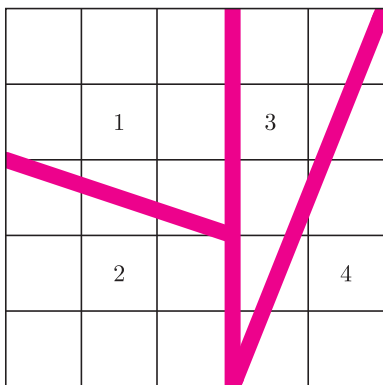
$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n \Leftrightarrow F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^{n+1}.$$

Tak więc albo równości (C_n) i (C_{n+1}) są jednocześnie prawdziwe, albo żadna z nich nie jest prawdziwa. Teraz wystarczy sprawdzić, że prawdziwa jest równość (C_1) :

$$F_1^2 - F_2F_0 = 1 - 2 \cdot 1 = (-1)^1$$

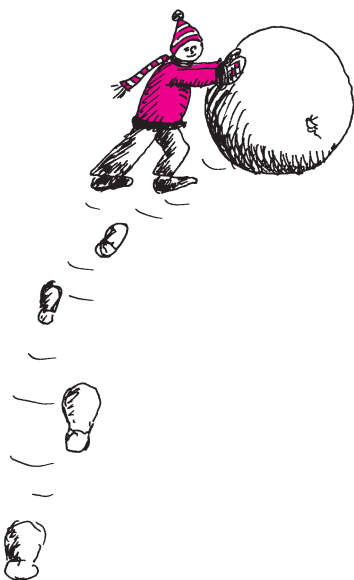
i wywnioskować z zasady indukcji prawdziwość każdej z tożsamości (C_n) .

Przypomnijmy starą łamigłówkę: jak to możliwe, że ze wszystkich 25 kratek kwadratu można złożyć prostokąt o 24 kratkach, tak jak to sugeruje rysunek?



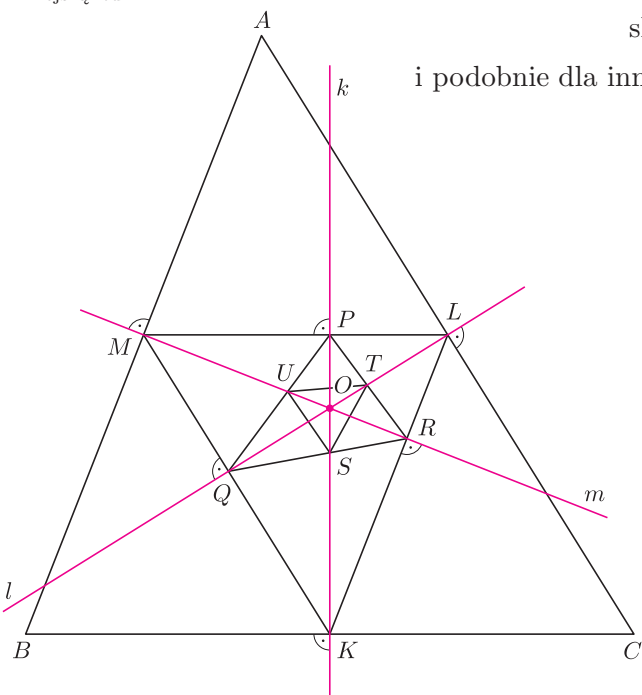
Jeśli zauważyłeś, drogi Czytelniku, związek długości boków poszczególnych wielokątów, pozornie składających się na każdą z dwóch figur, z ciągiem Fibonacciego, potrafisz podać przykład kwadratu, z którego „można” złożyć prostokąt o większym od niego polu.

Dlaczego tożsamość (C_n) nosi w tytule określenie „astronomiczna”? Tylko dlatego, że ogłosił ją w 1680 roku astronom Jean-Dominique Cassini, odkrywca „przerwy Cassiniego” (patrz *Delta* 9/2002), a znał ją wcześniej inny astronom, Johannes Kepler, o czym wiemy z jego listu napisanego ponad 70 lat wcześniej.



Geometryczna matryoszka

Matryoszka to ludowa lalka rosyjska – jest drewniana i wydrążona w środku, mieści tam podobną lalkę, tylko, rzecz jasna, mniejszą, ta mniejsza mieści jeszcze mniejszą itd.



Na rysunku mamy trójkąt ostrokątny ABC i jego symetralne boków k, l, m przecinające się w punkcie O . Punkt wspólny symetralnej jakiegoś boku z tymże bokiem to jego środek.

Środki boków trójkąta ABC tworzą trójkąt KLM . Proste k, l, m są w tym trójkącie wysokościami. Wynika to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa:

$$\text{skoro } \frac{AL}{LC} = \frac{BK}{KC}, \text{ to } LK \parallel AB \perp m$$

i podobnie dla innych boków.

Punkty wspólne P, Q, R wysokości i przeciwległych boków trójkąta KLM też tworzą trójkąt. Ciągłe te same proste k, l, m są w tym trójkącie dwusiecznymi.

Aby przekonać się o tym, potrzebne jest inne narzędzie niż twierdzenie Talesa, mianowicie twierdzenie orzekające, że

kąt prosty, którego ramiona przechodzą przez końce średnicy okręgu, ma wierzchołek na tym okręgu.

Szerzej znane jest jego twierdzenie odwrotne:

kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty.

Skoro tak, to punkty P i R leżą na okręgu o średnicy OL , z czego wynika, że kąty OPR i OLR są równe, jako wpisane, oparte na tym samym łuku.

Podobnie punkty P i Q leżą na okręgu o średnicy OM , z czego wynika, że kąty OPQ i OMQ są równe. I dalej: punkty Q i R leżą na okręgu o średnicy LM , z czego wynika, że kąty RMQ , czyli OMQ , i QLR , czyli OLR , są równe. Zatem równe są te wszystkie kąty; w szczególności

$$\sphericalangle OPQ = \sphericalangle OPR,$$

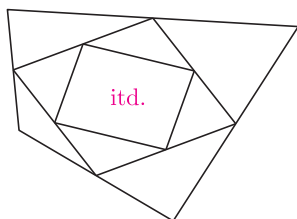
a więc k jest dwusieczną kąta QPR . Podobnie wykazujemy, że pozostałe dwie proste są dwusiecznymi.

Oczywiście, proste k, l, m przecinają boki trójkąta PQR – powstałe punkty S, T, U tworzą trójkąt. Jaką rolę w tym trójkącie pełnią proste, które poprzednio były już symetralnymi, wysokościami i dwusiecznymi?

Nic nam o tym nie wiadomo, czekamy więc na listy z odpowiedziami na to pytanie. Udokumentowaną odpowiedź opublikujemy i nagrodzimy książką. W przypadku, gdy udzieli jej uczeń, odpowiedź potraktujemy jako pracę na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

A przecież można narysować i dalsze trójkąty...

Zadanie z podobnym motywem



Mamy dowolny czworokąt C_0 i tworzymy z niego ciąg czworokątów zgodnie z regułą: dla $n = 0, 1, 2, \dots$ boki czworokąta C_{n+1} to odcinki łączące środki kolejnych boków czworokąta C_n . Wykazać, że dla dowolnych dodatnich i, j, k mamy

$$\frac{|C_i|}{|C_{i+k}|} = \frac{|C_j|}{|C_{j+k}|}, \text{ gdzie } |C_n| \text{ oznacza pole } C_n.$$

Gdy będziecie dawali to zadanie do zrobienia specjalście, podstawcie pod i, j, k konkretne liczby. A gdy dla pewności będziecie chcieli mieć wskazówkę, to znajdźcie ją w innym miejscu tego numeru.

Małą Deltę przygotowali: Wiktor BARTOL i Marek KORDOS

**Rozwiązanie zadania F 586.**

Ponieważ pogoda jest bezwietrzna, zatem składowe poziome prędkości padających kropeł deszczu są równe zeru. W stanie równowagi, gdy wózek porusza się ze stałą prędkością, tyle samo kropeł wpada do naczynia, co z niego wypływa przez otworek. Z zasady zachowania pędu wynika więc, że prędkość wytryskującej wody względem powierzchni ziemi jest równa zeru, zatem prędkość wody względem wózeczka wynosi v . Ze znanego wzoru na prędkość V wody wypływającej przez mały otworek w ścianie zbiornika na głębokości H

$$V = \sqrt{2gH}$$

otrzymujemy, że wysokość wody nad otworkiem ustaliła się na poziomie:

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

**Rozwiązanie zadania M 1011.**

Oznaczmy $a_{t,n} = \underbrace{t^{t^{\cdot^{\cdot^{\cdot^t}}}}}_{n \text{ razy}}$, czyli

$$a_{t,1} = t, \quad a_{t,n+1} = t^{a_{t,n}}.$$

Rozważmy reszty z dzielenia przez 5.

Zauważmy, że gdy 5 nie dzieli u , to

$$u^i \equiv u^{i \bmod 4} \pmod{5}$$

(bo $u^4 \equiv 1 \pmod{5}$) oraz

$$u^i \equiv u^{i \bmod 4} \pmod{4}$$

dla n nieparzystych. Zatem

$$a_{3,n} \equiv 3 \pmod{4}$$

dla dowolnego n , skąd

$$a_{3,n+1} \equiv 3^3 \equiv 2 \pmod{5} \text{ dla } n \geq 1.$$

Podobnie

$$a_{2,n} \equiv 2^0 = 1 \pmod{5} \text{ dla } n \geq 3$$

i $a_{2,2} = 4$. Zatem

$$a_{2,k} + a_{3,l} \equiv 0 \pmod{5}$$

jedynie, jeśli $k = l = 1$. Istnieje zatem jedynie trywialne rozwiązanie $k = l = m = 1$.



Pociąg był pełny. Poszedłem do *Warsu*. Herbata była niesmaczna, nie mogłem pić. Sok grejfrutowy był natomiast w porządku, *cool*, jak to się teraz mówi. Wyjąłem długopis i jak rasowy matematyk zacząłem pisać i rysować na serwetkach. Ziewnąłem. Za oknem przesuwała się Wielkopolska, mignął Swarzędz, potem Kostrzyn (spojrzałem na prawo, na las), Nekla, Podstolice, Września. Przystanek w Koninie. Ruszamy. O, trochę śniegu za oknem. . .

Z precyzyjnym myśleniem miałem kłopot (*to wszystko ta czerwona herbata, pomyślałem*). Szczęśliwie przypomniałem sobie, że przecież Tomasz Edison mawiał: *Po co myśleć? Eksperymentuj!* Wyjąłem kalkulator, programowany TI-83 i zacząłem. . . a jednak. . . trochę myśleć. . . że może by to sobie obliczyć? Nabrałem już dużej wprawy w posługiwaniu

W 1979 roku *Delta* zamieściła cykl artykułów Dominika Roguli pod tytułem „Mechanika, komputer, człowiek”. Tekst jest interesujący i dzisiaj, chociaż wiele odkrywczych uwag zawartych w tamtym tekście jest dziś oczywistych dla każdego. Ale 1979 rok należał jeszcze do ery komputera łupanego. . .

Niemniej jednak wciąż wielu ludzi, w tym i nauczycieli, uważa, że w komputerze nie ma (bo być nie może) niczego więcej ponad to, co włożył tam człowiek. No, bo to tylko bezduszna maszyna, krąży w niej jakieś tam elektrony. . .

Słynny napis na Akademii Platońskiej Józef Maria Hoene-Wroński przełożył jako: „Nikt niegeometryczny tu nie wchodzi”. Czy komputer miałby dziś wstęp do Akademii?

Na lekcjach matematyki w szkole komputer wciąż jest intruzem. Nie będę snuł teoretycznych rozważań, czy słusznie, czy nie. Pokażę tylko, *dożylnie*, jak można użyć elektroniki do lepszego POZNANIA tajników rozumowań geometrycznych.

O właśnie, bo historia zaczęła się pod Poznaniem. Piliśmy herbatę po wspólnym spacerze we trójkę po lesie (ja, miła pani Ela i pies). Uściślię: spacerowaliśmy we trójkę, ale potem pies herbaty nie pił.

– Czy umie Pan rozwiązać zadanie z tegorocznej Olimpiady Matematycznej? – zapytała p. Elżbieta.

– Nie, nie umiem – odparłem, zgodnie z prawdą.

– A zna Pan zadania?

– Nie; może zatem dlatego nie umiem rozwiązać – odpowiedziałem.

– No, to proszę zobaczyć, uczeń rozwiązał mi zadanie o graniastostłupie, ale coś tu jest źle. Zadanie jest takie:

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastostłupa prawidłowego sześciokątnego, tworząc w przekroju sześciokąt wypukły $D_1D_2D_3D_4D_5D_6$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastostłupa, to

$$d_1^2 + d_3^2 + d_5^2 = d_2^2 + d_4^2 + d_6^2.$$

No i co Pan na to?

– Hm – powiedziałem, chcąc zyskać na czasie – poproszę jeszcze herbaty.

Świetna jest, ma nietypowy smak.

– Tak, to czerwona herbata.

– Skąd ją Pani ma?

– O, kupiłam w Kudowie Zdroju, trochę przypadkiem, ale byłam tam w jakimś nudnym towarzystwie i chodziłam sobie po sklepach.

– Naprawdę świetna. Nie, za ciasteczko dziękuję. A co do graniastostłupa to tak, tak, oczywiście, bardzo interesujące zadanie. . . No tak, ale na mnie już czas, bo pociąg nie zaczeka.

się tym kalkulatorkiem i uważam, że „wszystko” się da za jego pomocą zrobić. I rzeczywiście, gdyby pociąg jechał do Władystoku, chyba bym wszystko wyliczył. . .

Ale cóż, jechaliśmy tylko do Warszawy. W domu włączyłem laptopa, wywołałem program *Mathematica*.

Wprowadziłem na płaszczyźnie podstawy układ współrzędnych tak, by wierzchołki podstawy graniastostłupa miały współrzędne

$$(\cos j\pi/3, \sin j\pi/3), \quad \{j = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Oznaczyłem przez $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ trzecie współrzędne punktów $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$. Zatem $d_1 = 0$, d_2 i d_3 zaś mogą być dowolne (z pewnymi nieistotnymi ograniczeniami).

Z wyznacznikowej postaci równania płaszczyzny wyliczyłem (tj. *On* wyliczył), że

$$d_4 = 2d_3 - 2d_2,$$

$$d_5 = 2d_3 - 3d_2,$$

$$d_6 = d_3 - 2d_2.$$

Oto stosowne komendy:

Wyznaczenie d_4 :

```
Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1, Cos[2*Pi/3], Sin[2*Pi/3], d3}, {1, -1, 0, d4}}] == 0, d4]]
```

Odpowiedź programu: {d4 -> d1 - 2d2 + 2d3}

Wyznaczenie d_5 :

```
Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1, Cos[4*Pi/3], Sin[4*Pi/3], d5}, {1, -1, 0, d1 - 2d2 + 2d3}}] == 0, d5]]
```

Odpowiedź programu: {d5 -> 2d1 - 3d2 + 2d3}

Wyznaczenie d_6 :

```
Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1, Cos[5*Pi/3], Sin[5*Pi/3], d6}, {1, -1, 0, d1 - 2d2 + 2d3}}] == 0, d6]]
```

Odpowiedź programu: {d6 -> 2d1 - 2d2 + d3}

Wyliczając naprzemienną sumę kwadratów odległości, sprawdziłem, że teza twierdzenia z zadania jest prawdziwa:

```
Simplify [d1^2 - d2^2 + d3^2 - (d1 - 2d2 + 2d3)^2 + (2d1 - 3d2 + 2d3)^2 - (2d1 - 2d2 + d3)^2]
```

Odpowiedź programu: 0

Zero. Czyli zadanie rozwiązane, wszystko się zgadza.

Ale, pomyślałem, czy nie można jeszcze tego skomplikować, zagmatwać, tak, by było już zupełnie nie do pojęcia? Można. Oto zebranie powyższych formuł w jedną, nie najlepiej napisaną z punktu widzenia sztuki pisania programów...

```
d1^2 - d2^2 + d3^2 - (Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1, Cos[2*Pi/3], Sin[2*Pi/3], d3}, {1, -1, 0, d4}}] == 0, d4]] [[1, 1, 2]])^2 + (Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1, Cos[2*Pi/3], Sin[2*Pi/3], d3}, {1, Cos[5*Pi/3], Sin[5*Pi/3], d5}}] == 0, d5]] [[1, 1, 2]])^2 - (Simplify[ Solve[ Det[{{1, 1, 0, d1}, {1, Cos[Pi/3], Sin[Pi/3], d2}, {1, Cos[2*Pi/3], Sin[2*Pi/3], d3}, {1, Cos[5*Pi/3], Sin[5*Pi/3], d6}}] == 0, d6]] [[1, 1, 2]])^2
```

Na pytanie, czy istnieje Bóg, Leonard Euler napisał kilka nic nie znaczących formuł matematycznych i podobno wmówił słuchaczom, że to jest właśnie ten dowód. Być może Czytelnicy też uważają, że robię z nich niestosowne żarty... Ale przecież... przecież na ekranie pojawiło się zero. Zadanie rozwiązane.

Można postawić takiemu „rozwiązywaniu zadań geometrycznych” inne zarzuty. Że to profanacja, że zabija myślenie, że gdzieś piękno i tak dalej.

Zabija myślenie? Gdzież piękno? Najpierw zdajmy sobie sprawę, że jeszcze nie umiemy tego zadania rozwiązać inaczej jak tylko za pomocą maszyny. Lepszy rydz niż nic.

Teraz sobie narysujemy wszystko. Lepszy byłby *Corel*, ale rysunki w programie *Mathematica* też nie są trudne do wykonania.

```
w1={0,0};w2={2,0};
w3={4,1};w4={3,2};
w5={1,2}; w6={-1,1};
w7={0,14};w8={2,14};
w9={4,15};w10={3,16};
w11={1,16}; w12={-1,15};
d1={0,1}; d2={2,3}; d3={4,7};
d4={3,9}; d5 = {1,7}; d6={-1,3};
Show[
Graphics[
{
{Thickness[0.01],
Line[{w1,w2,w3,w4,w5,w6,w1}],
Line[{w7,w8,w9,w10,w11,w12,w7}],
Line[{w1,w7}], Line[{w2,w8}],
Line[{w3,w9}], Line[{w4,w10}],
Line[{w5,w11}], Line[{w6,w12}],
{PointSize[0.06], Point[d1], Point[d2],
Point[d3], Point[d4], Point[d5],
Point[d6]},
{GrayLevel[0.5], Polygon[{d1,d2,d3,
d4,d5,d6}]}
},
AspectRatio -> 1.5
]
```

Współrzędne wierzchołków graniastosłupa (w_1, \dots, w_{12}) i punktów sześciokąta (d_1, \dots, d_6) są napisane wyżej. Zainteresowałem się własnościami tego sześciokąta. Zanim zacząłem myśleć, poprosiłem o wyliczenie jego rozmiarów.

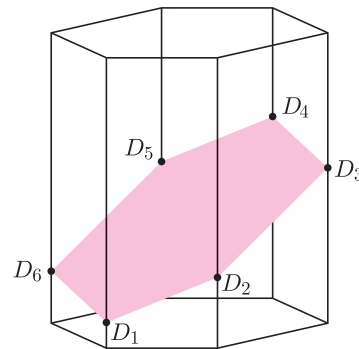
```
bok1 = Sqrt[(d2-d1).(d2-d1)];
bok2 = Sqrt[(d3-d2).(d3-d2)];
bok3 = Sqrt[(d4-d3).(d4-d3)];
bok4 = Sqrt[(d5-d4).(d5-d4)];
bok5 = Sqrt[(d6-d5).(d6-d5)];
bok6 = Sqrt[(d1-d6).(d1-d6)];
{bok1, bok2, bok3, bok4, bok5, bok6}
```

Odpowiedź programu: {2 Sqrt[2], 2 Sqrt[5], Sqrt[5], 2 Sqrt[2], 2 Sqrt[5], Sqrt[5]}

```
przek1 = Sqrt[(d4-d1).(d4-d1)];
przek2 = Sqrt[(d5-d2).(d5-d2)];
przek3 = Sqrt[(d6-d3).(d6-d3)];
{przek1, przek2, przek3}
```

Odpowiedź programu: {Sqrt[73], Sqrt[17], Sqrt[41]}

Czyli że boki sześciokąta mają długości $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$. Przekątne zaś długości $\sqrt{73}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{41}$. Teraz już wszystko o tym przekroju wiemy.



Dopiero teraz, gdy zobaczyłem to wszystko, przypomniałem sobie o figurach, które sam kiedyś nazwałem sześciórównoległobokami (kiedyś, dawno temu, w *Małej Delcie*, 1979 lub 1980). To sześciokąty, takie jak $D_1D_2D_3D_4D_5D_6$ w zadaniu. Ich przeciwległe boki są równoległe i równej długości i dlatego

sześciokąty te mają trochę własności podobnych do zwykłych równoległoboków. Oto kilka takich własności, szczególnie ciekawa jest ostatnia:

1. Leżące naprzeciwko siebie kąty sześciorównoległoboku są równe.
2. Przekątne (łącznie przeciwległe wierzchołki) przecinają się w jednym punkcie, który połowi każdą z nich. Można – i tak zrobimy – ten punkt nazwać środkiem naszego wielokąta.
3. Sześciorównoległobokami można zappełnić całą płaszczyznę.
4. Pole sześciorównoległoboku jest równe iloczynowi długości podstawy przez wysokość... jeżeli tylko odpowiednio określimy podstawę i wysokość, np. że D_1D_3 to podstawa.
5. Środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok. Jeżeli zaś w dowolnym sześciokącie $ABCDEF$ połączymy środki (ciężkości) kolejnych trójkątów $ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB$, to otrzymamy sześciorównoległobok.

Poszedłem spać, było już dobrze po północy. Ranek był prześliczny: grudzień, niedziela, słońce, mróz, trochę śniegu. Poszedłem na spacer do Puszczy Kampinoskiej. Przystanąłem na wydmach, patrzyłem na zachód, na wierzchołki drzew. I nagle zdałem sobie sprawę, że całe zadanie jest bardzo łatwe. Przetnijmy graniastosłup płaszczyzną P przechodzącą przez środek przekroju; czyli przez punkt wspólny trzech jego przekątnych. Z symetrii wynika, że odległości „nieparzystych” wierzchołków od tej płaszczyzny są równe odpowiednim odległościom wierzchołków „parzystych”. Zatem równe są też ich kwadraty. Płaszczyzna podstawy graniastosłupa jest odległa od P o stałą wielkość, powiedzmy h . Wystarczy teraz dokonać kilku drobnych rachunków...

Wciąż mi coś nie dawało spokoju. „Pobawię się komputerem” pomyślałem. Najpierw sprawdziłem, czy może suma sześciątów tych odległości jest równa. Ale nie była. No, to wziąłem ośmiokąt foremny zamiast sześciokąta i sześciany zamiast drugich potęg. Nacisnąłem *Enter* i nieco osłupiały spojrziałem na okrągłe zero na ekranie. Pojawienie się jego na ekranie było dowodem, że

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego ośmiokątnego, tworząc w przekroju ośmiokąt wypukły $D_1D_2D_3D_4D_5D_6D_7D_8$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa, to

$$d_1^3 + d_3^3 + d_5^3 + d_7^3 = d_2^3 + d_4^3 + d_6^3 + d_8^3.$$

A jak dalej? Pomyślałem i wygenerowałem procedurę, która ma sprawdzać, czy dla graniastosłupa prawidłowego o podstawie $2k$ -kątny suma $(k-1)$ -szych potęg odległości „nieparzystych” punktów jest równa sumie $(k-1)$ -szych potęg odległości parzystych. Jeżeli wartość funkcji `gs1up` dla danego k jest równa zeru, to dla tego k twierdzenie jest prawdziwe:

```
gs1up[k_] :=
Simplify
[d1^(k-1) - d2^(k-1) + d3^(k-1) +
Sum[
(-1)^j*(Simplify
[
Solve
[
Det[{{1,1,0,d1},{1,Cos[Pi/k],Sin[Pi/k],d2},
{1,Cos[2*Pi/k],Sin[2*Pi/k],d3},
{1,Cos[j*Pi/k],Sin[j*Pi/k],x}}] ==0,x
]
]
][1,1,2]]
])^(k-1),
{j,3,2k-1}
]
```

Obliczyłem (a raczej: obliczyło to moje urządzenie liczące), że liczby 2, 3, 4 i 6 są miejscami zerowymi funkcji `gs1up`. Czy znaczy to, że udowodniłem, naprawdę udowodniłem, że dla $k = 2, 3, 4$ i 6 jest prawdą, że:

Jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego $2k$ -kątnego, tworząc w przekroju wielokąt wypukły $D_1D_2 \dots D_{2k}$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa, to

$$d_1^{k-1} + d_3^{k-1} + d_5^{k-1} + \dots + d_{2k-1}^{k-1} = d_2^{k-1} + d_4^{k-1} + d_6^{k-1} + \dots + d_{2k}^{k-1}.$$

Argument **za** jest właściwie tylko jeden, ale mocny: **komputer wyliczył**. Argumentów **przeciwko** uznaniu tego za dowód jest więcej: a nuż ja źle napisałem program, a nuż komputer się pomylił i w ogóle twierdzenie jest fałszywe? A może procesor źle zadziałał? No i w ogóle: czy dopuszczając takie „dowody”, znajduję się jeszcze w obrębie matematyki? Czy można wierzyć bezdusznym maszynom?

I jeszcze jedno? Jeżeli takie twierdzenie jest prawdziwe, to dlaczego tylko dla $k = 2, 3, 4, 6$? Czy to nie dziwne?

To akurat nie. Program *Mathematica* zna dokładne wartości funkcji trygonometrycznych pewnych kątów, np. wielokrotności 30 stopni. Inne wartości podaje w przybliżeniu. Dlatego obliczenia dla innych kątów nie dawały zera.

Niemniej jednak ja sam nie jestem wcale przekonany, że **udowodniłem**. Podświadomie szukam błędu. Widocznie tkwię jeszcze w epoce króla Ćwieczka. To były czasy...

Niezależnie od tych nieco akademickich rozterek, zwróćmy uwagę, jak wielką pozytywną rolę odegrał komputer w moim myśleniu nad zadaniem: to On podsunął mi właściwą myśl, pomógł, sprawdzał, kontrolował. Był stale obecny, jak dobry pies-przyjaciel, który tęskni do nas, chce z nami być. A że czasem ugryzie? Taka jego, psiakrew, natura.

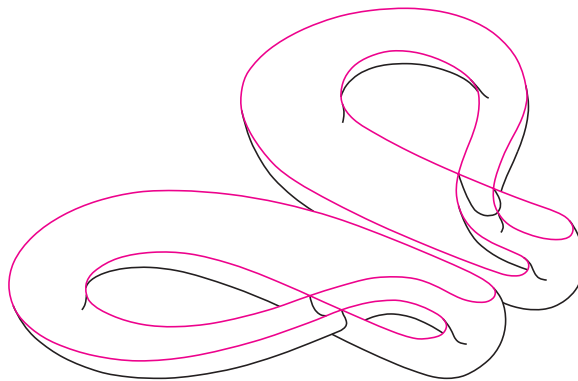
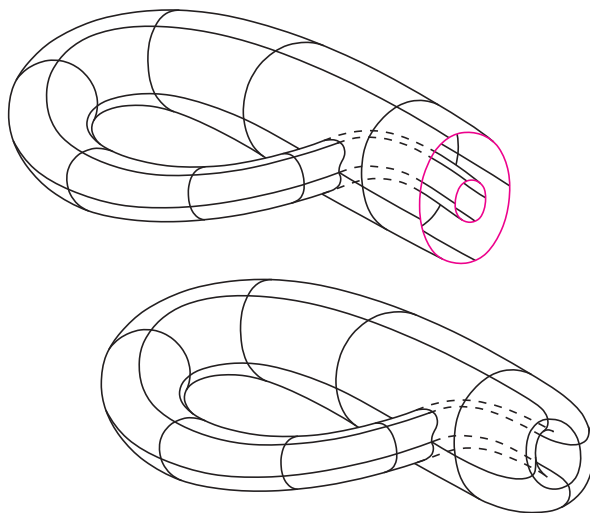
A poza tym: czy moglibyśmy sami, bez zabawy komputerem, wpaść na pomysł, że takie twierdzenie o $(k-1)$ -szych potęgach może być prawdziwe?

Butelka Kleina

Rurka z rozciągliwego tworzywa może być półfabrykatem do produkcji torusa. Wystarczy jej oba końce skleić. Sklejane okręgi mają przed sklejeniem tę samą orientację. Może się jednak zdarzyć, że ktoś złośliwy zmieni orientację jednego okręgu na przeciwną – wtedy sklejenie zgodne z orientacją już się nie powiedzie. Jest dla niego zbyt mało miejsca w przestrzeni trójwymiarowej. Ale od czegoż jest wyobraźnia. Wyobraźmy sobie, że jeden koniec rurki przeniknął do jej wnętrza, nie przecinając ścianki. Wtedy orientacje okręgów na końcach rurki już się zgadzają i można ją skleić. Właśnie wynik tego sklejenia nazywany jest *butelką Kleina* lub *torusem jednostronnym*.

Ta druga nazwa bierze się stąd, że butelkę Kleina można łatwo rozciąć na dwie wstęgi Möbiusa (na wszelki wypadek można zajrzeć do *Małej Delt* w numerze 9/2002), a wszystko, co zawiera choćby jedną wstęgę Möbiusa, jest jednostronne.

Butelka Kleina jest, oczywiście, nieorientowalna i szkoda, że w naszej zwykłej przestrzeni jej nie ma. Gdyby była, różniłaby się od torusa również tym, że są takie mapy na torusie, które pomalować tak, aby sąsiednie państwa były różnych kolorów, można dopiero siedmioma barwami, podczas gdy każdą mapę na butelce Kleina można pomalować w ten sposób już sześcioma.

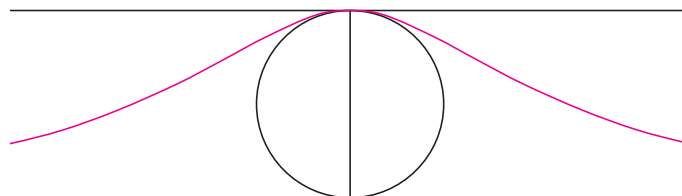
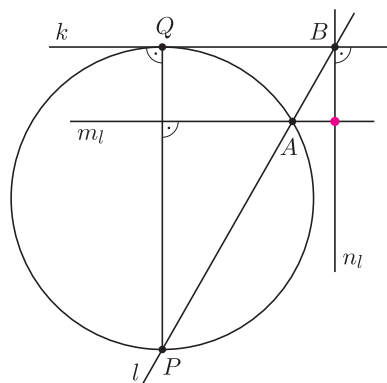


M. K.



Lok Agnesi

Maria Gaetana Agnesi (czyt. ańjesi) w 1748 roku opublikowała wiadomość o krzywej, którą nazwała *versiera*, co ma po włosku dwa znaczenia: *obracająca się* i *wiedźma*. Powstaje ona tak. Mamy dany okrąg i punkt P na nim oraz styczną k do okręgu w przeciwnym punkcie Q . Dla dowolnej prostej l przez P przecinającej prostą k w punkcie B i okrąg w punkcie A , prowadzimy przez A prostą m_l prostopadłą do PQ i przez B prostą n_l równoległą do PQ . Przecięcia m_l i n_l tworzą właśnie versierę, nazwaną później *lokiem Agnesi*.



Lok Agnesi jest krzywą algebraiczną trzeciego stopnia. W stosownym układzie współrzędnych jej równanie można zapisać jako $(x^2 + 4r^2)y - 8r^3 = 0$, gdzie r jest promieniem okręgu użytego do jej konstrukcji.

Jak nietrudno zauważyć, lok Agnesi ma asymptotę. Pole między lokiem a asymptotą jest cztery razy większe od pola koła użytego do jej konstrukcji. Natomiast jeśli obracać zarówno koło, jak i lok wokół asymptoty, okaże się, że objętość ograniczona obracającym lokiem jest dwa razy większa od objętości torusa (bez dziurki) utworzonego przez obracane koło.

M. K.

Produkcja antymaterii

Antymaterię wymyślił Paul Dirac ponad siedemdziesiąt lat temu. Dostrzegł ją we własnym równaniu opisującym relatywistyczny elektron. W tym samym równaniu, nazywanym obecnie równaniem Diraca, dostrzegł również spin elektronu. Dwa lata później Carl Anderson odkrył antyelektron. Nigdy wcześniej moc przewidywania zapisanej wzorami kartki papieru nie została w tak spektakularny sposób potwierdzona. Antymaterialny świat stanął przed nami otworem.

Z najbardziej podstawowych praw mikroświata wynika, że świat antymaterialny powinien być idealną kopią świata materialnego. Sprawdzenie tego przewidywania jest więc fundamentalnym testem teorii. Jest tylko jeden problem. Antymaterii nie ma. W początkach Wszechświata materia i antymateria wzajemnie zanihilowały, zostawiając małą nadwyżkę materii. Dlaczego tak się stało, jest osobnym pytaniem (zobacz obok). Konsekwencją tego faktu jest jednak konieczność wytworzenia antymaterii za każdym razem, gdy chcemy ją badać.

Okazuje się, że bardzo precyzyjne testy można przeprowadzić za pomocą badania widma promieniowania elektromagnetycznego antyatomów. Tylko skąd je wziąć? Potrafimy wytwarzać antyprotony, potrafimy wytwarzać antyelektrony (pozytony), ale otrzymanie antyatomów wodoru wymaga połączenia pozytonów z antyprotonami. Żeby to zrobić, należy umieć zatrzymać rozpędzone antycząstki, chroniąc je jednocześnie przed anihilacją. Dopiero wtedy można spodziewać się utworzenia antywodoru – stanu związanego pozytonu i antyprotonu.

Pojedyncze atomy udało się uzyskać już kilka lat temu. Wszystkie anihilowały natychmiast po powstaniu. Obecnie celem jest otrzymanie tzw. zimnych antyatomów, które będzie można zamknąć w pułapce i spokojnie zbadać. Pierwszy krok w tym kierunku zrobiła grupa badawcza ATHENA działająca w CERNie [1]. Układ eksperymentalny ATHENY składa się z czterech zasadniczych części przyłączonych do CERNowskiego spowalniacza antyprotonów (rodzaj antyakseleratora): pułapki antyprotonowej, akumulatora pozytonów, mieszacza i detektora anihilacji antywodoru. Całość utrzymywana jest w temperaturze 15° K. Sygnałem otrzymania antywodoru jest czasowa koincydencja rejestracji anihilacji antyprotonu i anihilacji pozytonu. Charakterystyczną cechą tej ostatniej są dwa fotony, o energii odpowiadającej masie elektronu, emitowane w przeciwnych kierunkach.

Żeby przeprowadzić precyzyjne testy antywodoru, należy detektor anihilacji zastąpić pułapką mogącą uwięzić antyatomy. Są one oczywiście neutralne, ale mają moment magnetyczny, który pozwala na ich oddziaływanie z polem elektromagnetycznym. Na tę najciekawszą część eksperymentu trzeba jednak jeszcze trochę poczekać.

Dlaczego istnieje materia?

Bo, jak widać, uzyskała przewagę nad antymaterią. Czy to w ogóle jest możliwe, skoro materia i antymateria mają być identyczne? Okazuje się, że taka możliwość istnieje, o ile spełnione są trzy warunki sformułowane przez Andrieja Sacharowa w 1966 roku. Jednym z nich jest różnica w rozpadach cząstek i antycząstek, czyli tzw. łamanie parzystości kombinowanej CP. Inaczej mówiąc, złożenie operacji zmiany parzystości (P) i sprzężenia ładunkowego (C) nie może być dokładną symetrią oddziaływań mikroświata. Od ponad 30 lat wiemy, że symetria CP jest łamana w rozpadach neutralnych mezonów K, zawierających kwark dziwny. Efekt ten jest jednak bardzo subtelny. Dużo większy spodziewaliśmy się zaobserwować w rozpadach najcięższych mezonów neutralnych, zawierających kwark piękny. Oczekiwanie to jest związane ze sposobem włączenia łamania CP do teorii elektrosłabej. Jest ono możliwe dzięki temu, że istnieją trzy rodziny cząstek, co powoduje pojawienie się zespolonej fazy w amplitudach opisujących prawdopodobieństwo rozpadów cięższych kwarków na lżejsze. Ze struktury macierzy tych amplitud wynika, że efekt powinien być najsilniejszy właśnie dla mezonów zawierających kwark piękny.

Łamanie parzystości CP daje się zaobserwować na kilka sposobów. Nie wdając się w szczegóły, możemy niezależnie zmierzyć kąty i boki tzw. trójkąta unitarności. Jeżeli precyzyjnie wyznaczymy przynajmniej cztery z sześciu wielkości opisujących taki trójkąt, to może okazać się, że każde trzy pomiary wskazują na trochę inny trójkąt. Oznaczałoby to, że jest jakieś dodatkowe źródło łamania parzystości CP. I odwrotnie, jeżeli wszystkie pomiary będą się zgadzały, to nie będzie powodu postulować istnienia wychodzącego poza standardową teorię źródła różnicy rozpadów materii i antymaterii.

Niestety, pomiar już trzeciej z minimalnego zestawu czterech wielkości jest niezwykle trudny. Chodzi o wyznaczenie tzw. kąta (dokładniej sinusa kąta) 2β . Wielkość tego kąta jest miarą stopnia łamania CP. Gdyby kąt był równy zeru, to łamanie CP by nie było.

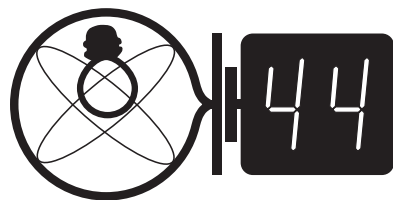
Tak jednak nie jest. Na tegorocznych letnich konferencjach fizyki cząstek oba zespoły badawcze zajmujące się tymi pomiarami zgodnie doniosły, że $\sin 2\beta \approx 0,74$ z dokładnością do 10%.

Niestety, szczegóły bardzo ciekawych analiz wykonanych przez eksperymenty BABAR (Stany Zjednoczone) i BELLE (Japonia) już się tu nie mieszczą.

Piotr ZALEWSKI

[1] Grupa badawcza ATHENA, *Production and detection of cold antihydrogen atoms*, Nature 18/09/2002

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
28 II 2003

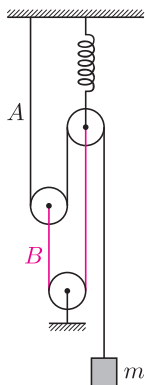
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z fizyki nr 348, 349

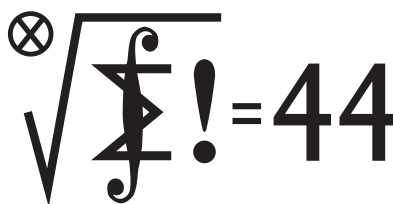
Redaguje Jerzy B. BROJAN



348. Ciężarek o masie m wisi na nici A , która owija się wokół dwóch bloków ruchomych (rys.). Osie tych bloków są połączone inną nicią B przełożoną przez blok nieruchomy; ponadto na oś górnego bloku działa sprężyna o stałej sprężystości k . Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka. Pominąć masę bloków.

349. Objętość powietrza zawartego w pokoju wynosi $V = 40 \text{ m}^3$, jego temperatura (równa temperaturze zewnętrznej) $T_1 = 35^\circ \text{ C}$, a ciśnienie jest równe $p = 10^5 \text{ Pa}$. Jaka jest minimalna ilość energii elektrycznej, którą musi pobrać z sieci klimatyzator, żeby obniżyć temperaturę w pokoju do wartości $T_2 = 25^\circ \text{ C}$? Przyjąć, że przepływ ciepła przez ściany i okna można pominąć, a powietrze jest gazem dwuatomowym.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
28 II 2003

Zadania z matematyki nr 451, 452

Redaguje Marcin E. KUCZMA

451. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy podzbiór sześćelementowy (dla $n = 49$ jest to zwykły totolotek). Wyznaczyć te liczby naturalne n , dla których bardziej prawdopodobne jest wylosowanie zbioru zawierającego co najmniej jedną parę liczb kolejnych niż wylosowanie zbioru bez takiej pary.

452. Dla danych liczb dodatnich a, b, c wyznaczyć największą średnicę, jaką może mieć koło zawarte w prostopadłościanie o krawędziach długości a, b, c .

Zadanie **452** zaproponował pan Adam Woryna z Rudy Śląskiej.



Ciekawe, że...

Witold BEDNAREK

$$\clubsuit \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \quad (a > 0).$$

$$\clubsuit \frac{\overbrace{311\dots15}^{n \text{ cyfr}}}{\underbrace{133\dots35}_{n \text{ cyfr}}} = \frac{35}{15}.$$

$$\clubsuit \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}.$$

$$\clubsuit \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{[e^n]} \right] = n.$$

$$\clubsuit \sin\left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots - \sqrt{2}}}.$$

$$\clubsuit \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ cyfr}} - \underbrace{22\dots2}_n = \underbrace{33\dots3^2}_{n \text{ cyfr}}.$$

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
439 ($WT = 2,40$) i **440** ($WT = 1,70$)
z numeru 4/2002

| | | |
|-----------------|----------------|-------|
| Tomasz Rawlik | – Braunschweig | 42,00 |
| Bartłomiej Dyda | – Wrocław | 37,36 |
| Piotr Kumor | – Olsztyn | 36,78 |

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
334 ($WT = 1,83$) i **335** ($WT = 1,83$)
z numeru 3/2002

| | | |
|------------------|---------------|-------|
| Aleksander Surma | – Myszków | 41,72 |
| Marek Wójcicki | – Szczecin | 37,65 |
| Andrzej Idzik | – Bolesławiec | 18,27 |

$$|C_n| = |C_0|/2^n.$$

Patrz w niebo

Planetoidy zbliżające się do Ziemi niezmiennie budzą zainteresowanie nie tylko dlatego, że mogą Ziemi zagrażać. Ich zbliżenie do Ziemi pozwala na prowadzenie obserwacji niewykonalnych w przypadku zwykłych planetoid, obiegających Słońce między orbitami Marsa i Jowisza. Takimi obserwacjami jest m.in. uzyskiwanie radarowych obrazów tych ciał. W 1998 r. zespół badaczy z University of Arizona odkrył planetoidę oznaczoną 1998 KY₂₆, która zbliżyła się do Ziemi na odległość 806 000 km, co jest w przybliżeniu równe podwojonej odległości Księżyca. W wyniku kilkudniowego śledzenia jej przez radioteleskopy stwierdzono, że planetoida ma 30 m średnicy (czyli jest mniejsza niż jeden z „wpatrzonych w nią” radioteleskopów – czasza radioteleskopu w Goldstone ma 70 m średnicy). Ponadto okazało się, że planetoida wykonuje jeden obrót w 10,7 minuty, obraca się więc szybciej niż jakikolwiek inny obiekt w Układzie Słonecznym, co wyraźnie sugeruje, że może być fragmentem innego ciała oderwanym od niego w wyniku zderzenia. Na takim obiekcie wschody i zachody następowałyby co 5 minut, a sam wschód lub zachód trwałby krócej niż sekundę. Wreszcie na podstawie skrupulatnej analizy światła i fal radarowych odbitych od tej planetoidy niektórzy badacze są skłonni twierdzić, że zawiera ona wodę w ilości zdolnej wypełnić dwa lub trzy olimpijskie baseny.

W następnym roku zespół LINEAR (Lincoln Near-Earth Asteroid Research) odkrył inną planetoidę oznaczoną jako 1999 JM₈, która minęła Ziemię w odległości 8,5 mln km. Obserwatoria w Arecibo (dysponujące radioteleskopem o średnicy 300 m) i w Goldstone uzyskały radarowe obrazy planetoidy o rozdzielczości 15 m. Planetoida ma kartoflowaty kształt, a jej największy rozmiar wynosi 3,5 km. Pokryta jest licznymi kraterami, przy czym najmniejsze, jakie zarejestrowano, mają średnicę rzędu 100 m. Sugeruje to, że planetoida jest obiektem starym i prawdopodobnie nie jest odłamkiem większego ciała – zwłaszcza że obraca się dla odmiany wyjątkowo powoli, w przybliżeniu jeden obrót na tydzień. Nie wiadomo obecnie, co jest tego przyczyną.

Tomasz KWAST

Grudzień

W grudniowe wieczory Droga Mleczna rozciąga się od wschodu do zachodu, przechodząc niemal przez zenit. W samym Perseuszu, znajdującym się blisko zenitu, mamy ogromne bogactwo otwartych gromad gwiazd. Wodząc tam lornetką po Drodze Mlecznej, można praktycznie w każdym kierunku mieć w polu widzenia jakąś gromadę. Na północnym skraju gwiazdozbioru znajdują się dwie niemal zachodzące na siebie wzajemnie gromady h i χ – obie widoczne gołym okiem. W rzeczywistości dzieli je odległość 300 pc, co dziesięciokrotnie przekracza ich rozmiary. Inna gromada, widoczna bez pomocy lornetki, to M34. Poza Drogą Mleczną i poza Perseuszem, ale bardzo blisko niego na południowym przedłużeniu łańcuszka gwiazd wyznaczającego ten gwiazdozbiór, leżą Plejady, gromada uchodząca za popularny sprawdzian siły wzroku obserwatora: jeżeli widzi tam kilka (może nawet 7) gwiazd, to ma oczy w porządku.

Wenus jest w Wadze i jest bardzo jasną Gwiazdą Poranną – 7 XII osiąga maksymalną jasność. Mars jest blisko, na granicy Panny i Wagi, zatem również widać go nad ranem. Jowisz jest na granicy Raka i Lwa i wschodzi wieczorem, a Saturn na granicy Byka i Bliźniąt i wschodzi jeszcze przed zapadnięciem nocy, tak więc obie te planety widać praktycznie przez całą noc. Nów Księżyca wypada 4 XII i nastąpi wtedy całkowite zaćmienie Słońca, ale widoczne w Afryce, na Oceanie Indyjskim i w Australii. Pełnia nastąpi 19 XII. 30 XII Księżyc zakryje Marsa, ale zjawisko to będzie widać tylko w północno-wschodniej Azji. 26 XII wieczorem można próbować szukać Merkurego, gdyż znajdzie się wtedy najdalej kątowno od Słońca. 22 XII nastąpi zimowe przesilenie i dni zaczną się już wydłużać, a poza tym jak zwykle Święta i Nowy Rok za pasem. A więc wszystkiego najlepszego!

T. K.



Rozwiązanie zadania M 1009.

Tak, gdyż

$$x^x < 1^x + 2^x + \dots + x^x < x \cdot x^x < (x+1)^{x+1}$$

dla $x \geq 2$, a nie istnieje takie y , że

$$x^x < y^y < (x+1)^{x+1}.$$



Rozwiązanie zadania M 1010.

Znajdziemy rozwiązania postaci

$$x = 2^k, \quad y = 2^l, \quad z = 2^m.$$

Niech $3k = 4l$. Wówczas

$$x^3 + y^4 = 2^{3k+1}.$$

Wystarczy zatem uzasadnić, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych układu

$$\begin{cases} 3k = 4l \\ 3k + 1 = 5m \end{cases}$$

Każde rozwiązanie tego układu otrzymujemy z układu kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 0 \pmod{4} \\ n \equiv -1 \pmod{5} \end{cases}$$

kładąc $k = \frac{n}{3}$, $l = \frac{n}{4}$, $m = \frac{n+1}{5}$.

Rozwiązaniem tego układu są wyrazy ciągu arytmetycznego $24 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot s$. Czytelnikom proponujemy znaleźć inne trójki x, y, z spełniające nasze równanie.

O RÓWNYCH SUMACH DWUNASTYCH POTĘG

Najbardziej imponującym znanym przykładem równych sum dwunastych potęg jest niewątpliwie równość dwóch sum siedmiu takich potęg

$$(12.7.7) \quad 99^{12} + 77^{12} + 74^{12} + 73^{12} + 73^{12} + 54^{12} + 30^{12} = \\ = 95^{12} + 89^{12} + 88^{12} + 48^{12} + 42^{12} + 37^{12} + 3^{12},$$

którą odkrył Greg Childers w 2000 roku.

Do marca 2002 roku najmniejszą liczbą k , dla której znane było rozwiązanie typu $(12, 6, k)$, tzn. nietrywialna równość sumy sześciu dwunastych potęg i sumy k dwunastych potęg, była liczba $k = 15$.

Opowiem pokrótce, jak udało mi się znaleźć rozwiązanie następujące:

$$(12.6.12) \quad 211^{12} + 178^{12} + 171^{12} + 147^{12} + 64^{12} + 35^{12} = \\ = 213^{12} + 170^{12} + 156^{12} + 117^{12} + 117^{12} + \\ + 104^{12} + 78^{12} + 60^{12} + 51^{12} + 42^{12} + 26^{12} + 16^{12}.$$

Jedną rzecz ustalmy na samym początku: nie wchodzi w rachubę przeglądanie wszystkich osiemnastek liczb i sprawdzanie, czy są one rozwiązaniami równania typu $(12, 6, 12)$ – przy liczbach 3-cyfrowych wchodzących w skład rozwiązania, takich sprawdzeń wykonać nie sposób.

Jak więc się za to zabrać?

Poczyńmy na początek kilka obserwacji.

Obserwacja 1. Dwunasta potęga liczby całkowitej przy dzieleniu przez 13 daje resztę 1 (na ogół) lub 0 (rzadko), w zależności od tego, czy liczba ta jest czy nie jest podzielna przez 13.

Obserwacja 2. Suma sześciu dwunastych potęg przy dzieleniu przez 13 daje resztę z przedziału 0–6. Zdecydowanie najbardziej prawdopodobna jest reszta 6.

Obserwacja 3. Suma 12. dwunastych potęg przy dzieleniu przez 13 daje resztę równą liczbie potęg liczb niepodzielnych przez 13. Im większa reszta, tym bardziej prawdopodobna przy losowym wyborze sumowanych potęg (słaby wyjątek – reszty 11 i 12 są jednakowo prawdopodobne).

Obserwacja 4. Wydaje się, że nie stracimy zbyt wiele, zakładając, że sumy po obu stronach równania $(12, 6, 12)$ przy dzieleniu przez 13 dają resztę 6. Dokładniejsze wyliczenia skłaniają mnie do przyjęcia, że 96,5% rozwiązań powinno tak właśnie wyglądać.

Obserwacja 5. Dwunasta potęga liczby całkowitej podzielna przez 13, dzieli się także przez 13^{12} .

Wniosek

Przyjmujemy więc, że wszystkie wyrazy po lewej stronie równania są niepodzielne przez 13, a w konsekwencji po prawej stronie musimy mieć 6 wyrazów niepodzielnych i 6 podzielnych przez 13.

Mamy więc równanie

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12} = g^{12} + h^{12} + i^{12} + \\ + j^{12} + k^{12} + l^{12} + m^{12} + n^{12} + o^{12} + p^{12} + q^{12} + r^{12},$$

w którym wyrazy a – l nie dzielą się przez 13, natomiast liczba $m^{12} + n^{12} + o^{12} + p^{12} + q^{12} + r^{12}$ jest podzielna przez 13^{12} . Zatem zachodzi kongruencja

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12} \equiv \\ \equiv g^{12} + h^{12} + i^{12} + j^{12} + k^{12} + l^{12} \pmod{13^{12}}.$$

Tak więc pierwszym krokiem jest znalezienie rozwiązań powyższej kongruencji. W tym celu należy przejrzeć szóstki liczb $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f$ niepodzielnych przez 13 w celu znalezienia powtórzeń liczby

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12} \pmod{13^{12}}$$

dla różnych szóstek. Ja przyjąłem przy tym ograniczenie $a < 350$. Takich szóstek liczb jest około $1,65 \cdot 10^{12}$, nie wchodzi więc w rachubę zgromadzenie ich naraz w pamięci komputera. Nie wchodząc zbytnio w szczegóły techniczne, dość powiedzieć, że wystarczy przebiec wszystkie liczby $R \equiv 6 \pmod{13}$, gdzie $0 < R < 13^6$, i dla każdej takiej liczby R wygenerować tylko te szóstki (a, b, c, d, e, f) , dla których

$$a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12} \equiv R \pmod{13^6},$$

co już komputer naraz spamiętać potrafi.

Do wybranych $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ usiłujemy dobrać m, n, o, p, q, r z uprzednio przygotowanej tabeli szóstek liczb podzielnych przez 13, posortowanej według reszty z dzielenia liczby

$$m^{12} + n^{12} + o^{12} + p^{12} + q^{12} + r^{12}$$

przez ustaloną liczbę pierwszą.

Pełny przebieg programu trwałby ponad miesiąc, gdyby nie to, że przerwałem obliczenia po znalezieniu dwóch rozwiązań.

O LICZBIE 343

Z okazji **343.** numeru *Delty* przedstawiamy **7** własności liczby **7³**.

- 343** = $(3 + 4)^3$.
- Liczba **3⁴³** w zapisie dziesiętnym rozpoczyna się cyframi **343**...
- ...natomiast liczba **7³⁴³** cyframi **343** się kończy...
- ...podobnie zresztą jak liczba **7⁴³**.
- Natomiast z liczby **7⁷ = 823543** otrzymujemy **343** po wykreśleniu odpowiednich cyfr.
- Suma dzielników liczby **7³** jest kwadratem liczby całkowitej.
- Najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią n , taką że dla dowolnej liczby pierwszej $p \leq 37$ reszta z dzielenia liczby **343ⁿ** przez p jest kwadratem liczby całkowitej, jest liczba **60** – numer dzisiejszego *Gammalimatiasu*.

Korespondencję do *Gamma-limatiasu* prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl