



SPIS TREŚCI NUMERU 8 (339)

Pluton – planeta czy planetoida? <i>Magdalena Kożuchowska</i>	str. 1
Krzywe eliptyczne <i>Lev Kourliandtchik</i> <i>Boris Lurje</i>	str. 5
Aktualności	str. 8
Wkładka – Mała Delta	
Doskonałe tasowanie kart <i>Tomasz Bartnicki</i> <i>Jarosław Grytczuk</i>	str. 9
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Sierpień	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Sałatka Delty

Okladki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wybór artykułów archiwalnych *Delty*
<http://www.wiwi.pl>

Internetowa wersja *Malej Delty*
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichocki
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Zbigniew Marciniak
 Krzysztof Maślanka
 Janusz Matkowski
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Michał Różyczka
 Konrad Rudnicki
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Ewa Czuchry
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Urszula Marciniak
 Anna Rudnik
 Witold Sadowski
 Joanna Udalska
 Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 853-59-61, 55-33-216
 BARTOL@MIMUW.EDU.PL
 Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
 w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2002 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
 Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Pluton – planeta czy planetoida?

Magdalena KOŻUCHOWSKA



W starożytności wszystkie jasne obiekty na sklepieniu niebieskim, które wędrowały wśród gwiazd, tzn. poruszały się na ich praktycznie niezmiennym tle, nazywano planetami (pomijając komety, które pojawiają się rzadko, oraz meteory, które bardzo długo uważano za obiekty atmosferyczne). Greckie słowo *planeo* znaczy właśnie „błądź, wędruję”. Do planet zaliczano zatem Słońce, Księżyc, Marsa, Merkurego, Jowisza, Wenus i Saturna (wszystkie dobrze widoczne nieuzbrojonym okiem). Było takich obiektów siedem i ta magiczna liczba świetnie pasowała do ówczesnych wyobrażeń o tym, jak być powinno.

Ten porządek został zaburzony w roku 1781, kiedy to William Herschel odkrył wśród gwiazd coś, co początkowo wziął za komętę, a co okazało się nieznaną wcześniej planetą. Odkrycia dokonał za pomocą 6,6-calowego (około 18 cm średnicy) teleskopu, ale obiekt był widoczny także gołym okiem. Tyle że trudno go było wyłowić między licznymi, podobnie słabymi (bo na granicy widzialności gołym okiem) gwiazdami. Planeta otrzymała imię Uran.

Wkrótce jednak stwierdzono, że nowo odkryta planeta nie porusza się dokładnie tak, jak wynikałoby z praw Keplera. W 1835 roku rozbieżność między rzeczywistym a wyliczonym położeniem planety wynosiła już 30"! To zaś sugerowało, że może istnieć dodatkowa planeta, jeszcze bardziej niż Uran odległa od Słońca, i to ona zaburza ruchy poprzedniej. Znając odchylenia położenia Urana na niebie od miejsca przewidywanego, można było pokusić się o wyznaczenie jej położenia. Pierwszy prawidłowo wyliczył pozycję tej nieznannej jeszcze planety młody Brytyjczyk, John Couch Adams – jego obliczenia zlekceważył jednak dyrektor Obserwatorium, George Biddell Airy. Podobne kłopoty miał Francuz Urbain Jean Joseph Le Verrier (czasem pisany Leverrier), ale posłał wyniki swych rachunków do Obserwatorium w Berlinie. Miał tam bowiem przyjaciela-observatora – Johanna Gottfrieda Gallego. Wieczorem tego samego dnia, w którym dotarła do Berlina poczta z listem Le Verriera (23 września 1846), Galle wraz ze swym studentem, Heinrichem Louistem d'Arrestem, za pomocą 9,5-calowego refraktora, odkryli „gwiazdę, której nie ma na mapie!” (tak krzyknął Arrest do Gallego po godzinie pracy polegającej na tym, że Galle podawał pozycje i jasności gwiazd pola, a Arrest sprawdzał dane na mapie nieba).

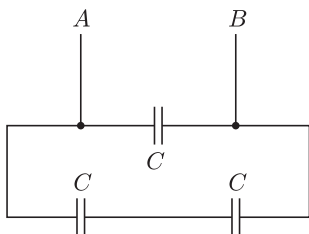
Była to „gwiazda” ósmej wielkości. Le Verrier otrzymał wtedy następującą wiadomość: „Planeta, której położenie wskazałeś, FAKTYCZNIE ISTNIEJE”. Odnaleziono ją w odległości 55' od pozycji wskazanej przez Le Verriera i 1°5' od pozycji wskazanej przez Adamsa (czyli niemal dokładnie „na właściwym miejscu”). Było to wspaniałe potwierdzenie poprawności teorii Newtona. Zgodnie z tradycją Le Verrier (jako odkrywca) miał prawo „ochrzcić” planetę. Zaproponował nazwę Neptun i choć potem było wiele nieporozumień – nazwa pozostała.

Okazało się jednak niebawem, że odkrycie Neptuna nie tłumaczy wszystkich niejasności w ruchach Urana. Rozpoczęto zatem poszukiwania dalszej, dziewiątej tym razem, planety. Zajmowali się tym głównie Percival Lowell i William H. Pickering. Obliczali domniemane położenia nowej planety na niebie (potem je korygowali), ale... nie dawało się jej odnaleźć. Czas upływał, przeglądano – bez rezultatów – niebo w podejrzanych okolicach. Entuzjazm słabł. Ale Lowell nie poddawał się. Wraz z żoną Konstancją ufundował Obserwatorium we Flagstaff (Arizona), gdzie poszukiwania prowadzono najintensywniej i zarządził w testamencie (zmarł w 1916 r.) kontynuację poszukiwań dziewiątej planety.

1



Rozwiązanie zadania F 577.
Dany układ przewodzących płyt jest równoważny układowi trzech kondensatorów o pojemności $C = \epsilon_0 S/d$ każdy.

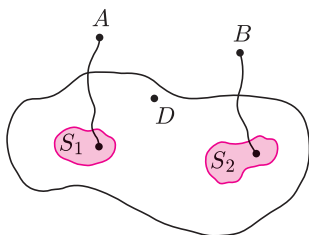


Zatem

$$C_{AB} = C + \frac{C}{2} = \frac{3 \epsilon_0 S}{2 d}.$$



Rozwiązanie zadania F 578.
Między punktami A i B na poniższym rysunku



mamy dwa kondensatory o pojemnościach $C_1 = \epsilon_0 S_1/d_1$ i $C_2 = \epsilon_0 S_2/d_2$ połączone równolegle.

Zatem:

$$C_{AB} = \epsilon_0 \frac{S_1 S_2}{S_1 d_1 + S_2 d_2}.$$

Między punktami A i D – D leży na metalowej powierzchni – mamy układ o pojemności C_1 , a między punktami B i D o pojemności C_2 .

Sześć stopni na niebie to dwanaście tarcz Księżyca. Jak się udało odnaleźć obiekt tak daleko od podejrzanego miejsca? Clyde był bardzo pracowity i bardzo sprytny. Wymyślił urządzenie zwane komparatorem (ang. *blink comparator*). Pozwalało ono obserwować naprzemiennie dwie klisze tego samego rejonu nieba naświetlone w dwu różnych momentach. Obiekty stałe widać wtedy nieustannie, takie zaś, których wcześniej nie było (bo np. planeta weszła w pole widzenia teleskopu), migają – raz je widać a raz nie. Dziś całą tę pracę robią za ludzi komputery (przy technice CCD jest to standard).

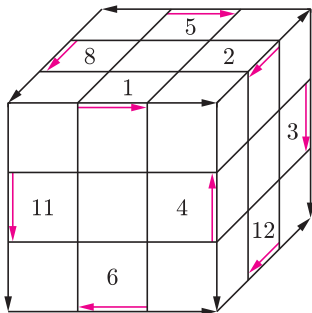
Odkrycie Urana było przypadkiem, Neptuna – sukcesem mechaniki nieba, a Plutona – wynikiem inteligencji i pracowitości Clyde'a Tombaugh.



Rozwiązanie zadania M 998.

Możemy założyć, że 6 centralnych klocków jest nieruchomych, a ruszają się jedynie „ściany”

Na każdym z klocków na środku krawędzi rysujemy strzałkę (w dowolny sposób). Każdej z krawędzi sześciangu nadajemy zwrot (rysunek).



Klockom na środku krawędzi przypisujemy liczby (orientacje)

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli strzałka na } i\text{-tym} \\ & \text{klocku ma ten sam zwrot} \\ & \text{co krawędź sześciangu} \\ -1 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

dla $i = 1, 2, \dots, 12$. Na przykład:

$$1 = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_8 = \alpha_{11}.$$

Zauważmy, że przy obrocie o 90° górnej lub dolnej ściany żadna z liczb α_i się nie zmienia, a przy obrotach ścian bocznych dokładnie dwie spośród liczb α_i zmieniają znak. Zatem iloczyn

$$\prod_{i=1}^{12} \alpha_i$$

nie ulega zmianie.

Przy nieprawidłowym włożeniu klocka jego orientacja, a zatem i nasz iloczyn, zmieni się. Nie da się więc takiej kostki ułożyć.

Wobec fiaska starań obserwacyjnych w 1929 roku rodzina Lowella dostarczyła do Flagstaff nowy, 13-calowy refraktor do dalszych badań. Zawodowi astronomowie z tego Obserwatorium, znudzeni żmudną i bezowocną pracą nad poszukiwaniem kolejnej planety, wynajęli do niej młodego wówczas miłośnika astronomii – Clyde'a Tombaugh (wcześniej pracującego po prostu na rodzinnej farmie w Kansas). I – o zgrozo! – 18 lutego 1930 roku, w odległości 6° od pozycji wyliczonej 15 lat wcześniej przez Lowella, świeżo zatrudniony amator odkrył to, czego zawodowcy poszukiwali od wielu lat! Obiekt miał jasność 13,6 mag!

Można sądzić, że w Obserwatorium Flagstaff fetowano sukces. Niestety – zawiść jest uczuciem bardzo silnym! Gdy w 75. rocznicę urodzin Percivala Lowella, 13 marca 1930 roku, ogłoszono odkrycie, nie podano, kto personalnie go dokonał. „W Obserwatorium Flagstaff odkryto dziewiątą planetę w miejscu przewidzianym przez Percivala Lowella” – tak mniej więcej brzmiał komunikat wysłany do Biura Telegramów Międzynarodowej Unii Astronomicznej. Potem zaczęły się kłopoty z nazwą. Wdowa po Percivalu Lowellu do tego stopnia poczuła się „właścicielką” planety, że proponowała, by planetę nazwać... Konstancja. Na szczęście odkrywca przekonał ją, że w słowie „Pluton” pierwsze dwie litery to inicjały jej śp. męża. No i tak już zostało!

Wyznaczenie orbity nowej planety bardzo szybko ujawniło wiele jej nietypowych własności (patrz tabelka na str. 4):

- orbita Plutona jest bardzo ekscentryczna; jej aphelium znajduje się w odległości 7,4 mld km od Słońca, perihelium zaś 4,5 mld km,
- orbita jest znacznie nachylona do płaszczyzny ekliptyki,
- rzuty orbit Plutona i Neptuna na płaszczyznę ekliptyki przecinają się,
- czasami Pluton bywa bliżej Słońca niż Neptun.

Mimo to Pluton dołączył do Układu Słonecznego jako najbardziej oddalona od Słońca planeta. Nie było co prawda wiadomo, jak jest duża i jak masywna. Pierwsze przymiarki w XIX wieku robiono dla masy rzędu 10 mas Ziemi.

W roku 1915 Lowell przewidywał, że dziewiąta planeta jest 6,6 razy cięższa od naszej. Jednak odkryty Pluton okazał się znacznie słabszy niż oczekiwano – stąd spodziewano się, że będzie też lżejszy. Ciągłe jednak mówiło się o kilku masach Ziemi. W 1955 roku Pluton „ważył” już tylko 0,8 masy Ziemi, w 1968 – zaledwie 0,18. Na początku lat 70. XX wieku okazało się (z badań w podczerwieni), że Pluton znów kilkakrotnie „schudł”. Masę szacowano wtedy z jasności obiektu, nie wiedząc, że powierzchnia jest pokryta doskonale odbijającym światło metanem, zatem ponownie uzyskano wynik zawyżony. Dziś wiadomo, że masa Plutona to zaledwie 0,03 masy Ziemi. Podobnie trudno było z szacowaniem rozmiarów Plutona. Pierwsze oszacowania były autorstwa Gerarda Kuipera, który w 1950 roku za pomocą 200-calowego teleskopu na Mount Palomar (wówczas największego na świecie) porównywał rozmiary tarczki Plutona z tarczками rozmaitych ciał niebieskich i doszedł do wniosku, że Pluton ma średnicę kątową około $0,23''$, co odpowiadało mniej więcej połowie średnicy Ziemi (6114 km). Biorąc pod uwagę fakt, że atmosferyczne rozmycie obrazu (ang. *seeing*) to efekt rzędu $1''$ – sam autor ostrożnie podchodził do swego wyniku.

W 1965 r. oczekiwano zakrycia gwiazdy przez Plutona i chociaż tego zjawiska nie było widać – udało się z całą pewnością stwierdzić, że Pluton musi mieć średnicę nie większą niż 5790 km. Szacowana wówczas masa Plutona i jego rozmiary pozwalały na wyliczenie średniej gęstości obiektu. I tu niespodzianka – wynik zbliżony był do gęstości... ołowiu! Trudno było dać temu wiary, próbowano więc innymi metodami znaleźć podstawowe parametry planety. Tymczasem Pluton nie tylko chudł i kurczył się, ale w dodatku dziwnie – z okresem 6,4 dnia – zmieniał swą jasność. Uznano więc, że przyczyną tego musi być obrót niejednorodnie świecącej planety, ale okazało się, że zmienia się zarówno całkowita jasność absolutna obiektu, jak i amplituda zmian jasności!

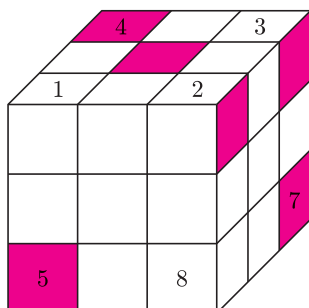
W 1976 r. zbadano na Ziemi lody metanu, po czym wykryto (w podczerwieni, spektrograficznie) obecność zestalonego metanu na powierzchni Plutona.



Rozwiązanie zadania M 999.

Zakładamy, że kolor ściany jest wyznaczony przez kolor jej centralnego klocka, który jest nieruchomy. Przyjmijmy, że górna i dolna ściana mają odpowiednio kolory czerwony i niebieski. Zauważmy, że każdy z narożnych klocków ma dokładnie jedną ścianę koloru niebieskiego lub czerwonego. Dokonując obrotu narożnego klocka wokół głównej przekątnej sześcianu o kąt 0° , 120° lub 240° , można doprowadzić do sytuacji, w której górna lub dolna ściana klocka jest niebieska lub czerwona. Umawiamy się, że obracamy zawsze w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, patrząc w kierunku środka sześcianu. Ów kąt obrotu i -tego klocka oznaczmy przez β_i , $i = 1, 2, \dots, 8$. Na przykład:

$$\begin{aligned}\beta_4 = \beta_8 = 0^\circ, \\ \beta_2 = \beta_7 = 120^\circ, \\ \beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = 240^\circ.\end{aligned}$$



Zauważmy, że

- przy obrocie o 90° górnej lub dolnej ściany liczby β_i nie zmieniają się,
- przy obrocie o 90° ściany bocznej dwie z liczb β_i zmieniają się o 120° (tj. $\beta_i := \beta_i + 120^\circ \pmod{360^\circ}$), a dwie pozostałe o 240° .

Zatem

$$\sum_{i=1}^8 \beta_i \pmod{360^\circ}$$

nie zmienia się. Należy więc wpasować brakujący klocek tak, by

$$\sum_{i=1}^8 \beta_i \equiv 0 \pmod{360^\circ}.$$

Już wtedy spodziewano się, że może on sublimować pod wpływem ciepła od Słońca i tworzyć cieniutką atmosferę (ciśnienie milion razy niższe niż na Ziemi). W 1978 roku James W. Christy zauważył, że obraz Plutona systematycznie, na wszystkich zdjęciach, wyglądał jak bałwanek, a nie kółko. Głowa bałwanek wystawała na kliszy raz na północ, raz na południe. Co więcej, wybrzuszenie regularnie przemieszczało się z okresem ponad 6 dni (wcześniej, jak pamiętamy, ten okres zmian uważano wyłącznie za okres obrotu planety wokół osi). Szybko uznano jednak, że Pluton po prostu ma satelitę. Separacja tych dwu obiektów na niebie to maksymalnie $0,9''$ (odkrycia dokonano przy $0,75''$). Czyż można więc dziwić się, że satelita tak długo ukrywał się? Christy nadał księżycowi imię Charon, na cześć swej żony Charlene. Ale poza tym Charon to mitologiczny przewoźnik dusz zmarłych do Hadesu – królestwa Plutona. Warto dodać, że Christy odkrył Charona w Naval Observatory w Arizonie, niecałe 7 km od miejsca, gdzie Clyde Tombaugh odkrył Plutona! I że odkrycia dokonano za pomocą średnich rozmiarów instrumentów naziemnych – wystarczyło mieć wyobraźnię!

Charon krąży wokół Plutona podwójnie synchronicznie – nie tylko księżyc stale zwraca się ku planecie tą samą stroną, ale i planeta robi to samo! Wyglądają jak obracające się hantle bez łącznika. Co zabawne – środek masy układu planeta-księżyc znajduje się 1200 km nad powierzchnią Plutona. Jest to jedyny taki przypadek w Układzie Słonecznym (środek masy układu Ziemia-Księżyc znajduje się w odległości $3/4$ promienia Ziemi od jej środka, a więc głęboko pod jej powierzchnią). Zmierzony okres obiegu księżyca wokół planety pozwolił dokładnie wyznaczyć masę Plutona (z Charonem) – okazało się, że znów schudł. Co dowcipniejsi przewidywali wówczas, że w latach 80. XX wieku Pluton zniknie zupełnie. Oczywiście się stało, że obiekt tak mały i lekki nie może być odpowiedzialny za perturbacje w ruchu dwu dużych planet, Urana i Neptuna. Ta brutalna prawda uruchomiła, rzecz jasna, poszukiwaczy dziesiątej planety, ale to już inna historia.

W układzie planeta-księżyc mogą się oczywiście zdarzać zaćmienia, ale nie muszą być widoczne dla obserwatora na Ziemi. Jednak los sprzyjał tu astronomom: co 125 lat następują serie zaćmień układu Pluton-Charon, a najbliższa miała się zacząć tuż po odkryciu samego Charona, w latach 1985–1990. Gdy seria już się zaczęła, szczęście sprzyjało astronomom podwójnie – Pluton był tak blisko Ziemi, że znalazł się w zasięgu fotometrii średnich teleskopów wyposażonych w detektory CCD. (Po prostu w latach 1987–1989 to Neptun, a nie Pluton, był najbardziej oddaloną od Słońca planetą! Pluton poruszał się wtedy akurat w pobliżu swego peryhelium, które minął 5 września 1989.) Analiza uzyskanych podczas zaćmień krzywych blasku pozwoliła na dokładne wyznaczenie promieni i Plutona, i Charona. I znów okazało się, że Pluton (i Charon) są znacznie mniejsze niż sądzono wcześniej. Przy okazji stwierdzono, że satelita jest znacznie ciemniejszy niż planeta i wnosi niewielki wkład do ogólnej jasności między zaćmieniami. Gdy sam zakrywa planetę – blask układu maleje, a gdy planeta zakrywa Charona – nie widać znaczącego spadku jasności. Udało się też odtworzyć albedową mapę Plutona. Wiemy z niej, że jest to glob niejednorodnie jasny, z wyraźnymi jasnymi czapami polarnymi. Ze spektroskopowych badań wiemy, że Pluton jest bardziej czerwonoawy (pokryty metanem), a Charon – szary (lodowy). Na następną serię zaćmień ziemscy obserwatorzy muszą poczekać do XXII wieku.

Zaćmienia to ciągle nie koniec miłych niespodzianek ze strony Plutona.

W 1988 roku została odkryta (bezpośrednio) jego atmosfera! Stało się to, gdy astronomowie znów czekali na zakrycie gwiazdy przez planetę. Zamiast jednak gwałtownego zniknięcia gwiazdy zaobserwowano stopniowy spadek jej blasku. Gwiazda (dla obserwatora) zanurzała się najpierw w atmosferze planety, a po czasie zakrycia – podobnie, stopniowo się wyłaniała. Dziś już wiadomo, że atmosfera Plutona jest tworem sezonowym – pojawia się podczas plutońskiego lata, a potem zamarza. Dla północnej półkuli Plutona równonoc wiosenna następuje praktycznie wtedy, gdy planeta jest w peryhelium. Taki układ

pór roku tłumaczy też opisywane wcześniej zmiany jasności Plutona. Jak wiadomo, oś obrotu planety zachowuje w przestrzeni swój kierunek – na eliptycznej orbicie w 1954 r. Pluton ustawiony był tak, że promienie słoneczne padały niemal prostopadle na jego biegun północny (Słońce było tam w zenicie). W 1973 r. było w zenicie na plutońskim równiku. Zatem w 1954 r. widzieliśmy Plutona od strony bieguna, a w 1973 r. ustawił się do nas równikiem. Dlaczego jego średnia jasność w tym czasie malała? (Wiadomo, że Pluton faktycznie ciemniał przez ostatnie 30 lat.) Po prostu w pobliżu perihelium metanowe śniegi w okolicach równikowych przemieniają się w atmosferę i odkrywa się ciemna, bogata w węglowodory powierzchnia globu. Atmosfera, choć cienka, ma ponadto decydujący wpływ na klimat Plutona – stały cykl sublimacji metanu po stronie nasłonecznionej i jego zestalanie się po nocnej wyrównują temperatury na całej powierzchni Plutona. Wreszcie z jego gęstości (2 g/cm^3 , podobnej do gęstości dużych satelitów dużych planet jowiszowych) można wnosić, że około 75% jego masy stanowią skały – zatem obserwowany metan stanowi drobny ułamek całej masy.



Reasumując – okres obiegu Plutona wokół Słońca wynosi około 250 lat. Od momentu odkrycia – 1930 r. – upłynęło zatem raptem trochę ponad ćwierć plutońskiego roku, a już w tym czasie dostarczył on bardzo wielu niespodzianek i do samego końca XX wieku nie dawał spocząć astronomom. Zaczął mianowicie... tracić tożsamość! Poczynając od wczesnych lat 90. zaczęto odkrywać na niebie (bardzo wydajną techniką CCD) coraz więcej obiektów na podobnych do plutonowej orbitach i o podobnych rozmiarach. Pod koniec roku 2001 znano ich już około 400. To, rzecz jasna, nie mógł być przypadek. Wydaje się dzisiaj, że na skraju Układu Słonecznego, za orbitą Neptuna, nie krąży jedna planeta, ale cały rój drobnych (jak Pluton) obiektów. Nazwano je planetoidami lodowymi (te dobrze znane planetoidy bliższe są skalne) albo obiektami pasa Kuipera (od nazwiska uczonego, który pierwszy przewidywał, iż w odległych rejonach Układu istnieje „lodowy rezerwuuar” komet).



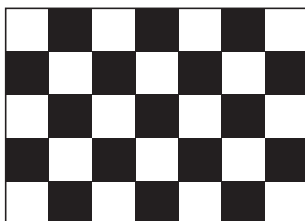
Czymże zatem jest Pluton? Czy planetą – choć mniejszy od wielu księżyców (w tym od naszego)? Nie pasuje do schematu: planety ziemopodobne lub jowiszowe. Wpływa mniej na ruchy innych planet niż planetoida Ceres. I porusza się po nietypowej dla planet orbicie. Wiele wskazuje na to, że jest właśnie lodową planetoidą z pasa Kuipera, może i największą, ale na pewno nie jedyną. Natomiast spór o nazwę przypomina dylemat „czym różni się maleńki kamyk od dużego ziarna piasku”. Międzynarodowa Unia Astronomiczna – jedyny organ mogący „formalnie” rozstrzygnąć spór – postanowiła (jak do tej pory) nie wypowiadać się na ten temat. Natomiast budujące jest w tej sprawie stanowisko nieżyjącego już Clyde’a Tombaugh’a. Wydawać by się mogło, że będzie mu przykro, gdy pod koniec długiego życia okaże się, iż nie odkrył planety, lecz tylko jedną z kilkuset drobnych planetoid na skraju Układu Słonecznego. Tymczasem on cieszył się do końca swoich dni, że „jego” Pluton stale znajduje się w centrum zainteresowania astronomów!

Parametry układu Pluton-Charon

	Pluton	Charon
Promień	1151 km	591 km
Jasność absolutna	-0,648 mag	1,350 mag
Albedo	0,618	0,372
Nachylenie równika do płaszczyzny orbity	$90,^{\circ}7$	
Temperatura	58 K	
Masa układu	$1,47 \times 10^{22} \text{ kg}$	
Średnia gęstość ciał	$2,032 \text{ g/cm}^3$	
Okres obiegu (gwiazdowy)	6,387 d	



Rozwiązanie zadania M 997.
Pionki zajmujące białe pola powinny znaleźć się na czarnych. Ale białych pól jest więcej niż czarnych!



Krzywa nazywa się *eliptyczna*, jeżeli za pomocą pewnych przekształceń (z których część będzie zademonstrowana dalej) może być przedstawiona w postaci $y^2 = f(x)$, gdzie f jest wielomianem stopnia trzeciego bez pierwiastków wielokrotnych. Jest oczywiste, że taka krzywa jest symetryczna względem osi odciętych.

Szczególną własnością krzywych eliptycznych jest fakt, że punkty na tych krzywych można „dodawać”.

Niech P_1 i P_2 będą dwoma różnymi punktami krzywej eliptycznej, niesymetrycznymi względem osi odciętych. Poprowadźmy prostą przez te punkty. Gdy prosta ta przecina krzywą w punkcie P_3 , punkt P_4 , symetryczny do punktu P_3 względem osi odciętych, nazywa się *sumą* punktów P_1 i P_2 . Oznaczmy ją przez $P_1 \oplus P_2$. Jeżeli prosta P_1P_2 jest styczna do krzywej w jednym z tych dwóch punktów, to ten punkt styczności przyjmujemy jako P_3 . Dalej, gdy $P_1 = P_2$, zamiast siecznej bierzemy styczną. Gdy wreszcie prosta P_1P_2 jest równoległa do osi rzędnych, za sumę uważamy oddalony w nieskończoność punkt O , który odgrywa rolę zera względem definiowanego dodawania, to znaczy

$$O \oplus A = A \oplus O = A.$$

Okazuje się, że tak zdefiniowane dodawanie punktów ma „zwykłe” własności dodawania, mianowicie

$$A \oplus B = B \oplus A,$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C),$$

a równanie $A \oplus X = B$ ma tylko jedno rozwiązanie.

Zinterpretujemy teraz to dodawanie analitycznie.

Niech sieczna (styczna) ma równanie $y = kx + b$. Podstawiając y do równania krzywej $y^2 = f(x)$, otrzymujemy równanie trzeciego stopnia $f(x) - (kx + b)^2 = 0$. Znane są nam dwa pierwiastki x_1 i x_2 tego równania (odpowiadające punktom P_1 i P_2). Trzeci pierwiastek x_3 wyraża się przez x_1 i x_2 , na mocy wzorów Viète’a, w sposób wymierny. Ponadto

$$P_1 \oplus P_2 = (x_3, -(kx_3 + b)).$$

Jeśli współczynniki wielomianu f są liczbami wymiernymi, a dodawane punkty krzywej mają współrzędne wymierne (punkt O też uważamy za wymierny), to ich suma jest punktem o współrzędnych wymiernych.

Rzeczywiście, współczynnik kierunkowy prostej łączącej punkty wymierne jest liczbą wymierną (współczynnik kierunkowy stycznej też jest wymierny). Zatem na mocy twierdzenia Viète’a odcięta sumy (a więc i rzędna) jest liczbą wymierną. Na przykład na krzywej $y^2 = x^3 + x + 6$ łatwo znaleźć dwa punkty o współrzędnych wymiernych, mianowicie $(2, 4)$

i $(3, -6)$, które w sumie dają punkt zupełnie nieoczywisty, mianowicie $(95, 926)$.

Idea dodawania punktów krzywej eliptycznej okazała się wyjątkowo owocna i pozwoliła uzyskać dość głębokie wyniki. Na przykład jeden z najbardziej znaczących wyników końca dwudziestego wieku, mianowicie dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata, przeprowadzony przez Andrew Wilesa, opiera się na głębokim badaniu pewnej krzywej eliptycznej.

Tu zajmiemy się sprawą liczby punktów wymiernych na krzywej

$$(1) \quad y^2 = x(x + 1)(x + 9).$$

O krzywej tej pisaliśmy już w *Delcie* 7/2002, gdzie wykazaliśmy, iż fakt istnienia na niej tylko siedmiu punktów o obu współrzędnych wymiernych pociąga za sobą nieistnienie trójkąta równoramiennego o bokach i środkowych długości całkowitej. Niemniej jednak zliczenie punktów wymiernych na tej krzywej jest interesujące samo w sobie.

Punkty wymierne rozpatrywanej krzywej to, jak łatwo sprawdzić

$$A_1 = (-9, 0), \quad A_2 = (-3, 6), \quad A_3 = (-3, -6),$$

$$A_4 = (-1, 0), \quad A_5 = (0, 0), \quad A_6 = (3, 12), \quad A_7 = (3, -12).$$

Prosimy też sprawdzić, że poniższa tabelka opisuje ich dodawanie.

\oplus	O	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
O	O	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	A_1	O	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2
A_2	A_2	A_7	A_5	O	A_6	A_3	A_1	A_4
A_3	A_3	A_6	O	A_5	A_7	A_2	A_4	A_1
A_4	A_4	A_5	A_6	A_7	O	A_1	A_2	A_3
A_5	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	O	A_7	A_6
A_6	A_6	A_3	A_1	A_4	A_2	A_7	A_5	O
A_7	A_7	A_2	A_4	A_1	A_3	A_6	O	A_5

Wykażemy, że nie ma ich więcej.

Sposób będzie taki, że zamiast badać tę krzywą, będziemy badać inną, na której punktów wymiernych jest jeszcze mniej. Skorzystamy z dość często stosowanej metody.

Poprowadźmy prostą $y = kx$ przez początek układu współrzędnych i dowolny inny punkt (x, y) badanej krzywej. Jeśli wybrany punkt jest wymierny, to liczba k oczywiście też będzie wymierna. Otrzymujemy $(kx)^2 = x(x + 1)(x + 9)$, stąd $x^2 + (10 - k^2)x + 9 = 0$.

A więc wyróżnik tej funkcji kwadratowej

$$(10 - k^2)^2 - 36 = (k^2 - 4)(k^2 - 16)$$

jest kwadratem liczby wymiernej.

Niech $k = 2p$. Wtedy

$$(k^2 - 4)(k^2 - 16) = 16(p^2 - 1)(p^2 - 4),$$

i liczba $p^2(p^2 - 1)(p^2 - 4)$ jest kwadratem. Oznaczmy $t = p^2$.

Mamy $z^2 = t(t-1)(t-4)$, gdzie z jest liczbą wymierną.

A więc każdy punkt wymierny krzywej (1) generuje punkt wymierny krzywej

$$(2) \quad y^2 = x(x-1)(x-4).$$

Stosując takie samo rozumowanie, dojdziemy do wniosku, że każdy punkt wymierny krzywej (2) generuje punkt wymierny krzywej (1). Takie krzywe nazywamy *biwymiernie równoważnymi*.

Dalej wykażemy, że na krzywej (2) są tylko trzy punkty o obu współrzędnych wymiernych, mianowicie $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(4, 0)$. Punkty te tworzą siedem wymiernych punktów krzywej (1) w następujący sposób:

- dla punktu $(0, 0)$ krzywej (2) mamy $t = p = k = 0$, co prowadzi do punktów A_1, A_4 i A_5 krzywej (1);
- punkt $(1, 0)$ krzywej (2) odpowiada liczbie $t = 1$, co oznacza, że $p = -1$ lub $p = 1$, a więc $k = -2$ lub $k = 2$, co daje punkty A_2 i A_3 krzywej (1);
- wreszcie punkt $(4, 0)$ generuje punkty A_6 i A_7 .

Aby więc wykazać, że na krzywej (1) jest dokładnie siedem punktów wymiernych wystarczy wykazać, że na krzywej (2) jest ich dokładnie trzy.

W tym celu warto udowodnić najpierw dwa lematy.

Lemat 1. Niech $C = (x_0, y_0)$ będzie punktem wymiernym krzywej (2), przy czym $y_0 \neq 0$. Wtedy odcięta punktu $C \oplus C$ jest liczbą wymierną.

Dowód. Równanie stycznej do krzywej (2) w punkcie C ma postać

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Otrzymujemy

$$(y'(x_0)(x - x_0) + y_0)^2 = x^3 - 5x^2 + 4x.$$

Stąd

$$x^3 - (5 + (y'(x_0))^2)x^2 + px + q = 0.$$

Niech x_1 będzie odciętą punktu $C \oplus C$. Wtedy liczby x_0 i x_1 będą pierwiastkami tego równania. Co więcej, x_0 jest pierwiastkiem podwójnym.

Zatem na mocy twierdzenia Viète'a uzyskujemy

$$2x_0 + x_1 = 5 + (y'(x_0))^2.$$

Ponieważ

$$y^2 = f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x,$$

więc

$$2y \cdot y' = f' = 3x^2 - 10x + 4.$$

Wobec tego

$$y' = \frac{f'}{2y} \quad \text{i} \quad (y')^2 = \frac{(f')^2}{4y^2} = \frac{(f')^2}{4f}.$$

A więc

$$\begin{aligned} x_1 = 5 + \frac{(f'(x_0))^2}{4f(x_0)} - 2x_0 &= 5 + \frac{(3x_0^2 - 10x_0 + 4)^2}{4(x_0^3 - 5x_0^2 + 4x_0)} - 2x_0 = \\ &= \frac{x_0^4 - 8x_0^2 + 16}{4f(x_0)} = \left(\frac{x_0^2 - 4}{2y_0} \right)^2, \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu 1.

Lemat 2. Jeśli na krzywej (2) istnieją punkty wymierne różne od trzech oczywistych, to na tej krzywej istnieje punkt

wymierny $C_1 = (x_1, y_1)$, taki że

- 1) $x_1 > 4$,
- 2) x_1 jest kwadratem liczby wymiernej,
- 3) licznik liczby x_1 w postaci nieskracalnej jest liczbą parzystą.

Dowód. Niech $C_0 = (x_0, y_0)$ będzie dowolnym punktem wymiernym na krzywej (2) różnym od trzech oczywistych. Oznaczmy $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (1, 0)$, $B_3 = (4, 0)$. Znajdziemy odcięte punktów $C_0 \oplus B_1$, $C_0 \oplus B_2$, $C_0 \oplus B_3$.

Dość prosty rachunek wykazuje, że odcięta $C_0 \oplus B_1$ wynosi $\frac{4}{x_0}$. Odcięta punktu $C_0 \oplus B_2$ jest równa

$$\frac{y_0^2}{(x_0 - 1)^2 x_0} = \frac{x_0(x_0 - 1)(x_0 - 4)}{(x_0 - 1)^2 x_0} = \frac{x_0 - 4}{x_0 - 1}.$$

Wreszcie, odcięta punktu $C_0 \oplus B_3$ wynosi

$$\frac{(4y_0)^2}{(x_0 - 4)^2 4x_0} = \frac{4(x_0 - 1)}{x_0 - 4}.$$

Na mocy lematu 1 można przyjąć, że x_0 jest kwadratem liczby wymiernej. Wtedy odcięte czterech rozważanych punktów C_0 , $C_0 \oplus B_1$, $C_0 \oplus B_2$, $C_0 \oplus B_3$ będą kwadratami liczb wymiernych.

Te odcięte wynoszą odpowiednio

$$x_0, \quad \frac{4}{x_0}, \quad \frac{x_0 - 4}{x_0 - 1}, \quad \frac{4(x_0 - 1)}{x_0 - 4}.$$

Wszystkie te liczby należą do zbioru $(0, 1) \cup (4, \infty)$.

Zatem dokładnie dwie liczby należą do przedziału $(0, 1)$, dwie pozostałe zaś są większe od czterech.

Zaznaczmy, iż w parze x_0 i $\frac{4}{x_0}$ przynajmniej jeden z liczników jest liczbą parzystą. To samo jest prawdziwe dla drugiej pary liczb. Łatwo sprawdzić, że jedna spośród czterech liczb spełnia warunki 1) i 3). Na przykład jeżeli liczba $0 < x_0 < 1$ ma parzysty licznik, to żadaną liczbą będzie $\frac{x_0 - 4}{x_0 - 1}$.

A to kończy dowód lematu 2.

Powróćmy do dowodu, że na krzywej (2) istnieją tylko trzy, podane wyżej, punkty o obu współrzędnych wymiernych.

Przypuśćmy zatem, że na krzywej (2) istnieje czwarty punkt wymierny. Niech $C_1 = (x_1, y_1)$ będzie punktem, którego istnienie gwarantuje lemat 2, czyli niech dla pewnych liczb naturalnych a i b będzie $x_1 = \frac{4a^2}{b^2}$, gdzie b jest liczbą nieparzystą, $a > b$ i $(a, b) = 1$.

Ponieważ $x_1(x_1 - 1)(x_1 - 4)$ jest kwadratem, więc $(4a^2 - b^2)(a^2 - b^2)$ jest kwadratem liczby naturalnej. Ponieważ liczby a i b są względnie pierwsze, więc liczby naturalne $4a^2 - b^2$ i $a^2 - b^2$ mają największy wspólny dzielnik równy 1 lub 3. Ponieważ liczba $4a^2 - b^2$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, więc nie może być kwadratem.

Zatem

$$a^2 - b^2 = 3c^2, \quad 4a^2 - b^2 = 3d^2,$$

gdzie liczby c i d są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi.

Stąd

$$a^2 = d^2 - c^2, \quad b^2 = d^2 - 4c^2.$$

Z równości $b^2 + (2c)^2 = d^2$ wynika, że

$$c = uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad d = u^2 + v^2,$$

gdzie u i v są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi o różnej parzystości. Wobec tego

$$a^2 = d^2 - c^2 = (u^2 + v^2)^2 - u^2v^2 = u^4 + u^2v^2 + v^4.$$

Zauważmy, że wynika stąd, iż liczba a jest nieparzysta.

Jeżeli u jest liczbą nieparzystą, połóżmy $z = a - u^2$, w przeciwnym razie $z = a - v^2$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że ma miejsce ta pierwsza sytuacja.

Wtedy

$$(u^2 + z)^2 = u^4 + u^2v^2 + v^4,$$

zatem

$$z^2 - v^4 = u^2(v^2 - 2z).$$

Oznaczając $z_1 = -2z$, otrzymujemy

$$z_1^2 - 4v^4 = 4u^2(v^2 + z_1).$$

Stąd

$$\begin{aligned} (z_1 - 2v^2)(z_1 + 2v^2)(z_1 + v^2) &= 4u^2(z_1 + v^2)^2 = \\ &= (2u(z_1 + v^2))^2. \end{aligned}$$

Położmy $x'_2 = \frac{2v^2 + z_1}{v^2}$. Wtedy biorąc y'_2 , takie że

$$x'_2(x'_2 - 1)(x'_2 - 4) = (y'_2)^2,$$

stwierdzamy, iż punkt (x'_2, y'_2) jest punktem

wymiernym krzywej (2). A więc znajduje się na tej

krzywej punkt wymierny o odciętej $x_2 = \frac{4}{x'_2}$.

Lemat 3. Liczba x_2 jest kwadratem liczby wymiernej.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{4v^2}{2v^2 - 2z} = \frac{2v^2}{v^2 - z} = \frac{2v^2}{v^2 + u^2 - a} = \frac{2v^2(u^2 + v^2 + a)}{(u^2 + v^2)^2 - a^2} = \\ &= \frac{2v^2(u^2 + v^2 + a)}{u^2v^2} = \frac{2(u^2 + v^2 + a)}{u^2}, \end{aligned}$$

a także $x_2 = \frac{v^2}{\frac{v^2 + u^2 - a}{2}}$.

Wykażemy, że liczby $\frac{v^2 + u^2 - a}{2}$ i $2(u^2 + v^2 + a)$

nie mają wspólnych nieparzystych dzielników pierwszych.

Przypuśćmy, że p jest takim dzielnikiem. Ponieważ iloczyn tych liczb jest równy u^2v^2 , więc p jest dzielnikiem uv .

Jeżeli p jest dzielnikiem u , to jest też dzielnikiem $v^2 + a$ i $v^2 - a$, a co za tym idzie dzielnikiem v , co jest sprzeczne z założeniem, że liczby u i v są względnie pierwsze. Analogicznie p nie może być dzielnikiem v .

A więc wspólnym dzielnikiem liczb $\frac{v^2 + u^2 - a}{2}$ i $2(u^2 + v^2 + a)$ może być tylko potęga dwójki, a ich iloczyn $(uv)^2$ jest kwadratem. Oznacza to, że liczby te są kwadratami albo podwojonymi kwadratami. Zatem liczba x_2 jest albo kwadratem liczby wymiernej, albo podwojonym kwadratem liczby wymiernej.

Wykażemy, że druga z tych ewentualności jest niemożliwa.

Rzeczywiście, jeżeli $x_2 = 2t^2$, to $2t^2(2t^2 - 1)(2t^2 - 4)$ jest kwadratem, skąd wynika, iż $(2t^2 - 1)(t^2 - 2)$ jest kwadratem.

Dalej, jeśli licznik lub mianownik liczby t jest parzysty, to licznik liczby $(2t^2 - 1)(t^2 - 2)$ dzieli się przez 2, nie dzieli się zaś przez 4.

Jeśli natomiast licznik, i mianownik liczby t są nieparzyste, to licznik liczby $(2t^2 - 1)(t^2 - 2)$ daje resztę 3 przy dzieleniu przez 4. W obu przypadkach licznik nie będzie kwadratem, mianownik zaś kwadratem będzie.

A więc x_2 jest kwadratem i lemat został udowodniony.

Ponieważ

$$x_2 = 2 + \frac{2(v^2 + a)}{u^2} > 2 \quad \text{ i } \quad x_2 \in (0; 1) \cup (4; \infty),$$

więc liczba x_2 jest większa od 4.

Jeżeli liczba u jest nieparzysta, to mianownik x_2 jest nieparzysty, a więc licznik x_2 jest parzysty.

Jeżeli liczba v jest nieparzysta, to – wobec równości

$$z = a - v^2 \quad \text{ i } \quad x_2 = \frac{2(u^2 + v^2 + a)}{v^2}$$

– mianownik x_2 jest nieparzysty, a więc licznik x_2 jest parzysty.

Podsumowując, okazało się, że uzyskaliśmy punkt $C_2 = (x_2, y_2)$ również spełniający warunki lematu 2.

Teraz zastosujemy metodę regresji. W tym celu weźmy pod uwagę funkcję $\phi(A)$, która punktowi $A = (x, y)$ o współrzędnych wymiernych przyporządkowuje sumę licznika i mianownika liczby x w postaci nieskracalnej.

Wykażemy, że $\phi(C_2) < \phi(C_1)$.

Przypomnijmy, że

$$x_1 = \frac{4a^2}{b^2}, \quad x_2 = \frac{v^2}{\frac{v^2 + u^2 - a}{2}} = \frac{2(u^2 + v^2 + a)}{u^2}.$$

Wobec tego licznik x_2 jest dzielnikiem v^2 , mianownik x_2 jest dzielnikiem u^2 , a więc $\phi(C_2) \leq u^2 + v^2$.

Zatem istotnie

$$\begin{aligned} \phi(C_1) &= 4a^2 + b^2 = 4((u^2 + v^2)^2 - u^2v^2) + (u^2 - v^2)^2 = \\ &= 5u^4 + 5v^4 + 2u^2v^2 > u^2 + v^2 \geq \phi(C_2). \end{aligned}$$

Wobec tego dowód nieistnienia na krzywej (2) innych punktów wymiernych od trzech podanych na początku można zakończyć.

Gdyby bowiem istniał taki punkt C_1 , za jego pomocą uzyskalibyśmy punkt C_2 , potem C_3 itd. Ale wtedy byłoby $\phi(C_1) > \phi(C_2) > \phi(C_3) > \dots$, a przecież malejący ciąg liczb naturalnych nie może być nieskończony.

Każdemu z Czytelników, który doczytał do tego miejsca, proponujemy sprawdzenie, że na krzywej

$$y^2 = x(x + 1)(x + 4)$$

jest tylko siedem, łatwych do odgadnięcia, punktów o obu współrzędnych wymiernych. Przypominamy, że dowodzi to faktu, iż nie istnieje trójkąt prostokątny, którego boki i środkowe mają długości wymierne.

Droga jest podobna do przedstawionej wyżej.

Dla zachęty podamy, że pomocniczą krzywą jest tu

$$y^2 = x(x - 1)(x - 9);$$

na niej są tylko trzy oczywiste punkty o współrzędnych wymiernych. Aby to wykazać, trzeba skorzystać z faktu (poprzednio lemat 2), że gdyby był jeszcze jeden taki punkt, to byłby też punkt $D_1 = (x_1, y_1)$, taki że $x_1 > 9$, liczba x_1 byłaby kwadratem liczby wymiernej i miałaby licznik podzielny przez 3. Potem... , ale zostawmy coś inwencji Czytelnika.

Certyfikat dziwności?

Przestrzeń kosmiczna skrywa jeszcze niejedną zagadkę. Odkrywane są i identyfikowane coraz dziwniejsze obiekty. Czasami identyfikacja ta nie jest całkowicie pewna. Nie przeszkadza to jednak dziennikarzom w przedstawianiu tego, co jest zaledwie hipotezą, jako w pełni udokumentowane odkrycie. Czasami taki optymizm jest o tyle uzasadniony, że choć tożsamości obiektu nie udało się jeszcze w pełni potwierdzić, to obiekt taki powinien istnieć, jak nie w tym, to w jakimś innym miejscu.

Ostatnio narasta przekonanie, że powinny istnieć gwiazdy dziwne. Jak dobrze się zastanowić, to każda gwiazda jest mniej lub bardziej zadziwiająca, ale tu chodzi o ich specjalny gatunek. Gwiazdy te miałyby być zbudowane z tzw. plazmy kwarkowo-gluonowej, czyli z niepowiązanych w hadrony, swobodnych, oddziałujących za pomocą gluonów kwarków. Biorąc pod uwagę gęstość materii, byłyby to stadium pośrednie między gwiazdą neutronową a czarną dziurą. Powstawać miałyby, podobnie jak gwiazdy neutronowe, po wybuchu supernowej. Przewiduje się, że w plazmie kwarkowo-gluonowej stężenie kwarków dziwnych powinno być dużo większe niż w normalnej materii jądrowej (gdzie ich w zasadzie nie ma) i stąd nazwa „gwiazda dziwna”, występująca prawie na równych prawach z określeniem „gwiazda kwarkowa”.

Przekonanie o istnieniu gwiazd dziwnych jest związane między innymi z pogłębiającą się ewidencją obserwacji plazmy kwarkowo-gluonowej w ziemskich laboratoriach. Jesteśmy bliscy pewności, że taki stan materii tworzy się na krótką chwilę w zderzeniach relatywistycznych jąder. Pierwsze wskazania pochodziły z CERNu [1], a obecnie ma ich dostarczyć RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) działający w Brookhaven National Laboratory w Nowym Jorku. Jeżeli taki stan materii można uzyskać w laboratorium, to nie ma powodu, żeby własne, odpowiednio silne pole grawitacyjne, nie zamieniło gwiazdy neutronowej w gwiazdę kwarkową.

Samo przekonanie o możliwości istnienia czegoś dziwnego to jednak, z naukowego punktu widzenia, trochę mało. Chciałoby się taki obiekt odkryć i zidentyfikować. Na tym polu nastąpił pewien postęp. Ostatnio udało się znaleźć dwie, dość przekonujące kandydatki na gwiazdy dziwne.

Pierwszą z nich jest obiekt oznaczony RXJ1856. O przynależności do gwiazd gęstszych miałyby świadczyć za mały, jak na gwiazdę neutronową, promień. Promień ten jest jednak wyznaczany w sposób pośredni. W literaturze trwa właśnie ożywiona dyskusja na temat RXJ1856. Ostatni głos za gwiazdą dziwną można znaleźć w [2], a głos „niekoniecznie” w [3]. Obiekt ten znajduje się w odległości zaledwie 117 ± 17 parseków [3]. Gdyby odległość była istotnie większa, to stosowane metody badawcze (angażujące chyba wszystkie możliwe instrumenty z teleskopem Hubble’a i rentgenowskim obserwatorium kosmicznym Chandra na czele) nie byłyby wystarczająco czułe. Jeżeli identyfikacja RXJ1856 jako gwiazdy kwarkowej ostatecznie się powiedzie, to będzie to wskazywać, że obiekty takie są dość rozpowszechnione, skoro jest nią pierwsza z brzegu gwiazda zbudowana z materii jądrowej.

Drugą kandydatką jest gwiazda oznaczona 3C58, a utożsamiana z pozostałością po zaobserwowanym przez chińskich astronomów wybuchu supernowej w 1181 roku. W tym przypadku o ewentualnej „dziwności” gwiazdy miałyby świadczyć jej szybsze niż dopuszczalne dla gwiazdy neutronowej stygnięcie [4]. Ponownie sugerowałyby to powszechność występowania gwiazd dziwnych.

Możliwe, że do przyjęcia przez środowisko naukowe takiego rozwiązania wystarczy ostateczne potwierdzenie uzyskania plazmy kwarkowo-gluonowej w ziemskich laboratoriach oraz zbadanie jej podstawowych własności.

Wróćmy więc na Ziemię. Stwierdzenie powstawania nowego stanu materii jądrowej w zderzeniach poruszających się z relatywistycznymi prędkościami jąder nie jest sprawą prostą. Pomijając nawet olbrzymie technologiczne problemy związane z rozpędzaniem i zderzaniem przeciwbieżnych wiązek jąder złota używanych w RHICu, pozostaje problem niezwykle nietrwałości tak wytworzonej plazmy kwarkowo-gluonowej. O jej powstaniu można się dowiedzieć tylko w sposób pośredni.

W dodatku nie dysponujemy ścisłą teorią, która pozwalałaby na bezwzględnie słuszne przewidywania. Teorią taką mogłaby być chromodynamika kwantowa. Niestety oddziaływania kwarków i gluonów są tak silne, że stosowanie tzw. rachunku zaburzeń (podstawowej metody teoretycznej używanej w skomplikowanych przypadkach oddziaływania wielu ciał, traktującej oddziaływanie jako małe odstępstwo od przypadku nieoddziałujących cząstek) jest mocno ograniczone. Pozostają rozważania modelowe, które zależą od poczynionych uproszczeń.

Jak więc rozpoznać plazmę kwarkowo-gluonową? Po pierwsze, po zmniejszeniu ilości produkowanego czarmonium, czyli stanów związanych masywnego kwarku i antykwarku powabnego $c\bar{c}$. Miałyby to być spowodowane łatwiejszym rozdzieleniem pary $c\bar{c}$ na dwie cząstki powabne. Taką właśnie sygnaturę zaobserwowano już dwa lata temu w CERNie. Po drugie, oczekuje się istotnego zwiększenia produkcji cząstek dziwnych.

Jest jeszcze wiele podobnych sygnatur. Na odbywających się obecnie letnich konferencjach zespoły badawcze eksperymentów działających przy RHICu prawdopodobnie raportują ich odnalezienie.

Piotr ZALEWSKI

[1] *New State of Matter created at CERN*, <http://press.web.cern.ch/Press/Releases00/PR01.00EQuarkGluonMatter.html>

[2] J.J. Drake i inni, *Is RXJ1856.5-3754 a Quark Star?*, astro-ph/0204159, 9 kwietnia 2002.

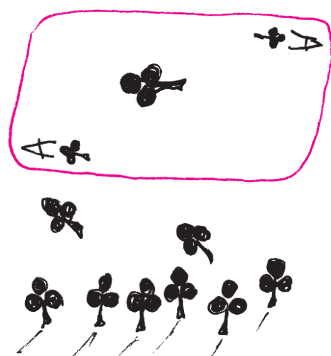
[3] F.M. Walter i J. Lattimer, *A Revised Parallax and its Implications for RX J185635-3754*, astro-ph/0204199, 11 kwietnia 2002.

[4] P. Slane, D.J. Helfand i S.S. Murray, *New Constraints on Neutron Star Cooling from Chandra Observations of 3C58*, astro-ph/0204151, 9 kwietnia 2002.

Doskonałe tasowanie kart

Tomasz BARTNICKI, Jarosław GRZYTCZUK

Wstęp



Problemy związane z tasowaniem kart spędzały ludziom sen z powiek od dawien dawna. Interesowali się nimi jednak głównie zawodowi szulerzy i iluzjoniści. Dla tych pierwszych umiejętność odpowiedniego tasowania wiązała się z wymyślaniem nowych oszustw, dla drugich zaś była konieczną umiejętnością niezbędną do prezentacji różnych karcianych sztuczek. Dla przeciętnego człowieka grającego w karty tasowanie jest tylko koniecznym zabiegiem wykonywanym przed właściwą rozgrywką i samo w sobie nie jest godne zainteresowania. Potwierdza to definicja zaczerpnięta ze *Słownika języka polskiego* PWN:

tasować (z fr.) *ndk IV mieszając przekładać, zwłaszcza: mieszać talię kart przed rozdaniem.*

Nawet w *Międzynarodowym prawie brydżowym (III6A)* o tasowaniu czytamy tylko tyle:

Tasowanie – *przed rozpoczęciem gry każdą talię starannie się tasuje; przełożenie jej ma miejsce, gdy przeciwnik tasującego tego zażąda.*

Zadziwiające, że tak błaha czynność, jaką jest tasowanie, może interesować nie tylko iluzjonistów i szulerów, lecz także matematyków. Zaznaczmy jednak, iż wymienione profesje wcale nie muszą się wykluczać. Na przykład, matematyk amerykański, Persi Diaconis był swego czasu zawodowym magikiem i tasowanie kart od strony praktycznej miał opanowane do perfekcji. Nic więc dziwnego, że jest on obecnie najwybitniejszym specjalistą zajmującym się matematycznym ujęciem tej dziedziny.

Krótką historia kart do gry

Historia kart do gry sięga około ośmiu wieków wstecz. Karty swój rodowód, uchwytny dla badaczy, wywodzą z Dalekiego Wschodu. Zarówno wzmianki podróżników, jak i zachowane egzemplarze kart z XII wieku, wskazują, że są one wytworem kunsztu chińskich i koreańskich artystów. Przypuszcza się, że pomysł stworzenia kart został zaczerpnięty z gry w szachy. Karty były bowiem pierwotnie dwukolorowe i miały być odzwierciedleniem figur szachowych. Późniejszy podział na cztery kolory wiąże się z legendą, że karty miały symbolizować podział roku, a mianowicie: 4 kolory – 4 kwartały (4 pory roku), 12 figur – 12 miesięcy, 52 karty – 52 tygodnie. Dziś brak jest źródłowych danych potwierdzających lub zaprzeczających tym hipotezom. Nie wiadomo też, jakie reguły obowiązywały przy rozgrywkach wynalazców i tych, dla których ten rodzaj zabawy wynaleziono.

Wraz z wyprawami kupieckimi i podbojami zbrojnymi karty przenikają do Indii, a następnie do krajów Bliskiego Wschodu. W wiekach XIII–XIV, z krzyżowcami, karty przywędrowały do Europy, gdzie wreszcie znalazły podatny grunt do rozwoju i skąd rozpoczęły triumfalny podbój świata.

Pierwsza historyczna wzmianka o kartach w Polsce pochodzi z artykułu *De Ludorum abstinentia* z roku 1456 i co ciekawe, jest związłym zakazem ich używania. Musiały więc być szeroko znane dużo wcześniej. Potwierdzały to coraz częściej wzmianki pamiętnikarzy, że znali karty możni i pospólstwo, a i na pierwszego króla karciarza nie musieliśmy długo czekać – był nim Zygmunt Stary.

Z roku 1499 pochodzi pierwsza informacja o związku kart z matematyką. Jej autorem był franciszkanin Tomasz Murner, wędrowny bakałarz, który przemierzał Europę, jeżdżąc od uniwersytetu do uniwersytetu, gdzie wykładał i zdobywał wiedzę. Gdy dotarł do Paryża, trafił na wykład do Lefevre'a d'Étaplesa, który zauważył, że starszeństwo maści i figur karcianych łatwiej trafia do żaków niż formuły i wzory, i na talii kart uczył tajników matematyki. Pomysł ten tak spodobał się Murnerowi, że opracował system tłumaczenia praw logiki za pomocą kart i ruszył z powrotem do Krakowa, aby go wypróbować. Powodzenie jego wykładów przeszło najśmielsze oczekiwania, mówiono, że w miesiąc potrafił dać słuchaczom więcej wiedzy niż inni przez rok. Murner swoją metodę opisał

w dziele *Charitulum logices*, które, niestety, nie zachowało się do naszych czasów, ale znane było jeszcze po stuleciu od wydania.

Tymczasem Europę przełomu XVI–XVII wieku ogarnia już prawdziwe karciane szaleństwo, pojawiają się zawodowi szulerzy i kuglarze żyjący wyłącznie z karcianego rzemiosła. Nie pomagają surowe kary wymierzane oszustom ani kolejne zakazy wydawane przez władców. Karty stały się nieodłącznym atrybutem zjazdów szlacheckich, wypraw kupieckich i wojennych. A przykład szedł z góry, kolejni polscy królowie, Henryk Walezy i Zygmunt III Waza uznani byli za namiętnych hazardzistów.

Wiek XVII przyniósł nową jakość w historii kart. Zaczęły bowiem pojawiać się, oprócz gier czysto hazardowych, gry logiczne i kombinacyjne. Natomiast kształt graficzny kart poszedł w kierunku niezwiązanym z istotą gry. Od połowy XIX wieku

w grach karcianych szala zaczęła się zdecydowanie przechylać na korzyść gier koncepcyjnych. Triumfy w Europie święcił *wist*, potem pojawił się *preferans*, a następnie *wint* – bezpośredni przodek dzisiejszego brydża. Ta ostatnia gra podbiła świat, trafiła do akademii i uniwersytetów, jej teorią zajmują się sławy naukowe, stała się sportem, pasją milionów i lukratywnym zawodem dla tysięcy.

Dziś, na początku XXI wieku, gdy wynaleziono tyle „złodziei czasu”, jak telewizja, komputery, motoryzacja, można by wysnuć wniosek, że karty straciły rację bytu. Jednakże obserwujemy zjawisko odwrotne, karty zyskują coraz większą popularność i to szczególnie wśród młodzieży. Na podstawie ich dotychczasowej historii wydaje się, że nasze wnuki również będą zasiadać do stołu, aby wziąć do ręki plik zadrukowanych kartoników i oddać się rozrywce przadiadków.

Tasowania doskonałe



Na początek zajmiemy się pewnym szczególnym rodzajem tasowania, zwanym umownie *doskonałym*. Dzielimy początkowo talię w połowie na dwie równe kupki, a następnie splatamy je, upuszczając pojedynczo spodnie karty, na przemian, raz z jednej, raz z drugiej kupki. Weźmy, na przykład, małą talię złożoną z dziesięciu kart jednego koloru, od asa do dziesiątki, ułożoną początkowo w kolejności

$$\spadesuit A, \spadesuit 2, \spadesuit 3, \dots, \spadesuit 10,$$

(asa często traktujemy jako 1). W wyniku tasowania doskonałego możliwe są dwa układy:

$$1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10 \quad \text{lub} \quad 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5,$$

w zależności od tego, z której kupki pochodziła pierwsza upuszczona karta. Z powodu miejsca, w jakim znalazł się as, pierwsze tasowanie nazywamy *zewnątrznym*, a drugie *wewnętrzny*.

Na pozór wydaje się, że wielokrotne powtarzanie tej operacji skutecznie pomiesza karty w talii. Nic bardziej mylnego! Po wykonaniu pięciu następnych tasowań zewnętrznych nasza dziesięcioelementowa talia powróci do pierwotnej kolejności. Możemy więc uzyskać w ten sposób jedynie 6 różnych układów na $10! = 3\,628\,800$ wszystkich możliwych:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10$$

$$1, 8, 6, 4, 2, 9, 7, 5, 3, 10$$

$$1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 10$$

$$1, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 10$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10.$$

A jak będzie w przypadku prawdziwej talii składającej się z 52 kart? Jak wiele różnych układów możemy otrzymać, tasując sposobem zewnętrznym? Tym razem przeprowadzenie eksperymentu może być nieco kłopotliwe, ale od czego jest matematyka.

Oczywistym narzędziem do rozwiązania tego problemu są *permutacje*. Dla dowolnej liczby naturalnej n rozważmy więc talię składającą się z $2n$ kart, oznaczonych tym razem liczbami

$$0, 1, 2, \dots, 2n - 1.$$

Tasowanie doskonałe zewnętrzne możemy zapisać również, nieco inaczej niż poprzednio, jako permutację p tych liczb, w której $p(i) = j$ oznacza, że karta z numerem i znajduje się na miejscu j . W tradycyjnym zapisie dwurzędowym

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 1 & 3 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Nietrudno dostrzec prostą regułę określającą miejsce zajmowane przez i -tą kartę:

$$p(i) \equiv 2i \pmod{2n-1}.$$

W naszym poprzednim przykładzie mamy $n = 5$ oraz

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Zatem, aby wyznaczyć liczbę tasowań, po których talia wróci do pierwotnej kolejności, a zarazem liczbę różnych możliwych układów, wystarczy znaleźć najmniejszą liczbę k , taką że k -krotne złożenie funkcji p będzie identycznością, co jest równoznaczne z warunkiem

$$2^k i \equiv i \pmod{2n-1}$$

dla $i = 0, 1, \dots, 2n-1$. Oczywiście wystarczy, aby powyższa kongruencja zachodziła dla $i = 1$, tak więc k jest najmniejszą liczbą spełniającą warunek

$$2^k \equiv 1 \pmod{2n-1}.$$

Stosując ten wzór dla talii złożonej z 52 kart, dostajemy $k = 8$, co jest szokująco niską liczbą, tym bardziej że wszystkich permutacji jest teraz $52!$.

Co się tyczy tasowania wewnętrznego $2n$ kart, to wystarczy zauważyć, że jest ono tym samym

co tasowanie zewnętrzne $2n + 2$ kart z dołączoną kartą pierwszą i ostatnią. Wobec tego prostego faktu liczba możliwych układów przy wielokrotnym tasowaniu wewnętrznym jest określona warunkiem

$$2^k \equiv 1 \pmod{2n+1}.$$

Na przykład, dla 10 kart dostajemy $k = 10$, a w przypadku tradycyjnej talii otrzymujemy $k = 52$, co również nie jest zbyt imponujące.

Tak czy inaczej widać z tego jasno, że posiadanie umiejętności doskonałego tasowania pozwala na niemal całkowitą kontrolę nad rozkładem kart w talii. Dlatego strzeżmy się perfekcyjnie tasujących graczy! Podobno wspomniany już wcześniej ex-iluzjonista Persi Diaconis potrafi wykonać 8 doskonałych tasowań z rzędu!

52! = 80 658 175 170 943 878 571 660 636 856 403 766 975 289 505 440 883 277 824 000 000 000 000.

Grupy tasowań binarnych

Grupa to zbiór X wraz z wyróżnionym elementem $e \in X$ oraz dodawaniem spełniającym warunki:

- 1) $(x + y) + z = x + (y + z)$
dla każdego $x, y, z \in X$,
- 2) $x + e = e + x = x$
dla każdego $x \in X$,
- 3) dla każdego $x \in X$ istnieje element odwrotny x' , taki, że
 $x + x' = x' + x = e$.

Skoro powtarzanie w kółko tego samego rodzaju tasowania, zewnętrznego czy wewnętrznego, nie jest zbyt owocne, to może wykonywanie ich na zmianę, w dowolnej kolejności, przyniesie większą liczbę różnych układów. A może nawet uzyskamy każdą permutację talii kart w wyniku ich odpowiedniej kombinacji?

W tym miejscu warto skorzystać z języka algebry, aby precyzyjniej sformułować problem. Przypomnijmy, że zbiór S_n wszystkich permutacji zbioru n elementowego tworzy grupę ze względu na składanie permutacji. Ponadto, każdy podzbiór $G \subseteq S_n$, który wraz z dowolnymi elementami p i q zawiera ich złożenie, jest podgrupą w S_n . Interesującym nas obiektem jest więc najmniejsza podgrupa grupy S_{2n} , zawierająca permutacje z i w , czyli tasowanie zewnętrzne i wewnętrzne. Podgrupę tę oznaczamy symbolem $G_{2,2n}$ i nazywamy grupą tasowań doskonałych binarnych. Używając jeszcze innych słów, $G_{2,2n}$ jest podgrupą grupy S_{2n} generowaną przez permutacje z i w .

Grupy $G_{2,2n}$ zostały doszczętnie zbadane już na początku lat 80. ubiegłego wieku. Znamy nie tylko rząd (liczbę elementów) każdej z tych grup, ale i dokładną strukturę. Wyczynu tego dokonało trio w składzie: Persi Diaconis, Ronald Graham i William Kantor. Z uwagi na zaawansowaną terminologię nie przedstawimy tu owej kompletnej klasyfikacji ze wszystkimi szczegółami. Przytoczymy jedynie kilka prostych faktów.

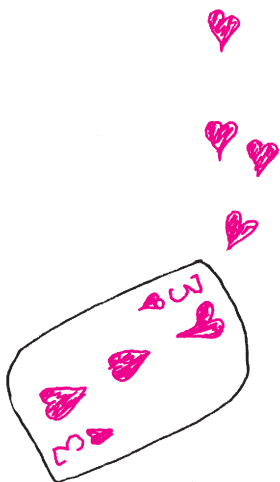
Kluczowym okazało się spostrzeżenie pewnej wspólnej własności wszystkich grup $G_{2,2n}$, zwanej symetrią środkową, którą wyjaśnimy na przykładzie. Weźmy 10 kart, tym razem w dwóch kolorach, po 5 w każdym kolorze i ułożmy je w następujący sposób:

$$\spadesuit 1, \spadesuit 2, \spadesuit 3, \spadesuit 4, \spadesuit 5 \mid \heartsuit 5, \heartsuit 4, \heartsuit 3, \heartsuit 2, \heartsuit 1.$$

Zobaczmy, jaki będzie układ talii po jednokrotnym przetasowaniu:

$$\begin{aligned} z &: \spadesuit 1, \heartsuit 5, \spadesuit 2, \heartsuit 4, \spadesuit 3 \mid \heartsuit 3, \spadesuit 4, \heartsuit 2, \spadesuit 5, \heartsuit 1 \\ w &: \heartsuit 5, \spadesuit 1, \heartsuit 4, \spadesuit 2, \heartsuit 3 \mid \spadesuit 3, \heartsuit 2, \spadesuit 4, \heartsuit 1, \spadesuit 5. \end{aligned}$$

Widać, że dowolna para kart $\{\spadesuit i, \heartsuit i\}$ nadal jest położona symetrycznie względem środka talii. Wynika stąd, że elementami grupy $G_{2,2n}$ mogą być jedynie permutacje *środkowosymetryczne*, zachowujące symetryczne położenie



względem środka każdej pary. Oznaczając grupę wszystkich permutacji środkowosymetrycznych przez B_n , możemy więc powiedzieć, że

$$G_{2,2n} \subseteq B_n \subset S_{2n}.$$

Rząd grupy B_n można łatwo obliczyć, wynosi on $2^n n!$. Oczywiście, grupa $G_{2,2n}$ nie musi zawierać wszystkich permutacji środkowosymetrycznych, ale w żadnym razie jej rząd nie może przekroczyć liczby $2^n n!$.

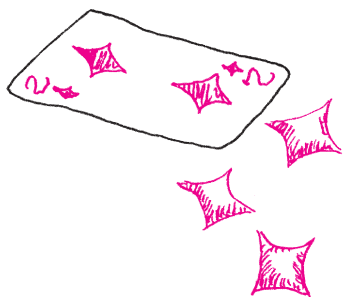
Klasyfikacja grup $G_{2,2n}$, podana w pracy Diaconisa, Grahama i Kantora, wyróżnia 5 nieskończonych klas, w zależności od reszty z dzielenia przez 4 liczby n i tego, czy $2n$ jest potęgą liczby 2, oraz dwa przypadki patologiczne: $n = 6$ i $n = 12$. Tak się składa, że równość $G_{2,2n} = B_n$ ma miejsce dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 2 \pmod{4}$ i $n \neq 6$, co obejmuje przypadek prawdziwej talii kart. Liczba wszystkich możliwych układów jest teraz ogromna, wynosi bowiem

$$2^{26} 26! = 27\,064\,431\,817\,106\,664\,380\,040\,216\,576\,000\,000.$$

Wciąż jednak stanowi znikomy, bo wynoszący zaledwie $3,3554 \times 10^{-34}$, ułamek wszystkich możliwych układów.

Tasowania potęgowe

Rząd grupy skończonej to liczba elementów grupy.



Jak to zwykle bywa, cała historia wcale się na tym nie kończy. Można przecież pójść dalej i rozważać tasowania doskonałe z początkowym podziałem talii na dowolną liczbę k kupek, przy podobnym jak poprzednio założeniu o podzielności liczby wszystkich kart przez k . Tasowanie przebiega podobnie jak poprzednio, najpierw ustalamy kolejność kupek, a potem upuszczamy w tej kolejności po jednej karcie z każdej kupki. Oto przebieg jednego z sześciu możliwych tasowań doskonałych 12 kart, przy $k = 3$.

1. Podział na 3 kupki:

♣2	♥2	♠2
♣3	♥3	♠3
♣4	♥4	♠4
♣5	♥5	♠5

2. Permutacja kupek:

♥2	♠2	♣2
♥3	♠3	♣3
♥4	♠4	♣4
♥5	♠5	♣5

3. Tasowanie:

♥2		
	♠2	
		♣2
♥3		
	♠3	
		♣3
♥4		
	♠4	
		♣4
♥5		
	♠5	
		♣5

Nawet dla $k = 3$ praktyczne wykonanie tej czynności jest raczej trudne, z uwagi na brak trzeciej ręki, ale przecież dla uzyskania potasowanej talii również dobrze można ściągać karty z kupek w kolejności

odwrotnej do kolejności upuszczania. Możliwych jest zatem $k!$ różnych tasowań doskonałych, które mogą być wielokrotnie ze sobą przeplatane. W ten sposób otrzymamy, dla każdego $k \geq 3$, całą plejadę nowych grup $G_{k,km}$, z których każda jest generowana przez $k!$ permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, km\}$.

Szczególnie interesująca jest sytuacja, gdy liczba kart w talii jest potęgą liczby kupek. Na początek przypomnijmy znaną karcianą sztuczkę, polegającą na odgadywaniu pomyślanej karty. Prosimy widza, aby z talii złożonej z 27 kart wybrał i zapamiętał jedną. Rozkładamy następnie karty w trzech kolumnach i pytamy, w której z nich znajduje się pomyślana karta. Składamy karty, tak aby kolumna ta znalazła się w środku i ponawiamy całą operację. Po trzecim złożeniu kart nie patrząc w talie, wyciągamy z niej jedną kartę i pokazujemy ją zdumionemu widzowi, który, nie mogąc wyjść z podziwu, stwierdza, że właśnie tę kartę wybrał na początku.

Sztuczka ta jest znana od dawna, a już w roku 1813 M. Gergonne podał jej matematyczny opis i to w uogólnionym przypadku, gdy talia złożona jest z m^m kart. Sekret tej sztuczki opiera się na ciekawych własnościach grupy tasowań $G_{k,km}$. Proponujemy Czytelnikowi wykonanie eksperymentu na talii 27 kart, złożonej z trzech kolorów od asa do dziewiątki. Umożliwi to rozpoznanie struktury grupy $G_{3,27}$ i ewentualne odkrycie ogólnej prawidłowości.

Grupami $G_{k,km}$ zajął się po raz pierwszy student politechniki w Kalifornii, Steve Medvedoff w swojej pracy magisterskiej. Jego głównym rezultatem było wyliczenie rzędu tej grupy, a wynosi on $m(k!)^m$. Gdy jednak przedstawił swoją pracę promotorowi, Kentowi Morrisonowi, obaj postanowili zająć się tym problemem dogłębniej i dokładnie zbadać strukturę tych grup. Ustalili oni, że grupa $G_{k,km}$ jest iloczynem półprostym grupy $S_k \times S_k \times \dots \times S_k$ (m czynników)

przez grupę cykliczną \mathbb{Z}_m , co w zwartym zapisie ma postać:

$$G_{k,k^m} = (S_k)^m \rtimes \mathbb{Z}_m.$$

W tym miejscu przepraszamy Czytelników za tę odrobinę przerażającego formalizmu, ale nie zawsze uda się w „ludzkim” języku wyrazić wszystkie subtelności matematycznej struktury. Niemniej jednak możemy wyobrazić sobie elementy grupy G_{k,k^m} jako m -wyrazowe ciągi permutacji z grupy S_k pokolorowane liczbami $0, 1, \dots, m-1$. Działanie zaś polega, z grubsza, na składaniu permutacji znajdujących się na tych samych współrzędnych (po wcześniejszym cyklicznym przesunięciu współrzędnych drugiego ciągu, odpowiadającym pokolorowaniu), wraz z jednoczesną zmianą kolorów według reguły modulo m . Na przykład, jeżeli $a = (p_1, p_2, p_3; 1)$ i $b = (q_1, q_2, q_3; 2)$ są elementami grupy $G_{3,27}$, to

$$a \circ b = (p_1 \circ q_2, p_2 \circ q_3, p_3 \circ q_1; 0),$$

ponieważ $1 + 2 = 0$ modulo 3, a współrzędne ciągu b zostały, ze względu na jego kolor, przesunięte cyklicznie o 2.

Pomimo sukcesu w rozpoznaniu struktury grup tasowań potęgowych o ogólnym przypadku grup G_{k,k^n} niewiele wiadomo. Nawet dla $k = 3$ istnieje jedynie hipoteza, wedle której możliwe są tylko trzy następujące sytuacje.

Hipoteza. Klasyfikacja grup $G_{3,3^n}$ obejmuje trzy następujące klasy:

- (1) $G_{3,3^n} = A_{3^n}$, jeśli n jest wielokrotnością 4 (A_{3^n} oznacza podgrupę permutacji parzystych, której rząd jest równy połowie liczby wszystkich permutacji).
- (2) $G_{3,3^n} = S_{3^n}$, jeśli n nie jest wielokrotnością 4 ani potęgą 3.
- (3) $G_{3,3^n} = (S_3)^m \rtimes \mathbb{Z}_3$, gdy $n = 3^m$ (to zostało udowodnione).

Hipoteza ta była oczywiście weryfikowana za pomocą komputera, ale jak dotąd nie natrafiono na żaden kontrprzykład. Można, na przykład, sprawdzić, że w grupie $G_{3,21}$ wystąpią wszystkie możliwe permutacje 21 kart. Wreszcie, można puścić wodze fantazji i postawić szereg podobnych hipotez dla kolejnych wartości k . Szczególnie interesująca wydaje się jednak kwestia, dla jakich n , przy ustalonym k , grupa G_{k,k^n} jest pełną grupą permutacji S_{k^n} .

W tym miejscu przerwiemy naszą dyskusję o tasowaniach doskonałych, która niepostrzeżenie oderwała się od realnego świata, w którym talie o większej niż 52 liczbie kart nie istnieją i pewnie nigdy nie będą istniały.



Zadania

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delt!

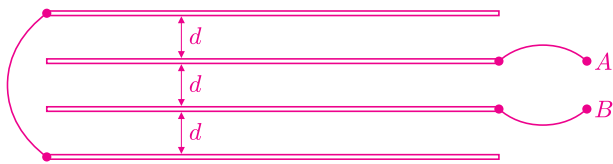
Rozwiąż wrześniowe (tak, wrześniowe) zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: <http://www.wiw.pl/delta/konkurs>

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 577. Mamy cztery jednakowe cienkie płyty przewodzące, położone tak jak na rysunku 1. Pole powierzchni każdej płyty wynosi S , a odległość między dwiema sąsiednimi jest równa d . Skrajne powierzchnie zostały połączone przewodnikiem. Znaleźć pojemność układu środkowych dwóch płyt.

Rozwiązanie na str. 1



Rys. 1

F 578. Do dużej metalowej powierzchni zbliżono równoległe dwa małe płaskie kawałki metalu o polach powierzchni S_1 i S_2 , znajdujące się w odległości odpowiednio d_1 i d_2 od płaszczyzny przewodzącej. Jaka jest pojemność powstałego w ten sposób kondensatora, którego końcówki znajdują się w dwóch dowolnych punktach powierzchni lub płytek? Płytki znajdują się wzajemnie odpowiednio daleko, a ich odległości od metalowej powierzchni d_1 i d_2 są dużo mniejsze od ich rozmiarów.

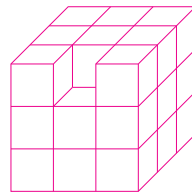
Rozwiązanie na str. 1

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

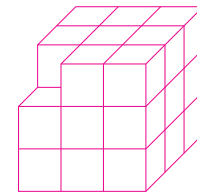
M 997. Na każdym polu tablicy 5×7 stoi pionek. Czy możliwe jest takie ponowne ustawienie pionków, by każdy z nich zajmował pole sąsiadujące z zajmowanym pierwotnie? Pola nazywamy sąsiadującymi, jeśli mają dokładnie jeden bok wspólny. Rozwiązanie na str. 4

M 998. Z kostki Rubika wypadł klocek na środku krawędzi (rys. 2). Klocek dawał się włożyć ponownie, ale tylko odwrotną stroną. Czy taką kostkę Rubika da się ułożyć?

Rozwiązanie na str. 2



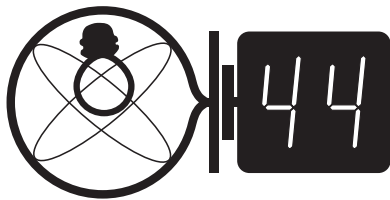
Rys. 2



Rys. 3

M 999. Klocek na środku krawędzi udało się w końcu włożyć właściwą stroną, ale przy okazji wypadł klocek narożnikowy (rys. 3). Niestety nie pamiętamy, jak był on położony. Jak na podstawie położenia pozostałych klocków rozstrzygnąć, którą stroną należy go włożyć?

Rozwiązanie na str. 3

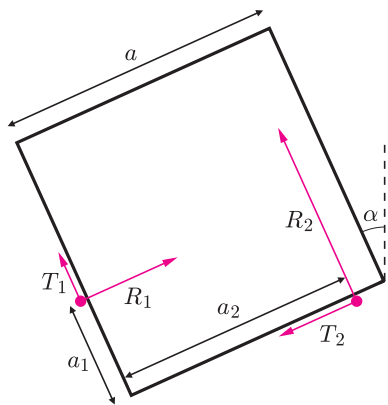


Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **328** ($WT = 1,36$) i **329** ($WT = 2,98$),
z numeru 12/2001

Jacek Piotrowski	– Rzeszów	46,56
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	42,62
Aleksander Surma	– Myszków	39,95
Tomasz Wietecha	– Tarnów	39,24
Marek Wójcicki	– Szczecin	33,69
Marian Łupieżowicz	– Gliwice	16,71

Po długiej przerwie przybył nowy członek
Klubu 44 F – p. Jacek Piotrowski.



Rys. 1

przez T_1 i T_2 (zob. rys. 1). Zwroty sił tarcia zostały wybrane tak, aby „sprzeciwiały się” one powrotowi sześcianu do położenia równowagi, w którym $\alpha = 45^\circ$. Warunkiem równowagi sześcianu jest spełnienie równań

$$R_2 \sin \alpha + T_1 \sin \alpha + T_2 \cos \alpha = R_1 \cos \alpha,$$

$$T_1 + T_2 \frac{a}{2} = R_2 \left(a_2 - \frac{a}{2} \right) + R_1 \left(\frac{a}{2} - a_1 \right).$$

Należy tu podstawić

$$a_1 = a \sin \alpha, \quad a_2 = a \cos \alpha, \quad T_1 \leq \mu R_1, \quad T_2 \leq \mu R_2.$$

Po przekształceniach dochodzimy do wniosku, że dla sił różnych od zera powyższe równania będą spełnione, jeśli

$$(1 + \mu^2)(\cos \alpha - \sin \alpha) + 2\mu \sin 2\alpha \geq 2 \cos 2\alpha.$$

Dalsza analiza prawdopodobnie musi już opierać się na obliczeniach numerycznych. Dla $\mu = 0,2$ dozwolony zakres kątów α to przedział od $36,2^\circ$ do 45° . Do tego należy, oczywiście, dodać symetryczny przedział od 45° do $53,8^\circ$ (wtedy siły tarcia miałyby przeciwny zwroty).

337. Gdy pierścień opada o dh , strumień pola obejmowanego przez dowolny okrąg w tym pierścieniu zmienia się o

$$d\Phi = B_a \cdot 2\pi a \cdot dh,$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2002

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

336. Sześcian o boku a leży na dwóch równoległych i znajdujących się na tej samej wysokości poziomych prętach odległych wzajemnie także o a . W jakim zakresie kątów α (zob. rys. 1) sześcian może być w równowadze, jeśli współczynnik tarcia między prętami a sześcianem jest równy $\mu = 0,2$?

337. Magnes wytwarza w przestrzeni między wewnętrznym walcem (biegunem N) a zewnętrzną powłoką walcową (biegunem S) radialne pole magnetyczne (rys. 2), którego indukcja w odległości a od osi walca wynosi B_a ; wartość ta jest niezależna od współrzędnej pionowej. Linie pola zamykają się od dołu (tzn. w zewnętrznej powłoce biegną w dół, a dalej do wewnątrz i wzdłuż wewnętrznego walca do góry). Jeśli w przestrzeni między biegunami spada swobodnie pierścień o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym b oraz grubości d , wykonany z niemagnetycznego metalu o gęstości ρ i przewodnictwie właściwym σ , to jaką prędkość osiągnie po długim czasie?

Wariant nieco łatwiejszy: rozważyć cienki pierścień, tzn. b niewiele większe od a .

zatem SEM indukcji w każdym takim okręgu wynosi

$$\mathcal{E} = 2\pi a v B_a.$$

Rozważmy fragment pierścienia zawarty pomiędzy promieniami r i $r + dr$.

Opór tego fragmentu wynosi

$$R = 2\pi r / (d\sigma dr),$$

czyli popłynie przez niego prąd o natężeniu

$$dI = \frac{\mathcal{E}}{R} = a d v \sigma B_a dr / r,$$

a siła działająca na taki przewodnik w radialnym polu magnetycznym będzie zgodnie z regułą Lenza skierowana do góry i równa

$$dF = dI \cdot 2\pi r B,$$

gdzie $B = B_a a / r$ (według prawa Gaussa radialne pole maleje ze wzrostem odległości r od osi jak $1/r$). Zatem

$$dF = 2\pi a^2 d v \sigma B_a^2 dr / r,$$

co po scałkowaniu daje

$$F = 2\pi a^2 d v \sigma B_a^2 \ln(b/a).$$

Tę siłę przyrównamy teraz do ciężaru pierścienia

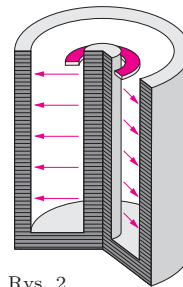
$$P = \pi(b^2 - a^2) d \rho g,$$

skąd ostatecznie wyznaczamy

$$v = \frac{(b^2/a^2 - 1) \rho g}{2\sigma B_a^2 \ln(b/a)},$$

co dla b niewiele większych od a sprowadza się do

$$v = \frac{\rho g}{\sigma B_a^2}.$$



Rys. 2

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

439. Rozważamy graf skierowany o skończonym zbiorze wierzchołków V . Każde dwa różne punkty (wierzchołki) $v_1, v_2 \in V$ łączy co najwyżej jedna z dwóch zorientowanych krawędzi: $v_1 \rightarrow v_2$ lub $v_2 \rightarrow v_1$. Punkt w jest osiągalny z punktu v , jeśli startując z v można dotrzeć do w idąc wzdłuż krawędzi grafu zgodnie z ich orientacją. Zbiór $Z \subset V$ jest *docelowy*, gdy spełnia warunki:

- (i) z każdego punktu $v \in V$ jest osiągalny pewien punkt $z \in Z$;
- (ii) z żadnego punktu $z \in Z$ nie jest osiągalny żaden inny punkt $z' \in Z$.

Udowodnić, że wszystkie zbiory docelowe są równoliczne.

440. Wyznaczyć największą wartość, jaką może mieć suma pól dwóch kół bez wspólnych punktów wewnętrznych, umieszczonych w kwadracie o boku długości 1.

439. Napis $v \rightarrow w$ będzie oznaczał, że punkt w jest osiągalny z punktu v .

Niech Y i Z będą dwoma różnymi zbiorami docelowymi. Wykażemy następujące dwie własności:

- (1) jeżeli $y \in Y, z \in Z, z \rightarrow y$, to $y \rightarrow z$;
- (2) jeżeli $y_1, y_2 \in Y, z \in Z, z \rightarrow y_1, z \rightarrow y_2$, to $y_1 = y_2$.

Przyjmijmy przesłanki zdania (1). Z punktu y jest osiągalny pewien punkt $z' \in Z$ (warunek (i) z treści zadania): $y \rightarrow z'$. Z przechodniości relacji \rightarrow wynika, że $z \rightarrow z'$. Zatem $z = z'$ na mocy warunku (ii), więc $y \rightarrow z$.

Przyjmijmy teraz przesłanki zdania (2). Z własności (1) wynika, że $y_1 \rightarrow z$; stąd (wobec $z \rightarrow y_2$) wnosimy, że $y_1 \rightarrow y_2$ i z warunku (ii) $y_1 = y_2$.

Własności (1) i (2) zostały wykazane. Warunek (i) gwarantuje, że

- (3) $\forall y \in Y \exists z \in Z: y \rightarrow z$ oraz $\forall z \in Z \exists y \in Y: z \rightarrow y$.

Własności (1), (2) i (3) pokazują, że łącząc każdy punkt $z \in Z$ w parę z jedynym punktem $y \in Y$ spełniającym równoważne warunki $z \rightarrow y, y \rightarrow z$, otrzymujemy bijekcję między zbiorami Z i Y . Zatem zbiory Y i Z są równoliczne.

440. Załóżmy, że koło o środku P i promieniu x oraz koło o środku Q i promieniu y leżą w kwadracie jednostkowym i nie mają wspólnych punktów wewnętrznych. Prosta PQ tworzy kąt $\alpha \leq 45^\circ$ z którąś parą równoległych boków kwadratu. Niech P' i Q' będą rzutami prostokątnymi punktów P i Q na jeden z tych boków; oznaczmy jego końce przez A (bliżej punktu P') i B (bliżej Q'). Mamy nierówności

$$1 = |AP'| + |P'Q'| + |Q'B| \geq x + (x+y) \cos \alpha + y \geq (x+y)(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2});$$

stąd $x + y \leq 2 - \sqrt{2}$.

Można przyjąć, że $x \geq y$. Jeżeli $x - y \leq \sqrt{2} - 1$, to

$$2(x^2 + y^2) = (x+y)^2 + (x-y)^2 \leq$$

$$\leq (2 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 9 - 6\sqrt{2},$$

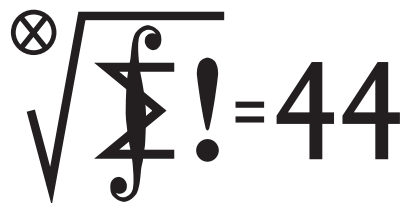
czyli $x^2 + y^2 \leq \frac{9}{2} - 3\sqrt{2}$.

Jeśli zaś $x - y \geq \sqrt{2} - 1$ (więc $y \leq x + 1 - \sqrt{2}$), to także

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + (x + 1 - \sqrt{2})^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1 - \sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - 3\sqrt{2}.$$

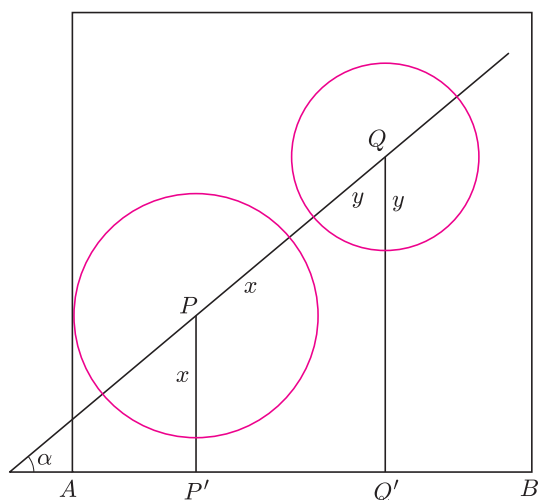
W każdym przypadku suma pól obu kół nie przekracza $(\frac{9}{2} - 3\sqrt{2})\pi$. Jest to szukane maksimum, bowiem dla $\alpha = 45^\circ$ oraz $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ wszystkie napisane nierówności stają się równościami; odpowiada to sytuacji, gdy większe koło jest wpisane w kwadrat, a mniejsze jest styczne do większego i do dwóch boków kwadratu.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 431 (WT = 1,95) i 432 (WT = 1,64),
z numeru 12/2001

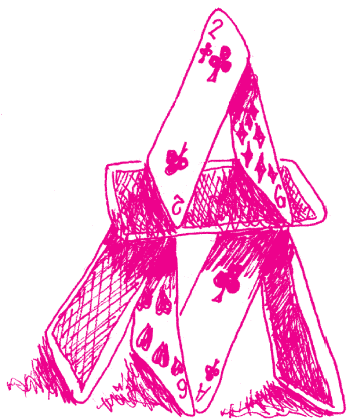
Jacek Klisowski – Lublin 41,57
Tomasz Rawlik – Braunschweig 36,38



Patrz w niebo

Najbardziej spektakularnym widowiskiem, jakie może urządzać zwykła gwiazda, jest kończąca jej życie eksplozja, znana jako zjawisko supernowej. Tak kończy się ewolucja dostatecznie masywnych gwiazd, z których lżejsze zapewne detonują w całości (SN I typu), w masywniejszych zaś zapada się jądro (tworząc gwiazdę neutronową), a rozprasza się reszta gwiazdy (SN II typu). W każdym razie zjawisku temu towarzyszy wydzielenie się co najmniej 10^{44} J (energii we wszystkich możliwych postaciach) w czasie kilku dni, co odpowiada mocy przekraczającej miliard razy moc Słońca. Ponieważ masa gwiazdy nie może wiele przekraczać stu mas Słońca, to i moc supernowej ma naturalne górne ograniczenie, określone przez moc eksplozji tych właśnie najmasywniejszych gwiazd.

Tymczasem niedawno odkryto obiekty, które nieodparcie zasługują na nazwę hipernowych. W niezbyt odległej galaktyce M101 znaleziono (w zakresie rentgenowskim dzięki satelicie Rosat) dwa ekspandujące bąble materii. Z pomiarów tempa rozszerzania się i ocen masy tych bąbli wynikało, że dysponują one energią co najmniej o dwa rzędy wielkości większą niż wybuchy supernowych. Jeden obiekt, leżący na skraju galaktyki i mający nawet własny numer katalogowy NGC 5471B, liczy 30 000 lat. Wiek drugiego, położonego wewnątrz galaktyki, oceniono na około miliona lat, a samą mechaniczną energię jego ekspansji na 3×10^{46} J. Wprawdzie resztki podobnych bąbli znane są od dawna zarówno w naszej Galaktyce, jak i w innych, jednak domniemane pozostałości po hipernowych w M101 są stosunkowo małe i młode, przez co ich parametry jest znacznie łatwiej ocenić. Nie wiadomo, czy obiekty te są skutkiem jakiegoś pojedynczego kataklizmu czy serii wybuchów ciasno zgrupowanych masywnych gwiazd. Skoro nie ma gwiazd dowolnie masywnych, to musiałyby to być seria wybuchów, ale wtedy coś dziwnego powinno te wybuchy synchronizować. Wysłunęto więc hipotezę, że jeżeli bardzo masywna gwiazda zapada się, tworząc szybko rotującą czarną dziurę z silnym polem magnetycznym, to właśnie owo pole może przyczynić się do przekazania energii ruchu obrotowego od czarnej dziury do resztek zapadającej się gwiazdy. Proces ten może jakoby trwać krócej niż minutę, energia grawitacyjna wraz z energią rotacji wyzwala się więc z ogromną mocą, a towarzyszący temu błysk twardego promieniowania mógłby ponadto być – według entuzjastów tego dość zawilego scenariusza – owym „błyskiem gamma”, które to błyski często się obserwuje, a których natura do dziś nie jest do końca wyjaśniona.



Tomasz KWAST

Sierpień

Skorpion, widoczny w sierpniowe wieczory nisko na południowym zachodzie, leży wprawdzie częściowo poza Drogą Mleczną, ale na jego granicy ze Strzelcem znajduje się centrum naszej Galaktyki, a więc obszar nieba bardzo gęsto wypełniony gwiazdami. Z naszej szerokości geograficznej widać tylko północną część Skorpiona, można przy tym zobaczyć jego najjaśniejszą gwiazdę, Antaresa. Jest to jedna z najchłodniejszych gwiazd widocznych gołym okiem na całym niebie, a zapewne najchłodniejsza widoczna w sierpniowy wieczór. Jest typu widmowego M1 i ma temperaturę około 3500 K, przez co jest wyraźnie czerwona; każdy metr kwadratowy jej powierzchni emituje 0,13 tej energii, jaką emituje jednostka powierzchni Słońca. Niemniej jednak Antares świeci z mocą 10 000 razy przekraczającą moc Słońca, jest bowiem nadolbrzymem o rozmiarach 300 razy większych od rozmiarów Słońca (zmieściłaby się

w nim orbita Ziemi). Ma gorącą gwiazdę za towarzysza, co można dostrzec za pomocą niedużej lunetki. Cały układ znajduje się w odległości 130 pc.

Wenus jest w Pannie i świeci wieczorami na zachodnim niebie. 22 VIII znajdzie się w największej kątowej odległości od Słońca. Mars jest w Lwie i nie widać go, bo jest za Słońcem. Koło północy wschodzi Saturn znajdujący się na granicy Byka i Bliźniąt, a nad ranem Jowisz znajdujący się w Raku, a więc jeszcze dość blisko Słońca. Zarówno Uran, jak i Neptun mają w sierpniu opozycje, czyli obie te planety widoczne są w zasadzie przez całą noc – niestety tylko za pomocą przyrządów optycznych (w każdym razie Neptun) i w ogóle niełatwo odróżnić je od gwiazd. Nów Księżycy wypada 8 VIII, a pełnia 22 VIII. Żadnych efektownych zakryć w sierpniu nie będzie.

T. K.

O RÓWNYCH SUMACH ÓSMYCH POTĘG

Najbardziej imponujące jest rozwiązanie, które odkrył w 2000 roku Scott I. Chase, a które zawiera **tylko osiem** ósmych potęg:

$$(8.3.5) \quad 966^8 + 539^8 + 81^8 = 954^8 + 725^8 + 481^8 + 310^8 + 158^8.$$

A oto różnego typu rozwiązania używające dziewięciu ósmych potęg:

$$(8.2.7) \quad 1303^8 + 1127^8 = 1334^8 + 976^8 + 648^8 + 623^8 + 516^8 + 401^8 + 272^8$$

$$(8.1.8) \quad 1409^8 = 1324^8 + 1190^8 + 1088^8 + 748^8 + 524^8 + 478^8 + 223^8 + 90^8$$

$$(8.4.5) \quad 221^8 + 108^8 + 94^8 + 94^8 = 195^8 + 194^8 + 188^8 + 126^8 + 38^8.$$

Podajemy też próbkę równań spełnionych dla kilku wykładników:

$$313^n + 301^n + 188^n + 100^n + 99^n = 308^n + 307^n + 180^n + 131^n + 71^n \quad \text{dla } n = 2, 4, 6, 8,$$

$$515^n + 452^n + 366^n + 189^n + 103^n = 508^n + 471^n + 331^n + 245^n + 18^n \quad \text{dla } n = 2, 4, 6, 8,$$

$$36^n + 31^n + 30^n + 17^n + 7^n + 1^n = 35^n + 34^n + 27^n + 19^n + 4^n + 3^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 4, 6, 8,$$

$$501^n + 447^n + 443^n + 321^n + 283^n + 169^n + 159^n + 77^n = 491^n + 481^n + 399^n + 363^n + 237^n + 213^n + 137^n + 79^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8,$$

$$198^n + 174^n + 168^n + 115^n + 112^n + 65^n + 41^n + 17^n + 1^n = 197^n + 181^n + 157^n + 133^n + 86^n + 83^n + 30^n + 24^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$$

$$348^n + 322^n + 306^n + 224^n + 182^n + 111^n + 55^n + 13^n + 5^n = 343^n + 335^n + 293^n + 237^n + 166^n + 124^n + 42^n + 26^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (31)

Liczbą pierwszą Mersenne'a nazywamy każdą liczbę pierwszą postaci $2^p - 1$. Liczbami pierwszymi Mersenne'a są, na przykład, 31 i 127 (31. liczba pierwsza), dlatego też MNO 31 jest właśnie poświęcone liczbom Mersenne'a. Dotychczas znanych jest 38 liczb pierwszych Mersenne'a i do dziś nie wiadomo było, czy jest ich skończenie wiele. Do dziś, bo poniżej przedstawiamy twierdzenie, które tę kwestię ostatecznie rozstrzyga.

Twierdzenie. Wśród liczb Mersenne'a jest skończenie wiele liczb pierwszych.

Twierdzenie wynika w oczywisty sposób z następującego lematu.

Lemat 1. Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest skończony.

Lemat 1 jest prostą konsekwencją następującego faktu.

Lemat 2. Liczb naturalnych (całkowitych dodatnich) jest skończenie wiele.

Dowód. W zbiorze \mathbb{N} wszystkich liczb naturalnych wyróżnimy wszystkie te liczby, które można zdefiniować w jednej linijce. Nie będziemy wymieniać tu wszystkich reguł, które wolno stosować przy takim definiowaniu, określimy je w zarysie, rozumiejąc, że potrzebne szczegóły można sobie doprecyzować. Linijka składa się z maksimum 80 znaków (liter, spacji, powszechnie stosowanych symboli matematycznych – to też wymaga doprecyzowania, które symbole są dopuszczalne). Linijka tekstu definiuje liczbę, jeśli daje się ją jednoznacznie zinterpretować jako liczbę zapisaną za pomocą symboli matematycznych i tekstu w języku polskim i angielskim, z możliwymi odsyłaczami do istniejących w literaturze liczb lub definicji.

Tak więc poprawnymi definicjami w jednej linijce liczby 6 są np.:

sześć

six

$2 + 2 + 2$

$2 \cdot 3$

6

najmniejsza liczba doskonała

$(1 + 2)!$

liczba miesięcy w półroczu.

Nie są natomiast definicjami liczb napisy uchybiające zasadom ortografii, nawet jeśli większość ludzi domyśli się, o jaką liczbę chodzi:

sześćset siedemnaście

dwa tysiące czysta dwadzieścia piąt

liczba podzbiórów zbioru czteroelementowego.

Niech \mathbb{N}_1 oznacza zbiór wszystkich liczb, które dadzą się zdefiniować w jednej linijce. Zbiór ten jest skończony, gdyż linijkę tekstu można skomponować na $s + s^2 + s^3 + \dots + s^{80}$ sposobów, gdzie s jest liczbą znaków (liter i symboli), które zgodzimy się mieć do dyspozycji. Znakomita większość takich napisów to bełkot, który niczego nie definiuje. A wielokrotnie różne sensowne napisy definiują tę samą liczbę.

Niech teraz $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$ będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych, które w jednej linijce tekstu zapisać się nie dadzą.

Jeżeli zbiór \mathbb{N}_2 jest niepusty, to istnieje w nim liczba najmniejsza, oznaczmy ją n . Czym jest wówczas liczba n ? Otóż n to

najmniejsza liczba naturalna, której nie można zdefiniować w jednej linijce

Powyższy napis jednoznacznie definiuje liczbę n i składa się z 75 znaków, jest więc definicją liczby n w jednej linijce, skąd $n \in \mathbb{N}_1$ wbrew założeniu, że $n \in \mathbb{N}_2$. Błędne było więc przypuszczenie, że zbiór \mathbb{N}_2 jest niepusty.

Zatem $\mathbb{N}_2 = \emptyset$, skąd $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1$ i w konsekwencji zbiór wszystkich liczb naturalnych jest skończony, co kończy dowód lematu 2.

Korespondencję do Γ -limatiásu prosimy kierować pod adresem:

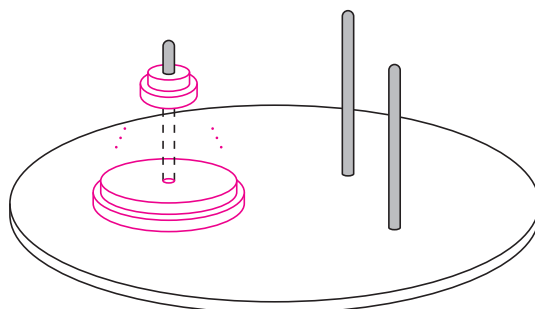
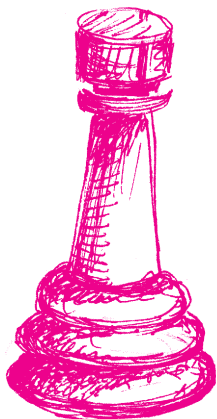
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl



mała delta

Wieże Hanoi

Legenda powiada, że gdy bóg Brahma po raz pierwszy poruszył czas, umieścił na jednej z trzech diamentowych igieł, umocowanych na wspólnej podstawie, 64 złote krążki. Na podstawie spoczywał krążek największy, a nad nim lśniły pozostałe o coraz mniejszych średnicach. Bóg polecił mnichom z górskiej samotni, by bez spoczynku przekładali krążki, tak aby wszystkie znalazły się na drugiej diamentowej igle, z zachowaniem tego samego ułożenia. Gdy zadanie zostanie zakończone, nastąpi koniec pierwszego świata, a na następny, wskrzeszony przez Brahmę, wypadnie czekać wiele tysięcy lat. Nie wolno jednak przekładać krążków byle jak. Po pierwsze, w każdym ruchu można przełożyć tylko jeden krążek, a po drugie – pod żadnym pozorem nie wolno kłaść większego krążka na mniejszy. Wolno natomiast korzystać z trzeciej, pomocniczej diamentowej igły i przekładać na nią krążki, oczywiście z zachowaniem tych dwóch zasadniczych reguł.



Kiedy należy się spodziewać końca świata? Spróbujmy ustalić, ile ruchów potrzeba, by wykonać zadanie Brahmy. Jeśli nie wiemy jeszcze, jak się do tego zabrać, zacznijmy od prostych przypadków. Gdyby na pierwszej igle znajdował się tylko jeden krążek, wystarczyłby jeden ruch, by przełożyć go na drugą. Gdyby na pierwszej igle znajdowały się 2 krążki, moglibyśmy przełożyć górny na trzecią igłę, dolny na drugą, a na koniec przełożyć mniejszy krążek z trzeciej na drugą igłę. Razem $1 + 1 + 1 = 3$ ruchy. Gdyby na pierwszej igle były 3 krążki... Aby przełożyć na drugą igłę największy z nich, musimy najpierw przenieść na trzecią igłę pozostałe dwa, a to, jak wiemy, wymaga 3 ruchów. Po przełożeniu największego na właściwe miejsce trzeba przenieść na tę samą igłę dwa mniejsze krążki (3 ruchy). Razem $3 + 1 + 3 = 7$ ruchów. A 4 krążki? Już się domyślamy: $7 + 1 + 7 = 15$ ruchów. A n krążków? Jeśli R_n oznacza liczbę ruchów potrzebnych do prawidłowego przeniesienia n krążków, to można przypuszczać, że dla $n \geq 1$ zachodzi

równość $R_{n+1} = 2R_n + 1$. Istotnie, aby przenieść największy z $n + 1$ krążków, trzeba w R_n ruchach przenieść pozostałe na trzecią igłę, jednym ruchem przełożyć największy na drugą i wreszcie w R_n ruchach nałożyć nań mniejsze krążki.

Ile zatem wystarczy ruchów, by przełożyć 64 krążki? Jaką liczbą jest R_{64} ? Zobaczmy: $R_1 = 1$, $R_2 = 3$, $R_3 = 15$, $R_4 = 31$, $R_5 = 63, \dots$ Domyślasz się, droga Czytelniczko i drogi Czytelniku, jak R_n zależy od n ? Jeśli się domyślasz i znasz zasadę indukcji matematycznej, możesz spróbować udowodnić, że masz rację. My stwierdzimy tylko, że R_{64} jest liczbą większą od 10^{19} . Do końca świata jeszcze daleko.

A co ma do tego Hanoi? Łamigłówkę z krążkami (ale tylko ośmioma) zaproponował francuski matematyk Edouard Lucas w końcu XIX wieku i nazwał ją właśnie „wieże Hanoi”. I on również ozdobił ją piękną, hinduską legendą...

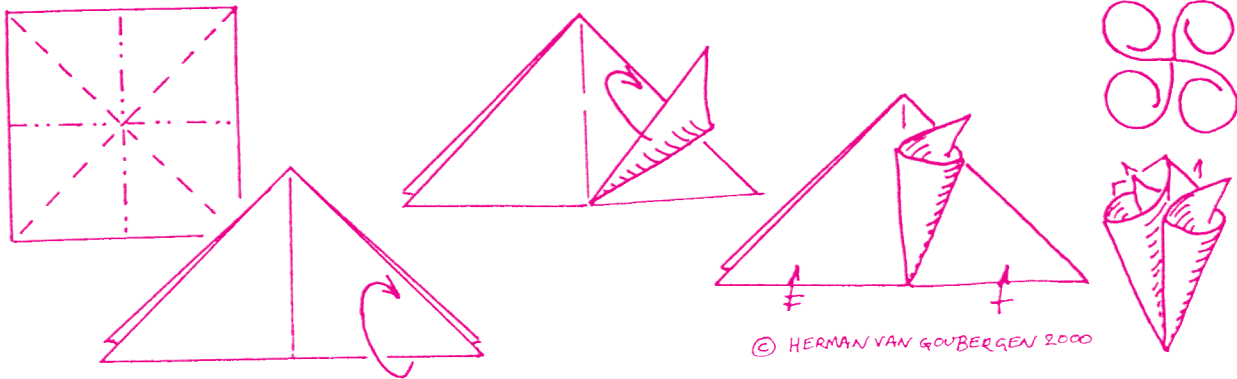
W. B.

Kręciołki

Wykonanie modułu

Moduły składamy z kwadratowych kartek papieru. Wszystkie kartki powinny być tej samej wielkości. Wielkość kartek można wybrać dowolnie, ale wykonanie modułów z kartek zbyt małych (mniejszych niż 5×5 centymetrów) lub za dużych (powyżej 21×21 centymetrów) jest trudne, a model nie wygląda wtedy najlepiej. Bardzo dobrym papierem na „kręciołki” jest papier kserograficzny: zwykły lub brokatowy. Wykonanie modułu zaczynamy od złożenia bazy „trójkąt” (kartkę kwadratową składamy wzdłuż

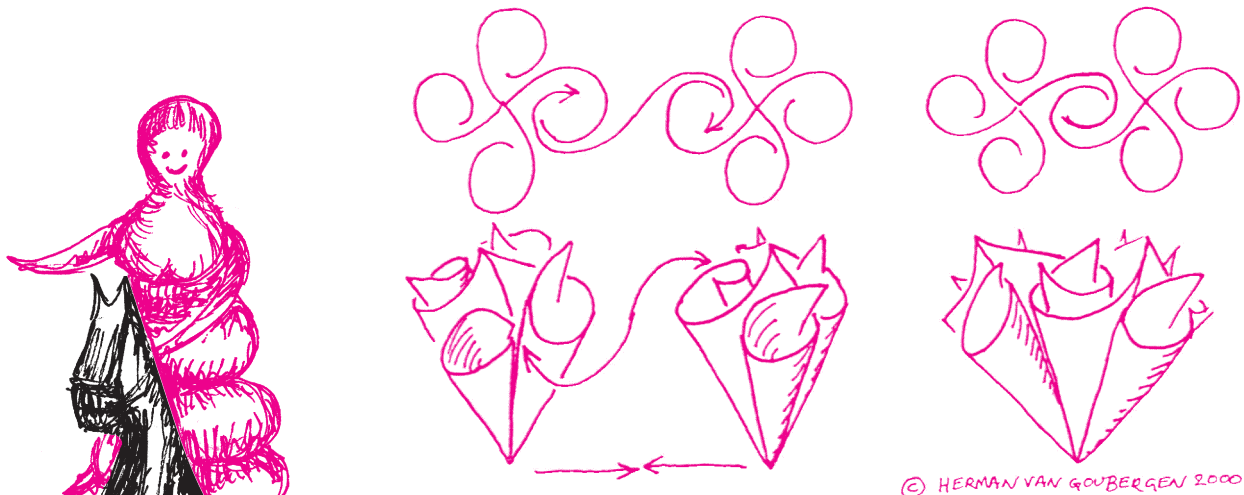
przekątnych kwadratu, a następnie po odwróceniu kartki na połowy równoległe do boków kwadratu, po czym zamykamy bazę „trójkąt”). Baza „trójkąt” ma cztery wypustki (ich grzbietami są połowy przekątnych kwadratu). Każdą z nich zwijamy w stożek, pamiętając, aby wszystkie wypustki zwinąć w tę samą stronę (na rysunku 1 – zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara). Po zwinieniu takiej jednej spiralki musimy ją chwilę przytrzymać w zwiniętej postaci, gdyż papier ma tendencję do rozwijania się.



Rys. 1

Sposób łączenia modułów

Łączenie modułów polega na łączeniu spiralek poszczególnych modułów. Robimy to, wsuwając delikatnie spiralkę jednego modułu do spiralki drugiego, starając się przy tym jak najmniej rozwijać spiralki. Rozpoczynamy od połączenia dwóch modułów.



Rys. 2

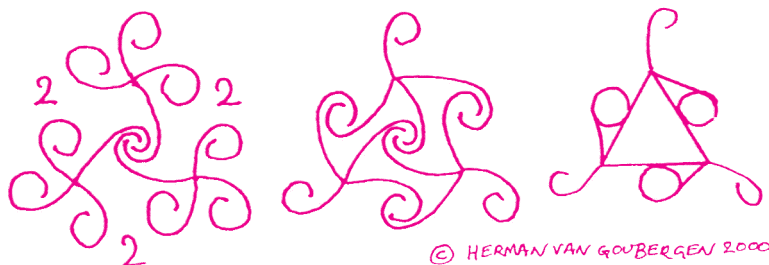
Każdy z modułów ma 4 spiralki. Łącząc moduły, zaczepiamy dwie sąsiednie spiralki jednego modułu z dwiema sąsiednimi spiralkami drugiego modułu. Powstaje wówczas połączenie odpowiadające bokowi wielokąta (krawędzi wielościanu): wierzchołki modułów są wierzchołkami wielościanu, a dwie stykające się spiralki, tworzą krawędź. Po obu



stronach krawędzi pojawią się wiry złożone z dwóch spiralek. W analogiczny sposób będziemy przyłączać kolejne moduły, przy czym musimy pamiętać o tym, aby za każdym razem zaplatać dwie spiralki oraz aby w jednym wirze nie pojawiły się dwie spiralki z tego samego modułu.

Łączenie modułów w wiry

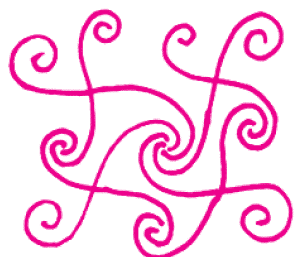
Łączenie modułów rozpoczynamy od zaplecenia dwóch modułów. Do połączonych dwóch spiralek pierwszych dwóch modułów dołączamy spiralkę trzeciego modułu. W ten sposób utworzymy wir z 3 spiralek.



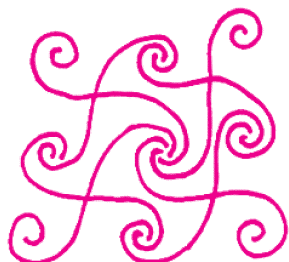
© HERMAN VAN GOUBERGEN 2000

Rys. 3

Możemy go już zamknąć, ale możemy również dołączyć kolejne moduły tworząc wiry 4-, 5- lub 6-spiralkowe (fotografie 1, 2 i 3 z okładki oraz rys. 4 i rys. 5). O wirze złożonym z trzech spiralek możemy myśleć jak o trójkącie, a o wirze z czterech spiralek – jak o kwadracie, itd. Zaplatając spiralki kolejnych dołączanych modułów, równocześnie zaplatamy spiralki na bokach otrzymywanego wielokąta.



Rys. 4a



Rys. 4b

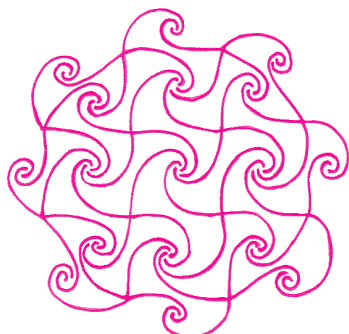


Rys. 5a



Rys. 5b

Model sześćośmiościanu



Rys. 6

Wir złożony z 4-spiralek (kwadrat) możemy obudować, dodając pas złożony z wirów 3-spiralkowych (trójkątów) i wirów 4-spiralkowych (kwadratów) – na przemian – kwadrat przy boku wielokąta, trójkąt przy wierzchołku (rys. 6). Kolejnym etapem tworzenia modelu sześćośmiościanu będzie dodanie pasa złożonego z samych wirów 4-spiralkowych (kwadratów), a następnie powtórzenie pasa złożonego z 3- i 4-spiralkowych wirów. Na końcu zamykamy ostatni wir 4-spiralkowy (kwadrat). Gotowy model przedstawiony jest na fotografii 4 z okładki. W analogiczny sposób możemy stworzyć modele innych wielościanów (fotografie 5 i 6 z okładki). Możemy również spróbować stworzyć formy przestrzenne według własnych pomysłów.

Krystyna BURCZYK

Bibliografia:

- [1] Herman Van Goubergen „Curls Unit”, BOS, 2000
<http://www.worthhall.demon.co.uk/theory/curler.htm>.
- [2] Tomoko Fuse „Unit Origami. Multidimensional transformation.”, Japan Publications, Tokyo, 1990.

Huśtawka

Czy każde siedmioletnie dziecko zna zasadę zachowania momentu pędu?

Do dzisiejszego doświadczenia potrzebna będzie huśtawka. Jeszcze lepszy byłby długi, spuszczonej z gałęzi sznur z poprzeczką na końcu. Każdy chyba umie rozhuścić się. Ale czy zastanawialiście się kiedyś, dlaczego to jest możliwe i dlaczego wszyscy robią to w prawie identyczny sposób? Może jest to spowodowane naśladownictwem? Kiedyś, kiedy uczyliśmy się huścić, podpatrywaliśmy tych, co już tę sztukę opanowali, starając się wykonać ją w podobny sposób. Nie wiem jednak, czy pamiętacie, że przez pewien czas nic z tych prób nie wychodziło. Kiwaliśmy się zawzięcie w przód i w tył, ale żadnego efektu rezonansowego nie było widać. Bo to, że huśtanie się jest zjawiskiem rezonansowym, to chyba wiecie? Ruchy

„huśtające” należy wykonywać z częstością równą częstości drgań własnych huśtawki, aby uzyskać zamierzony efekt.

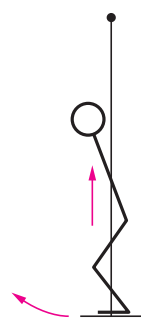
O ile jednak działanie siły wymuszającej jest proste do zrozumienia w przypadku huśtania dziecka przez stojącego na ziemi dorosłego, o tyle możliwość rozhuśtywania się samemu jest zastanawiające. Przecież zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona akcja powinna równać się reakcji, a więc żadnego efektu nie powinno huśtanie dawać. Ponieważ jednak doświadczenie mówi nam co innego, to czegoś musimy nie rozumieć albo nie zauważać. (Możliwość, że prawa dynamiki Newtona nie stosują się do huśtawki, możemy spokojnie odrzucić).

Zacznijmy się więc w końcu huścić. Jak to robimy? Najpierw nabieramy trochę rozpędu, odsuwając huśtawkę w jedną stronę, a później... Zaraz, czy to początkowe wychylenie z poziomu równowagi jest konieczne, czy tylko wygodne? To jest właśnie pierwsza rzecz, którą należy sprawdzić doświadczalnie. Spróbujcie rozhuścić zatrzymaną huśtawkę, nie dotykając jej. Okaze się, że choć to nie jest niemożliwe, jest to zadziwiająco trudne i tym trudniejsze, im dłuższa jest huśtawka. Dlatego właśnie na początku namawiałem Was na próbę z długim sznurem.

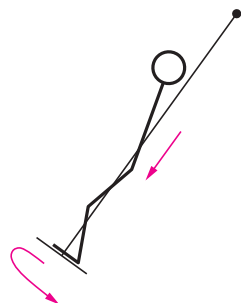
Wiemy więc już, że do efektywnego huśtania się potrzebna jest pewna początkowa amplituda drgań. Nadal jednak nie wiemy, dlaczego możemy się huścić. W tym celu, zamiast na huśtawce siedzieć, stańmy na niej. Wykorzystamy ten sposób huśtania się, gdyż jest on łatwiejszy do wytłumaczenia. Żeby się huścić stojąc, wystarczy, jeżeli już się trochę bujamy, za każdym przejściem przez punkt równowagi „podnieść swój środek ciężkości, przesuując go w kierunku punktu zawieszenia huśtawki” – czyli wyprostować nogi (rys. 1), a następnie po osiągnięciu maksymalnego wychylenia pozwolić mu opaść – czyli ugiąć nogi w kolanach (rys. 2). Przy pierwszym z opisywanych ruchów wykonujemy pracę dodatnią, działając siłą przeciwną do i przewyższającą wypadkową siły ciężkości i siły odśrodkowej, a przy drugim pracę ujemną, ale związaną jedynie ze składową siły ciężkości skierowaną wzdłuż ramienia huśtawki. Netto wykonujemy więc pracę dodatnią, którą zużywamy na zwiększanie energii ruchu drgającego (huśtania) i na pokonywanie oporów ruchu.

Aby do końca przekonać się, że takie wytłumaczenie może być wystarczające, należy zrobić kolejne doświadczenie. Przez górną poprzeczkę zatrzymanej huśtawki przerzucamy sznurek obciążony np. kamieniem. Stajemy w pewnej odległości od huśtawki, trzymając drugi koniec sznurka w ręku. Teraz należy spróbować rozhuścić kamień, pociągając w odpowiednim rytmie za trzymany w ręku koniec sznurka (rys. 3). Jeżeli kamień początkowo wykonywał nawet niewielkie drgania, to okazuje się to dość proste. Jak już się nauczycie, to sprawdźcie, czy postępujecie według podanej wyżej „instrukcji huśtania”.

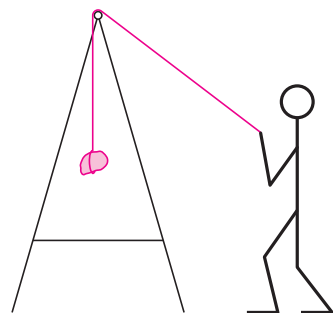
Opisane zjawisko nosi fachową nazwę „rezonansu parametrycznego” albo „parametrycznego wzbudzenia drgań”. Nazwa bierze się stąd, że zamiast



Rys. 1



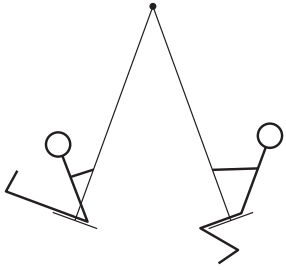
Rys. 2



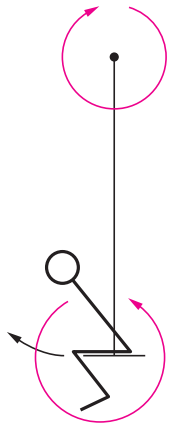
Rys. 3



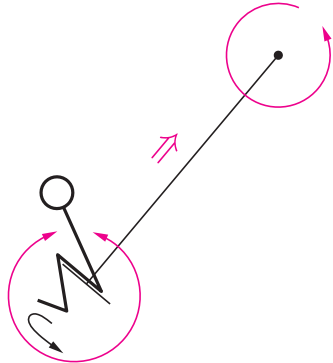
używać zewnętrznej, periodycznej siły wymuszającej, wykorzystujemy periodyczną zmianę pewnego parametru drgającego układu. Rezonans pojawia się, jeżeli stosunek okresu zmiany parametru jest zbliżony do całkowitej wielokrotności połowy okresu drgania własnego układu. W naszym przypadku parametrem tym jest długość wahadła-huśtawki mierzona od punktu zamocowania do środka masy ruchomej części huśtawki (wraz z huśtającym się). Za zmieniający się parametr można także uznać moment bezwładności huśtawki względem punktu zaczepienia. Jest to z definicji iloczyn masy i kwadratu ramienia. Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że zmniejszenie momentu bezwładności przez przesunięcie środka masy w górę (przy przechodzeniu przez punkt równowagi) musi powodować przyspieszenie kątowe. Podobnie, jak złożenie rąk łyżwiarza zwiększa częstość kręcenia piruetu. Natomiast powiększaniu momentu bezwładności nie towarzyszy opóźnienie, bo huśtawka w punkcie największego wychylenia nie porusza się.



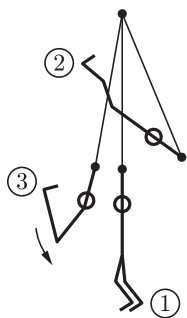
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

O ile przywołana zasada zachowania momentu pędu nie jest konieczna do (zrozumienia) huśtania się na stojąco, to trudno się bez niej obejść, gdy się na huśtawce usiądzie. Jest tak dlatego, że w tym przypadku ciężko dopatrzeć się zmiany położenia środka ciężkości. Gdy głowa przemieszcza się w tył, nogi wysuwane są do przodu i na odwrót. Środek ciężkości zmieniałby położenie przód-tył, gdyby huśtać się tak jak na rysunku 4. Możecie spróbować. Nie wydaje się jednak, żeby był to sposób efektywny. Może to tylko kwestia braku wprawy? Raczej nie.

Tradycyjny sposób huśtania wykorzystuje właśnie zasadę zachowania momentu pędu. Poruszając się w przód, po przekroczeniu położenia równowagi obracamy się wokół naszego środka ciężkości w przód. Powoduje to obrót huśtawki w przeciwną stronę (patrz rysunek 5), czyli też w przód! Dochodząc do maksymalnego wychylenia, gwałtownie zatrzymujemy obrót, który zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu „musi być przejęty” przez huśtawkę, powodując jej obrót w tył, czyli w kierunku, w którym powinna zacząć się poruszać (rys. 6). Sytuacja powtarza się w sposób analogiczny po drugiej stronie. W opisanej sekwencji ruchów najłatwiejsze do uchwycenia jest gwałtowne zatrzymanie ruchu obrotowego huśtającego się w momencie największego wychylenia. Od tego zależy efektywność rozhuśtywania się. Jak widać, każde siedmioletnie dziecko umie praktycznie zastosować zasadę zachowania momentu pędu, nawet gdy nie potrafi jej sformułować.

Na koniec wróćmy jeszcze do problemu rozhuśtywania zatrzymanej huśtawki. Można sobie postawić akademicki problem „czy możliwe jest rozbijanie się punktu materialnego na nieważkiej, poruszającej się bez oporu huśtawce?” Chwila zastanowienia wystarczy, żeby stwierdzić, iż nie jest to możliwe. Punkt materialny, choćby nie wiem jak się starał, to bez początkowej, choćby najmniejszej amplitudy drgań, nie może wysunąć się w bok od linii wyznaczonej przez kierunek natężenia pola grawitacyjnego i punkt zawieszenia huśtawki. Pozwala to wymyślić, co należy zrobić, żeby się samemu zacząć huśtać. Najlepiej podzielić się na dwie części, z których jedną wyrzucamy w przód w górę, a drugiej pozwalamy wykonać 3/4 wahnienia do momentu złapania pierwszej części. Przykład takiej pozornie niewykonalnej sekwencji ruchów jest przedstawiony na rysunku 7. Większość dochodzi do opanowania tej (lub podobnej) sekwencji metodą prób i błędów. Moim zdaniem efekty przychodzą szybciej, gdy się wie, jak je uzyskać.

P. Z.

Kwadratowe okręgi

Kwadratowe okręgi – czy to nie to samo, co gruszki na wierzbie? Przecież od zawsze kwadraty są kwadratowe, okręgi okrągłe, a masło maślane... Tymczasem nasze doświadczenie, związane nierozzerwalnie ze światem, w którym przyszło nam żyć, myli się szepcząc

TO NIEMOŻLIWE, ABY OKRĄG BYŁ KWADRATOWY.

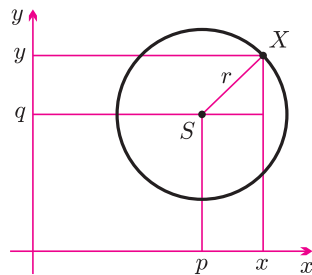
Jak się zaraz przekonamy, okrąg nie tylko nie musi być takim, do jakiego przywykliśmy, może również przyjmować różny kształt w zależności od położenia środka okręgu. Znajdźmy wspólnie wytrych do zapowiadanych już „kanciastych” okręgów. Okrąg $o(S, r)$, jak uczono nas w szkole, to zbiór punktów płaszczyzny równo odległych o r od ustalonego punktu $S = (p, q)$, zwanego środkiem okręgu. Wytrychem w podanym sformułowaniu jest słowo **równoodległych**. Co kryje w sobie ten wyraz? Punkty, o których mowa, to takie, których odległość od punktu S wynosi dokładnie r . Czy w definicji okręgu jest podany sposób mierzenia odległości między dwoma punktami? Nie podano, jak mamy to robić. Wzięcie pod lupę jednego słowa doprowadziło nas do małej rozterki i na pozór nic nie wnoszącego pytania: jak określić odległość między dwoma punktami? Zmierzmy odległość tak, jak robimy to na co dzień. Wówczas dowolny punkt leżący na dobrze znanej krzywej z rysunku 1 spełnia poniższe równanie:



Przyzwite sposoby mierzenia odległości muszą spełniać trzy warunki:

- odległość punktu od niego samego, i tylko od niego, jest równa zero;
- odległość dwóch punktów jest taka sama, niezależnie od tego, w którą stronę ją przemierzamy;
- jeśli w drodze z punktu do innego punktu odwiedzimy jakiś jeszcze inny punkt, to przebyta odległość nie zmniejszy się.

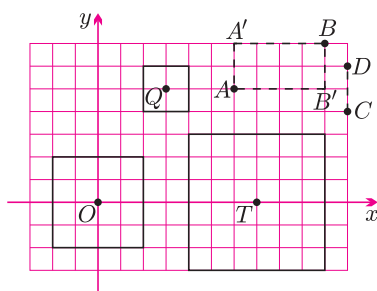
Wszystkie opisane tu sposoby są przyzwite.



$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r$$

Rys. 1

Lewa strona równania opisuje wybraną przez nas dotychczas metodę obliczania odległości między dwoma punktami X i S , prawa natomiast to życzenie, aby ta odległość wynosiła dokładnie r . Punkty spełniające to równanie utworzą kształt, który zwykliśmy nazywać okręgiem. Jak już wspomnieliśmy, definicja okręgu nie mówi, że mamy mierzyć w ten jedynie słuszny sposób. Udajmy się więc do krain, gdzie odległość mierzy się zupełnie inaczej. Jak wobec tego wyglądają tam okręgi?



Rys. 2

Przyjmijmy następujący sposób mierzenia odległości między punktami A i B . Załóżmy, że punkty te stanowią przeciwległe wierzchołki prostokąta o bokach równoległych do jednej bądź drugiej osi układu współrzędnych (rys. 2). Odległość zdefiniujemy jako długość dłuższego boku prostokąta (długość odcinka AB'). Przyjmujemy, że punkty C i D są wierzchołkami prostokąta, którego jeden z boków ma długość 0. Gdy uwzględnimy tę zasadę mierzenia odległości i życzenie, że chodzi nam o punkty $X = (x, y)$ odległe od punktu $S = (p, q)$ o r , równanie okręgu przyjmie następującą postać:

$$\max\{|x-p|, |y-q|\} = r.$$

Punkty, które spełniają to równanie, mają przynajmniej jedną współrzędną odległą od odpowiadającej jej współrzędnej środka okręgu dokładnie o r , odległość pozostałych współrzędnych jest mniejsza lub równa r . Przy mierzeniu odległości w ten sposób okrąg wygląda dokładnie tak jak... kwadrat. Na rysunku 2 przedstawiono okręgi

$$o(O, 2), o(Q, 1), o(T, 3), \text{ gdzie } O = (0, 0), Q = (3, 5), T = (7, 0).$$



Zmieniemy sposób mierzenia odległości. Odległość między dwoma punktami zdefiniujemy jako połowę obwodu prostokąta zbudowanego w opisany wcześniej sposób. Innymi słowy wyobraźmy sobie, że punkt A to dom, w którym mieszkamy, a punkt B to szkoła. Wszystkie ulice w mieście mają tylko dwa kierunki – dwie ulice są do siebie zawsze prostopadłe lub równoległe, a po mieście można poruszać się tylko taksówkami. Aby dojechać z domu do szkoły, należy jechać ulicą AK , a potem KB . Można też jechać innymi ulicami znajdującymi się wewnątrz prostokąta $AKBL$, byle tylko wybierać trasy, których skrócić się nie da. W każdym przypadku pokonana przez nas droga będzie równa sumie długości odcinków AK i KB . Równanie okręgu $o(S, r)$ w tym mieście przyjmuje postać:

$$|x - p| + |y - q| = r.$$

Punkty, które spełniają tę równość, tworzą na płaszczyźnie okrąg, ale zamiast znanego od dzieciństwa kształtu widzimy... obrócone kwadraty. Na rysunku 3 umieszczono okręgi

$$o(O, 2), \quad o(Q, 1), \quad o(T, 3).$$

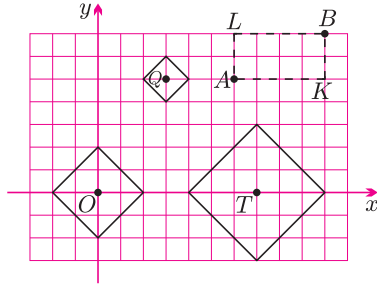
Nietrudno teraz narysować dowolny okrąg w mieście taksówek.

Tym razem skomplikujemy sposób pomiaru odległości, aby pokazać, że okrąg, mimo stosowania tej samej zasady, może mieć różny kształt, w zależności od położenia środka okręgu. Wyobraźmy sobie, że przebywamy na obozie w wiosce nad rzeką płynącą z zachodu na wschód. Rolę rzeki na rysunku będzie pełniła oś Ox . Wioska różni się od innych wiosek tym, że znajduje się w puszczy. Drzewa rosną tam tak gęsto, że w wiosce utworzono tylko ścieżki z północy na południe, tak aby każdy z mieszkańców wioski miał dostęp do rzeki. Jak więc mierzymy odległość między dwoma gospodarstwami? Analogicznie jak w poprzedniej miejscowości zakładamy, że nie jest możliwe poruszanie się na skrót.

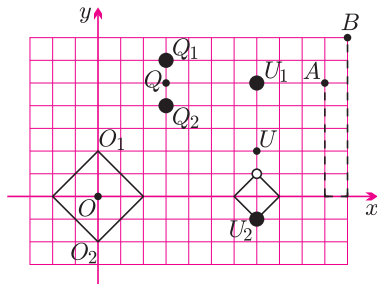
Gdy oba gospodarstwa leżą przy tej samej ścieżce, sprawa jest prosta. Weźmy domy oznaczone na rysunku 4 jako Q_1 i Q_2 . Wówczas odległość między nimi to długość ścieżki, którą musimy przejść, aby dotrzeć z domu Q_1 do Q_2 (2 jednostki). Sprawa się komplikuje, gdy domy nie leżą przy jednej ścieżce. Gdy gospodarz A chce odwiedzić gospodarza B , musi dojść do rzeki po istniejącej ścieżce, następnie przejść się wzdłuż rzeki (drzewa nie rosną wzdłuż brzegów) tak długo, aż dojdzie do ścieżki, przy której stoi dom gospodarza B , aby po niej przejść ostatni odcinek drogi i dotrzeć do domu gospodarza B . Równanie okręgu $o(S, r)$ w tej specyficznej wiosce przyjmuje postać:

$$\begin{cases} |y - q| = r, & \text{gdy } x = p, \\ |x - p| + |y| + |q| = r, & \text{gdy } x \neq p. \end{cases}$$

Okrąg, którego środek leży na osi Ox , ma taki sam kształt, jak okrąg w mieście taksówek, np. $o(O, 2)$. Gdy tak nie jest, a promień r okręgu jest niewystarczający, aby ze środka okręgu dojść do „rzeki”, okrąg składa się z dwóch, symetrycznie położonych względem środka okręgu, punktów, np. $o(Q, 1)$. W każdym innym przypadku okrąg będą stanowiły wspomniane symetrycznie położone punkty oraz „niepełny” okrąg z miasta taksówek o promieniu równym różnicy odległości środka okręgu od „rzeki” i promienia r , np. $o(U, 3)$, gdzie $U = (7, 2)$.



Rys. 3



Rys. 4



Dorota DANIECKA

Gwiazdy to ciała czarne



Zwyczajne rozgrzewanie kawałka metalu w płomieniu dowodzi, że metal chłodny nie świeci, cieplejszy może już parzyć, ale nadal nie świeci, gdy jest jeszcze gorętszy, to świeci czerwono, a w miarę dalszego ogrzewania świeci coraz jaskrawiej i jego światło staje się coraz bielsze. Nic w tym osobliwego. Tylko czy aby nie płynie z tego wniosek, że obiekt gorący jest zarazem świecący i odwrotnie? Otóż jest to prawda tylko w jedną stronę, bo „odwrotnie” być nie musi. Świecąca świetlówka jest całkiem zimna, świecący ekran telewizyjny też, pogodne dzienne niebo świeci całkiem mocno, a przecież jest to zaledwie kilkudziesięciokilometrowa warstwa na ogół chłodnej atmosfery przechodząca w próżnię, i takich przykładów można by przytaczać jeszcze wiele.



Okazuje się więc, że źródła promieniowania dzielą się na dwa typy. O takich, jak gorący kawałek metalu, mówimy, że są to źródła termiczne, te drugie to nietermiczne. Nie jest łatwo na oko odróżnić promieniowanie termiczne od nietermicznego. Pozwala na to zbadanie widma promieniowania, a do tego potrzebny jest przyrząd zwany spektrografem. W najprostszym przypadku można promień badanego światła przepuścić przez szklany pryzmat i obejrzeć powstającą wtedy tęczę (jeśli powstanie), czyli właśnie widmo. Gdy światło jest pochodzenia termicznego (w szczególności np. światło żarówki lub słoneczne), to jego widmem jest pełna tęcza (plus zakresy podczerwony, nadfioletowy i inne, na które oko jest nieczułe). Światło nietermiczne niesie energię tylko w jakichś szczególnych, zazwyczaj dość wąskich zakresach i takie właśnie jest widmo, na przykład, świetlówek, choć nieźle udaje ona światło białe.



Tak więc gwiazdy, choć są to kule gazowe, a nie metalowe, są źródłami termicznymi, ich widmo zaś dostarcza informacji o panujących tam warunkach fizycznych. Na przykład na podstawie dość prostego pomiaru zawartości w świetle gwiazdy promieniowania niebieskiego i czerwonego można określić jej temperaturę. Wiadomo bowiem, że w widmie termicznym wkład poszczególnych „barw” do całkowitej energii promieniowania jest w pewien sposób określony i zależy od temperatury ciała. Ciało, którego widmo promieniowania jest opisane pewną funkcją, zwaną funkcją Plancka, jest nazywane ciałem doskonale czarnym. Nazwa ta oznacza także, że ciało takie pochłania każde padające promieniowanie. W pewnym przybliżeniu Słońce jest ciałem doskonale czarnym o temperaturze 5770 K.



Światło słoneczne najwięcej energii niesie w zakresie żółtym, na które ludzkie oczy są najczulsze. Światło gwiazd chłodniejszych zawiera więcej czerwieni, a gorętszych więcej błękitu i fioletu, ponadto również nadfioletu. Słońce produkuje energię w niewielkim jądrze, gdzie panuje temperatura co najmniej 10 mln K, a najwięcej energii powstaje w postaci promieniowania rentgenowskiego. Reszta materii Słońca jedynie przetwarza fotony o wysokiej energii (rentgenowskie) stopniowo na mniej energetyczne, aż w końcu powierzchnię Słońca opuszczają fotony widzialne. Gdyby Słońce nagle pozbawić warstw zewnętrznych, to z odsłoniętego tak gorącego jego jądra zaczęłoby dobiegać do Ziemi wprawdzie tyle samo energii co teraz, ale głównie w postaci właśnie promieniowania X. Na szczęście to fantazja, choć są planety, których macierzystą gwiazdą jest gwiazda neutronowa, świecąca niemal tak jak jądro naszego Słońca.



T. K.