

SPIS TREŚCI NUMERU 7 (338)

Ciągi Pisota, czyli jak ZOBACZYĆ rekurencję liniową <i>Jarosław Wróblewski</i>	str. 1
O mierzeniu liniijką <i>Marek W. Gutowski</i>	str. 4
Zadania	str. 6
Aktualności	str. 7
Mała Delta	str. 8
Trójkąty o bokach i środkowych całkowitej długości <i>Lev Kourliandtchik, Boris Lurje</i>	str.10
Ciąg geometryczny – metoda rozwiązywania równań rekurencyjnych <i>Janusz Matkowski</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Lipiec	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze: Pluton

Okladki i ilustracje: *Anna Ludwicka*
Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wybór artykułów archiwalnych *Delty*
<http://www.wiw.pl>

Internetowa wersja *Malej Delty*
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Zbigniew Marciniak
Krzysztof Maślanka
Janusz Matkowski
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Michał Różycki
Konrad Rudnicki
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Ewa Czuchry
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Urszula Marciniak
Anna Rudnik
Witold Sadowski
Joanna Udalska
Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61, 55-33-216
BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2002 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Ciągi Pisota, czyli jak ZOBACZYĆ rekurencję liniową

Jarosław WRÓBLEWSKI

Ciągiem Pisota nazywamy ciąg liczb całkowitych dodatnich, w którym pierwsze dwa wyrazy są dowolne, a każdy kolejny wybrany jest tak, aby wraz z dwoma poprzednimi z najlepszym przybliżeniem tworzył ciąg geometryczny. Dokładniej, dla danych a_1 i a_2 ciąg Pisota (oznaczany $E(a_1, a_2)$) zdefiniowany jest wzorem rekurencyjnym

$$a_{n+2} = \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n} + \frac{1}{2} \right].$$

Okazuje się, że ciągi Pisota „lubią” spełniać rekurencję liniowe, np. najprostszy nietrywialny ciąg Pisota $E(2, 3)$ jest ciągiem Fibonacciego z rekurencją drugiego stopnia

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Dowolny ciąg Pisota z $a_1 \leq 3$ spełnia rekurencję liniową stopnia co najwyżej trzeciego: np. ciąg $E(3, 7)$ spełnia rekurencję

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Z kolei o ciągu $E(4, 13)$ udowodniono, że nie spełnia żadnej rekurencji liniowej. Jednakże dla $n = 1, 2, \dots, 18$ zachodzi wzór

$$a_{n+6} = 3a_{n+5} + a_{n+4} - a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} + a_n,$$

tzn. ciąg $E(4, 13)$ spełnia rekurencję liniową szóstego stopnia do wyrazu a_{24} włącznie.

Wiele ciągów Pisota ma także właśnie kapryśną naturę: spełniają rekurencję liniową, ale do czasu. Moim ulubionym przykładem jest ciąg $E(10, 219)$, który spełnia rekurencję stopnia 4, a mianowicie

$$a_{n+4} = 22a_{n+3} - 3a_{n+2} + 18a_{n+1} - 11a_n,$$

jednak tylko dla

$$n + 4 \leq 1402.$$

Wyrazu a_{1403} już się powyższym wzorem otrzymać nie da.

Dlaczego ciągi Pisota lubią spełniać rekurencje liniowe, jak też i uwielbiają się z nimi rozstawać po wspólnym przejściu wielu wyrazów? Pytanie to należy odwrócić. Dlaczego ciągi liniowo rekurencyjne bywają ciągami Pisota, czasami na zawsze, a czasami tylko na kilkaset wyrazów?

Co sprawia, że dany ciąg (a_n) jest ciągiem Pisota? Otóż musi on spełniać warunek

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} - a_n < \frac{1}{2} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Przyjrzyjmy się więc liczbom

$$r_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} - a_n,$$

które dalej będziemy nazywać zaokrągleniami.

Jeśli ciąg (a_n) spełnia rekurencję liniową stopnia k , powiedzmy

$$a_{n+k} = A_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + A_1a_{n+1} + A_0a_n,$$

to możemy związać z nim wielomian charakterystyczny

$$x^k - A_{k-1}x^{k-1} - \dots - A_1x - A_0.$$

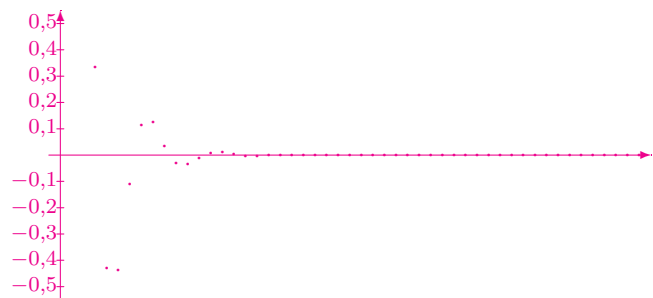
W typowej sytuacji pierwiastki zespolone x_1, x_2, \dots, x_k tego wielomianu są różne i wówczas ciąg (a_n) jest postaci

$$a_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n + \dots + c_kx_k^n,$$

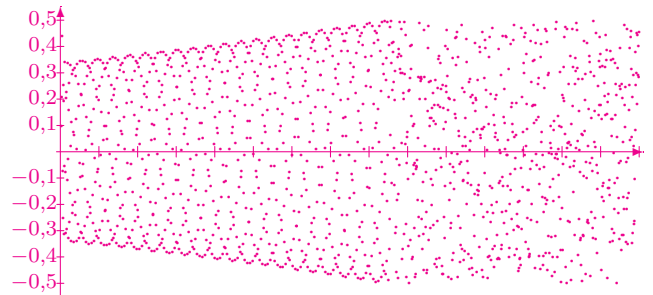
gdzie c_1, c_2, \dots, c_k są liczbami zespolonymi.

Przypuśćmy, że pierwiastki wielomianu charakterystycznego uporządkowane są nierosnąco według wartości bezwzględnej, tzn.

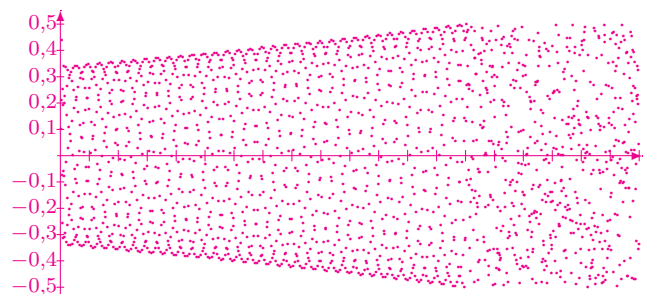
$$|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_k|.$$



Ciąg $E(3, 7)$ spełnia rekurencję trzeciego stopnia, przy czym pierwiastki x_2 i x_3 są małe. Wykres pokazuje to wyraźnie, chociaż zbyt ciekawy nie jest – r_n dąży szybko do zera.



Ciąg $E(10, 119)$ spełnia rekurencję liniową stopnia 4 do 856. wyrazu. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module $\approx 1,0004657$.



Ciąg $E(10, 219)$ spełnia rekurencję liniową stopnia 4 do 1402. wyrazu. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module $\approx 1,0002811$.

W typowej, interesującej nas sytuacji, kiedy ciąg liniowo rekurencyjny jest (trwale lub chwilowo) ciągiem Pisota, tzn. kiedy zachowuje się prawie jak ciąg geometryczny, największy pierwiastek x_1 jest dodatni, istotnie większy od pozostałych pierwiastków i od 1. Natomiast dla dużych n mamy

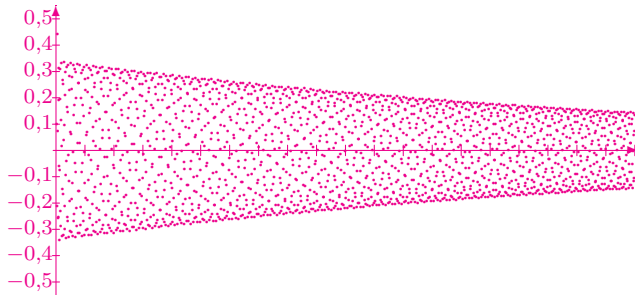
$$r_n \approx d_2 x_2^n + d_3 x_3^n + \dots + d_k x_k^n,$$

czyli zachowanie ciągu zaokrągleń (r_n) zależy od drugiego co do wielkości pierwiastka wielomianu charakterystycznego (liczby d_2, d_3, \dots, d_k są tu pewnymi liczbami zespolonymi).

Jeśli $|x_2| < 1$, to (zaniedbując wpływ pozostałych, mniejszych pierwiastków) należy oczekiwać, że wraz ze wzrostem n liczba r_n będzie coraz bardziej zbliżać się do zera, więc skoro nierówność

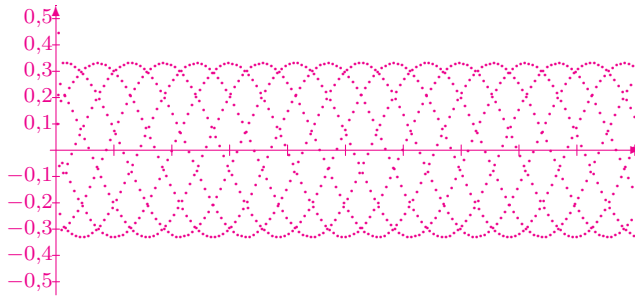
$$-\frac{1}{2} \leq r_n < \frac{1}{2}$$

była spełniona przez czas jakiś, to im dalej, tym łatwiej będzie ona spełniona.



Ciąg $E(10, 181)$ spełnia rekurencję liniową czwartego stopnia. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module $\approx 0,99956939$.

Jeśli $|x_2| = 1$, to wraz ze wzrostem n liczba r_n nie ma tendencji do oddalania się ani zbliżania do zera; jeśli więc przez długi czas mieściła się ona w przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, to jest świetna szansa, że nigdy z niego nie wyjdzie.



Ciąg $E(10, 19)$ spełnia rekurencję liniową czwartego stopnia. Pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module 1.

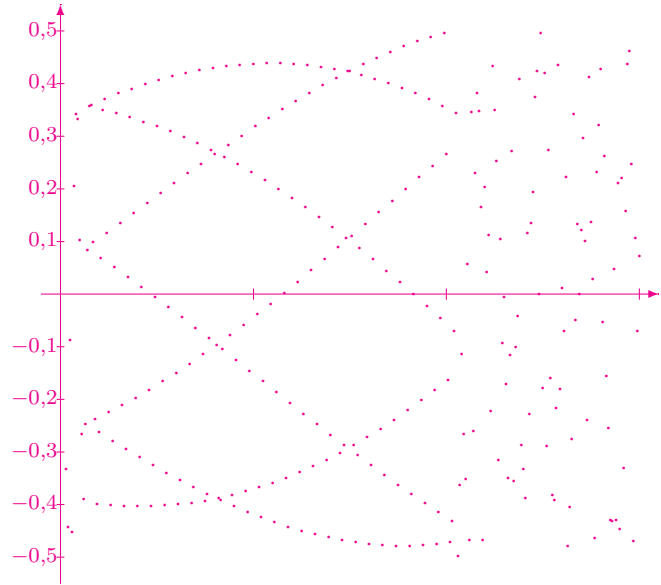
Jeśli zaś $|x_2| > 1$ (nieznacznie), to wyjście r_n poza przedział $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ jest zagwarantowane.

W przypadku wspomnianego już ciągu $E(10, 219)$ pierwiastki x_2 i x_3 są zespolone sprzężone o module $\approx 1,0002811$. Dlatego potrzeba ponad 1000 wyrazów, aby r_n „wyszło” poza przedział $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

W ciekawych przykładach właśnie taka sytuacja jest typowa: jeden duży pierwiastek, para pierwiastków zespolonych sprzężonych o module bliskim 1, pozostałe pierwiastki małe.

Jak zobaczyć rekurencję liniową?

Popatrzmy na wykres ciągu zaokrągleń (r_n) związanych z ciągiem $E(6, 52)$.



Ciąg $E(6, 52)$ spełnia rekurencję czwartego stopnia do 205. wyrazu. Na rysunku widać to jak na dłoni.

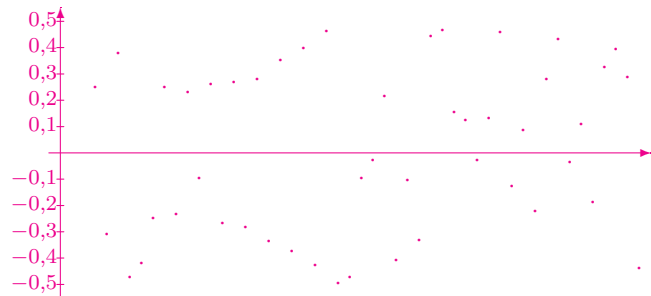
Załamująca się regularność wykresu nie wynika z tego, że komputer nagle przestał sobie radzić z dużymi liczbami i popełnia błędy. Po prostu do 205. wyrazu ciąg $E(6, 52)$ spełnia rekurencję stopnia 5

$$a_{n+5} = 9a_{n+4} - 3a_{n+3} + a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n.$$

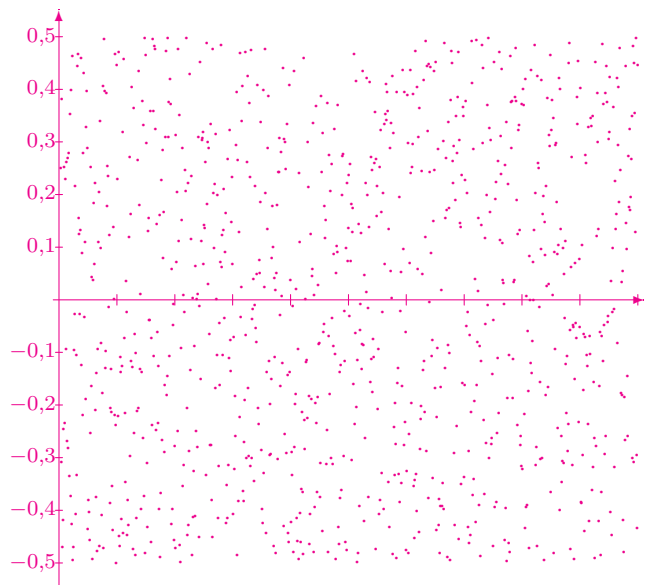
A potem przestaje, o co postarała się para pierwiastków zespolonych sprzężonych równania charakterystycznego rekurencji, o module $\approx 1,00126$.

Patrząc na wykres zaokrągleń ciągu $E(4, 13)$, łatwo teraz uwierzyć, że nie spełnia on żadnej rekurencji liniowej.

Skoro udało mi się zbudować przekonanie, że patrząc na rysunek, można zobaczyć, czy ciąg Pisota spełnia rekurencję liniową, czy też nie, postaram się teraz to przekonanie trochę zburzyć.



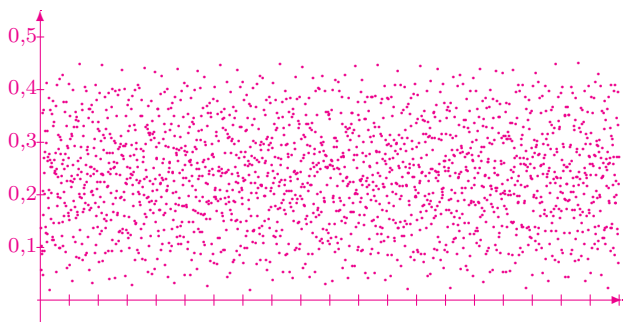
Dla ciągu $E(4, 13)$ mamy rekurencję szóstego stopnia, która urywa się po 24. wyrazie (na wykresie r_n dla $n \leq 50$)...



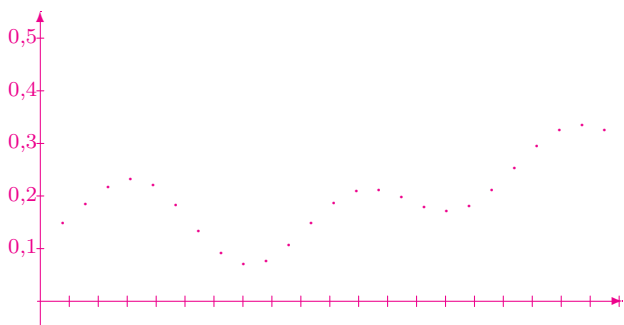
... a potem już tylko losowa sieczka.

Rekurencja, której nie widać

Popatrzmy na wykres zaokrągleń dla ciągu $E(313580, 401583)$. Widzimy losowy układ punktów, pewnie ten ciąg nie spełnia rekurencji liniowej, gdyż takowa wymusiłaby przecież pewną regularność rysunku. To teraz posieję niepokój: jak to się dzieje, że losowo wybrane liczby z przedziału $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ są wszystkie dodatnie? A jeśli wybierzemy punkty odpowiadające indeksom $n \equiv 0 \pmod{78}$, to czy dalej wierzymy w losowość wykresu?



Zaokrąglenia ciągu $E(313580, 401583)$ sprawiają wrażenie losowości. ...



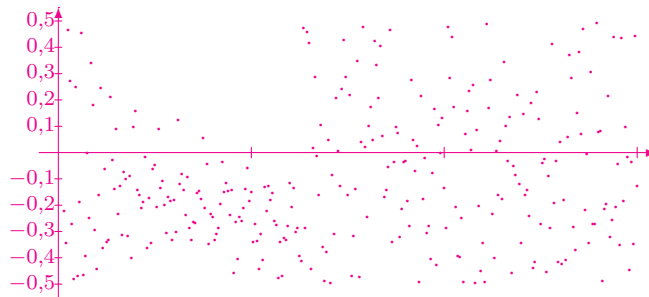
... ,chyba że wybierzemy co 78. punkt wykresu.

Okazuje się, że ciąg ten spełnia rekurencję stopnia 9:

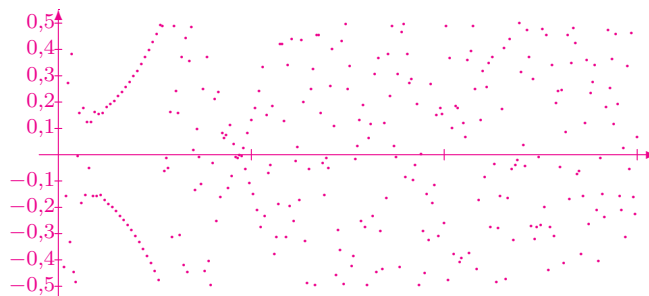
$$a_{n+9} = a_{n+8} + a_{n+6} - a_{n+3} - a_{n+1} + a_n,$$

której wielomian charakterystyczny ma największy

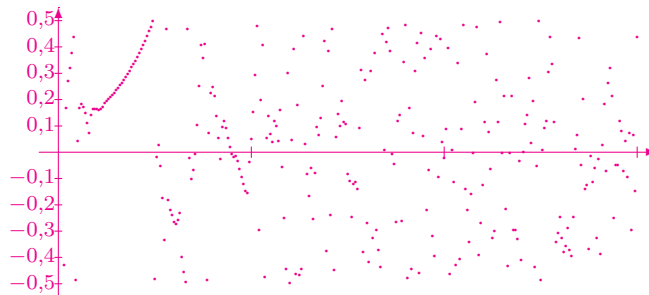
pierwiastek $\approx 1,28$ oraz siedem pierwiastków o module 1: jedynkę i trzy pary pierwiastków zespolonych sprzężonych. Jedynka odpowiada za podniesienie wykresu do góry, a pary pierwiastków sprzężonych są odpowiedzialne za sinusoidalne wahania r_n , jednak nałożenie trzech takich wahań o różnych częstościach daje złudzenie całkowitej losowości.



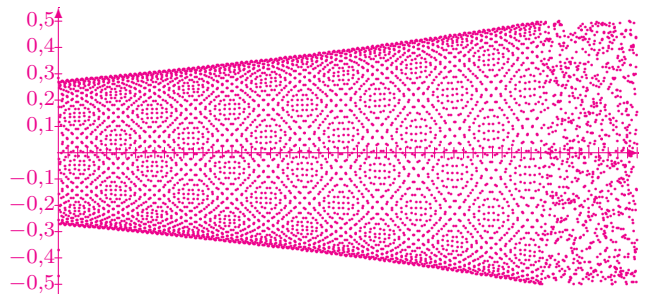
Rekurencja 14. stopnia spełniona do wyrazu 126. Z uwagi na wysoki stopień rekurencji punkty wykresu nie tworzą linii, ale brak losowości widoczny jest jako obszar, w którym nie ma żadnych punktów wykresu. Aż sześć pierwiastków wielomianu charakterystycznego jest bezwzględnie większych od 1, przy czym $x_2 = 1,0096218$.



Rekurencja ósmego stopnia psuje się dla wyrazu 54.



Rekurencja ósmego stopnia psuje się dla wyrazu 50.



Ciąg $E(14, 128)$ spełnia rekurencję piątego stopnia

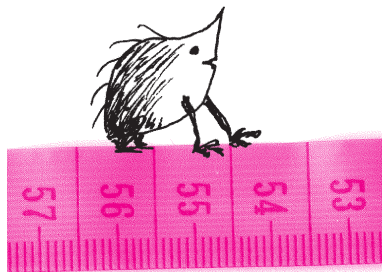
$$a_{n+5} = 10a_{n+4} - 8a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n$$

do wyrazu a_{5015} włącznie (na wykresie zaokrąglenia do r_{6000}). Wielomian charakterystyczny ma parę pierwiastków zespolonych sprzężonych o module $\approx 1,0001216657$.

Pomiar – co to takiego?

Pomiar to porównanie wielkości mierzonej ze wzorcem. Tyle zazwyczaj dowiadujemy się w szkole. Żeby niepotrzebnie nie komplikować, zajmijmy się tzw. pomiarami bezpośrednimi, a konkretnie mierzeniem długości.

Mając do dyspozycji odcinek o długości jednostkowej, możemy za jego pomocą wyznaczać długości innych odcinków, to znaczy wyrażać ich długość jako pewną liczbę. Rasowy fizyk wtrąci w tym miejscu, że wynik naszego pomiaru jest liczbą mianowaną. Oznacza to, że wynik składa się z dwóch części: liczby i nazwy jednostki (ewentualnie jej wielokrotności), np. $6 \text{ m} = 600 \text{ cm} = 0,006 \text{ km}$.



Już starożytni Grecy... mieli kłopot

Skonstruować odcinek o z góry zadanej długości jest stosunkowo łatwo, zwłaszcza jeśli ta długość ma się wyrażać liczbą całkowitą. Poradzimy sobie także z konstrukcją odcinków o długości wyrażonej ułamkiem o postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Wynika stąd, że umiemy skonstruować sobie linijkę do pomiarów długości. Jednak mierzenie nie jest zadaniem konstrukcyjnym z geometrii. Już starożytni Grecy, a konkretnie matematycy ze szkoły Pitagorasa odkryli, że istnieją odcinki niewspółmierne z odcinkiem jednostkowym (np. przekątna kwadratu jednostkowego), których – nawet w teorii – nie da się dokładnie zmierzyć.

Jak matematyk wyobraża sobie proces pomiaru długości? Trzeba najpierw ustawić odcinek jednostkowy tak, by jeden z jego końców pokrył się z końcem odcinka mierzonego. Przypuśćmy, że odcinek mierzony jest dłuższy (przypadek przeciwny nie wymaga oddzielnego omawiania). Wobec tego odkładamy na odcinku mierzonym ponownie odcinek jednostkowy, tak aby miał dokładnie jeden punkt wspólny ze swoim „poprzednim wcieleniem”. Postępujemy tak dotąd, aż kolejna próba okaże się nieudana w tym sensie, że kolejna kopia odcinka jednostkowego nie będzie w całości zawierać się w odcinku mierzonym, a mówiąc zwyczajnie – będzie wystawać. Jeśli k kopii odcinka jednostkowego mieści się w odcinku mierzonym, a $k + 1$ nie, to powiemy, że odcinek mierzony ma długość będącą liczbą z przedziału $[k, k + 1)$. (Pomińmy przypadek, kiedy odcinek mierzony ma długość wyrażoną całkowitą wielokrotnością długości odcinka jednostkowego.) Jeśli tak osiągnięty wynik nas nie zadowala, bo jest niedokładny (albo tylko za mało dokładny), to możemy pozostający odcinek wymierzyć za pomocą odcinka, np. o długości $\frac{1}{10}$ jednostki, gdyż umiemy go przecież skonstruować (użyjemy np. twierdzenia Talesa). Uzyskamy tym sposobem lepsze oszacowanie wyniku albo i końcowy wynik. Biorąc, w razie potrzeby, jako „miarękę” odcinki o długości kolejno $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$ jednostki będziemy otrzymywać przedziały o coraz mniejszej szerokości, z których każdy zawiera liczbę będącą długością odcinka mierzonego. Dla matematyka sprawa jest jasna: albo proces ten się zakończy (wtedy szukana długość da się zapisać jako ułamek dziesiętny o skończonej długości), albo nie. Jeśli się nie zakończy, to jako wynik matematyk przyjmie wspólną granicę dwóch ciągów tworzonych podczas procedury pomiaru.

A jak widzi ten proces fizyk? Z jednej strony jest miło, że każdy kolejny etap pomiaru dostarcza pewnej, czy jak kto woli gwarantowanej, kolejnej cyfry dziesiętnej wyniku. Ale:

- fizyk nie dysponuje nieskończonym czasem na wykonanie pomiaru, a ponadto
- nie może sobie dowolnie zmniejszać (np. dzieląc za każdym razem na dziesięć równych części) swojego przyrządu pomiarowego.

Fizyk chciałby jeszcze, aby cała procedura mogła być zautomatyzowana, to znaczy, aby mogła być wykonywana przez odpowiednio skonstruowany przyrząd pomiarowy, bez świadomego udziału eksperymentatora. Chodzi o to, aby



Rozwiązanie zadania M 994.

Określamy ciągi $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$ za pomocą równości

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n.$$

Porównując rozwinięcie $(1 + \sqrt{2})^n$ oraz $(1 - \sqrt{2})^n$ łatwo spostrzec, że

$$x_n - y_n\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n,$$

skąd

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{2})(x_n - y_n\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^n(1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n.$$

Wystarczy teraz wziąć $m = x_n^2$ dla n parzystego i $m = x_n^2 + 1$ dla n nieparzystego. Dla przykładu, gdy n jest parzyste, to

$$\begin{aligned} \sqrt{m} + \sqrt{m-1} &= x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} = \\ &= x_n + \sqrt{2y_n^2} = (1 + \sqrt{2})^n. \end{aligned}$$



Rozwiązanie zadania M 995.

Niech

$$b = 7 + 5\sqrt{2}, \quad c = 7 - 5\sqrt{2}, \quad a = \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Mamy

$$a^3 = b + c + 3\sqrt[3]{bc}(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) = 14 - 3a.$$

Wystarczy zauważyć, że jedynym pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu

$$x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(x^2 + 2x + 7)$$

jest 2. Zatem $a = 2$.

otrzymany wynik był obiektywny, czyli rzetelny, bez żadnego „naciągania”, do którego mogłaby mieć skłonność osoba wykonująca pomiar. Krótko mówiąc: rezultat pomiaru długości ustalonego odcinka powinien być zawsze taki sam, niezależnie od tego, kto wykonał pomiar.

Błąd czy niepewność?

Przypuśćmy, że wykonaliśmy pomiar długości odcinka, tak jak mógł to zrobić fizyk, tj. przerywając procedurę po skończonej liczbie kroków. Jako wynik otrzymaliśmy przedział $[l_1, l_2]$, gdzie oczywiście $l_1 \neq l_2$. Co to oznacza? Wciąż nie wiemy, ile rzeczywiście wynosi długość badanego odcinka L , ale wiemy, że z całą pewnością mieści się ona w podanym przedziale.

Jak można zapisać otrzymany rezultat? Matematyk zrobi to pewnie tak:

$$L \in [l_1, l_2] \quad \text{albo} \quad l_1 \leq L \leq l_2,$$

natomiast fizyk albo inżynier woli zapis typu

$$L = \hat{L} \pm \Delta l,$$

gdzie $\hat{L} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ oraz $\Delta l = \frac{1}{2}|l_2 - l_1|$. Nietrudno się przekonać, że zachodzi związek

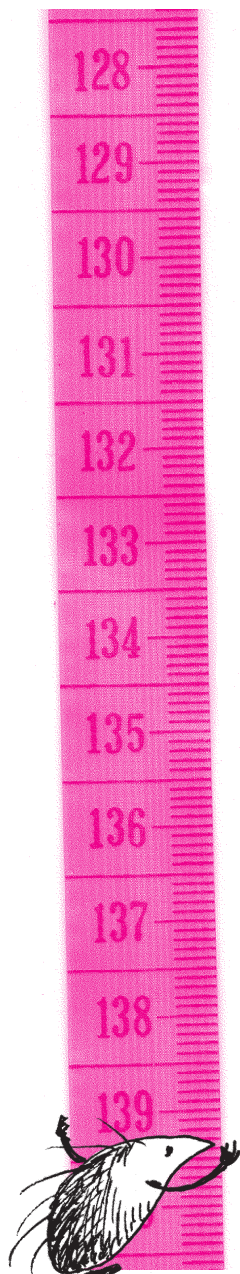
$$|L - \hat{L}| \leq \Delta l.$$

Szczerze mówiąc, umyślnie zdefiniowaliśmy wielkości \hat{L} oraz Δl w taki sposób, aby ten związek zachodził. Wielkość $\hat{L} - L$, będącą różnicą między wartością zmierzoną (\hat{L}) a nieznaną, prawdziwą długością odcinka (L), przyjęło się nazywać w literaturze matematycznej błędem. Widzimy, że możemy mieć do czynienia z błędami dodatnimi lub ujemnymi, zależnie od tego, czy wynik pomiaru, \hat{L} , będzie z nadmiarem czy niedomiarem, innymi słowy większy czy mniejszy od wartości prawdziwej L . Nie ma przy tym raz na zawsze ustalonej konwencji, czy błędem nazywamy wielkość $\hat{L} - L$ czy też $L - \hat{L}$; w jednych tekstach spotyka się jeden zapis, w innych – drugi.

Do niedawna fizyk także nazywał tę wielkość błędem, wielkość $|\hat{L} - L|$ zaś błędem bezwzględnym. Jest jednak istotna różnica między tym, jak ten problem widzi fizyk i matematyk. Matematyk – w zasadzie – mógłby obliczyć, ile właściwie wynosi błąd, a więc i błąd bezwzględny. Mógłby, choć zwykle tego nie robi, zadowolając się oszacowaniem błędu lub jego wartości bezwzględnej. Fizyk nie ma wyboru: nie ma żadnych innych informacji na temat wielkości mierzonej, oprócz tych, które uzyskał poprzez wykonanie pomiaru. Może on więc jedynie szacować błąd. Samo słowo błąd wywołuje niewłaściwe skojarzenia i wobec tego, zamiast niego powinniśmy używać określenia **niepewność pomiarowa**, zaleconego w roku 1995 przez 7 międzynarodowych organizacji, w tym, m.in. ISO (*International Organization for Standardization*) oraz IUPAP (*International Union of Pure and Applied Physics*). Więcej na ten temat można przeczytać w pracy przytoczonej na końcu.

Pomiar długości fragmentu dowolnej krzywej, która nie jest odcinkiem, jest znacznie trudniejszym zagadnieniem. Wcale nie jest oczywiste, czy stosując przytoczoną metodę, otrzymamy w każdym kroku przedział liczbowy, który na pewno zawiera liczbę poszukiwaną. Jak bowiem znaleźć łamaną, która aproksymuje krzywą i która z pewnością jest już „za długa”? Problem jest niebłahy i z pewnością wykracza poza zakres abecadła fizyki, tym bardziej że matematycy wymyślili krzywe (fraktalne), których długość pomiędzy dwoma punktami jest nieskończona, choć „na oko” zupełnie tego nie widać. Fizycy nie powinni tak po prostu ignorować tego faktu, choćby dlatego, że od dawna znają zjawisko zwane ruchami Browna. Trajektoria cząstki wykonującej ruch Browna jest właśnie fizyczną realizacją (modelem) takiej zwiariowanej krzywej – wszędzie ciągłej, lecz nigdzie nieróżniczkowalnej.

Widzimy, że w sytuacji idealnej, to znaczy przy nieobecności jakichkolwiek zakłóceń, prosty pomiar sprowadza się do zliczania działek elementarnych przyrządu pomiarowego. W tym artykule była to linijka, ale równie dobrze mógłby to być kątomierz, amperomierz, szybkościomierz, manometr, termometr, dynamometr, waga dwuszalkowa z kompletem odważników, itp. Jako regułę warto zapamiętać, że w tych prostych przypadkach **niepewność pomiaru jest równa połowie działki elementarnej przyrządu pomiarowego.**

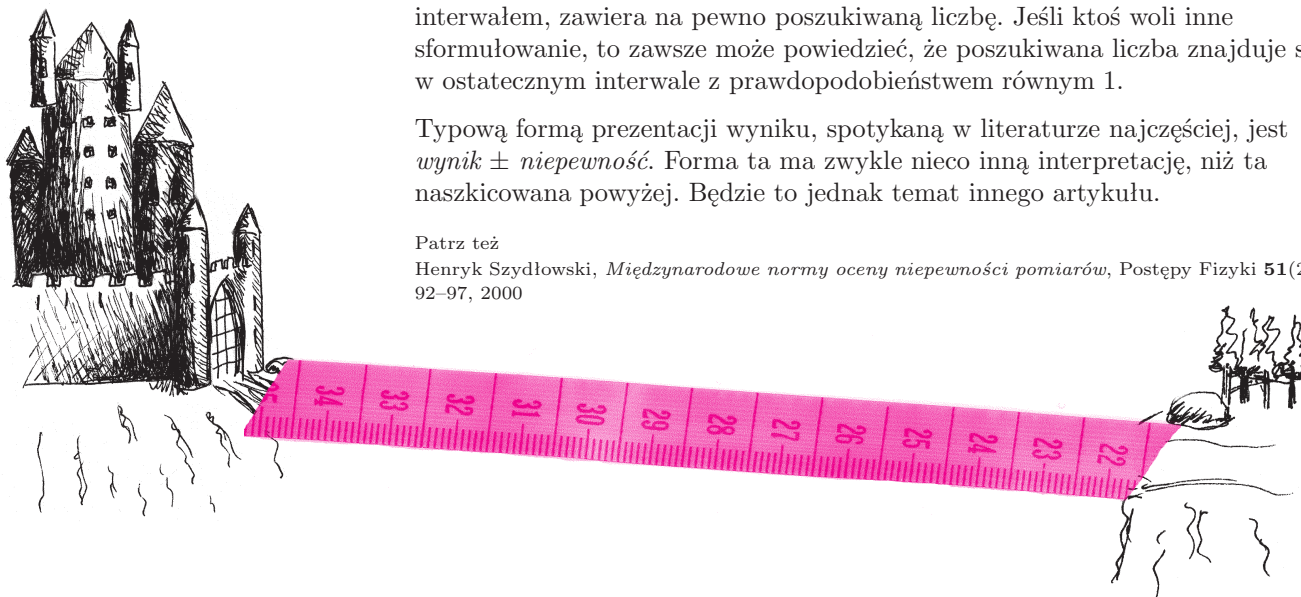


Wielkość $\frac{\Delta l}{L} \times 100\%$, którą nazwalibyśmy *względną niepewnością pomiaru*, (dawniej: *błędem względnym*) jest niedostępna, gdyż nie znamy prawdziwej wartości L i możemy sensownie posługiwać się wyłącznie wielkością zmierzoną \hat{L} . Jest jasne, że są to dwie różne liczby, bo $L \neq \hat{L}$. Z tego powodu *niepewność względna* ma sens jedynie jako orientacyjna ocena jakości pomiaru i nie powinna być używana jako miara ilościowa niepewności pomiarowej.

Dobrym sposobem zapisu wyniku pomiaru jest podanie przedziału (interwału), w którym prawdziwa wartość mieści się z całą pewnością, co wymaga podania dwóch liczb. Autor jest gorącym zwolennikiem takiej formy raportowania wyników pomiarów, ponieważ znane są (por. *Delta* 9/1993, str. 1) i dobrze określone reguły operowania wynikami pomiarów podawanymi w tej właśnie postaci. Drugim argumentem, poza poprawnością matematyczną, jest to, że ostateczny rezultat operowania takimi wielkościami, który jest oczywiście interwałem, zawiera na pewno poszukiwaną liczbę. Jeśli ktoś woli inne sformułowanie, to zawsze może powiedzieć, że poszukiwana liczba znajduje się w ostatecznym interwale z prawdopodobieństwem równym 1.

Typową formą prezentacji wyniku, spotykaną w literaturze najczęściej, jest *wynik ± niepewność*. Forma ta ma zwykle nieco inną interpretację, niż ta naszkicowana powyżej. Będzie to jednak temat innego artykułu.

Patrz też
Henryk Szydłowski, *Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarów*, *Postępy Fizyki* 51(2), 92–97, 2000



Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delt!

Rozwiąż sierpniowe (tak, sierpniowe) zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji:

<http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



Zadania

Redaguje *Mikołaj ROTKIEWICZ*

M 994. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $m \in \mathbb{N}$, że

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}.$$

Rozwiązanie na str. 4

M 995. Czy $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną?

Rozwiązanie na str. 4

M 996. Rozważmy ciąg

$$x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

gdzie q_n, r_n, s_n, t_n są liczbami całkowitymi. Znaleźć granice

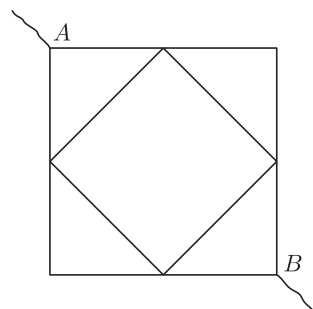
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}.$$

Rozwiązanie na str. 11

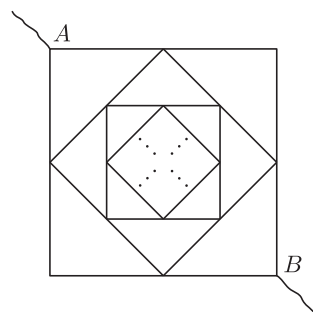
Redaguje *Ewa CZUCHRY*

F 575. Znaleźć opór między punktami A i B figury na rysunku 1, wykonanej z bardzo cienkiego drutu o oporności właściwej ρ , rozmiar boku figury wynosi a .
Rozwiązanie na str. 12

F 576. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, znaleźć opór między punktami A i B figury z rysunku 2. Liczba kwadratów w środku bardzo duża.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1



Rys. 2

Koniec zagadki neutrino słonecznych

Smażąc się na słońcu nie zdajemy sobie sprawy, że światło do nas docierające wzięło swój początek w reakcji termojądrowej, która zaszła we wnętrzu Słońca jakieś... milion lat temu. Tak długo trwa proces przekazywania energii z wnętrza naszej gwiazdy. Dociera do nas jednak strumień informacji o aktualnym stanie słonecznego pieca. Choć jest on bardzo intensywny, to niezwykle trudny do wykrycia. Stanowią go tworzone w trakcie reakcji termojądrowych neutrino elektronowe. Od prawie 40 lat strumień ten jest mierzony za pomocą niezwykle pomysłowych i wyrafinowanych sposobów. Pierwszy z nich wymagał odnalezienia pojedynczych atomów, których jądra uległy reakcji z neutrinami, w zbiorniku o objętości wielu metrów sześciennych.

Od początku pomiary te wykazywały deficyt neutrino. Biorąc pod uwagę komplikację eksperymentów z jednej, a konieczność posłużenia się modelem tak samego Słońca, jak i skomplikowanego łańcucha reakcji w nim zachodzących z drugiej strony, o deficyt obwiniano albo pomiar, albo model. Istniała jednak inna możliwość – wyjaśnieniem mogło być zachowanie samych neutrino. Gdyby miały one choćby niewielką masę, to mogłyby oscylować, tzn. zmieniać tzw. zapach, czyli rodzaj. Zjawisko to jest dozwolone na mocy „prawa amerykańskiego”: oscylacje dla masywnych neutrino są dozwolone, bo nie są zabronione. Przemieniając się z neutrino elektronowych w neutrino mionowe lub taonowe, stawałyby się niewykrywalne, gdyż warunkiem ich wykrycia w dotychczasowych eksperymentach było wytworzenie odpowiedniego leptonu w wyniku oddziaływania z materią detektora. Nie jest to jednak możliwe, gdyż neutrino słoneczne mają za małą energię, by w zderzeniu z materią wytworzyć cząstkę tak masywną jak dwustukrotnie cięższy od elektronu mion, nie mówiąc już o jeszcze siedemnastokrotnie bardziej masywnym taonie.

Przyszedł wreszcie moment, w którym utrzymujące się stwierdzenie deficytu przestało fizykom wystarczać. Kolejna generacja genialnych eksperymentów jest już wrażliwa na dotąd niewykrywalne, pochodzące ze Słońca neutrino mionowe i taonowe. Jest to możliwe dzięki wykorzystaniu dwóch dodatkowych reakcji. Oprócz opisanego wyżej oddziaływania przez prąd naładowany (*charge current* CC), tzn. oddziaływania z materią za pomocą naładowanego bozonu pośredniczącego W^+ lub W^- , w wyniku którego neutrino staje się naładowanym leptonem, możliwe jest oddziaływanie przez prąd neutralny (*neutral current* NC), czyli za pomocą neutralnego bozonu pośredniczącego Z^0 . W wyniku tego oddziaływania neutrino pozostaje niewykrywalnym neutrinem, ale do rejestracji pozostaje to, z czym neutrino oddziało. Tylko że rejestracja ta jest bardzo trudna. Do niedawna udawało się jedynie rejestrować tzw. elastyczne rozpraszanie neutrino na elektronach (*elastic scattering* ES), które jest tylko w części tak efektywne dla neutrino mionowych i taonowych, jak dla elektronowych. W połowie kwietnia jednak pojawiło się długo oczekiwane doniesienie z SNO [1] dotyczące w pełni egalitarnej reakcji typu NC neutrino z jądrami.

SNO (Sudbury Neutrino Observatory) znajduje się dwa kilometry pod ziemią w kopalni INCO, Ltd. Creighton niedaleko Sudbury w Ontario. Detektor wykorzystuje okrągły zbiornik o średnicy 12 metrów napełniony ultraczystą ciężką wodą D_2O . Zbiornik ten jest obłożony 9456 fotopowielaczami zamontowanymi na stalowym rusztowaniu o średnicy 17,8 metra, a całość jest zanurzona w ultraczystej zwykłej wodzie H_2O . Fotopowielacze rejestrują promieniowanie Czerenkowa generowane przez poruszające się z prędkością większą od prędkości światła w wodzie cząstki naładowane. Wykorzystanie wypożyczonego przez Kanadę deuteru pozwala na rejestrację reakcji $\nu_x + d \rightarrow p + n + \nu_x$, inicjowanej przez neutrino słoneczne pochodzące z przejścia ${}^8B \rightarrow {}^8Be + e^+ + \nu_e$. Uwolniony w wyniku oddziaływania neutrino z deuterem neutron może być następnie wylapany przez inne jądro deuteru, powodując emisję kwantu gamma o energii 6,25 GeV, inicjującą z kolei kaskadę elektromagnetyczną, której rozwój wywołuje promieniowanie Czerenkowa wykrywalne przez fotopowielacze.

Podkreślana przez zespół eksperymentu SNO czystość użytych materiałów ma olbrzymie znaczenie, gdyż pozwala na redukcję tła pochodzącego od śladowych ilości pierwiastków promieniotwórczych. Natomiast przed tłem związanym z promieniowaniem kosmicznym eksperyment chroniony jest przez umieszczenie głęboko pod ziemią.

SNO mierzy oczywiście i dwie pozostałe reakcje CC i ES. Pozwala to na jednoczesne wyznaczenie strumienia neutrino słonecznych docierających w postaci neutrino elektronowych ϕ_e oraz strumienia docierającego w postaci neutrino nieelektronowych, ale oddziałujących za pomocą prądu neutralnego z materią $\phi_{\mu\tau}$. Okazuje się, że strumień $\phi_{\mu\tau}$ jest dwa razy większy niż ϕ_e .

Oznacza to, że tylko jedna trzecia neutrino słonecznych dociera do Ziemi w oryginalnej postaci neutrino elektronowych. Całkowity strumień neutrino słonecznych zgadza się bardzo dobrze z przewidywaniami standardowego modelu Słońca. Wygląda na to, że rozumiemy, jak działa Słońce, a neutrino mają masę i podlegają oscylacjom. Tak więc najbardziej ekscytujące rozwiązanie problemu neutrino słonecznych okazało się prawdziwe.

Tego samego dnia zespół eksperymentu SNO opublikował doniesienie [2] dotyczące asymetrii dzień-noc strumienia neutrino elektronowych. Wynik jest pozytywny, choć jeszcze umiarkowanie istotny statystycznie. Preferuje on modele, w których oscylacje neutrino są wzmacniane przez oddziaływanie z materią.

Piotr ZALEWSKI

[1] SNO Collaboration, *Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, 19 kwietnia 2002

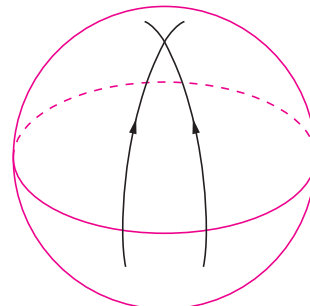
[2] SNO Collaboration, *Measurement of Day Night Neutrino Energy Spectra at SNO and Constraints on Neutrino Mixing Parameters*, 19 kwietnia 2002

8

mała delta

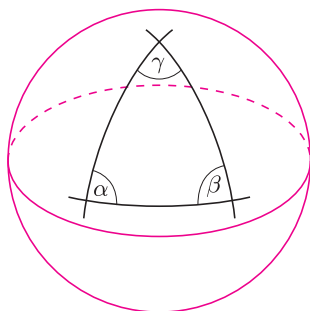
Zakrzywiona czasoprzestrzeń

Czym jest przestrzeń zakrzywiona? Możemy ją zdefiniować jako przestrzeń, której geometria różni się od geometrii euklidesowej, czyli tej, z którą spotykamy się na co dzień. Przyjrzyjmy się dwóm przykładom dwuwymiarowych przestrzeni zakrzywionych. Jednym z nich niech będzie sfera (rys. 1).



Rys. 1

Narysujmy na tej powierzchni linie geodezyjne, czyli krzywe będące (lokalnie) najkrótszymi drogami. Cienka gumka naciągnięta na takiej powierzchni układa się właśnie wzdłuż linii geodezyjnej. W płaskiej przestrzeni linie geodezyjne są liniami prostymi, w geometrii na powierzchni sfery geodezyjne są fragmentami kół wielkich. W geometrii euklidesowej geodezyjne przecinają się co najwyżej raz i mogą być nieskończone, na sferze są one zamknięte i przecinają się dwa razy; dwie linie geodezyjne początkowo równoległe, zbliżają się do siebie, mogą się nawet



Rys. 2

w końcu przeciąć. W przestrzeni euklidesowej – zgodnej z naszą intuicją przestrzenną – dwie proste równoległe nigdy się nie przecinają.

Możemy też na takiej powierzchni zbudować trójkąt, którego suma kątów jest większa od stu osiemdziesięciu stopni, czyli od π (rys. 2), a jego pole powierzchni jest (dla sfery jednostkowej) dane ładnym wzorem

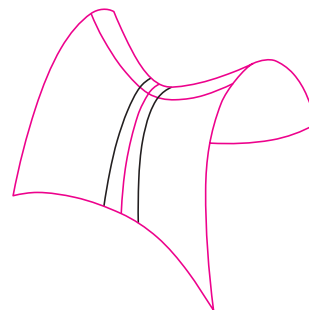
$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

gdzie α, β, γ to kąty w wierzchołkach trójkąta. W przypadku euklidesowym wzór ten nie ma sensu, bo

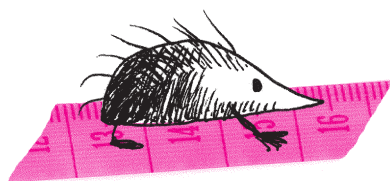
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ,$$

i dla określenia pola powierzchni trójkąta musimy jeszcze znać długość jednego z boków.

Weźmy z kolei inny przykład zakrzywionej powierzchni: powierzchnię siodła (rys. 3).



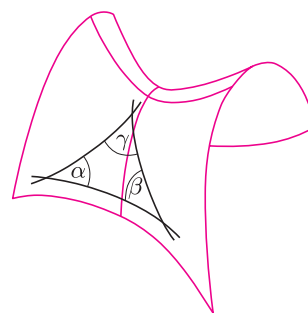
Rys. 3



Pole powierzchni trójkąta krzywoliniowego na dowolnej powierzchni o stałej krzywiznie wyraża się wzorem $kS = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, gdzie k jest krzywizną tej powierzchni. Na ogół k zmienia się od punktu do punktu, wzór ten więc dotyczy bardzo małych trójkątów – takich, że na ich obszarze k jest stała. Dla sfery o promieniu R krzywizna jest stała i równa $k = 1/R^2$.

Wielkość kS jest miarą „zniesztalcenia” powierzchni. W przypadku euklidesowym oczywiście jest $kS = 0$.

Widzimy, że teraz dwie linie geodezyjne początkowo równoległe, zaczynają się od siebie oddalać, a suma kątów w trójkącie może być mniejsza od stu osiemdziesięciu stopni (rys. 4).



Rys. 4

Pole powierzchni trójkąta wynosi tutaj (dla siodła o stałej krzywiznie -1)

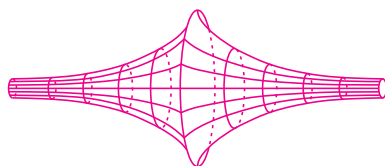
$$S = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

A jaki ma to wszystko związek z czasoprzestrzenią – będącą zbiorem zdarzeń, czyli punktów charakteryzowanych przez ich miejsce w przestrzeni (trzy współrzędne przestrzenne) i chwilę, w której zaistniały – punktów typu „teraz-tutaj”? Zakrzywienie czasoprzestrzeni jest związane bezpośrednio z występowaniem pola grawitacyjnego, generowanego przez jakieś źródła. Można na to patrzeć w ten sposób, że materia powoduje zakrzywienie czasoprzestrzeni, co z kolei zmienia tor ruchu ciał; tę zmianę możemy interpretować działaniem jakiejś siły, a właściwie pola. Pole, którego działanie przejawia się zakrzywieniem czasoprzestrzeni, nazywamy polem grawitacyjnym, działa ono na wszystkie obiekty we Wszechświecie obdarzone energią lub równoważnie masą.

Jak sobie wyobrazić zakrzywienie czasoprzestrzeni? O sferze, na której początkowo równoległe linie geodezyjne zблиżają się do siebie, mówimy, że ma „krzywiznę dodatnią”, a o powierzchni siodła – gdzie początkowo równoległe linie geodezyjne oddalają się od siebie – że ma „krzywiznę ujemną”. W czasoprzestrzeni linie świata (historie) cząstek spadających swobodnie są właśnie liniami geodezyjnymi, jeśli więc dwie początkowo równoległe linie świata cząstek swobodnych zблиżają się do siebie, mówimy, że czasoprzestrzeń ma krzywiznę dodatnią, a gdy oddalają się od siebie – że ma krzywiznę ujemną. Gdy pozostają w takiej samej odległości mówimy, że czasoprzestrzeń jest płaska.

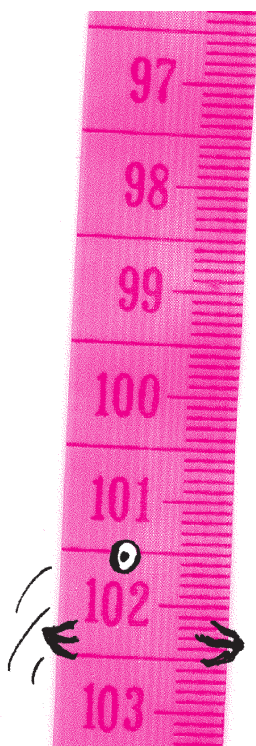
Geometria czasoprzestrzeni Wszechświata opisana jest trzema głównymi modelami; różnią się one znakami krzywizny: $k = -1$ (trójwymiarowe przestrzenne powierzchnie stałego czasu miałyby wtedy ujemną krzywiznę przestrzenną, jak w przypadku powierzchni siodłowej), $k = +1$ (trójwymiarowe powierzchnie stałego czasu byłyby wtedy trójwymiarowymi sferami), lub $k = 0$ (model płaski, przestrzenne powierzchnie stałego czasu miałyby geometrię euklidesową). Wartość k zależy od ilości materii we Wszechświecie. Jeśliby było jej bardzo mało, krzywizna byłaby równa -1 , a obserwowana ekspansja Wszechświata trwałaby nieskończenie długo. Jeśli jest jej trochę więcej, k równałoby się zero, a jeśli jeszcze więcej, wtedy $k = +1$, i powinien nastąpić taki moment, w którym ekspansja przeszłaby w proces odwrotny – zapadanie się. Paradoksalne jest to, że Wszechświat wypełniony małą ilością materii miałby geometrię różną od naszej intuicyjnej: długość okręgu jednostkowego byłaby większa od 2π , suma kątów w trójkącie mniejsza od π itd. Geometria euklidesowa pojawiłaby się dopiero wtedy, gdy materii byłoby odpowiednio dużo.

Innym przypadkiem powierzchni o ujemnej krzywiznie jest pseudosfera, powstała przez obrót traktrisy wokół jej asymptoty.



Jej krzywizna jest stała i równa $k = -1/R^2$.

Traktrisa to krzywa, której odcinek stycznej od punktu styczności do OX ma stałą długość. Ta długość to właśnie R .



Małą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY

Trójkąty o bokach i środkowych całkowitej długości

Lev KOURLIANDTCHIK, Boris LURJE

Lev Kourliandtchik pracuje na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, a Boris Lurje – w Instytucie Matematyki w Sankt-Petersburgu.

Np. trójkąt o dwóch bokach 24375 i trzecim 13650 ma także wysokości i dwusieczne całkowitej długości. Można to samemu sprawdzić lub zajrzeć do wspomnianego w tekście artykułu.

Istnieją trójkąty, które mają zarówno boki, jak wysokości i dwusieczne kątów całkowitej długości (pisaliśmy o tym w *Delcie* 6/2002: *O pewnym problemie Eulera*). Okazuje się jednak, że zbudowanie trójkąta, w którym również środkowe miałyby całkowitą długość, nikomu się – jak dotąd – nie udało.

Trójkąty o całkowitych długościach boków i środkowych istnieją. Cały szereg przykładów podał Jarosław Wróblewski. Oto trzy z nich:

boki	136	170	174	i środkowe	127	131	158,
	254	262	316		204	255	261,
	226	486	580		244	367	523.

Ale już wymagania, aby długości boków, środkowych i wysokości były całkowite, nie udało się dotąd zrealizować. Nie wiadomo też, czy w ogóle zadanie takie jest wykonalne.

Tutaj pokażemy, jak można, posługując się pewnymi krzywymi, wykazać, że nie ma takich trójkątów wśród trójkątów równoramiennych ani prostokątnych.

Okazuje się, że informacja wystarczająca do stwierdzenia, iż nie ma trójkąta równoramiennego o bokach i środkowych całkowitej długości, to fakt, że

na krzywej $y^2 = x(x+1)(x+9)$ jest dokładnie siedem punktów o współrzędnych wymiernych.

O tym, że siedem punktów o współrzędnych wymiernych można na tej krzywej znaleźć, każdy z Czytelników może się łatwo przekonać sprawdzając, iż leżą na niej punkty (rys. 1):

$$A_1 = (-9, 0), \quad A_2 = (-3, 6), \quad A_3 = (-3, -6), \quad A_4 = (-1, 0), \\ A_5 = (0, 0), \quad A_6 = (3, 12), \quad A_7 = (3, -12),$$

których współrzędne są nawet całkowite.

Cała sztuka to stwierdzenie, że innych punktów o obu współrzędnych wymiernych na tej krzywej nie ma. Do tej sprawy powrócimy w jednym z następnych numerów *Delt*y i udowodnimy to stwierdzenie – w tym artykule przyjmiemy ten fakt bez dowodu.

Sprawdźmy jednak, że skoro tak jest, to trójkąt równoramienny o bokach i środkowych całkowitej długości nie istnieje.

Przypuśćmy przeciwnie, że ABC (rys. 2) jest takim trójkątem. Przedłużamy jego podstawę dwukrotnie. Bez trudu stwierdzamy, iż

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 = b^2, \quad \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + m_a^2 = 4m_b^2.$$

Niech teraz

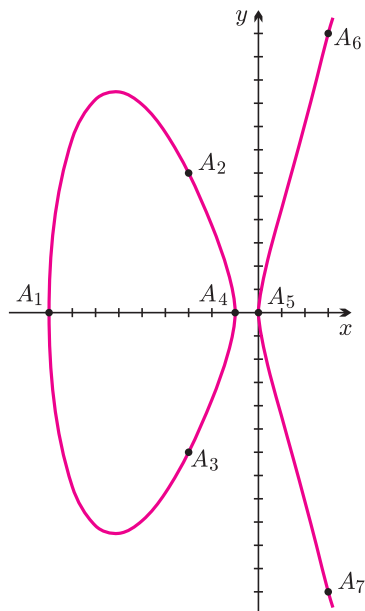
$$x = \frac{4m_a^2}{a^2}, \quad y = \frac{16m_a m_b b}{a^3}.$$

Wtedy

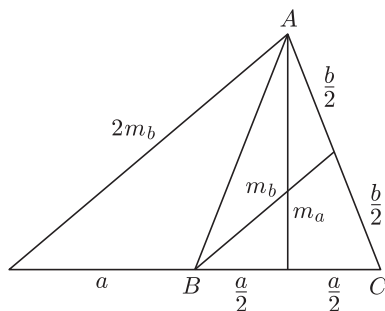
$$y^2 = \frac{4m_a^2}{a^2} \cdot \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{16m_b^2}{a^2} = x(x+1)(x+9).$$

Ponieważ liczby a , b , m_a , m_b są całkowite, więc liczby x i y są wymierne, przy czym x jest kwadratem liczby wymiernej. Lecz na krzywej wiążącej te wielkości jest tylko siedem punktów o współrzędnych wymiernych, a wśród nich tylko jedna pierwsza współrzędna jest kwadratem. Wtedy jedna ze środkowych jest równa zero. Zatem trójkąt równoramienny, mający zarówno boki, jak i środkowe długości całkowitej, nie istnieje.

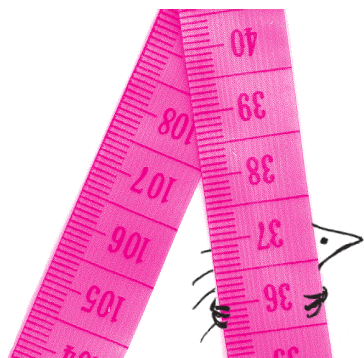
Tak więc znajomość punktów o współrzędnych wymiernych na rozpatrywanej krzywej rozwiązuje problem istnienia żadanego trójkąta.



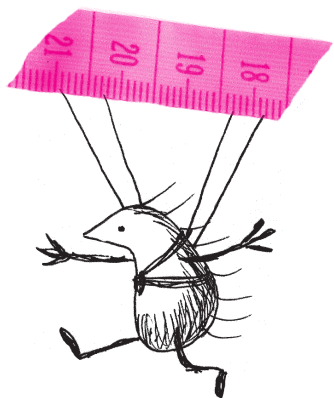
Rys. 1



Rys. 2



Trójkąt pitagorejski to trójkąt prostokątny o całkowitych długościach boków.



W podobny sposób można się przekonać, że nie istnieje trójkąt pitagorejski o choćby jednej środkowej wychodzącej z kąta ostrego o długości całkowitej.

Przypuśćmy, że mamy taki trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $2a$ i $2b$ oraz przeciwprostokątnej $2c$, w którym także środkowa, poprowadzona do boku o długości $2a$, ma całkowitą długość m_a .

Mamy więc

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a^2 + 4b^2 = m_a^2.$$

Niech

$$x = \frac{a^2}{b^2}, \quad y = \frac{acm_a}{b^3}.$$

Wtedy

$$y^2 = \left(\frac{acm_a}{b^3}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2} \cdot \frac{a^2 + 4b^2}{b^2} = x(x+1)(x+4).$$

Problem został sprowadzony do poszukiwania punktów wymiernych na krzywej

$$y^2 = x(x+1)(x+4),$$

których odcięte są kwadratami liczb wymiernych. Ale

na krzywej $y^2 = x(x+1)(x+4)$ jest dokładnie siedem punktów o współrzędnych wymiernych,

a są nimi

$$(-4, 0), \quad (-2, 2), \quad (-2, -2), \quad (-1, 0), \quad (0, 0), \quad (2, 6), \quad (2, -6),$$

skąd (jak poprzednio) wynika, że żądany trójkąt nie istnieje.

Pozostaje wobec tego kwestia dowodu, że faktycznie na obu użytych krzywych jest dokładnie siedem punktów o obu współrzędnych wymiernych. Krzywe te należą do klasy krzywych eliptycznych. O takich krzywych napiszemy w jednym z najbliższych numerów *Delty*, zamieszczając przy okazji dowód obu zastosowanych w tym artykule stwierdzeń.



Rozwiązanie zadania M 996.

Niech

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

$$\lambda_3 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3},$$

$$\lambda_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Wówczas λ_m^n , $m = 1, 2, 3, 4$, jest sumą wyrażen postaci

$$1^i (\pm\sqrt{2})^j (\pm\sqrt{3})^k, \quad i + j + k = n.$$

Zatem

$$(1a) \lambda_1^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

$$(2a) \lambda_2^n = q_n - r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$

$$(3a) \lambda_3^n = q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$

$$(4a) \lambda_4^n = q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}.$$

Sumując (1a) – (4a) otrzymamy

$$q_n = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n}{4}.$$

Dzielimy teraz każdą z równości (1a)–(4a) przez q_n i przechodzimy do granicy. Ponieważ λ_1 jest największą co do modułu spośród liczb $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, więc otrzymamy

$$(1b) 4 = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (r'_n\sqrt{2} + s'_n\sqrt{3} + t'_n\sqrt{6}),$$

$$(2b) 0 = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-r'_n\sqrt{2} + s'_n\sqrt{3} - t'_n\sqrt{6}),$$

$$(3b) 0 = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (r'_n\sqrt{2} - s'_n\sqrt{3} - t'_n\sqrt{6}).$$

gdzie

$$r'_n = \frac{r_n}{q_n}, \quad s'_n = \frac{s_n}{q_n}, \quad t'_n = \frac{t_n}{q_n}.$$

Stąd już łatwo (dodając stronami (1b)

i (2b)) otrzymujemy, że $s'_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Podobnie $r'_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $t'_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}$.

* * *

*Kuć i orać w dzień zawzięcie,
bo plonów niema bez trudu
złocisty szczęścia okręćie
kołyszysz...*

*Kuć. My nie czekamy cudu
roboty to potęga ludu.*

(*Nie ma wówczas pisano razem.*)

Jest to wiersz K. Cwojdziańskiego. I choć nie wzrusza swym subtelnym pięknem, znany jest jako mnemotechniczny sposób zapamiętania cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π . Otóż liczby liter w kolejnych słowach układają się w rozwinięcie

$$\pi = 3,14159265358979323846264 \dots$$

Może ktoś z Was, Drodzy Czytelnicy, ułoży wiersz pozwalający na zapamiętanie rozwinięć dziesiętnych innych liczb, takich jak $\sqrt{2}$, $e \dots$?

Można też tak:

$$\text{Zbrodnia to niesłychana, \dots} = 8,211 \dots$$

Czy ten lub jakikolwiek inny wiersz (oczywiście po dopisaniu dalszych kilkunastu słów) odpowiada rozwinięciu dziesiętnemu jakiegś w miarę prostej liczby, czegoś w rodzaju

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{\ln 2} + e?$$

Piotr HAJŁASZ

Czekamy na propozycje, najciekawsze wydrukujemy.

Redakcja

metoda rozwiązywania równań rekurencyjnych

Niech \mathbb{C} oznacza zbiór liczb zespolonych. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb zespolonych nazywany jest geometrycznym, jeśli istnieje takie $q \in \mathbb{C}$, że

$$x_n = x_0 q^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Uwaga. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb zespolonych jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_{n+1} = qx_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zobaczymy, że ten zupełnie oczywisty fakt pozwala w prosty sposób rozwiązywać równania rekurencyjne

$$(1) \quad x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_1x_{n+1} + a_0x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$, oraz $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C}), $a_0 \neq 0$, są ustalone.

Rozważmy najpierw przypadek $k = 2$. Niech p, q będą takimi liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi, że

$$p + q = a_1, \quad pq = -a_0.$$

Wtedy równanie (1) możemy zapisać w postaci

$$(2) \quad x_{n+2} = (p + q)x_{n+1} - pqx_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Przypuśćmy, że $p \neq q$. Zapisując to równanie na dwa sposoby:

$$x_{n+2} - qx_{n+1} = p(x_{n+1} - qx_n), \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

$$x_{n+2} - px_{n+1} = q(x_{n+1} - px_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

stwierdzamy, że ciągi

$$(x_{n+1} - qx_n)_{n=0}^{\infty}, \quad (x_{n+1} - px_n)_{n=0}^{\infty}$$

są geometryczne, a więc

$$x_{n+1} - qx_n = (x_1 - qx_0)p^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$x_{n+1} - px_n = (x_1 - px_0)q^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Odejmując stronami te równania, otrzymujemy szukane rozwiązanie

$$x_n = x_1 \frac{p^n - q^n}{p - q} - x_0 pq \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p - q}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Gdy q dąży do p , otrzymujemy ciąg

$$x_n = [(x_1 - px_0)n + px_0]p^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

który jest rozwiązaniem równania (2) w przypadku, gdy $q = p$.

Ostatnie dwa wzory dają pełne rozwiązanie równania rekurencyjnego (2).

W podobny sposób możemy rozwiązywać równania rekurencyjne, gdy $k > 2$.

Jeśli np. $k = 3$, to równanie (1) możemy napisać w postaci

$$(3) \quad x_{n+3} = (p + q + r)x_{n+2} - (qr + rp + pq)x_{n+1} + pqr x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie p, q, r są takim liczbami zespolonymi, że

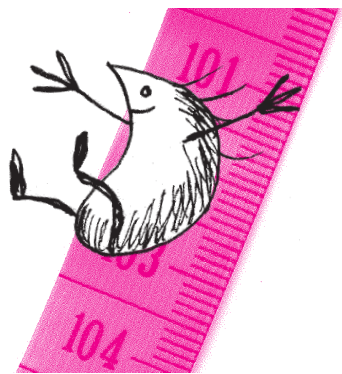
$$p + q + r = a_2, \quad qr + rp + pq = -a_1, \quad pqr = a_0.$$

Rozpocznijmy od przypadku, gdy p, q i r są parami różne. Zapisując równanie (3) na trzy sposoby:

$$x_{n+3} - (q + r)x_{n+2} + qrx_{n+1} = p[x_{n+2} - (r + q)x_{n+1} + qrx_n], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

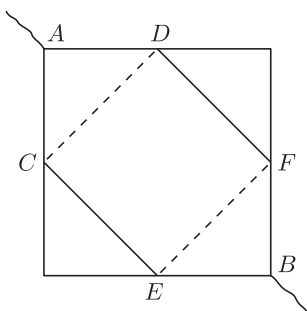
$$x_{n+3} - (r + p)x_{n+2} + rpx_{n+1} = q[x_{n+2} - (r + p)x_{n+1} + rpx_n], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$x_{n+3} - (p + q)x_{n+2} + pqx_{n+1} = r[x_{n+2} - (p + q)x_{n+1} + pqx_n], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$



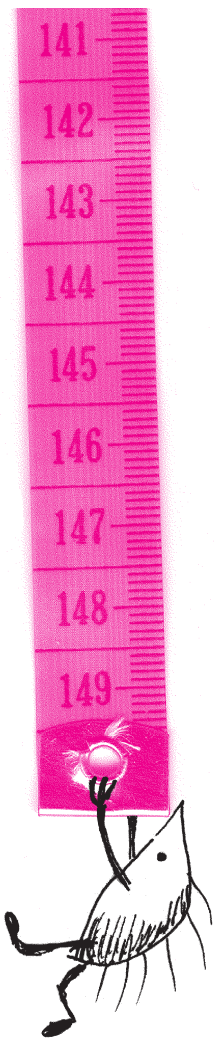
Rozwiązanie zadania F 575.

Jeśli do punktów A i B przyłoży się jakieś napięcie, potencjały w punktach C i D oraz E i F będą równe.



Zatem odcinki CD i EF można pominąć w rozważaniach. Opór pozostałych części figury jest równy

$$R_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\rho + \frac{a\rho - \frac{a}{\sqrt{2}}\rho}{a\rho + \frac{a}{\sqrt{2}}\rho} + \frac{a}{2}\rho \right) = \frac{a\rho}{\sqrt{2}}.$$



stwierdzamy, że ciągi w nawiasach prostokątnych są geometryczne, a więc

$$x_{n+2} - (q+r)x_{n+1} + qrx_n = [x_2 - (q+r)x_1 + qrx_0]p^n;$$

$$x_{n+2} - (r+p)x_{n+1} + rpx_n = [x_2 - (r+p)x_1 + rpx_0]q^n;$$

$$x_{n+2} - (p+q)x_{n+1} + pqx_n = [x_2 - (p+q)x_1 + pqx_0]r^n.$$

Związki te tworzą układ równań liniowych z niewiadomymi x_{n+2} , x_{n+1} , x_n .

Eliminując x_{n+2} , x_{n+1} (lub stosując twierdzenia Cramera), otrzymujemy stąd

$$x_n = \frac{p^n(r-q) + q^n(p-r) + r^n(q-p)}{p^2(r-q) + q^2(p-r) + r^2(q-p)}x_2 - \frac{p^n(r^2 - q^2) + q^n(p^2 - r^2) + r^n(q^2 - p^2)}{p^2(r-q) + q^2(p-r) + r^2(q-p)}x_1 + pqr \frac{p^{n-1}(r-q) + q^{n-1}(p-r) + r^{n-1}(q-p)}{p^2(r-q) + q^2(p-r) + r^2(q-p)}x_0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Aby rozwiązać równanie (3) w przypadku, gdy $r = p \neq q$, wystarczy w powyższym wzorze dokonać przejścia granicznego z r do p .

Otrzymamy wtedy

$$(4) \quad x_n = \frac{(p-q)np^n + pq^n}{p(p-q)^2}x_2 - \frac{(p^2 - q^2)np^n - 2p^2(p^n - q^n)}{p(p-q)^2}x_1 + \frac{q(p-q)(n-1)p^n + p^2q^n}{p(p-q)^2}x_0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ponieważ w tym wzorze nie istnieje granica współczynnika przy x_2 , gdy q dąży do p , więc przypadek $p = q = r$ wymaga dodatkowych rozważań. Teraz równanie (3) ma postać

$$x_{n+3} = 3px_{n+2} - 3p^2x_{n+1} + p^3x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zapisując je w równoważnej formie

$$x_{n+3} - 2px_{n+2} + p^2x_{n+1} = p(x_{n+2} - 2px_{n+1} + p^2x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

widzimy, że ciąg $(x_{n+2} - 2px_{n+1} + p^2x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest geometryczny, a więc

$$x_{n+2} - 2px_{n+1} + p^2x_n = (x_2 - 2px_1 + p^2x_0)p^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Biorąc tutaj

$$y_n := x_{n+1} - px_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad c := x_2 - 2px_1 + p^2x_0,$$

otrzymujemy

$$y_{n+1} - py_n = cp^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Stąd, dla dowolnie ustalonego $k \in \mathbb{N}$,

$$y_k - p^k y_0 = \sum_{n=0}^{k-1} p^{k-1-n} (y_{n+1} - py_n) = c \sum_{n=0}^{k-1} p^{k-1} = ckp^{k-1},$$

a więc $y_k = y_0 p^k + ckp^{k-1}$ i, w konsekwencji,

$$x_{n+1} - px_n = y_0 p^n + cnp^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Podobnie, ustalając dowolnie $k \in \mathbb{N}$, otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} x_k - p^k x_0 &= \sum_{n=0}^{k-1} p^{k-1-n} (x_{n+1} - px_n) = \sum_{n=0}^{k-1} p^{k-1-n} (y_0 p^n + cnp^{n-1}) = \\ &= y_0 \sum_{n=0}^{k-1} p^{k-1} + c \sum_{n=1}^{k-1} np^{k-2} = y_0 k p^{k-1} + c \frac{(k-1)k}{2} p^{k-2}. \end{aligned}$$

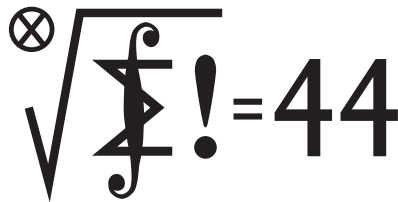
Zatem, dla $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 p^n + y_0 n p^{n-1} + c \frac{(n-1)n}{2} p^{n-2} = \\ &= \frac{(n-1)np^{n-2}}{2} x_2 - (n-2)np^{n-1} x_1 + \frac{(n-2)(n-1)p^n}{2} x_0. \end{aligned}$$

Uwaga. Przedstawiona metoda wymaga znajomości pierwiastków wielomianu

$$t^k - a_{k-1}t^{k-1} - \dots - a_1 t - a_0,$$

zwanego wielomianem charakterystycznym równania rekurencyjnego (1).



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2002

Przypominamy treść zadań:

437. Liczba rzeczywista $a \geq 1$ oraz liczba zespolona z spełniają warunki $|z + a| \leq a$ oraz $|z^2 + a| \leq a$. Dowieść, że $|z| \leq a$.

438. Wykazać, że jeżeli n jest liczbą naturalną, taką że $p = 8n + 1$ jest liczbą pierwszą, to różnica $2^{4n} - 1$ dzieli się przez p .

437. Podnosimy pierwszą nierówność do kwadratu i korzystając ze wzoru $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$, przekształcamy do postaci

$$(z + a)(\bar{z} + a) \leq a^2,$$

czyli

$$(1) \quad |z|^2 \leq -a(z + \bar{z}).$$

Postępując analogicznie z drugą nierównością, mamy

$$(2) \quad |z|^4 \leq -a(z^2 + (\bar{z})^2).$$

Lewa strona nierówności (1) jest liczbą nieujemną, więc prawa też. Można zatem podnieść tę nierówność do kwadratu, otrzymując

$$|z|^4 \leq a^2(z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2),$$

czyli

$$(3) \quad a^{-1}|z|^4 - 2a|z|^2 \leq a(z^2 + (\bar{z})^2).$$

Jeśli $z = 0$, to oczywiście teza jest spełniona. Jeśli $z \neq 0$, dodajemy stronami nierówności (2) i (3) i po podzieleniu przez $|z|^2$ dostajemy

$$(1 + a^{-1})|z|^2 - 2a \leq 0.$$

Stąd

$$|z|^2 \leq \frac{2a^2}{a+1} \leq a^2 \quad (\text{bo } a \geq 1),$$

więc ostatecznie $|z| \leq a$.

438. Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata p jest dzielnikiem liczby $2^{p-1} - 1$, czyli iloczynu $(2^{4n} - 1)(2^{4n} + 1)$. Aby dowieść, że $2^{4n} - 1$ dzieli się przez p , wystarczy wykazać, że $2^{4n} + 1$ się przez p nie dzieli.

Przypuśćmy więc, wbrew tej tezie, że

$$2^{4n} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Weźmy pod uwagę liczbę $a = 2^{7n} + 2^n$ oraz jej kwadrat

$$\begin{aligned} a^2 &= 2^{14n} + 2^{2n} + 2 \cdot 2^{8n} = \\ &= 2^{2n}((2^{4n})^3 + 1) + 2(2^{4n})^2 \equiv 2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Korzystając ponownie z małego twierdzenia Fermata, mamy

$$a^p \equiv a \pmod{p};$$

po pomnożeniu stronami przez a :

$$a^{p+1} \equiv a^2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Jednocześnie

$$a^{p+1} = (a^2)^{4n+1} \equiv 2^{4n+1} = 2 \cdot 2^{4n} \equiv -2 \pmod{p}.$$

Z uzyskanych związków wynika, że

$$2 \equiv -2 \pmod{p}.$$

Ale p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Sprzeczność kończy dowód.



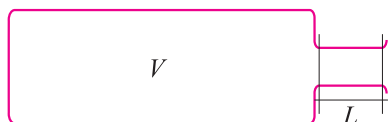
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2002

Przypominamy treść zadań:

334. Krasnoludki budują most o rozpiętości 5 piędi posługując się przy tym kartami (cienkimi, sztywnymi i jednorodnymi płytkami prostokątnymi) o długości 1 piędi i drugim boku znacznie krótszym. Kart się nie skleja i można je tylko układać jedna na drugiej. Ile wynosi minimalna liczba kart potrzebnych do tego, aby po moście mógł przejść krasnoludek o masie równej masie 2 kart? Nie ma potrzeby analizować trudności wynikłych w trakcie samej budowy – np. krasnoludki mogą użyć rusztowania, które usuną po zakończeniu pracy.

335. Dmuchając w wylot butelki można spowodować wystąpienie dźwięku. Obliczyć przybliżoną wartość jego częstotliwości, jeśli dana jest objętość butelki V , wymiary szyjki (pole przekroju poprzecznego S , długość L – zob. rys. 1) oraz parametry powietrza (np. gęstość ρ , ciśnienie p i stosunek ciepła właściwych $\gamma = c_p/c_v$, albo też prędkość dźwięku v).

Wskazówka: przyjąć, że powietrze w szyjce butelki jest „tłokiem”, który drgając spręża i rozpręża resztę powietrza w butelce.

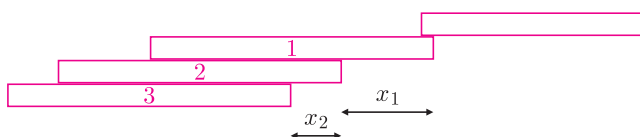


Rys. 1

334. Schemat konstrukcji mostu przedstawia rysunek 2. Oczywiście jest, że górna karta powinna być podparta na swoich końcach, a pozostałe karty mogą być wysunięte jedna nad drugą tylko tyle, aby pozostały w równowadze przy każdym położeniu krasnoludka. Największe zagrożenie konstrukcji wystąpi w chwili, gdy krasnoludek znajdzie się na jednym z końców górnej karty, gdyż wtedy cały jego ciężar (plus połowa ciężaru górnej karty) obciąża jedną połowę mostu, a ramię tej siły względem każdego z ewentualnych punktów obrotu kart jest maksymalne.



Rys. 2



Rys. 3

Rozpatrzmy równowagę karty podpierającej obciążony koniec (oznaczonej na rysunku 3 numerem 1), która jest przesunięta względem poprzedniej karty 2 o x_1 jednostek. Przyjmując koniec karty 2 jako punkt odniesienia, stwierdzamy, że maksymalna wartość x_1 jest rozwiązaniem równania

$$2,5x_1 = 0,5 - x_1,$$

a więc $x_1 = 1/7$. Rozpatrując równowagę karty 2 względem końca karty 3, wyznaczamy $x_2 = 1/9$, dalej $x_3 = 1/11$ itd., a suma $\sum x_i$ musi przekroczyć 2 jednostki (gdyż jest to połowa rozpiętości mostu, liczonej bez środkowego przęsła). Jak wynika z obliczeń, trzeba dodać 162 wyrazy ciągu, czyli łącznie potrzeba 325 kart. (Ma się rozumieć, ta liczba wystarczy tylko wtedy, gdy krasnoludek będzie przechodził po moście bardzo ostrożnie!)

335. Sprężanie i rozprężanie powietrza zawartego w butelce zachodzi tak szybko, że ciepło nie zdąży przepłynąć z otoczenia, czyli zjawisko można uznać za proces adiabatyczny (podobnie jak w odniesieniu do rozchodzenia się fali dźwiękowej).

Dlatego spełnione jest równanie $\frac{\Delta p}{p} = -\gamma \frac{\Delta V}{V}$, gdzie Δp jest zmianą ciśnienia spowodowaną przez zmianę objętości gazu o ΔV . Niech Δx będzie przesunięciem „tłoka”; wtedy $\Delta V = S\Delta x$, a siła przywracająca położenie równowagi wynosi

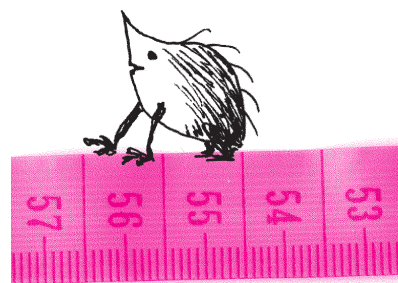
$$F = S\Delta p = -\frac{\gamma p S^2}{V} \Delta x.$$

Ułamek występujący przed Δx możemy uznać za „stałą sprężystości” k , a po skorzystaniu ze znanego wzoru na częstotliwość drgań harmonicznym

$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ i podstawieniu masy powietrza w szyjce $m = SL\rho$ możemy wyznaczyć f :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{S\gamma p}{VL\rho}} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{VL}}.$$

Na przykład, podstawiając $v = 330$ m/s, $S = 2$ cm², $L = 3$ cm, $V = 1$ dm³, otrzymujemy $f \approx 136$ Hz.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
 po uwzględnieniu ocen rozwiązań
 zadań **326** ($WT = 2,95$) i **327** ($WT = 1,08$)
 z numeru 11/2001

Jacek Piotrowski	– Rzeszów	42,82
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	42,62
Aleksander Surma	– Myszków	39,95
Tomasz Wietecha	– Tarnów	35,77
Marek Wójcicki	– Szczecin	32,03

Patrz w niebo

Założenie, że Wszechświat obserwowany w dostatecznie dużej skali wygląda mniej więcej tak samo z każdego miejsca, jest w kosmologii bardzo mile widziane. Gdyby jeszcze można było przyjąć, że Wszechświat wygląda tak samo w każdej chwili! Z równań grawitacji wyprowadzonych przez Einsteina wynikało, że Wszechświat jednak musi ewoluować, co autor tych równań uznał za rzecz tak niesympatyczną, iż wprowadził do nich (1917), właściwie na siłę, człon (tzw. kosmologiczny) zapewniający, że mogą one mieć rozwiązania odpowiadające Wszechświatowi stacjonarnemu. Niestety, w tym czasie istniały już obserwacje widm galaktyk dowodzące, że odległe galaktyki rozbiegają się we wszystkie strony. W roku 1929 E. Hubble sformułował prawo zwane teraz jego nazwiskiem, z którego nieodparcie wynikało, że Wszechświat ekspanduje – czy nam się to podoba, czy nie. Człon kosmologiczny przestał być potrzebny, opracowano modele ekspandującego Wszechświata, teorię Wielkiego Wybuchu i zdawało się, że kosmologia zyskała trwałe podstawy.

Jednak w ostatnich latach sprawa realności członu kosmologicznego odżyła. Przyczyną jest większa, niż wiek temu, dokładność obserwacji, w szczególności wyznaczania odległości galaktyk. Odległości te wyznacza się bowiem na kilka sposobów (patrz np. *Delta* 10/2001) i oczywiście dobrze by było, aby sposoby te prowadziły do zbieżnych wyników. Tymczasem tak nie jest. Na przykład nie od dziś wiadomo, że przesunięcie widma ku czerwieni nie jest dokładnie wprost proporcjonalne do odległości wyznaczonej innymi metodami (np. jasności galaktyk, supernowych itd.). Prawo Hubble'a jest w przybliżeniu zależnością liniową dla małych odległości, a dla odległości większych wydaje się, że galaktyki są słabsze, niż wynikałoby to z ich przesunięcia ku czerwieni. Niezgodności są na granicy czułości dzisiejszych metod, ale są. Jest bardzo trudno orzec, co może być przyczyną tego osłabienia światła galaktyk. Może jest to efekt ewolucyjny (galaktyki bardziej odległe widzimy jako młodsze), może powoduje je materia międzygalaktyczna. Ale może też na wielkich odległościach przejawia się – reprezentowane przez odrzucony kiedyś człon kosmologiczny – powszechne odpychanie, przez co odległe obszary Wszechświata ekspandują wcale nie coraz wolniej, tylko coraz szybciej. A to byłoby sprawą niezwykle poważną, oznaczałoby bowiem, że „największa pomyłka Einsteina” wcale nie była pomyłką. Rozstrzygnięcie chyba jednak nastąpi nieprędko.

Tomasz KWAST

Lipiec

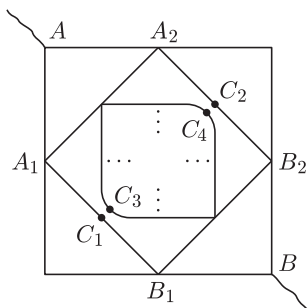
W lipcowe wieczory niemal na południu widać gwiazdozbiór Wężownika. Z dziwnych powodów nie jest on gwiazdozbiorem zodiakalnym, mimo że łuk ekliptyki na jego obszarze jest większy niż na obszarze sąsiedniego Skorpiona, który jest gwiazdozbiorem zodiakalnym. Jest to dość rozległy gwiazdozbiór położony w pobliżu Drogi Mlecznej. Dlatego można by się spodziewać, że materia międzygwiazdowa, skupiona wszak w płaszczyźnie Drogi Mlecznej, będzie skutecznie przesłaniać wszelkie dalsze obiekty. Tymczasem w Wężowniku za pomocą niewielkiego teleskopu można dostrzec siedem gromad kulistych nie słabszych od około 8 mag, położonych w pobliżu centralnego zgęszczenia Galaktyki, które dzieli od nas odległość 8,5 kpc. Oto one: M 9 (odległość 7,6 kpc), M 10 (4,3 kpc), M 12 (5,3 kpc), M 14 (9,7 kpc), M 19 (6,3 kpc), M 62 (5,7 kpc) i M 107 (7,1 kpc). Nie wszystkie są tak zwarte, jak widoczna też w lipcu gromada M 13 w Herkulesie, ale ich liczba jest imponująca, jak na jeden gwiazdozbiór.

Jowisz jest w Bliźniętach, a Mars w Raku, planet tych więc nie widać wskutek bliskości Słońca (20 VII Jowisz ma złączenie ze Słońcem). Wieczorem w Lwie, ale bardzo krótko po zachodzie Słońca widać Wenus, a przed wschodem w Byku – Saturna. Nów Księżyca wypada 10 VII, a pełnia 24 VII. Żadnych zaćmień ani efektownych zakryć w tym miesiącu nie ma. 6 VII Ziemia przechodzi przez aphelium, czyli punkt orbity najdalszy od Słońca, co nie przeszkadza, że lato mamy w pełni.

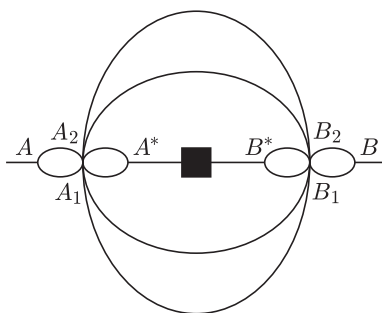
T. K.



Rozwiązanie zadania F 576.
Uprościmy schemat jak na rysunku.



Rozdzieliliśmy punkty C_1 i C_3 oraz C_2 i C_4 , w których potencjały są jednakowe. Poza tym połączmy na chwilę punkty A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2 . Otrzymamy wtedy schemat jak na rysunku.



Widzimy, że między punktami A^* i B^* jest taki sam kwadrat jak wyjściowy, tylko dwa razy mniejszych rozmiarów. A opór tego kwadratu jest też dwa razy mniejszy (bo proporcjonalny do długości boku).

Wiedząc to, możemy więc już rozłączyć punkty A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2 i przystąpić do właściwego rozwiązania. Oznaczmy opór całego kwadratu przez R , opór jednego boku przez $r = a\rho$. Mamy więc, że:

$$R = \frac{r}{2} + \frac{1}{\frac{1}{r/2} + \frac{1}{\frac{r}{2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\frac{R/2+r}{2\sqrt{2}}}}$$

Powyższe równanie upraszcza się do

$$x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

gdzie $x = R/r$. Stąd

$$R_{AB} = R = \frac{r}{2}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}) = \frac{a\rho}{2}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

O RÓWNYCH SUMACH SIÓDMYCH POTĘG

Oto różnego typu rozwiązania zawierające osiem siódmych potęg:

$$(7.4.4) 149^7 + 123^7 + 14^7 + 10^7 = 146^7 + 129^7 + 90^7 + 15^7,$$

$$(7.3.5) 96^7 + 41^7 + 17^7 = 86^7 + 77^7 + 77^7 + 68^7 + 56^7,$$

$$(7.2.6) 125^7 + 24^7 = 121^7 + 94^7 + 83^7 + 61^7 + 57^7 + 27^7,$$

$$(7.1.7) 568^7 = 525^7 + 439^7 + 430^7 + 413^7 + 266^7 + 258^7 + 127^7.$$

Na uwagę zasługują również następujące równości

$$698^7 + 556^7 + 443^7 + 184^7 = 673^7 + 625^7 + 353^7 + 230^7,$$

$$698^3 + 556^3 + 443^3 + 184^3 = 673^3 + 625^3 + 353^3 + 230^3,$$

$$698 + 556 + 443 + 184 = 673 + 625 + 353 + 230.$$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (30')

Wyjaśnienie oszustwa (30): Teza zadania jest fałszywa! Niech bowiem ABC będzie dowolnym trójkątem o kącie prostym przy wierzchołku C . Wówczas środek boku AB jest zarazem środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , zatem podane w treści zadania punkty leżą na jednej prostej. Poprawna teza zadania powinna brzmieć: trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny. Dowód jak podany poprzednio – nie zaszkodziłoby uzupełnić go rysunkiem w przypadku, gdy kąt przy wierzchołku C jest rozwarty.

DWIE HIPOTEZY (2)

Hipoteza. Istnieje 65000 kolejnych liczb naturalnych, wśród których więcej niż 10% liczb jest pierwszych.

Argumenty na poparcie hipotezy:

Nie udowodniono, że liczb pierwszych bliźniaczych (tzn. par liczb pierwszych różniących się o 2) jest nieskończenie wiele, ale uwierzyć w to nietrudno. Znając gęstość występowania liczb pierwszych wśród liczb określonej wielkości i czyniąc założenie (niczym ścisłym nie uprawnione), że liczby pierwsze są rozmieszczone losowo z taką gęstością, można zabawić się w przewidywanie, jak dużo par liczb bliźniaczych spodziewamy się znaleźć w określonym przedziale. No, może niezupełnie losowo, bo dwie kolejne liczby naturalne pierwszymi raczej nie będą, ale nietrudno w owej losowości uwzględnić takie efekty, jak parzystość czy reszta z dzielenia przez 3, 5 i coś tam jeszcze, w zależności od tego, jak precyzyjnymi chcemy uczynić nasze przewidywania.

Otóż przewidywania w tak naiwny sposób otrzymane zgadzają się zadziwiająco dobrze z danymi pochodzącymi z bezpośrednich poszukiwań liczb bliźniaczych

za pomocą komputera. Podobnie można rozważać inne konfiguracje postaci

$$p, p + r_2, p + r_3, \dots, p + r_k,$$

gdzie

$$0 < r_2 < r_3 < \dots < r_k,$$

pytając, czy wymienione liczby mogą być jednocześnie pierwsze i co więcej, czy istnieje nieskończenie wiele takich układów liczb pierwszych. Konfrontując przewidywania z doświadczeniem, można dojść do wniosku, że takie układy liczb pierwszych istnieją zawsze wtedy, gdy nie widać powodów, dla których istnieć by nie mogły.

Dokładniej, całkiem rozsądne jest sformułowanie hipotezy pomocniczej:

Hipoteza pomocnicza. Jeżeli liczby

$$r_1 = 0 < r_2 < r_3 < \dots < r_k$$

spełniają warunek:

Dla dowolnej liczby pierwszej q wśród reszt z dzielenia liczb $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ przez q nie występują wszystkie reszty $0, 1, 2, \dots, q-1$,

to istnieje nieskończenie wiele takich liczb p , że wszystkie liczby $p, p + r_2, p + r_3, \dots, p + r_k$ są pierwsze.

Nie możemy bowiem łudzić się, że znajdziemy nieskończenie wiele trójek liczb pierwszych $p, p + 2, p + 4$ z uwagi na to, że jedna z tych liczb zawsze jest podzielna przez 3.

Bez trudu jednak przychodzi znajdowanie czworaczek liczb pierwszych, tzn. układów liczb pierwszych postaci $p, p + 2, p + 6, p + 8$. Wykluczamy przy tym układ powstający dla $p = 5$. Jak blisko siebie mogą być kolejne czworaczki? Doświadczenie (lista czworaczek do 1000000) pokazuje, iż nie mogą być odległe o mniej niż 90. Jednak liczby 0, 2, 6, 8, 30, 32, 36, 38 (jako r_1, \dots, r_8) spełniają założenia sformułowanej wyżej hipotezy, więc oczekiwać należy istnienia czworaczek różniących się o 30. I rzeczywiście, tak bliskie czworaczki otrzymujemy zaraz za milionem dla $p = 1006301$ i $p = 1006331$.

Ten przykład dowodzi, że w poszukiwaniu bardziej wymyślnych konfiguracji liczb pierwszych nie obowiązuje zasada: im dalej, tym gorzej.

Niech teraz P będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych większych od 1455 i mniejszych od 32500 z następującymi wyjątkami: do zbioru P należą także liczby 1019, 1129, 1277, 1279, 1319, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1439; do zbioru P nie należą liczby 1481, 1499, 1523, 1549, 1571, 1637.

Niech teraz R będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $32497 \pm q$, gdzie $q \in P$.

Można sprawdzić (komputer), że tak określony zbiór $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{6522}\}$ spełnia warunki hipotezy pomocniczej. Największą liczbą w zbiorze R jest 64994, a zbiór R ma 6522 elementów. Należy więc oczekiwać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p , dla których wszystkie liczby $p + r$, gdzie $r \in R$, są pierwsze. To daje 6522 liczby pierwsze wśród 65000 kolejnych liczb naturalnych i skłania do uwierzenia w sformułowaną na początku hipotezę.

Korespondencję do Γ -limatiás prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl