



## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (342)

Jak rzucać monetą przez telefon <i>Wojciech Guzicki</i>	str. 1
Skojarzenia <i>Witold Bednarek</i>	str. 3
Najsilniejsze magnesy świata <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 4
Zadania	str. 6
Aktualności	str. 7
Mała Delta	str. 8
Liczby ważniejsze od innych <i>Jarosław Górnicki</i>	str.10
O zdolności rozdzielczej <i>Marek W. Gutowski</i>	str.12
Klub 44	str.15
Patrz w niebo	str.16
Listopad	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hrynkiewicz, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Krzysztof Maślanka, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Zdzisław Pogoda, Michał Różyczka, Konrad Rudnicki, Grzegorz Sitarski, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Joanna Udalska, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na II kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie; wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiw.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetowa wersja *Malej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta/>

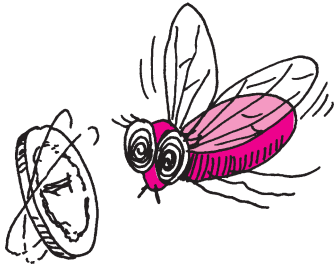
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

**W następnym numerze:**

Trójkątna matryoszka

Dla każdego powinno być oczywiste, że można grać w szachy na odległość: przesyłając opisy kolejnych ruchów w listach, telefonując do przeciwnika, czy też wysyłając mu e-mail lub SMS. Nie ma w tym nic dziwnego, przecież przesyłamy mu informację o tym, co i tak widać na szachownicy. Inaczej jest z grami losowymi. Weźmy, na przykład, najprostsza grę losową: w orła i reszkę. Antek wybiera jedną z dwóch możliwości: orła lub reszkę, Bartek rzuca monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to wygrywa Antek; jeśli wypadnie reszka, to wygrywa Bartek. Czy Antek i Bartek mogą zagrać w orła i reszkę na odległość? Chwila zastanowienia pozwala nam dostrzec trudność. Wyobraźmy sobie, że Antek wybiera orła i pisze lub telefonuje do Bartka, przekazując mu tę informację. Bartek teraz rzuca monetą i odpowiada Antkowi, że – niestety! – wypadła reszka. Czy Antek może mu wierzyć, nie widząc, czy Bartek naprawdę rzucił monetą i co naprawdę wypadło?



Wydaje się, że gra w gry losowe na odległość nie jest w takim razie możliwa. Okazuje się jednak, że jest możliwa. Zobaczmy, że Antek i Bartek mogą rozegrać grę w „orła i reszkę”, nie spotykając się i tylko przesyłając informacje na odległość. Pomoże im w tym znajomość pewnych faktów z pogranicza teorii liczb i informatyki.

Umówmy się, że w dalszym ciągu zwrot „umiemy rozwiązać” jakieś zadanie oznacza to, że znany jest algorytm znajdujący w rozsądnie krótkim czasie rozwiązanie tego zadania. Zwrot „nie umiemy rozwiązać” oznacza natomiast, że żaden taki algorytm nie jest dotychczas znany. Słowo algorytm może tu oznaczać również tzw. algorytm probabilistyczny, dający rozwiązanie z bardzo dużym prawdopodobieństwem, graniczącym z pewnością.

Metoda gry w orła i reszkę na odległość jest skuteczna dlatego, że pewne zadania umiemy rozwiązywać, innych natomiast nie umiemy. Przyjrzyjmy się teraz paru zadaniom obu typów.

1. Umiemy znajdować największy wspólny dzielnik dwóch dużych (np. dwustucyfrowych) liczb naturalnych za pomocą tzw. algorytmu Euklidesa.
2. Umiemy sprawdzić, czy dana duża liczba (np. mająca około 200 cyfr w zapisie dziesiętnym) jest liczbą pierwszą. Czytelnik może znaleźć informacje na ten temat w kwietniowym numerze *Delty* z 1997 roku. Umiemy również znajdować tak duże liczby pierwsze.
3. Nie umiemy rozkładać na czynniki dużych liczb złożonych. Na przykład, jeśli liczba  $n$  jest iloczynem dwóch przypadkowo wybranych liczb pierwszych dwustucyfrowych  $p$  i  $q$ , to za pomocą żadnego znanego algorytmu nie znajdziemy czynników  $p$  i  $q$  w czasie krótszym niż miliardy lat.
4. Przypuśćmy, że mamy dane dwie różne liczby pierwsze  $p$  i  $q$  oraz dwie liczby  $a$  i  $b$ , takie że  $0 \leq a < p$  oraz  $0 \leq b < q$ . Wtedy umiemy znaleźć liczbę  $x$ , taką że reszta z dzielenia  $x$  przez  $p$  wynosi  $a$  oraz reszta z dzielenia  $x$  przez  $q$  wynosi  $b$ . Jest to szczególny przypadek tzw. chińskiego twierdzenia o resztach.
5. Przypuśćmy teraz, że  $p$  jest liczbą pierwszą. Liczbę  $a$ , taką że  $0 < a < p$ , nazywamy **resztą kwadratową** modulo  $p$ , jeśli istnieje liczba  $x$ , taka że  $x^2$  daje przy dzieleniu przez  $p$  resztę  $a$ . Umiemy stwierdzić, czy dana liczba  $a$  jest resztą kwadratową modulo  $p$ .
6. Niech  $p$  będzie nadal liczbą pierwszą i niech  $a$  będzie resztą kwadratową modulo  $p$ . Umiemy wtedy znaleźć taką liczbę  $x$ , że  $0 < x < p$  oraz liczba  $x^2$  daje resztę  $a$  przy dzieleniu przez  $p$ . Są dwie takie liczby; jeśli jedną z nich jest  $x$ , to drugą jest  $p - x$ . Oczywiście, umiemy znaleźć je obie. Każdą z tych dwóch liczb ( $x$  oraz  $p - x$ ) nazywamy pierwiastkiem kwadratowym z  $a$  modulo  $p$ .
7. Przypuśćmy teraz, że liczba  $n$  jest iloczynem dwóch dużych liczb pierwszych:  $n = p \cdot q$  (liczby  $p$  i  $q$  mają po około 200 cyfr). Przypuśćmy następnie, że ktoś wybierze liczbę  $x$  względnie pierwszą z  $n$  (tzn. niepodzielną przez  $p$  i przez  $q$ )



## Rozwiązanie zadania F 584.

Natężenie prądu płynącego przez amperomierz  $A_1$  jest równe sumie prądów płynących przez woltomierz  $V_1$  i amperomierz  $A_2$

$$I_1 = I_{V_1} + I_2,$$

zatem natężenie prądu płynącego przez woltomierz  $V_1$  jest równe

$$I_{V_1} = I_1 - I_2 = 0,3 \text{ mA},$$

a opór woltomierza

$$R = \frac{U_i}{I_{V_1}} = 32 \text{ k}\Omega.$$

Z warunków zadania mamy, że opory wszystkich woltomierzy są jednakowe i równe  $R$ . Suma wskazań wszystkich woltomierzy jest następującej postaci

$$\sum_{i=1}^{50} U_{V_i} = \sum_{i=1}^{50} I_{V_i} R = R \sum_{i=1}^{50} I_{V_i}.$$

Ale  $\sum_{i=1}^{50} I_{V_i}$  to prąd płynący przez amperomierz  $A_1$ , tzn.

$$\sum_{i=1}^{50} I_{V_i} = I_1,$$

zatem

$$\sum_{i=1}^{50} U_{V_i} = R I_1 = 304 \text{ V}.$$

i obliczy resztę z dzielenia  $x^2$  przez  $n$ ; niech  $a$  będzie tą resztą. Nie umiemy wtedy, mając dane tylko liczby  $n$  i  $a$ , znaleźć ani jednej liczby  $y$ , takiej że  $y^2$  daje resztę  $a$  przy dzieleniu przez  $n$ . Inaczej mówiąc, nie umiemy znaleźć pierwiastka kwadratowego z  $a$  modulo liczba złożona  $n$ .

8. Umiemy natomiast rozwiązać poprzednie zadanie, jeśli znamy również liczby  $p$  i  $q$ . Okazuje się, że wtedy istnieją cztery rozwiązania. Niech  $b$  będzie resztą z dzielenia liczby  $a$  przez  $p$  i niech  $c$  będzie resztą z dzielenia liczby  $a$  przez  $q$ . Znajdujemy dwa pierwiastki kwadratowe z  $b$  modulo  $p$ : niech będą to  $r$  i  $s$  (oczywiście  $s = p - r$ ). Następnie znajdujemy dwa pierwiastki kwadratowe z  $c$  modulo  $q$ : niech będą to  $t$  i  $u$  (wtedy  $u = q - t$ ). Teraz za pomocą chińskiego twierdzenia o resztach możemy znaleźć cztery liczby:  $x_1, x_2, x_3$  i  $x_4$ , których reszty z dzielenia przez  $p$  i  $q$  są odpowiednio równe:



	reszta z dzielenia przez $p$	reszta z dzielenia przez $q$
$x_1$	$r$	$t$
$x_2$	$r$	$u$
$x_3$	$s$	$t$
$x_4$	$s$	$u$

Wtedy liczby:  $x_1, x_2, x_3$  i  $x_4$  są wszystkimi pierwiastkami kwadratowymi z  $a$  modulo  $n$ . Można więc dowieść, że  $x_4 = n - x_1, x_3 = n - x_2$  oraz:

a) liczby  $x_1 - x_2$  oraz  $x_3 - x_4$  dzielą się przez  $p$  i nie dzielą się przez  $q$ . Zatem

$$\text{NWD}(x_1 - x_2, n) = \text{NWD}(x_3 - x_4, n) = p.$$

b) liczby  $x_1 - x_3$  oraz  $x_2 - x_4$  dzielą się przez  $q$  i nie dzielą się przez  $p$ . Zatem

$$\text{NWD}(x_1 - x_3, n) = \text{NWD}(x_2 - x_4, n) = q.$$

c) liczby  $x_1 - x_4$  oraz  $x_2 - x_3$  nie dzielą się ani przez  $p$ , ani przez  $q$ . Zatem

$$\text{NWD}(x_1 - x_4, n) = \text{NWD}(x_2 - x_3, n) = 1.$$

Teraz możemy już opisać sposób gry w orla i reszkę na odległość. Zaczynamy od tego, że Bartek wybiera dwie duże liczby pierwsze  $p$  i  $q$ , mnoży je i iloczyn  $n = p \cdot q$  wysyła Antkowi. Liczby  $p$  i  $q$  trzyma w tajemnicy. Antek wybiera następnie liczbę  $x$ , taką że  $0 < x < n$ , sprawdza, czy jest ona względnie pierwsza z  $n$  i podnosi do kwadratu. Następnie oblicza resztę z dzielenia  $x^2$  przez  $n$ . Niech tą resztą będzie liczba  $a$ . Liczbę  $a$  Antek przesyła Bartkowi. Teraz Bartek rozwiązuje zadanie 8, tzn. znajduje cztery pierwiastki kwadratowe z  $a$  modulo  $n$ :  $x_1, x_2, x_3$  i  $x_4$ . Oczywiście, liczba  $x$  wybrana przez Antka jest jedną z tych czterech liczb. Przypuśćmy, że  $x = x_1$ . Następuje najważniejsza część gry: rzut monetą. Dokładniej, następuje losowanie. Z czterech liczb:  $x_1, x_2, x_3$  i  $x_4$  Bartek wybiera jedną i odsyła ją Antkowi. Oznaczmy wybraną liczbę literą  $y$ . Antek oblicza  $\text{NWD}(x - y, n)$ . Możliwe są teraz cztery przypadki:

a)  $y = x_1$ . Wtedy Antek dostaje tę samą liczbę, którą wybrał na początku. Zatem  $x - y = 0$  i wtedy oczywiście

$$\text{NWD}(x - y, n) = n.$$

b)  $y = x_2$ . Wtedy

$$\text{NWD}(x - y, n) = \text{NWD}(x_1 - x_2, n) = p.$$

c)  $y = x_3$ . Wtedy

$$\text{NWD}(x - y, n) = \text{NWD}(x_1 - x_3, n) = q.$$

d)  $y = x_4$ . Wtedy

$$\text{NWD}(x - y, n) = \text{NWD}(x_1 - x_4, n) = 1.$$

Okazuje się, że w dwóch przypadkach otrzymany największy wspólny dzielnik  $x - y$  i  $n$  jest jedną z wybranych liczb pierwszych  $p$  i  $q$ . Zatem Antek umie



**Rozwiązanie zadania M 1007.**  
Oznaczmy przez  $x_0, x_1, \dots, x_9$  kolejne liczby na okręgu.

$$\begin{aligned} x_0 &= 100 - (x_1 + x_2 + x_3) - \\ &-(x_4 + x_5 + x_6) - (x_7 + x_8 + x_9) \leq \\ &\leq 100 - 3 \cdot 29 = 13. \end{aligned}$$

Z drugiej strony układ liczb

$$13, 9\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}, \dots, 9\frac{2}{3}$$

spełnia założenia zadania.  
Odpowiedzią jest 13.



### Rozwiązanie zadania F 583.

Woltomierze są jednakowe, zatem stosunki prądów płynących przez nie, są równe odpowiednio stosunkom wskazań woltomierzy. Oznaczając opór każdego woltomierza przez  $R$  mamy

$$\begin{aligned} U_3 &= U_2 - RI_2, \\ U_2 &= U_1 - R(I_2 + I_3). \end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{I_2 + I_3}{I_3} = \frac{U_2 + U_3}{U_3} = \frac{U_1 - U_2}{U_2 - U_3}.$$

Zatem

$$U_2^2 - U_3^2 = U_1 U_3 - U_2 U_3,$$

i ostatecznie

$$U_2 = -\frac{U_3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}U_3^2 + U_1 U_2} \approx 8,6 \text{ V}.$$

rozłożyć liczbę  $n$  na czynniki. W pozostałych dwóch przypadkach Antek nie dostaje żadnej nowej informacji poza tą, którą miał na początku. Jeśli bowiem otrzymał od Bartka liczbę  $x_1$ , czyli  $x$ , to oczywiście nie dowiedział się niczego nowego. Jeśli natomiast otrzymał liczbę  $x_4$ , to zauważa, że dostał liczbę  $n - x$ , czyli też nie dowiaduje się niczego nowego.

**Podsumujmy:** jeśli Bartek wylosuje  $x_1$  lub  $x_4$ , to Antek nie dowiaduje się niczego nowego poza tym, co wiedział na początku gry: zna liczbę  $n$  i wybraną przez siebie liczbę  $x$ . Jeśli natomiast Bartek wylosuje  $x_2$  lub  $x_3$ , to umożliwi Antkowi rozłożenie liczby  $n$  na czynniki. Teraz można już umówić się, kto wygrywa w tej grze. Jeśli na końcu Antek umie rozłożyć  $n$  na czynniki, to wygrywa, jeśli nie umie, to przegrywa. Widzimy, że zasadnicze rozstrzygnięcie gry nastąpiło w momencie losowania jednej z czterech liczb przez Bartka. W dwóch przypadkach wygrywa Antek, w dwóch Bartek. To tak, jakby Bartek rzucił monetą, która ma dwa orły i dwie reszki. Jeśli wypadnie którykolwiek z orłów, to wygrywa Bartek; jeśli którakolwiek z reszek, to wygrywa Antek. Zatem każdy z nich ma prawdopodobieństwo wygranej równe  $\frac{1}{2}$ , tak jak przy rzucie zwykłą monetą.

Dokładniejsza analiza pokazuje, że Antek ma nieco większą szansę na wygranie. Może on bowiem po prostu zgadnąć jeden z czynników pierwszych liczby  $n$ . Może także, wybierając liczbę  $x$ , trafić na liczbę podzielną przez  $p$  lub przez  $q$  i rozłożyć w ten sposób  $n$  na czynniki. Prawdopodobieństwa tych zdarzeń są jednak tak bardzo małe, że w praktyce możemy je zaniedbać.

Innymi grami losowymi, w które trudno grać na odległość, są gry w karty. Wynaleziono inne metody, za pomocą których można rozdać karty graczom tak, by mogli zagrać np. w pokera. Inaczej jest jednak z grą w brydża: to jest gra par, a nie indywidualnych graczy i trudno byłoby zapobiec nielegalnej wymianie informacji między graczami w jednej parze.

## Skojarzenia

W teorii liczb rozważane są, między innymi, następujące liczby (do tej pory nie wiadomo, czy jest ich nieskończenie wiele):

- A. Liczby pierwsze bliźniacze: para liczb pierwszych różniących się o 2, a więc postaci  $p$  i  $p + 2$ .
- B. Liczby pierwsze Mersenne'a: liczby pierwsze postaci  $2^p - 1$ .
- C. Liczby pierwsze Sophie Germain: takie liczby pierwsze  $p$ , że  $2p + 1$  jest również liczbą pierwszą.

### A z C

*Czy istnieje para liczb bliźniaczych będących liczbami Sophie Germain?*

Liczby:  $p, p + 2, 2p + 1, 2(p + 2) + 1$

muszą być pierwsze. Nie może być  $p = 2$ , bo wtedy  $p + 2 = 4$  jest liczbą złożoną. Jeżeli  $p = 3$ , to pozostałe liczby: 5, 7, 11 są pierwsze. Załóżmy dalej, że  $p > 3$ . Wówczas  $p$  jest postaci  $3k + 1$  lub  $3k + 2$ .

W pierwszym przypadku liczba

$$p + 2 = (3k + 1) + 2 = 3(k + 1)$$

jest złożona. W drugim przypadku liczba

$$2(p + 2) + 1 = 2(3k + 2 + 2) + 1 = 3(2k + 3)$$

też jest złożona. Ostatecznie stwierdzamy, że jedyną taką parą są liczby 3 i 5.

Witold BEDNAREK

### A z B

*Czy istnieje para liczb bliźniaczych będących liczbami Mersenne'a?*

Mamy równanie

$$(2^{p_1} - 1) - (2^{p_2} - 1) = 2,$$

czyli  $2^{p_1} - 2^{p_2} = 2$ . Jedyną parą potęg dwójki różniącą się o 2 jest para 4 i 2, a więc  $2^{p_1} = 4$  i  $2^{p_2} = 2$ .

Stąd  $p_1 = 2$  i  $p_2 = 1$ , ale 1 nie jest liczbą pierwszą.

Zatem odpowiedź jest negatywna.

### B z C

*Czy istnieje liczba Mersenne'a będąca liczbą Sophie Germain?*

Liczby

$$2^p - 1 \quad \text{i} \quad 2(2^p - 1) + 1$$

muszą być pierwsze. Mamy

$$2(2^p - 1) + 1 = 2^{p+1} - 1.$$

Jeżeli  $p = 2$ , to liczby

$$2^p - 1 = 2^2 - 1 = 3 \quad \text{i} \quad 2^{p+1} - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

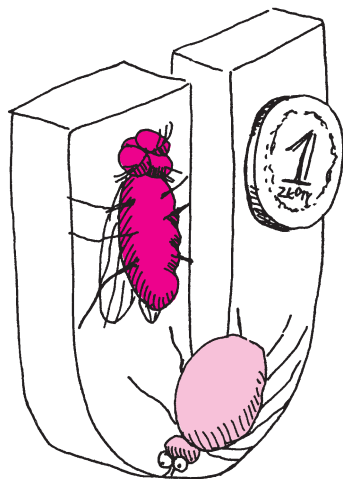
są pierwsze. Jeżeli  $p > 2$ , to  $p$  jest nieparzyste, czyli  $p = 2k + 1$ . Zatem

$$2^{p+1} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = (2^{k+1} - 1)(2^{k+1} + 1)$$

jest liczbą złożoną. Wobec tego tylko liczba 3 jest zarówno liczbą Mersenne'a, jak i liczbą Sophie Germain.

# Najsilniejsze magnesy świata

Stanisław BEDNAREK



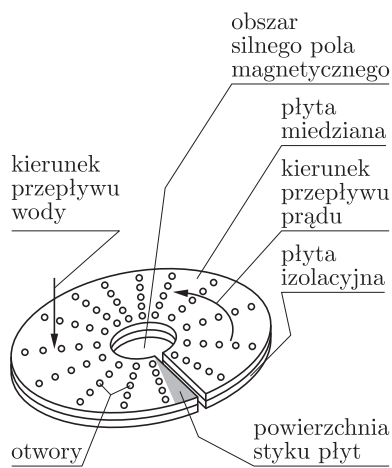
Pole magnetyczne jest obiektem fizycznym powszechnie występującym w przyrodzie. Różnego rodzaju pola magnetyczne są wytwarzane zarówno przez niektóre cząstki elementarne, np. elektrony, jak i gwiazdy czy galaktyki. Tak więc cała przestrzeń Wszechświata, od skali rozmiarów atomowych aż do skali rozmiarów kosmicznych, wypełniona jest przez silniejsze lub słabsze pola magnetyczne. Występowanie pola magnetycznego w określonym obszarze stwierdza się, wykrywając jego skutki w postaci sił działających na bieguny magnetyczne lub na poruszające się ładunki elektryczne, których uporządkowany ruch stanowi przepływ prądu. Pole magnetyczne można przedstawić graficznie za pomocą linii pola pokazujących tor, po którym poruszałyby się północny biegun magnetyczny umieszczony w tym polu. Do ilościowego opisu pola magnetycznego używa się wielkości nazywanej indukcją magnetyczną.

Pole magnetyczne	Indukcja (T)
najsłabsze mierzalne	$8 \cdot 10^{-15}$
pracującego mózgu	$10^{-13}$
przestrzeni międzygwiazdnej (średnio)	$10^{-10}$
ziemskie (średnio)	$6,5 \cdot 10^{-5}$
maszyn elektrycznych	0,005 do 2
elektromagnesów rdzeniowych	0,1 do 2,5
Słońca	0,01 do 3
urządzeń fizyki jądrowej	0,5 do 3,5
magnesów trwałych	0,001 do 4,2
magnesów nadprzewodzących	do 20
magnesów bezrdzeniowych	do 30
najsilniejsze stacjonarne w laboratorium	50
najsilniejsze impulsowe w laboratorium	2500
silnego impulsu laserowego (w ognisku)	3000
gwiazd neutronowych	$10^6$ do $10^9$
pulsarów radiowych, tzw. magnetarów	$10^{10}$

Indukcja pola magnetycznego jest równa jednej tesli (1 T), jeżeli pole to działa siłą jednego niutona na przewodnik o długości jednego metra, umieszczony prostopadle do linii tego pola, podczas przepływu w przewodniku prądu o natężeniu jednego ampera.

Zakres indukcji znanych obecnie pól magnetycznych jest bardzo szeroki i obejmuje 25 rzędów wielkości. Charakterystyczne przykłady z tego zakresu zostały zebrane w tabeli. Wytwarzanie pól magnetycznych o indukcji mniejszej niż kilkanaście setnych tesli nie stanowi problemu. Takie pola wytwarzane są np. przez magnesy spotykane w szkolnych pracowniach fizycznych lub używane w domu do przytrzymywania kartek na drzwiach lodówki albo stosowane w zatraskach meblowych. Również pola magnetyczne o indukcji kilku dziesiątych tesli wytwarzane są bez większych problemów przy użyciu magnesów trwałych, produkowanych ze stopów żelaza z kobaltem, nikiem i glinem, nazywanych stopami alnico. Za pomocą pojedynczych magnesów trwałych można też wytwarzać pola magnetyczne o indukcji około jednej tesli. W tych przypadkach magnesy wykonywane są ze stopów żelaza z samarem i kobaltem albo z ferrytów zawierających bor i neodym. Takie magnesy są jednak bardzo kosztowne. Najsilniejsze pole magnetyczne, które udało się wytworzyć za pomocą specjalnego układu magnesów trwałych, miało indukcję 4,2 T. Alternatywnym sposobem wytwarzania pól magnetycznych w zakresie indukcji do około 2,5 T są elektromagnesy. Są to szpule nałożone na żelazne rdzenie, na które nawinięto odpowiednio dużą liczbę zwojów miedzianego drutu i podłączono jego końce do źródła prądu. Wadą elektromagnesów, szczególnie tych, przez które płyną prądy o dużym natężeniu, jest silne nagrzewanie się, dlatego elektromagnesy wytwarzające pola magnetyczne o większej indukcji wymagają chłodzenia. W tym celu między zwojami umieszcza się przekładki i zamyka całe uzwojenie w szczelnej obudowie. Czynnikiem chłodzącym jest najczęściej woda destylowana, wtłaczana do obudowy i opływająca zwoje.

Do wytwarzania pól magnetycznych o indukcji od kilku do kilkudziesięciu tesli stosuje się (elektro)magnesy bezrdzeniowe, w których przepływ prądu o możliwie dużym natężeniu odbywa się jak najbliżej centralnej części, gdzie wytwarzane jest najsilniejsze pole. Prototyp magnesu bezrdzeniowego do wytwarzania

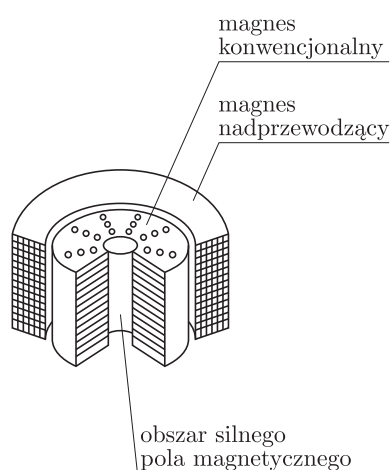


Rys. 1

silnych pól magnetycznych został skonstruowany przez F. Bittera w Cambridge około siedemdziesięciu lat temu. Magneszy tego typu, nazywane dziś magnesami Bittera, składają się z pakietu miedzianych płyt w kształcie szerokich pierścieni z przecięciem wzdłuż promienia (rys. 1). Płyty te częściowo zachodzą na siebie i poprzekładane są identycznymi płytami z materiału izolacyjnego. W ten sposób tworzą one rodzaj powierzchni śrubowej, stanowiącej uzwojenie, przez które może przepływać prąd o natężeniu kilku tysięcy amperów. Silne pole magnetyczne o indukcji dochodzącej do 25 T wytwarzane jest w otworze w środku pakietu. Ponieważ magnesy takie wytwarzają bardzo dużo ciepła, wszystkie płyty zaopatrzone są w gęstą sieć otworów, przez które wzdłuż osi pakietu przepompowuje się wodę chłodzącą w ilości dochodzącej do kilku tysięcy litrów na minutę. Cały pakiet ściśnięty jest bardzo wytrzymałymi śrubami, żeby nie został zdeformowany przez potężne siły elektrodynamiczne działające podczas przepływu prądu.

Problemy związane z wytwarzaniem ciepła nie występują w magnesach nadprzewodzących. Taki magnes to po prostu szpula, na którą nawinięto kilkaset zwojów z drutu nadprzewodzącego, wykonanego np. ze stopu niobu i cyny.

Jak wiadomo, materiały nadprzewodzące po ochłodzeniu poniżej temperatury krytycznej tracą opór elektryczny, przepływ prądu elektrycznego nie powoduje więc ich ogrzewania. Niestety, temperatury krytyczne większości materiałów nadprzewodzących są bardzo niskie i wynoszą od kilku do kilkunastu kelwinów. Dlatego magnesy nadprzewodzące muszą być umieszczane w podwójnych termosach, zwanych też naczyniami Dewara i wstępnie wychłodzone przy użyciu ciekłego azotu i helu. Ponadto, silne pole magnetyczne, spowodowane np. zbyt dużym natężeniem płynącego prądu, powoduje zanik nadprzewodnictwa. Z tego powodu przy użyciu magnesów nadprzewodzących można wytwarzać obecnie silne pola magnetyczne o indukcji nieprzekraczającej 20 T.



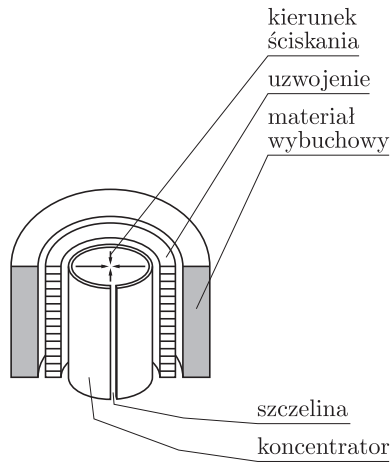
Rys. 2

Znacznie silniejsze pola magnetyczne, o indukcji do 50 T, wytwarza się przy użyciu tzw. magnesów hybrydowych, złożonych z konwencjonalnego magnesu typu Bittera lub polihelikalnego, umieszczonego wewnątrz magnesu nadprzewodzącego (rys. 2). W ten sposób magnes nadprzewodzący chroniony jest przed zbyt silnym polem, a wypadkowa indukcja magnetyczna na osi układu jest w przybliżeniu równa sumie indukcji pól pochodzących od obu magnesów. Przy obecnych możliwościach technicznych nie udaje się wytworzyć silnych pól magnetycznych w formie ciągłej o indukcji powyżej 50 T. Naprężenia powodowane przez siły elektrodynamiczne przekraczają granicę wytrzymałości miedzi. Co prawda, specjalne stopy miedzi z berylem mają większą wytrzymałość, ale ich przydatność do wykonania uzwojeń jest ograniczona przez większą oporność elektryczną – powstaje wówczas zbyt wiele ciepła, którego nie można odprowadzić i uzwojenie ulega stopieniu. Z tych powodów pola magnetyczne o indukcji przekraczającej tę granicę mogą być wytwarzane tylko w postaci impulsów.

Pola magnetyczne o indukcji do 100 T można wytwarzać w formie impulsów trwających kilka dziesiątych sekundy, przepuszczając odpowiednio silny impuls prądu, otrzymany przez rozładowanie baterii kondensatorów o pojemności setnych części farada, naładowanej do napięcia kilku tysięcy woltów. Takie pola nazywane są czasem quasi-stacjonarnymi. Do ich wytwarzania stosuje się cewki liczące kilkaset zwojów przewodu wykonanego ze stopu miedzi z berylem, wzmocnione taśmami z laminatów epoksydowych i wtłoczone w stalowe pancerze. W celu zmniejszenia oporu elektrycznego i zabezpieczenia cewki przed stopieniem ochładza się ją ciekłym azotem do temperatury około  $-100^{\circ}\text{C}$ . W czasie impulsu pola cewka ogrzewa się do temperatury kilkudziesięciu stopni i dlatego przed kolejnym użyciem należy ją ponownie wychłodzić. Cewki takie wytrzymują zwykle kilkaset impulsów.

Jeszcze silniejsze pola magnetyczne, o indukcji 100–300 T, można otrzymać tylko podczas zniszczenia cewki. Używa się w tym celu cewek złożonych z jednego

lub kilku zwojów pręta wykonanego z miedzi lub ze stopu miedzi z berylem. Po przepuszczeniu przez taką cewkę impulsu prądu o natężeniu około  $10^6$  A, trwającego około  $10^{-5}$  s, cewka ulega rozpadowi i wyparowaniu pod wpływem fali uderzeniowej i ciepła.



Rys. 3

Najsilniejsze pola magnetyczne o indukcji ponad 1000 T otrzymuje się tzw. metodą wybuchowej kompresji strumienia magnetycznego. Układ przeznaczony do realizacji tej metody składa się z uzwojenia, wytwarzającego początkowy impuls pola o indukcji 10–20 T w obszarze o średnicy kilkudziesięciu cm (rys. 3). Wewnątrz uzwojenia znajduje się koncentrator w postaci metalowej rury z podłużnym przecięciem. Na zewnątrz uzwojenie otoczone jest cylindrem z materiału wybuchowego. Po wytworzeniu początkowego impulsu pola, które łatwo wnika do koncentratora, materiał wybuchowy zostaje zdetonowany. Powstająca przy tym fala uderzeniowa zgniata cewkę, zamyka szczelinę koncentratora i powoduje jego dalsze ściskanie. W poruszających się prostopadle do linii pola magnetycznego przewodzących ściankach koncentratora indukowany jest prąd elektryczny, którego pole magnetyczne wzmacnia pole początkowe. Tą metodą otrzymano pole magnetyczne o rekordowej indukcji 2500 T.

Wytwarzanie coraz silniejszych pól magnetycznych to nie tylko dziedzina rywalizacji, w której uczestniczy kilkanaście znanych laboratoriów z całego świata. Silne pola magnetyczne są przede wszystkim niezbędne do badań w wielu dziedzinach fizyki i inżynierii materiałowej. Przykłady takich badań to testowanie nowych pół- i nadprzewodników, kwantowy efekt Halla, jądrowy rezonans magnetyczny czy kontrolowana synteza termojądrowa.

## Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delt!

Rozwiąż w listopadzie grudniowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: <http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



## Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

**M 1006.** Dany jest zbiór  $n + 1$  odcinków, których końcami są wierzchołki  $n$ -kąta foremnego. Wykazać, że co najmniej dwa spośród nich są równoległe.

Rozwiązanie na str. 14

**M 1007.** Na okręgu umieszczono 10 liczb, których suma wynosi 100. Suma dowolnych trzech kolejnych liczb na okręgu jest nie mniejsza od 29. Niech  $a$  będzie największą spośród tych dziesięciu liczb. Znaleźć największą możliwą wartość  $a$ .

Rozwiązanie na str. 2

**M 1008.** Okrąg podzielono na 7 łuków tak, że suma dowolnych dwóch kolejnych łuków jest łukiem opartym na kącie środkowym nie większym od  $103^\circ$ . Znaleźć minimalny możliwy kąt  $\alpha$ , oparty na najkrótszym z łuków.

Rozwiązanie na str. 16

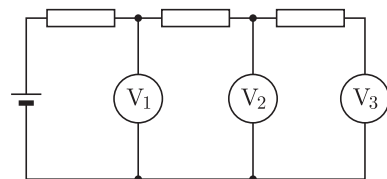
Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 583.** Mamy obwód elektryczny złożony z takich samych oporników i woltomierzy (rys. 1). Pierwszy woltomierz pokazuje  $U_1 = 10$  V, a trzeci  $U_3 = 8$  V. Ile pokazuje drugi woltomierz?

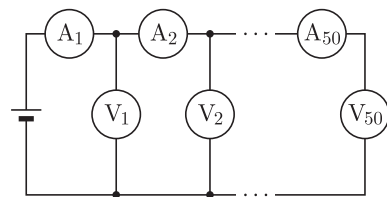
Rozwiązanie na str. 3

**F 584.** Obwód elektryczny pokazany na rysunku 2 składa się z 50 takich samych amperomierzy i 50 takich samych woltomierzy. Pierwszy woltomierz pokazuje  $U_1 = 9,6$  V, pierwszy amperomierz  $I_1 = 9,5$  mA, a drugi  $I_2 = 9,2$  mA. Wyznaczyć sumę wskazań wszystkich woltomierzy.

Rozwiązanie na str. 1



Rys. 1



Rys. 2

## Odciski galaktycznych ramion

Sherlock Holmes zwykł uzyskiwać zastanawiająco dużo informacji o swoich klientach lub przeciwnikach na podstawie obserwacji ich powierzchowności. Jego wyczyny wypadają jednak dość blado w porównaniu z osiągnięciami niektórych współczesnych badaczy zajmujących się szeroko pojętą historią Ziemi. Z fragmentu zęba potrafią oni wyczarować nowy gatunek dinozaura, a z jednego meteorytu odtworzyć globalną katastrofę. Ich zdolności wydają się czasami wręcz podejrzane. Przynajmniej dla zwykłych „Watsonów”. Holmes zawsze jednak potrafił wytłumaczyć swojemu przyjacielowi, że ta tajemniczość jest pozorna, a wszystko polega na prostej, acz konsekwentnej dedukcji. Niestety, nie dość, że Sherlock był postacią literacką, to od dawna nie żyje. Gdy nie jesteśmy w stanie sami prześledzić wszystkich niuansów danej publikacji naukowej, pozostaje nam polegać na recenzentach renomowanych czasopism i ostrym piórze oponentów.

Po tym *entrée* możemy przejść do dania głównego.

W najbardziej renomowanym periodyku fizycznym – *Physical Review Letters* – ukazał się artykuł [1], w którym autor odnajduje ślady przechodzenia Układu Słonecznego przez ramiona Galaktyki w zapisie sumarycznej ekspozycji na promieniowanie kosmiczne kilkudziesięciu meteorytów, pochodzących z ostatniego miliarda lat. Podnosi także możliwość związku tak zarejestrowanej historii intensywności promieniowania kosmicznego ze zlodowaceniami.

Praca zaczyna się od opisu konstrukcji modelu dyfuzji galaktycznego promieniowania kosmicznego. Jako główne (w istocie jedyne) źródło tego promieniowania przyjmuje się pozostałości po supernowych. Te zaś są ostatnim stadium burzliwego żywota masywnych gwiazd, które powstają przede wszystkim w gwiazdowym tłoku galaktycznych ramion. Z tego względu poziom docierającego do Ziemi promieniowania kosmicznego powinien być najwyższy, gdy Układ Słoneczny przebywa wewnątrz takiego ramienia. Obecnie znajdujemy się w tzw. odnodze Oriona, która jest mniej więcej w połowie tak gęsta jak główne ramiona. Oczekiwany poziom promieniowania kosmicznego zmienia się w opisywanym modelu od 25% do 135% obecnego poziomu, ze średnią wynoszącą 76% tego poziomu. Po przyjęciu dobrze udokumentowanych założeń jedynym wolnym parametrem modelu pozostaje prędkość kątowna Układu Słonecznego względem galaktycznych ramion. Rozkład prędkości ramion galaktycznych nie został jeszcze jednoznacznie ustalony. Jeżeli prawdziwy jest jednak pogląd większości specjalistów, że struktura ramion jest przejawem fali gęstości, to nasza kątowna prędkość względna powinna wynosić  $9,1 \pm 2,4$  km/(s · kpc).

Najważniejszą częścią pracy [1] jest analiza historycznego zapisu poziomu promieniowania kosmicznego. W tym celu użyto kompilacji danych dotyczących datowania żelaznych meteorytów za pomocą stosunku  $^{41}\text{K}/^{40}\text{K}$ , który mierzy sumaryczną ekspozycję danego meteorytu na promieniowanie kosmiczne. Jeżeli strumień

promieniowania kosmicznego byłby stały, to rozkład tak określonego wieku meteorytów powinien być jednostajny. W przeciwnym przypadku liczba znalezionych meteorytów powinna być większa w okresach niskiego poziomu promieniowania, odpowiadającym zwolnieniu „zegara potasowego” oraz mniejsza w okresach wysokiego poziomu promieniowania. I taką właśnie modulację, z okresem  $143 \pm 10$  milionów lat, obserwuje się. Odpowiada ona dopasowanej względnej prędkości kątownej Układu Słonecznego równej  $11,0 \pm 0,8$  km/(s · kpc), a więc zgodnej z niezależnymi oszacowaniami.

Ostatnio coraz wyraźniej widać, że wartość strumienia promieniowania kosmicznego ma wpływ na średnią temperaturę Ziemi. Najbardziej udokumentowanym związkiem przyczynowo-skutkowym jest wpływ tego promieniowania na intensywność tworzenia się chmur [2]. Relatywnie szybkie zmiany tego strumienia związane są z aktywnością Słońca. Silny wiatr słoneczny osłabia docierający do Ziemi strumień promieniowania. Szacuje się, że wzrost strumienia o 1% powoduje spadek średniej temperatury o 0,13 K. W takim razie różnice powodowane przechodzeniem przez ramiona galaktyki powinny powodować zmianę temperatury od +10 K do -5 K, co wystarcza do wywołania zlodowaceń. Niestety, okresów, w których występowały zlodowacenia, nie znamy zbyt dokładnie. Przeprowadzając jednak korelację między „najlepszą wiedzą” o zlodowaceniach a przewidywaną wariacją strumienia promieniowania, autor pracy [1] ponownie znajduje wysoki stopień zgodności, pozwalający na wyznaczenie względnej prędkości Układu Słonecznego na poziomie  $10,9 \pm 0,25$  km/(s · kpc). W dodatku uznanie promieniowania kosmicznego za przyczynę powstawania zlodowaceń pozwala na zrozumienie braku ich występowania w okresie od jednego do dwóch miliardów lat temu. Szacuje się mianowicie, że okresowi bez zlodowaceń odpowiada istotny spadek szybkości formowania się gwiazd w naszej Galaktyce, a więc osłabienie strumienia promieniowania i w konsekwencji ocieplenie klimatu Ziemi.

Artykuł kończy się stwierdzeniem, że jeżeli obserwowane zależności nie są wyjątkowo szczęśliwą, przypadkową koincydencją, to potrzebne jest lepsze zrozumienie przyczynowo-skutkowego związku między promieniowaniem a średnią temperaturą Ziemi. Ostatnio [2] zastanawiający wydawał się wpływ promieniowania tylko na intensywność formowania się niskich chmur, podczas gdy silniejsza jonizacja, która miałaby powodować nukleację chmur, występuje w górnych warstwach atmosfery. Wydaje się, że odpowiedź na tę zagadkę mógł znaleźć F. Yu [3], który twierdzi, że w wyższych warstwach atmosfery wysoka jonizacja powoduje szybką rekombinację niwelującą wpływ promieniowania na szybkość tworzenia się chmur wysokich.

Co o tym sądzisz, Watsonie?

Piotr ZALEWSKI

[1] Nir J. Shaviv, *Cosmic Ray Diffusion from the Galactic Spiral Arms, Iron Meteorites, and a Possible Climatic Connection*, Phys. Rev. Lett. **89**(2002)051102

[2] *Aktualności*, Delta 2/2001, str. 7

[3] *New Scientist*, 10.8.2002, str. 15



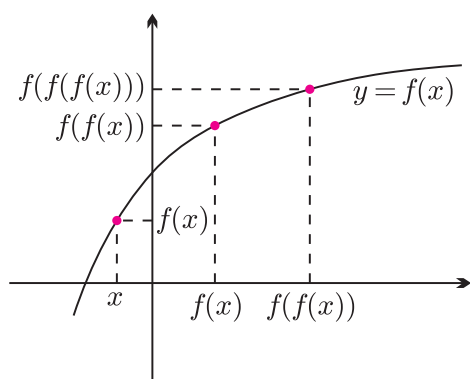
# 5

# mała delta

## Pająk i mucha

Wyobraźmy sobie muchę, która porusza się po wykresie funkcji  $y = f(x)$  w następujący sposób. Jeśli w danej chwili znajduje się w punkcie  $(x, f(x))$ , to sekundę później znajdzie się w punkcie  $(f(x), f(f(x)))$ . W ten sposób „igrekowe” współrzędne punktów wykresu, w jakich przebywa mucha, tworzą ciąg tzw. iteracji funkcji  $f$  (rys. 1).

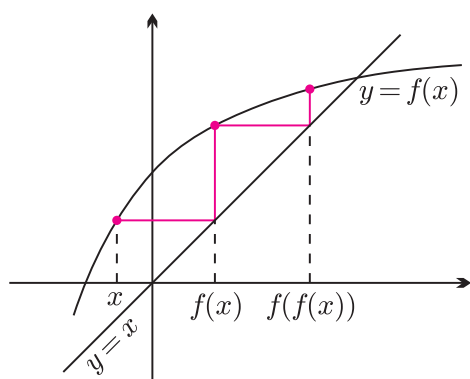
$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$



Rys. 1

Można oczywiście nie wierzyć, że jakakolwiek mucha dałaby sobie radę z tak skomplikowanym ruchem, ale czy rzeczywiście jest to ruch aż tak skomplikowany? Chyba nie.

Dorysujemy bowiem do wykresu funkcji  $f(x)$  prostą  $y = x$  (rys. 2). Mucha ma przeskoczyć z punktu  $(x, f(x))$  do punktu, który leży na wykresie funkcji  $f$  i którego pierwsza współrzędna jest równa  $f(x)$ . Jak znaleźć ten punkt?

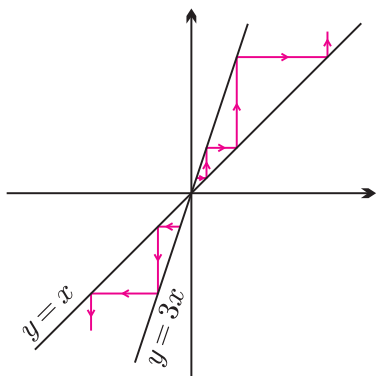


Rys. 2

Wystarczy polecieć poziomo do prostej  $y = x$ , tam się zatrzymać (nasza współrzędna „iksowa” jest teraz równa  $f(x)$ ) i polecieć wzdłuż prostej pionowej (czyli nie zmieniając naszej pierwszej współrzędnej) aż do spotkania z wykresem.

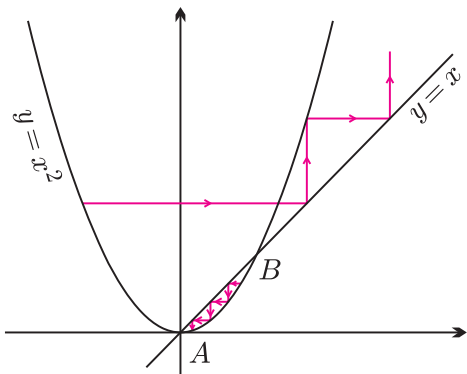
Nie jest to trudne nawet dla muchy. Popatrzmy zatem na kilka przykładowych torów jej lotu dla dwóch różnych funkcji  $f$ .

Zauważmy, że są na rysunkach takie punkty, w których mucha zanudziłaby się na śmierć.



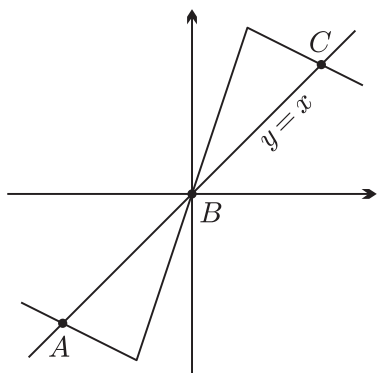
Rys. 3.  $f(x) = 3x$

Rzeczywiście: jeśli na rysunku 3 mucha usiadła najpierw w punkcie  $(0,0)$ , to nigdzie już nie pójdzie. Ale każda mucha siedząca obok uciekać będzie od punktu  $(0,0)$  jak najdalej.



Rys. 4.  $f(x) = x^2$

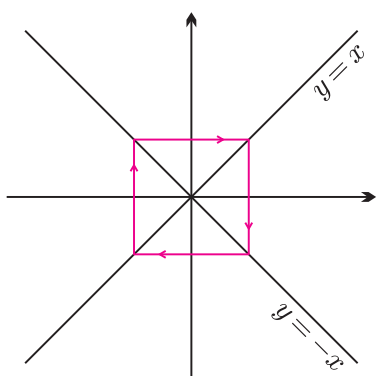
Na rysunku 4 muchy siedzące w punktach  $A = (0,0)$  i  $B = (1,1)$  też pozostałyby w tych punktach na zawsze. Punkty  $A$  i  $B$  różnią się jednak i to znacznie: punkt  $A$  przyciąga okoliczne muchy, a punkt  $B$  je odpycha! Głodny pająk powinien czatować więc w punkcie  $A$  i trzymać się z daleka od punktu  $B$ .



Rys. 5

A gdzie powinien zacząć się na rysunku 5? W punkcie  $A$ ,  $B$  czy  $C$ ?

Powstaje zresztą pytanie, czy mucha zawsze musi uciec nieograniczenie daleko albo wpaść do jakiejś „pajęcznej sieci”?



Rys. 6

Oczywiście, nie. Może na przykład zostać uwięziona na takiej oto orbicie.

Jak widzimy, teraz mucha odwiedza tylko dwa punkty na wykresie.

A czy potraficie narysować taki wykres i takie początkowe położenie muchy, by odwiedzała ona dokładnie trzy punkty? Cztery punkty? Pięć punktów?

*Mała Delta przygotował Witold SADOWSKI*

Geometria i teoria liczb to dwie najstarsze gałęzie matematyki. W *Elementach* Euklidesa (napisanych około 300 roku p.n.e.) księgi VII, VIII i IX poświęcone są arytmetyce. W księdze VII wyróżnione są liczby pierwsze.

Liczbę naturalną  $p > 1$  nazywamy **liczbą pierwszą**, jeśli ma ona tylko dwa naturalne dzielniki: samą siebie oraz liczbę 1.

Wśród liczb naturalnych mniejszych od 50 liczbami pierwszymi są:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

*Elementy* zawierają dwie fundamentalne obserwacje dotyczące liczb pierwszych. Przypomnijmy je wraz z uzasadnieniami (uzasadnienia te są wzorami rozumowań matematycznych).

Pierwszą obserwację zawiera twierdzenie 31 z księgi VII:

liczba naturalna  $n > 1$ , która nie jest liczbą pierwszą, zawsze ma czynnik pierwszy.

Jeśli  $n > 1$  nie jest liczbą pierwszą (taką liczbę nazywamy *złożoną*), to ma ona czynnik naturalny  $d_1$ ,  $1 < d_1 < n$ . Jeśli  $d_1$  jest liczbą pierwszą, to twierdzenie jest dowiedzione. Jeśli  $d_1$  jest liczbą złożoną, to ma czynnik naturalny  $d_2$ ,  $1 < d_2 < d_1$ . Jeśli  $d_2$  jest liczbą pierwszą, to dowód jest zakończony, w przeciwnym przypadku rozumowanie powtarzamy. Postępowanie to nie może mieć więcej niż  $n$  kroków i kończy się na liczbie  $d$ ,  $1 < d < n$ , będącej liczbą pierwszą. Zatem liczba  $n$  ma czynnik pierwszy.

Obserwacja ta leży u podstaw tzw. *zasadniczego twierdzenia arytmetyki*, które orzeka, że

każdą liczbę naturalną  $n > 1$  można rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych w jeden tylko sposób

(gdy ignorujemy kolejność występowania czynników).

Potrzebę dowodu jednoznaczności rozkładu liczb na czynniki pierwsze dostrzegali już Euklides (rozumowanie zawarte w *Elementach* ma lukę). Precyzyjne sformułowanie *zasadniczego twierdzenia arytmetyki* wraz z dowodem podał C.F. Gauss (1777–1855) w swoich *Disquisitiones arithmeticae* (*Rozważaniach arytmetycznych*) dopiero w 1801 roku. Wcześniej przez ponad 2000 lat twierdzenie to przyjmowano za oczywiste. Dopiero w połowie XIX wieku (głównie dzięki pracom E. Kummera (1810–1893)) okazało się, że w pierścieniach liczbowych jednoznaczność rozkładu (z dokładnością do czynników odwracalnych, czyli takich, jak 1 i  $-1$  w pierścieniu  $\mathbb{Z}$ ) występuje raczej wyjątkowo. Na przykład, w pierścieniu  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  liczb postaci  $a + b\sqrt{-5}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , każda z liczb

3, 7,  $1 + 2\sqrt{-5}$ ,  $1 - 2\sqrt{-5}$

jest nierozkładalna i

$$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5}).$$

Drugą z zapowiedzianych obserwacji zawiera twierdzenie 20 z księgi IX:

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Dowód Euklidesa był przytoczony np. w *Delcie* 5/2002.

Kilka innych (późniejszych) dowodów istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych można znaleźć w [3]. Gdy już wiemy, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, oraz że są one „cegielkami”, z których zbudowane są wszystkie liczby naturalne  $n > 1$ , to istotne są dwa pytania:

- ♠ jak rozpoznać, czy dana liczba naturalna jest liczbą pierwszą?
- ♠ jak są rozmieszczone liczby pierwsze?

Pytania te są wciąż aktualne, gdyż na żadne z nich nie znamy zadowalającej odpowiedzi. W przypadku pierwszego pytania, oczywiście, znamy teoretyczne metody pozwalające zbadać, czy dana liczba jest liczbą pierwszą – na przykład *sito Eratostenesa*. Kłopot polega na tym, że metoda ta jest praktycznie bezużyteczna dla dużych liczb. Ponadto, niestety, nie znamy żadnego algorytmu działającego w czasie wielomianowym, który pozwalałby rozłożyć dużą liczbę naturalną na czynniki pierwsze [2] (choć wiemy, że dla sprawdzenia, czy dana liczba naturalna  $n > 4$  jest liczbą pierwszą, wystarczy tylko zbadać, czy  $\frac{(n-1)!}{n}$  jest liczbą całkowitą). Problem ten okazał się bardzo ważny, gdy w 1976 roku W. Diffie i M.E. Hellman wskazali prosty sposób szyfrowania wiadomości (z jawnym kluczem), który z „technicznych” powodów jest niezwykle trudny do złamania (zob. [1], [3, str. 127]). (Z tego względu odnajdywane współcześnie olbrzymie liczby pierwsze w znakomitej większości nie są podawane do publicznej wiadomości.)

Drugie pytanie również okazało się interesujące. W 1744 roku L. Euler (1707–1783) udowodnił, że liczb pierwszych jest tak dużo, iż szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

jest rozbieżny, i tak mało, że stosunek  $\frac{\pi(x)}{x}$  zbiega do zera (symbol  $\pi(x)$  oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od  $x$ ). Obserwując odkrywane kolejno liczby pierwsze, zauważono, że pojawiają się one bardzo nieregularnie: zdarzają się ich skupiska, np.

1871, 1873, 1877, 1879,

bądź można wskazać ciąg kolejnych liczb naturalnych o zadanej z góry długości, wśród których nie ma liczby pierwszej.

Dla wybranego  $n$  ciąg taki tworzymy następująco:

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + (n+1).$$

Na podstawie analizy „materiału empirycznego”

C.F. Gauss (w 1792 r., miał wtedy 15 lat(!)

[3, str. 159]) i A.M. Legendre (1752–1833) (w 1798 r.)

wysunęli przypuszczenie, że liczbę  $\pi(x)$  można

przybliżać wielkością  $\frac{x}{\ln x}$  (choć nie jest to przybliżenie najlepsze).

$x$	$\pi(x)$	$\left[ \frac{x}{\ln x} \right]$	$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$
1000	168	144	1,159
1000000	78498	72382	1,084
1000000000	50847534	48254942	1,053

Problem ten, łączący zjawiska dyskretne z ciągłymi(!), został uznany za niezwykle interesujący. W 1896 roku,

korzystając z rezultatów P. Czebyszewa (1821–1894)

i B. Riemanna (1826–1866), J. Hadamard (1865–1963)

w Paryżu i Ch. de la Vallée Poussin (1866–1962)

w Louvain udowodnili

*twierdzenie o liczbach pierwszych:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Twierdzenie to ma wiele ciekawych konsekwencji.

Oto dwie z nich [5, str. 164–165]:

♠ Dla dowolnie wybranego skończonego ciągu cyfr  $c_1, c_2, \dots, c_m$  istnieje liczba pierwsza, której  $m$  początkowych cyfr stanowią wybrane cyfry (W. Sierpiński).

♠ Dla każdej liczby rzeczywistej  $x > 0$  istnieje nieskończony ciąg liczb pierwszych  $q_1, q_2, \dots$ , taki że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n} = x$$

(H. Steinhaus).

Z twierdzenia o liczbach pierwszych wynika również,

że  $n$ -ta liczba pierwsza jest w przybliżeniu równa

$n \ln n$  ( $p_n \sim n \ln n$ ), co jest równoważne istnieniu

dodatnich liczb  $A, B$ , takich że dla  $n > 1$ ,

$$(1) \quad A \cdot \ln n \leq \frac{p_n}{n} \leq B \cdot \ln n.$$

Korzystając z tych nierówności, wykażemy interesującą

zależność między wszystkimi liczbami pierwszymi

a „najważniejszą” liczbą w analizie [4]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p_n]{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n} = e.$$

Niech  $I_n = \sqrt[p_n]{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}$ .

Wówczas

$$\begin{aligned} (2) \quad \ln I_n &= \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^n \ln p_k = \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^n \ln k + \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{p_k}{k} = \\ &= \frac{1}{p_n} \ln n! + \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{p_k}{k}. \end{aligned}$$

Stosując wzór J. Stirlinga (1692 – 1770)

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n},$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{p_n} \ln n! \sim \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{p_n} + \frac{\ln n}{2p_n} - \frac{n}{p_n} + \frac{n \ln n}{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

gdyż przy  $n$  zmierzającym do nieskończoności,

pierwsze trzy składniki ostatniej sumy dążą

do zera, natomiast ostatni składnik (wobec

zależności  $p_n \sim n \ln n$ ) dąży do 1. Drugi składnik

w ostatniej sumie wzoru (2), przy  $n$  zmierzającym

do nieskończoności, dąży do zera, gdyż dzięki

oszacowaniu

$$\ln \frac{p_k}{k} \leq \ln(B \cdot \ln k),$$

które wynika z (1), mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{p_k}{k} &\leq \frac{n}{p_n} \ln(B \cdot \ln n) \leq \frac{1}{A \cdot \ln n} \ln(B \cdot \ln n) = \\ &= \frac{\ln B}{A \cdot \ln n} + \frac{\ln(\ln n)}{A \cdot \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln I_n = 1,$$

a to daje tezę.

W teorii liczb (w tym w teorii liczb pierwszych) wiele jest pytań, na które nie znamy odpowiedzi, np.:

♠ Czy każda liczba naturalna  $n > 5$  jest sumą trzech liczb pierwszych? Czy każda liczba naturalna parzysta  $n \geq 4$  jest sumą dwóch liczb pierwszych? (Odpowiedź twierdząca znana jest jako *hipoteza Goldbacha*.)

♠ Ile jest par liczb pierwszych różniących się o 2 (np. 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, ..., 10006427 i 10006429, ..., 260497545 · 2<sup>6625</sup> ± 1, itd.)?

♠ Czy dla każdego naturalnego  $n$  istnieje liczba pierwsza między  $n^2$  a  $(n+1)^2$ ?

Przy każdej okazji należy je przypominać. Może akurat ktoś z Czytelników otworzy kolejne drzwi i weźmie udział w fascynującej przygodzie...

Literatura:

[1] W. Guzicki, *Szyfry z kluczem publicznym*, Delta 3/1997, 1-3.

[2] W. Guzicki, *Jak rozpoznajemy liczby pierwsze*, Delta 4/1997, 1-4.

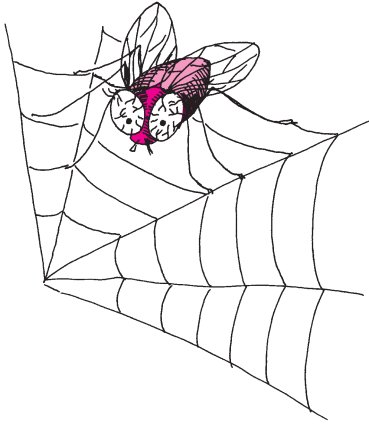
[3] P. Ribenboim, *Mała księga wielkich liczb pierwszych*, WNT, Warszawa 1997.

[4] S.M. Ruiz, *A result on prime numbers*, Math. Gaz. 81 (1997), 269-270.

[5] W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers* (A. Schinzel, red.), PWN, Warszawa 1987.

# O zdolności rozdzielczej

Marek W. GUTOWSKI



Termin **zdolność rozdzielcza** pojawia się w fizyce dość często. Gdyby kogoś zapytać, co on właściwie oznacza, to najprawdopodobniej ten ktoś rozpocząłby wyjaśnienia od zjawisk związanych z optyką. Hobbystom i osobom związanym zawodowo z przetwarzaniem obrazów: fotografom, kamerzystom, astronomom – termin ten jest z całą pewnością dobrze znany. Dla tych, którzy jeszcze nie znają tego pojęcia, również i w tym artykule rozpoczniemy od zjawisk optycznych. Prawdziwym naszym celem jest jednak zupełnie co innego: pragniemy mianowicie omówić związki między zdolnością rozdzielczą, zwaną czasem krótko **rozdzielczością**, a pomiarami wielkości fizycznych bardzo różnej natury, nie tylko związanych z optyką.

## Jak to jest w optyce?

Czytelnik nie wyposażony w skomplikowany sprzęt optyczny zapewne ogląda czasem programy telewizyjne. Niektóre stacje nadawcze wciąż jeszcze mają zwyczaj nadawać, przed lub po właściwym programie, tzw. *obraz kontrolny*. Nie chodzi nam o ten ze skalą barw, ale o ten bardziej skomplikowany, przedstawiający rozmaite linie, okręgi i inne figury geometryczne. Służy on do regulacji odbiornika oraz do oceny jakości obrazu – a to zapewne interesuje potencjalnego nabywcę, względnie posiadacza.

Na obrazie kontrolnym widzimy m.in. pęki linii prostych zbiegających się w jednym punkcie. W tych miejscach, gdzie linie są dość daleko, nietrudno jest policzyć, *ile* ich jest. W miarę, gdy linie są coraz bliżej, ich rozróżnienie staje się coraz trudniejsze i w końcu zlewają się w *jedną* grubą krechę. Odbiornik jest tym lepszy, im więcej linii leżących blisko widzimy wyraźnie jako oddzielne obiekty. Nic dziwnego, że cechę tę charakteryzuje się ilościowo, czyli w sposób mierzalny, poprzez podanie, ile linii na centymetr jest jeszcze dobrze widocznych. Podobnie można porównywać jakość rozmaitych przyrządów optycznych, poczynając od pojedynczej soczewki (lupy) czy zwierciadła, poprzez mikroskopy, lornetki, dalmierze aż do wielkich lunet i teleskopów używanych w obserwacjach astronomicznych.

Zwłaszcza te ostatnie przyrządy zostały kiedyś starannie „przeegzaminowane”. Gwiazdy są tak daleko od nas, że można je uważać za punktowe źródła światła. Jeśli więc któraś z nich jest układem podwójnym, to powinno być możliwe zarejestrowanie oddzielnych obrazów obu składników, jeśli tylko luneta czy teleskop, ma dostatecznie duże powiększenie. Tymczasem, nawet jeśli przyrząd zostanie wykonany niezwykle starannie, to i tak nie rozróżnimy za jego pomocą dwóch obiektów, których obrazy będą położone bliżej niż  $\lambda/1,22$ , gdzie  $\lambda$  jest długością fali, na której prowadzimy obserwację. Wiąże się to,

oczywiście, z falową naturą światła. Wielkość  $R = 1,22/\lambda$  nazywa się z tego powodu (maksymalną teoretyczną) *zdolnością rozdzielczą* instrumentu optycznego. Jak widzimy, wyraża się ona w tych samych jednostkach co parametr opisujący jakość obrazu telewizyjnego, tyle że dla teleskopu osiąga on wartość  $\sim 10^3/\text{mm}$  (światło widzialne, o długości fali  $\lambda \sim 1\mu\text{m}$ ), podczas gdy w najlepszych telewizorach jest ponad tysiąc razy mniejszy. Specyficzny przyrząd optyczny, jakim jest ludzkie oko, jest pod tym względem również daleki od ideału: skoro widzimy na wydruku z drukarki o rozdzielczości 300 dpi (ang. *dots per inch*, kropek na cal), literę *l* jako krótki odcinek, a nie zbiór oddzielnych kropek, to oznacza, że w najlepszym razie jesteśmy w stanie odróżnić  $\sim 12$  linii/mm.

## Rozdzielczość spektrometrów

Jak działa spektrometr? Światło z badanego obiektu (wytworzone przez obiekt albo odbite od niego, albo przechodzące) dociera do instrumentu przez wąską *szczelinę wejściową*, po czym zostaje rozszczepione za pomocą pryzmatu albo siatki dyfrakcyjnej. Powstałe w ten sposób *widmo* można obserwować gołym okiem na odpowiednim ekranie. Zamiast oka wolimy użyć odpowiedniego *detektora*, który umieszczamy w coraz to innym miejscu widma. Detektor „obserwuje” widmo przez *szczelinę wyjściową* przyrządu. Typowe warunki pomiaru są takie, że szczelina wejściowa jest możliwie wąska – w ten sposób badany obiekt można traktować jak punktowe źródło światła. Szerokość szczeliny wyjściowej daje się regulować w szerokich granicach. Eksperymentator stara się korzystać z możliwie wąskiej szczeliny wyjściowej, nie może jej jednak zmniejszać całkiem dowolnie, gdyż węższa szczelina oznacza jednocześnie mniejszą ilość światła docierającą do detektora, a więc gorszy stosunek sygnału do szumu.

Od czego zależy sygnał produkowany przez detektor? Nie wchodząc w szczegóły, możemy powiedzieć, że sygnał użyteczny (wszelkie szумы pomijamy w naszych rozważaniach) powinien być proporcjonalny do liczby fotonów docierających do detektora w jednostce czasu, powiedzmy, w ciągu sekundy. Możemy to wyrazić następującym wzorem:

$$(1) \quad S(E_0) = C \int_{E_0 - \frac{R}{2}}^{E_0 + \frac{R}{2}} I(E) dE,$$

gdzie  $S(\cdot)$  to obserwowany sygnał z detektora, będący funkcją energii,  $C$  jest odpowiednią stałą proporcjonalności, a  $I(E)$  to prawdziwe widmo. Granice całkowania odzwierciedlają fakt, że do detektora docierają i są rejestrowane jednocześnie fale elektromagnetyczne o różnych energiach zbliżonych do  $E_0$ . Tak więc do instrumentu dociera światło, którego widmo opisuje funkcja  $I(E)$ , natomiast my rejestrujemy je jako funkcję  $S(E)$ . To samo możemy zapisać inaczej:

$$(2) \quad S(E_0) = C \int_{-\infty}^{+\infty} I(E) g(E - E_0) dE,$$

gdzie wprowadziliśmy funkcję  $g(\cdot)$ , którą nazywa się *funkcją aparaturową* albo *okienkową*. Jest ona różna od zera (a ściślej: dodatnia) tylko wtedy, gdy

$$|E - E_0| \leq \frac{R}{2}.$$

W ogólności, funkcja  $g(\cdot)$  może zależeć od energii (detektor ma różną czułość w rozmaitych fragmentach widma), my jednak zaniedbajmy tę zależność. Myślmy raczej o  $g$  jako o funkcji, która ma wartość 1 w okolicy  $E_0$  oraz wartość 0 poza tym. Długość przedziału, w którym  $g(\cdot) \neq 0$ , to liczba  $R$  – zdolność rozdzielcza. Dlatego  $g(\cdot)$  nazywamy *funkcją okienkową*: ma ona tę właściwość, że zamienia całkowanie względem całej osi rzeczywistej na całkowanie tylko względem tego obszaru widmowego, który aktualnie „widzi” nasz detektor. (Tym, którym „nie zgadzają się jednostki”, spieszymy z wyjaśnieniem, że stała  $C$  jest mianowana).

Forma zapisu (2) opisuje definicję operacji matematycznej zwanej *splotem* dwóch funkcji i oznaczanej zwykle znakiem „\*”. Tak więc

$$(3) \quad S(E_0) = (I * g)(E_0),$$

co wyrażamy słowami: *widmo obserwowane jest splotem widma oryginalnego z funkcją okienkową*.

Funkcje aparaturowe prawdziwych spektrometrów raczej rzadko dają się przybliżyć w tak drastycznie uproszczony sposób (dyfrakcja na wąskich szczelinach!), jednakże przy szerokich szczelinach

wyjściowych, oraz do naszych celów, przybliżenie to jest zupełnie poprawne i wystarczające. Dla porządku wspomnimy jedynie, że do celów praktycznych najchętniej posługujemy się *znormalizowanymi* funkcjami okienkowymi, tj. przemnożonymi przez taką liczbę, aby prawdziwa była równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$$

(oczywiście, że tak naprawdę granice całkowania są skończone). Odpowiedni współczynnik skalujący zawsze przecież możemy zawrzeć w stałej  $C$ .

Tym, którzy nie boją się całkowania, proponujemy samodzielne przeciwiczenie kilku prostych przypadków: jak powinno wyglądać widmo obserwowane, kiedy widmo oryginalne składa się – na początek – z pojedynczej linii widmowej o kształcie prostokąta (*pasm*) lub trójkąta? Próby te z pewnością wykażą różnice między oryginałem a tym, co powinniśmy obserwować. Generalnie, widmo splecione z funkcją okienkową wygląda na „wygładzone” czy wręcz „rozmyte” w porównaniu do oryginału. Na kolejne pytania znamy odpowiedzi, ale wolimy, aby Czytelnik sam do nich doszedł:

- \* jak mają się do siebie położenia centrów linii widmowych przed i po splotie z funkcją okienkową?
- \* a amplitudy?
- \* i pola pod tymi krzywymi?
- \* jak wygląda splot, kiedy widmo oryginalne składa się z dwóch linii odległych wzajemnie mniej niż wynosi szerokość „okienka”?

Ci, którzy mają dostęp do pracowni optycznej, mogą sprawdzić doświadczalnie, jak zmienia się wygląd widma rejestrowanego przy różnych szerokościach szczeliny wyjściowej. Szczególnie dobrym obiektem do obserwacji powinny być wyładowania w tzw. rurkach Geislera wypełnionych rozmaitymi gazami pod zmniejszonym ciśnieniem.

## Inne pomiary a operacja splotu

Przyroda wykonuje operację splotu o wiele częściej, niż mogłoby się wydawać. Damy tu przykład z miernictwa elektrycznego. Jeśli dołączymy woltomierz (wszystko jedno – tradycyjny wychyłowy czy cyfrowy) do źródła napięcia, które nie jest stałe w czasie, to co zaobserwujemy? Przyrząd pomiarowy ma pewną bezwładność, czysto mechaniczną (woltomierz wskazówkowy) lub wynikającą z obecności rozmaitych filtrów przeciwzakłóceń, niepożądanych pojemności itp. w przypadku woltomierza elektronicznego. W rezultacie, przyrząd nigdy nie

wskazuje prawdziwej chwilowej wielkości mierzonego napięcia, z wyjątkiem sytuacji, gdy to napięcie od dawna ma ustabilizowaną wartość lub zmienia się niezwykle powoli. To, co widzimy, to coś w rodzaju uśrednionej historii, przy czym w tej średniej największą wagę mają zdarzenia najświeższe. Przyrząd stopniowo „zapomina”, jakie wartości napięcia występowały wcześniej. Szybkość tego zapominania można scharakteryzować tzw. stałą czasu  $\tau$  – im jest ona mniejsza, tym zapominanie jest skuteczniejsze (szybsze). W tym przypadku napięcie wskazywane przez miernik jest splotem napięcia wejściowego z funkcją aparaturową postaci (czynnik skalujący pominięto)

$$(4) \quad g(t) = \begin{cases} e^{t/\tau} & \text{dla } t < 0, \\ 0 & \text{gdy } t \geq 0. \end{cases}$$

Można to odczytać jako stwierdzenie, że wpływ na bieżące wskazania woltomierza ma cała historia zmian napięcia wejściowego; zdarzenia, które dopiero mają nastąpić – zgodnie ze zdrowym rozsądkiem – takiego wpływu nie mają.

Trochę pechowo się składa, że w tym przypadku zbiór, na którym funkcja okienkowa jest różna od zera, jest nieograniczony, gdyż jest to półprosta. Nie popełnimy jednak istotnego błędu, jeśli przyjmiemy, że  $g(t) \equiv 0$  dla  $t < -k\tau$ , gdzie dla  $k$  przyjmuje się zwykle wartość pomiędzy 5 a 6. Czasowa zdolność rozdzielcza woltomierza, rzędu  $\tau$ , uniemożliwi nam spostrzeżenie impulsów napięcia o *czasie trwania* mniejszym niż  $\tau$ , praktycznie niezależnie od ich amplitudy. Z drugiej strony, impuls taki może się okazać wystarczający

do tego, aby trwale uszkodzić woltomierz – nie dlatego, że jest krótkotrwały, lecz z powodu dużej amplitudy.

Jeszcze inny przykład to pomiary czegokolwiek w zależności od temperatury. Może to być np. objętość gazu (niedoskonałego) czy ciepło właściwe. Wykonując badania tego rodzaju, postępujemy najczęściej tak: ustalamy temperaturę układu, po czym wykonujemy odpowiedni pomiar. Potem zmieniamy temperaturę i wykonujemy następny pomiar. Czas trwania pomiaru nie jest zerowy; kto nam zaręczy, że podczas pomiaru temperatura była rzeczywiście stała? Z pewnością nieco się zmieniła, może tylko „płynęła” w jedną stronę, a może fluktuowała w jakichś granicach? Wynik pomiaru nie dotyczy zatem konkretnej, precyzyjnie określonej temperatury, jest raczej pewnym uśrednieniem badanej wielkości fizycznej w pewnym, miejmy nadzieję wąskim, przedziale temperatury. Znowu natykamy się na operację splotu, tyle że tym razem wszystko, co możemy powiedzieć o funkcji okienkowej, to jej „rozciągłość” na skali temperatury, czyli maksymalna *niepewność* określenia temperatury, nominalnie ustabilizowanej.

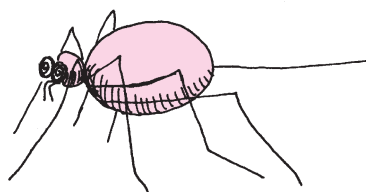
Nie sposób powstrzymać się od generalnej uwagi związanej z cyfrowymi przyrządami pomiarowymi. Ich działanie jest takie, że „muszą” one utożsamiać wyniki pomiarów, jeśli są one zbyt bliskie. Niepewność pomiarowa wnoszona przez mierniki cyfrowe jest więc co najmniej równa ich rozdzielczości, czyli jest na poziomie ostatniej wyświetlanej cyfry. Konkretna zasada działania może jednakże być powodem, że rzeczywista niepewność bywa nawet kilkakrotnie większa.

Na koniec zachowaliśmy dwie wiadomości: jedną dobrą i jedną złą. Zła jest taka, że nie istnieje prosty ogólny wzór na „odwrócenie” skutków operacji splotu, nawet gdy funkcja okienkowa jest doskonale znana.

Wiadomość dobra to to, że prawdziwe jest twierdzenie, które tu sformułujemy niezbyt precyzyjnie: jeśli możliwe są pomiary z coraz lepszą zdolnością rozdzielczą, to otrzymywane wyniki coraz lepiej odtwarzają badany oryginalny sygnał, przy czym zbieżność ta jest jednostajna. Ten, kto nie bardzo wie, o co chodzi w końcówce zdania – niech się nie martwi. To tylko dodatkowy argument za tym, że wiadomość jest istotnie dobra.

W przykładzie ze spektrometrem oznacza to pomiary z jak najmniejszymi szczelinami wejściową i wyjściową, w przypadku woltomierza – należy używać przyrządu o możliwie małej stałej czasu. Matematyk byłby zadowolony. Dla fizyka jednak oznacza to kłopoty: coraz gorszy stosunek sygnału badanego do szumów, wzrost podatności na zakłócenia, wzrost kosztów aparatury i tym podobne plagi. A to już temat na całkiem inne opowiadanie.

Warto jeszcze zapamiętać: przy prezentacji wyników pomiarów, w których w jakiś sposób zaangażowana jest operacja splotu, niezbędne jest podawanie zdolności rozdzielczej oraz niepewności wartości parametrów, które miały być ustalone. Bez tych informacji porównywanie wyników otrzymanych przy użyciu różnych przyrządów, albo przez różne grupy badawcze, zwyczajnie nie ma sensu.

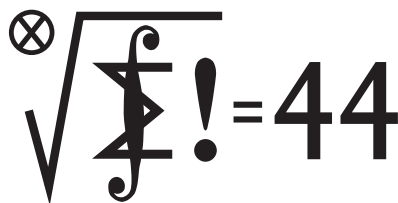


**Rozwiązanie zadania M 1006.**  
Ponumerujmy wierzchołki  $n$ -kąta foremnego liczbami  $0, 1, 2, \dots, n-1$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zauważmy, że odcinek o końcach  $a_1, b_1$  jest równoległy do odcinka o końcach  $a_2, b_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(*) \quad a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{n}.$$

Z zasady szufladkowej wynika, że dla co najmniej dwóch odcinków zachodzi (\*).

# Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 I 2003

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań **437** ( $WT = 1,15$ ), **438** ( $WT = 2,14$ )  
z numeru 3/2002

Jacek Klisowski	– Lublin	46,52
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	40,47
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	34,96

Kolejnym członkiem Klubu 44 M,  
z numerem 97, zostaje Jacek Klisowski.

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

### Zadania z matematyki nr 449, 450

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**449.** Liczby rzeczywiste  $x, y, z$  spełniają układ równań

$$y = x^2 - 2, \quad z = y^2 - 2, \quad x = z^2 - 2.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy  $x + y + z$ .

**450.** Niech  $n$  oraz  $m$  będą ustalonymi liczbami całkowitymi większymi od 1 i niech  $Z(k)$  oznacza zdanie:

*Równanie  $x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = y^n$  ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich  $x_1 < x_2 < \dots < x_k < y$ .*

Wykazać, że jeżeli zdania  $Z(m), Z(m+1), \dots, Z(2m-2)$  są prawdziwe, to dla każdej liczby całkowitej  $k \geq m$  zdanie  $Z(k)$  jest prawdziwe.

Zadanie **450** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

# Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 I 2003

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań **332** ( $WT = 2,90$ ), **333** ( $WT = 3,20$ )  
z numeru 2/2002

Tomasz Wietecha	– Tarnów	47,66
Aleksander Surma	– Myszków	41,72
Marek Wójcicki	– Szczecin	37,65

Pan Wietecha zdobył 44 punkty po raz  
czwarty (jako drugi spośród uczestników  
fizycznej ligi zadaniowej).

### Zadania z fizyki nr 346, 347

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**346.** Pozioma membrana drga harmonicznie wzdłuż osi pionowej z częstotliwością  $f = 100$  Hz. Ile wynosi amplituda tych drgań, jeśli leżące na membranie ziarenka piasku podskakują na wysokość  $h = 2$  cm względem środkowego położenia membrany?

**347.** Jacek i Placek dostali w schronisku po kubku bardzo gorącej herbaty.  
– Parzy! – zawołał Jacek.

– Nic na to nie mogę poradzić – powiedziała bufetowa – chyba że dam wam po dodatkowym kubku, żebyście sobie rozlali i żeby szybciej wystygło.

– Świetnie! – ucieszył się Jacek, rozlał zawartość swojego kubka po połowie, zaczął kilka minut i zlał z powrotem. – Wciąż jeszcze za gorąca! – skrzywił się. Tymczasem Placek również zlał swoją herbatę do jednego kubka i oświadczył:

– Moja wcale nie jest za gorąca.

Czy rzeczywiście mógł lepiej ostudzić swoją herbatę, jeśli jedyną przyczyną był inny jej podział na dwie części? Oba zlał herbatę do kubków, w których herbata była na początku.

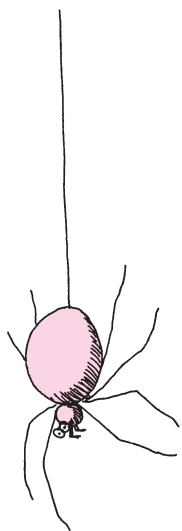
### Drobiazgi

Jeśli  $n$  oznacza liczbę elementów zbioru składającego się z liczb pierwszych, takiego że suma trzech dowolnych jego elementów jest liczbą pierwszą, to  $n \leq 4$ . Przykład zbioru  $\{7, 11, 13, 23\}$  wskazuje, że może być  $n = 4$ . Czy  $n = 4$  jest osiągalne dla nieskończenie wielu zbiorów?

Witold BEDNAREK



## Patrz w niebo



Najłatwiej dostrzegalnym przejawem zmian aktywności Słońca są zmiany zaplamienia jego tarczy. Plamy są obszarami chłodniejszymi o około 1000 K od czystej powierzchni Słońca, powstającymi tam, gdzie wiązki zgęszczonych linii słonecznego pola magnetycznego przebijają jego powierzchnię. Liczebność plam zmienia się w okresie 11 lat, a jeśli uwzględnić zmiany biegunowości plam, to pełny cykl słonecznej aktywności trwa 22 lata. Plamom zazwyczaj towarzyszą inne przejawy aktywności (pochodnie, rozbłyski), tak że w maksimum cyklu Słońce emituje nieco więcej energii niż poza maksimum, mimo że w maksimum pewna część jego powierzchni ma niższą temperaturę. Tych cyklicznych zmian na Słońcu właściwie nie sposób dostrzec na codzień, dlatego zjawisko to nie budzi większego zainteresowania. Bo też zmiany natężenia promieniowania słonecznego są rzędu jednego promila. Gdyby miało to manifestować się na Ziemi w jakichś zmianach klimatycznych również na takim poziomie, to – rzeczywiście – nie byłoby to specjalnie ciekawe. Jednak coraz lepsze poznawanie związków Słońce-Ziemia i ziemskiej atmosfery wydaje się sugerować, że małe zmiany na Słońcu mogą wywołać duże zmiany na Ziemi.

Przede wszystkim okazało się, że jasność Słońca zmienia się niejednakowo we wszystkich zakresach widma. Stosunkowo silnie zmienia się nadfioletowa moc Słońca, zatem w maksimum aktywności więcej (niż poza maksimum) słonecznej energii jest absorbowane przez stratosferyczny ozon. Część nadfioletu powoduje też rozrywanie cząsteczek tlenu, a wzrost obfitości wolnych atomów tlenu sprzyja odtwarzaniu się ozonu, a więc jeszcze silniejszej absorpcji nadfioletu. Może więc wystąpić dodatnie sprzężenie zwrotne, czyli wzmocnienie skutków pierwotnie małej zmiany oświetlenia. Całe to zjawisko nie jest do końca poznane, gdyż ze wzrostem temperatury warstwy ozonu nasilają się też prawdopodobnie reakcje niszczące sam ozon, mimo to większość klimatologów uznaje istotność przedstawionego tu dodatniego sprzężenia zwrotnego. Dużo trudniej jest wytłumaczyć tymi zjawiskami to, co miałyby dziać się przy powierzchni Ziemi. Podejrzewa się, że wzrost ciśnienia w ogrzanej stratosferze zapobiega w pewnym stopniu ucieczce ciepła z niższych warstw atmosfery. Powoduje ponadto zmiany w globalnej cyrkulacji powietrza, ale za wcześnie wnioskować, jakie to może mieć znaczenie dla klimatu. Badania są w toku.

*Tomasz KWAST*



## Listopad

Rozległy gwiazdozbiór Pegaza, widoczny w listopadowe wieczory nieco na południe i zachód od zenitu, jest jednym z tych, którego najjaśniejsza gwiazda nie jest alfą. Najjaśniejsza gwiazda, Enif, została oznaczona epsilonem i wyznacza koniec pyska zwierzęcia, od którego gwiazdozbiór wziął nazwę. Jest to pomarańczowy nadolbrzym typu widmowego K2, a więc o temperaturze powierzchni zaledwie 4500 K, i znajduje się w odległości 250 pc. Niedaleko tej gwiazdy leży gromada kulista M 15 (NGC 7078), jedna z najodleglejszych w ogóle gromad kulistych Galaktyki. Znajduje się ona w odległości 10 kpc i ma jasność 6,3 mag, a więc jest w zasadzie na granicy widoczności gołym okiem. Jej średnica wynosi około 50 pc.

Wenus i Mars są w Pannie, zatem obie planety widać na wschodnim niebie przed wschodem Słońca. Jowisz jest w Raku i wschodzi późnym wieczorem, a Saturn na granicy Byka i Bliźniąt i widać go prawie przez całą noc. Nów Księżyca wypada 4 XI, a pełnia 20 XI – wtedy też będzie półcieniowe jego zaćmienie, a więc praktycznie niedostrzegalne. Żadnych jasnych gwiazd w listopadzie Księżyc nie zakryje.

*T. K.*



**Rozwiązanie zadania M 1008.**  
Niech kolejne łuki odpowiadają kątom środkowym

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6.$$

Mamy  
 $\alpha_0 = 360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_3 + \alpha_4) -$   
 $-(\alpha_5 + \alpha_6) \geq 360^\circ - 3 \cdot 103^\circ = 51^\circ.$

Układ kątów

$$51^\circ, 51^\circ, 5, 51^\circ, 5, \dots, 51^\circ, 5$$

realizuje ekstremalną konfigurację.

