

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (337)

O słodkiej strategii <i>Mikołaj Rotkiewicz</i>	str. 1
Chandra – najnowszy teleskop rentgenowski <i>Tomasz Kwast</i>	str. 2
Zadania <i>Marta Kicińska-Habior</i>	str. 3
Zaskakujący prełt <i>Mateusz Goryca, Adam Działak</i>	str. 4
O pewnym problemie Eulera <i>Lev Kourliandtchik, Boris Lurje</i>	str. 6
Aktualności	str. 8
Dowodzenie nierówności <i>Hojoo Lee</i>	str. 9
Mała Delta	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Czerwiec	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Ciągi Pisota

Okladki i ilustracje: *Anna Ludwicka*
 Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wybór artykułów archiwalnych *Delty*
<http://www.wiwi.pl>

Internetową wersję *Małej Delty* można znaleźć w portalu Eduseek
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:	Redaguje kolegium w składzie:
Andrzej Białynicki-Birula	Wiktor Bartol
Bogdan Cichocki	Krzysztof Biesaga
– wiceprzewodniczący	Ewa Czuchry
Krzysztof Ciesielski	Krystyna Kordos – sekr. red.
Jan A. Gaj	Marek Kordos – red. nac.
Piotr Goldstein	Tomasz Kwast
Andrzej Hryniewicz	Anna Ludwicka
Wiesław A. Kamiński	Urszula Marciniak
Marta Kicińska-Habior	Anna Rudnik
Zbigniew Marciniak	Witold Sadowski
Krzysztof Maślanka	Joanna Udalska
Janusz Matkowski	Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Andrzej Mąkowski	Adres Redakcji:
Zdzisław Pogoda	ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
Michał Różycka	tel. 853-59-61, 55-33-216
Konrad Rudnicki	BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Grzegorz Sitarski	Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Andrzej Woszczyk	Wydrukowano
Wiesław Żelazko – przewodniczący	w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

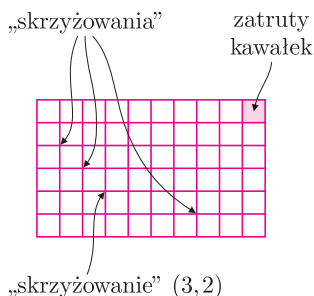
WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2002 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru. Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Rozważmy następującą grę, która słodko się zaczyna, a kończy się śmiercią. Dana jest prostokątna tabliczka czekolady złożona z $m \times n$ kawałków, w której prawy, górny kawałek jest zatruty (rysunek). W grze uczestniczy zaczynający gracz A oraz gracz B . Gracze wykonują posunięcia na przemian. Ruch gracza polega na wybraniu „skrzyżowania” (może to być także skrzyżowanie o kształcie litery T z górnego lub prawego boku tabliczki) i zjedzeniu wszystkich kawałków znajdujących się na lewo i w dół od wybranego skrzyżowania. Przegrywa gracz, który musi zjeść zatruty kawałek.



Okazuje się, że na przykład dla kwadratowej tabliczki czekolady można łatwo wskazać strategię wygrywającą dla gracza A . Załóżmy bowiem, że nasza tabliczka ma wymiar $m \times m$. W pierwszym ruchu gracz A wybiera skrzyżowanie $(m - 1, m - 1)$. Wówczas B musi wybrać skrzyżowanie (m, i) lub (i, m) dla pewnego i . Gracz A na każdy ruch gracza B odpowiada ruchem symetrycznym tak, że po posunięciu pozostała część czekolady ma oś symetrii przechodzącą przez skrzyżowania postaci (i, i) . Widać, że gracz B będzie zmuszony do posunięcia (m, m) i zjedzenia zatrutego kawałka.

A jak grać w przypadku ogólnym? Według dostępnych autorowi źródeł ogólna strategia nie jest znana. Okazuje się jednak, że niezależnie od wymiarów tabliczki zawsze istnieje strategia wygrywająca dla gracza A !

Zauważmy, że każda rozgrywka wymaga nie więcej niż mn posunięć. Niech $N = mn$, jeśli mn jest liczbą parzystą i $N = mn + 1$, jeśli mn jest liczbą nieparzystą. Rozgrywkę będziemy kodować za pomocą ciągu (a_1, a_2, \dots, a_N) , gdzie a_i oznacza i -ty ruch, czyli a_1 jest pierwszym ruchem gracza A , a_2 – pierwszym ruchem B , a_3 – drugim ruchem A , itd. Ruch a_i kodujemy za pomocą pary (i, j) , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Jeśli partia liczy k ruchów i $k < N$, to aby oznaczyć ruch pusty, przyjmujemy $a_i = „*”$ dla $i > k$. Zbiór dozwolonych, tzn. zgodnych z regułami gry, rozgrywek oznaczmy przez T . Zbiór T składa się więc z pewnych ciągów długości N . Zbiór T możemy przedstawić w postaci sumy rozłącznych zbiorów T_A i T_B , gdzie T_A i T_B składają się z tych rozgrywek, które kończą się zwycięstwem odpowiednio gracza A i gracza B .

Istnienie wygrywającej strategii dla gracza A można zapisać w języku logiki jako

$$(1) \quad \exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \forall a_4 \dots \exists a_{N-1} \forall a_N \quad (a_1, a_2, \dots, a_N) \in T_A.$$

Pod kwantyfikatorami powinniśmy napisać: „ a_i , takie że a_1, a_2, \dots, a_i przedstawia prawidłowy ciąg posunięć”. Istnienie wygrywającej strategii dla gracza B można zapisać w postaci warunku

$$(2) \quad \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \dots \exists a_N \quad (a_1, a_2, \dots, a_N) \in T_B.$$

Zauważmy, że (2) jest zaprzeczeniem warunku (1). Zatem albo istnieje strategia wygrywająca dla gracza A , albo taką strategię ma gracz B .

Wykażemy, że gracz B nie może mieć strategii wygrywającej.

Założmy bowiem przeciwnie, że taką strategię ma. Niech wtedy gracz A w pierwszym ruchu wybierze skrzyżowanie $(1, 1)$. Wówczas gracz B , zgodnie z założeniem, zna „genialną” odpowiedź, prowadzącą go do zwycięstwa. Powiedzmy, że ten mistrzowski ruch polega na wybraniu skrzyżowania (a, b) . Zauważmy jednak, że gdyby w pierwszym posunięciu gracz A wykonał właśnie ruch (a, b) zamiast $(1, 1)$, to postawiłby gracza B w tej samej sytuacji, w której on sam teraz nieopatrznie się znalazł! Gracz A miałby więc taki ruch, po jakim B na pewno nie znajdzie „genialnego” posunięcia. To przeczy naszemu przypuszczeniu.

Dowiedliśmy więc, że gracz A ma strategię wygrywającą, choć nie mamy pojęcia, jak ona wygląda!

W przypadku ogólnym skrzyżowanie (i, j) oznacza punkt o współrzędnych (i, j) , gdy początek układu współrzędnych znajduje się w lewym dolnym rogu tabliczki czekolady, osie leżą na brzegu czekolady, a jednostką jest długość boku dowolnego z $m \cdot n$ jednakowych, kwadratowych kawałków czekolady.

Autor pragnie podziękować panu Waldemarowi Pompe za udzielenie cennych informacji na temat tego problemu.

Chandra – najnowszy teleskop rentgenowski

Tomasz KWAŚT

Dziś wiemy, że obiekty Wszechświata – z małymi wyjątkami – emitują energię we wszystkich zakresach promieniowania elektromagnetycznego, choć, oczywiście, nie zawsze jak ciało doskonale czarne. Świecą więc też w zakresie rentgenowskim, a na mocy poprzedniego zdania niebo w zakresie X może wyglądać całkiem inaczej niż w zakresie optycznym. Sprawa warta jest więc zbadania. Początek astronomii rentgenowskiej przypada na rok 1962 – wtedy czujniki umieszczone na raketach po raz pierwszy zarejestrowały promieniowanie X pochodzące spoza Układu Słonecznego (o tym, że Słońce jest źródłem m.in. promieniowania X, wiedziano wcześniej), a rentgenowskie obrazy samego Słońca długo jeszcze otrzymywano za pomocą urządzenia typu *camera obscura*. Przez 40 lat sprawa posunęła się jednak wyraźnie naprzód.

Aby lustro teleskopu dawało obrazy zadowalającej jakości, jego powierzchnia nie może odbiegać od zadanego kształtu paraboloidalnego bardziej niż o ułamek fali świetlnej, na jakiej teleskop ma pracować. W praktyce poleruje się lustra z dokładnością nie gorszą niż do 1/10 fali i na potrzeby teleskopów optycznych technologia ta jest w pełni opanowana. W teleskopie rentgenowskim obraz powstaje w zasadzie tak samo, ale z dodatkowymi kłopotami, które nietrudno przewidzieć.

Po pierwsze, promieniowanie rentgenowskie chętniej przeniknęłoby przez lustro, niż odbiło się od niego. Aby uzyskać jednak odbicie, wiązkę promieniowania należy skierować niemal stycznie do powierzchni odbijającej, zatem lustrem rentgenowskim może być pierścień wycięty z paraboloidy daleko od jej wierzchołka. Skupiającą się po odbiciu wiązkę promieniowania ze względów praktycznych skupia się jeszcze bardziej, wykorzystując „prawie styczne” odbicie od odpowiednio dobranej hiperboloidy. Taki bowiem kształt zapewnia, że wiązka zbiegająca się w jednym z ognisk hiperboloidy skupi się po odbiciu w drugim jej ognisku, a więc też w punkcie. Po drugie, wypolerować lustro optyczne z dokładnością do 1/10 długości fali może nawet amator (długość fali około $0,5 \mu\text{m} = 500 \text{ nm}$), jest to natomiast bardzo trudne dla fali rentgenowskiej (np. $2 \text{ \AA} = 0,2 \text{ nm}$). Niedokładność obróbki lustra rzędu 10 \AA , a więc absolutnie niedostrzegalna w świetle optycznym, jest górną granicą dla promieniowania X. Po trzecie, obiektyw rentgenowski w postaci paraboloidalnego pierścienia ma cały środek pusty, bo zbiera promieniowanie tylko swoim brzegiem. Żeby więc wykorzystać przestrzeń, wewnątrz paraboloidalnego pierścienia umieszcza się współosiowo kilka pierścieni innych paraboloid – tak dobranych, by ogniska ich wszystkich pokrywały się (tak samo oczywiście z hiperboloidami). Rzecz jasna, współosiowość i współogniskowość odbijających powierzchni musi być uzyskana z ogromną dokładnością. Wreszcie po czwarte, cały teleskop musi się znaleźć poza ziemską atmosferą, która – wobec swojej grubości – dla promieniowania rentgenowskiego jest nieprzezroczysta.

Jak widać, uruchomienie teleskopu rentgenowskiego jest przedsięwzięciem trudnym technicznie, a więc także kosztownym. Pierwszym satelitą rentgenowskim był Uhuru (wystrzelony w 1970 r.), który wykonał przegląd całego nieba, mając rozdzielczość gorszą niż nieuzbrojone oko. Osiem lat później satelita Einstein obserwował niebo już z rozdzielczością, jaką mają małe teleskopy optyczne. Kolejny, Rosat (1990), przy średnicy obiektywu 84 cm i ogniskowej 240 cm miał rozdzielczość rzędu $5''$. Wreszcie pod koniec lipca 1999 r. za pomocą promu Columbia umieszczony został na orbicie okołoziemskiej najnowszy teleskop rentgenowski nazwany w pierwotnie banalnie AXAF (od *Advanced X-ray Astrophysics Facility*), którą to nazwę wkrótce zmieniono na Chandra, na cześć Subrahmanyana Chandrasekhara (1910–1995), wybitnego teoretyka zajmującego się budową wewnętrzną gwiazd i dynamiką gwiazdową, laureata Nagrody Nobla z 1983 r.



Chandra jest urządzeniem o masie 4620 kg, długości 14 m i rozpiętości skrzydeł baterii słonecznych 20 m. Jego obiektyw ma średnicę 1,2 m i ogniskową 10 m. Składa się z czterech współosiowych fragmentów paraboloid i czterech hiperboloid z irydowymi powierzchniami odbijającymi. Przy takich rozmiarach i precyzji wykonania jego rozdzielczość wynosi pół sekundy łuku. Satelita został wprowadzony na silnie eliptyczną orbitę, która w perygeum przebiega 10 000 km nad Ziemią, w apogeum zaś osiąga 140 000 km. Czas obiegu orbity wynosi 64,2 h. Dzięki tak dużej odległości w apogeum (w pobliżu którego satelita spędza większość czasu) Ziemia przesłania znikomy fragment nieba (bo średnica jej tarczy widzianej z apogeum nie przekracza 5°), a to z kolei umożliwia sprawne kierowanie teleskopu w rozmaitych kierunkach.

Jakakolwiek dotychczasowa spektroskopia rentgenowska była w istocie szerokopasmową fotometrią w różnych zakresach, wybieranych przez ustawianie na drodze promieniowania różnych filtrów. Chandra jest pierwszym teleskopem rentgenowskim wyposażonym w transmisyjne siatki dyfrakcyjne, dzięki czemu możliwe stało się otrzymywanie autentycznych widm rentgenowskich z całym bogactwem linii. Aparatura pozwala na badanie promieniowania X w zakresie od 1 do 200 Å, czemu odpowiada zakres energii kwantów od 10 do 0,07 keV. W pobliżu energii 1 keV rozdzielczość widmowa pozwala na rozróżnienie kwantów o energiach różniących się o 1 eV.

Chyba nikt nie spodziewa się, że Chandra wykona obserwacje wywracające nasze szeroko pojęte „poglądy na świat”, podobnie jak nikt nie oczekiwał tego od Teleskopu Hubble’a. Niewątpliwie jednak Chandra stał się tym w astronomii rentgenowskiej, czym Teleskop Hubble’a w astronomii optycznej, mimo że od 2000 r. ma już dwóch towarzyszy „po fachu”: XMM (*X-ray Multimirror Mission*) oraz Astro E. Ich systematyczna praca właściwie dopiero się zaczęła.

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delty!

Rozwiąż lipcowe (tak, lipcowe) zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji:

<http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 991. Udowodnić, że jeśli pewien prostokąt można pokryć 100 kołami o promieniu 2, to można go również pokryć 400 kołami o promieniu 1. Rozwiązanie na str. 7

M 992. Udowodnić, że jeśli pewien trójkąt można pokryć 100 kołami o promieniu 2, to można go pokryć również 400 kołami o promieniu 1. Rozwiązanie na str. 7

M 993. Udowodnić, że jeśli 1000 kół o promieniu r wystarczy do pokrycia trójkąta o bokach 1, 2 i $\sqrt{5}$, to wystarczy też 5000 kół o promieniu $\frac{r}{\sqrt{5}}$. Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 573. Mamy zbiornik o przekroju poprzecznym S , wypełniony gazem o gęstości ρ i ciśnieniu p . Znaleźć prędkość v_0 ucieczki gazu przez wykonany w podstawie zbiornika otwór o przekroju S_0 . Pominąć zmiany ciśnienia gazu wraz z wysokością. Rozwiązanie na str. 16

F 574. Niech zbiornik z poprzedniego zadania będzie dyszą rakiety. Zakładając ciągłość przepływu masy przez zbiornik, wyznaczyć siłę ciągu rakiety. Rozwiązanie na str. 16

Zaskakujący pręt

Mateusz GORYCA, Adam DZIAŁAK

Własności fal wzbudzonych w prostych rezonatorach, które można traktować jako jednowymiarowe, są powiązane prostymi zależnościami: częstotści kolejnych modów są wielokrotnościami częstotści modu podstawowego, a odległości między kolejnymi węzłami są równe.

Takimi szkolnymi przykładami rezonatorów są np. struny. Są „popularność” zawdzięczają prostocie opisu. Trudno natomiast znaleźć w podręcznikach wyczerpujący opis innego prostego rezonatora – luźno zawieszono cienkiego pręta (mającego oba końce swobodne). Dlaczego tak jest? Otóż drgania tego na pozór prostego „przyrządu” są znacznie bardziej skomplikowane. Tym samym pręt może być nader ciekawym obiektem doświadczeń. Żeby się o tym przekonać, wystarczy przeprowadzić eksperyment za pomocą układu przedstawionego na rysunku 1, co też uczyniliśmy.

Zamiast pręta użyliśmy cienkościennej rurki aluminiowej, o średnicy zewnętrznej 12,5 mm i grubości ścianek 0,8 mm, pochodzącej z popularnych dzwonek kupionych w sklepie orientalnym. Przez wywierony w poprzek rurki niewielki otwór przewlekliśmy cienką nić, na której zawiesiliśmy obiekt naszego doświadczenia. Założyliśmy na rurkę tłumik z kawałka zgiętego, sprężystego drutu trzymanego w ręce (zamiast drutu można użyć np. wygiętej agrafki), którego zadaniem było tłumienie drgań w miejscu jego zamocowania. Doświadczenie powtórzyliśmy dla czterech rurek, różniących się tylko długością (odpowiednio 250, 260, 270 i 290 mm).

Eksperyment polegał na znalezieniu takich położenia tłumika, przy których uderzony pręt wydaje długi, niestłumiony dźwięk. Takie położenia to, podobnie jak dla struny, węzły fal stojących. Wykorzystując dodatkowo cyfrowy oscyloskop z możliwością przeprowadzenia analizy widma dźwięku wydawanego przez pręt (za taki oscyloskop posłużył nam zwykły komputer, wyposażony w mikrofon i jeden z darmowych, dostępnych w Internecie programów analizujących widmo dźwięku), mogliśmy odróżnić węzły odpowiadające kolejnym modom drgań pręta oraz zmierzyć częstotć tych modów. Przykładowe wyniki pomiarów (położenia węzłów) dla trzech modów, dla pręta o długości 290 mm przedstawia rysunek 2. Częstotści tych modów wynoszą odpowiednio: 860 Hz, 2340 Hz, 4440 Hz. Jak widać z rysunku, sytuacja jest bardziej skomplikowana niż dla struny, gdyż odległości między węzłami nie są jednakowe, i odległość między pierwszym węzłem a końcem pręta nie stanowi połowy żadnej z nich. Nie można więc w prosty sposób wyznaczyć długości fali stojącej powstającej w pręcie. Ponadto zależność częstotści drgań od numeru modu nie jest liniowa, jak to ma miejsce w przypadku struny. Aby zrozumieć „dziwne” drgania pręta, należy rozważyć równanie ruchu. Dla cienkiego pręta podstawowym równaniem jest (wyprowadzenie można znaleźć w trzatomowej *Encyklopedii Fizyki PWN* pod hasłem „pręty”):

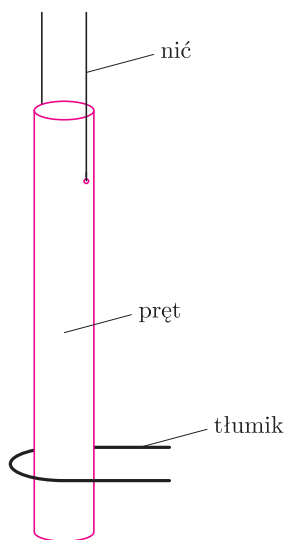
$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

gdzie $y(x, t)$ jest wychyleniem z położenia równowagi, x współrzędną liczoną wzdłuż pręta, t czasem, a A pewną dodatnią stałą (zależną od modu Younga, przekroju poprzecznego i gęstości). Szukając rozwiązań w postaci fali stojącej, możemy zapisać wychylenie jako iloczyn czynników, z których jeden zależy tylko od położenia, a drugi od czasu $y(x, t) = y_1(x) \cdot y_2(t)$. Stąd:

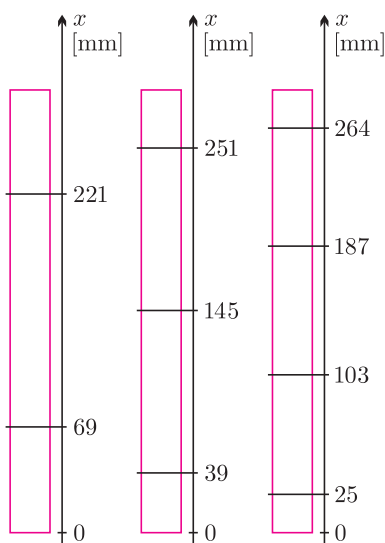
$$(2) \quad \frac{\partial^2 (y_1(x) \cdot y_2(t))}{\partial t^2} = y_1(x) \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^4 (y_1(x) \cdot y_2(t))}{\partial x^4} = y_2(t) \frac{d^4 y_1(x)}{dx^4}.$$

Podstawiając powyższe zależności do (1) i przekształcając, otrzymujemy:

$$(3) \quad \frac{1}{y_2(t)} \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = \frac{-A}{y_1(x)} \frac{d^4 y_1(x)}{dx^4}.$$



Rys. 1



Rys. 2

Widać, że obie strony równania (3) muszą być stałymi, bo są funkcjami różnych zmiennych (odpowiednio t i x).

Dla lewej strony warunek ten jest spełniony dla dowolnej kombinacji liniowej funkcji trygonometrycznych $a_i \sin(\pm\omega t + \phi_i)$ o tej samej częstotliwości kołowej ω lub dla dowolnej kombinacji liniowej funkcji wykładniczych $b_i \exp(\pm\omega t + \psi_i)$ (gdzie a_i, b_i są dowolnymi rzeczywistymi amplitudami, a ϕ_i, ψ_i dowolnymi rzeczywistymi fazami). W pierwszym przypadku lewa strona jest równa $-\omega^2$, a w drugim $+\omega^2$. Natomiast prawą stronę spełniają dowolne kombinacje liniowe funkcji sinus i funkcji wykładniczej o tej samej liczbie falowej k :

$$(4) \quad c_j \sin(\pm kx + \phi_j) + d_j \exp(\pm kx + \psi_j),$$

a wartość prawej strony wynosi wtedy $-Ak^4$. Ponieważ wyrażenie to jest ujemne, musimy odrzucić rozwiązania zależności czasowej w postaci kombinacji liniowej funkcji wykładniczych. Ostatecznie okazuje się, że częstota $f = \omega/2\pi$ jest proporcjonalna do kwadratu liczby falowej k :

$$(5) \quad f = C \cdot k^2,$$

gdzie $C = 2\pi\sqrt{A}$.

Można dowiedzieć, że druga i trzecia pochodna odchylenia względem zmiennej x w danym punkcie są proporcjonalne odpowiednio do momentu siły i do siły działających w tym punkcie. Ponieważ moment i siła na obu końcach pręta muszą być równe zero, druga i trzecia pochodna także muszą wynosić zero. Teoretyczne przewidywania wynikające z tychże warunków brzegowych prowadzą do wniosku, że możliwe wartości liczby falowej k są rozwiązaniami równań:

$$(6) \quad \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = -\operatorname{tgh} \frac{kl}{2} \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \operatorname{tgh} \frac{kl}{2},$$

gdzie l jest długością pręta. Obliczone numerycznie wartości kl dla różnych modów są następujące: 4,7300; 7,8532; 10,9956. Aby otrzymać odpowiednie wartości k dla konkretnego pręta, wystarczy podzielić powyższe wartości przez jego długość l . Jeżeli przedstawimy teraz na wykresie zależności logarytmu zmierzonych częstotliwości (dla czterech zbadanych prętów) od logarytmu tak wyliczonych wartości k , to okaże się, że nasze punkty doświadczalne układają się na prostej, której współczynnik kierunkowy jest z dużą dokładnością równy 2 (rys. 3).

Oznacza to, że częstota kolejnych modów są wprost proporcjonalne do k^2 , co zgodne jest z przewidywaniami teoretycznymi.

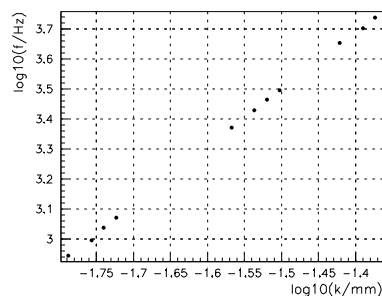
Wykorzystując tak obliczone wartości kl , możemy również wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $y_1(x)$ (wzór (2)), czyli węzły fali stojącej wzbudzonej w pręcie (obliczenia, również wykorzystujące warunki brzegowe, pomijamy). Po przedstawieniu na wykresie zależności wyników otrzymanych doświadczalnie (dla czterech prętów) od otrzymanych teoretycznie, okaże się, że punkty na wykresie układają się wzdłuż prostej o równaniu $y = x$ (rys. 4), czyli zgodnie z oczekiwaniami.

Jak widać, nawet tak proste doświadczenie, jak przedstawione w artykule, może dostarczyć zaskakujących wyników. Jest to o tyle ciekawe, że ich opis jest rzadko spotykany i niewiele osób zdaje sobie sprawę z faktu, jak skomplikowanym rezonatorem może być zwykły pręt (rurka). Dlatego warto się czasem przyjrzeć z pozoru oczywistym zjawiskom i sprawdzić, czy rzeczywiście ich przebieg jest tak prosty, jak nam się wydaje.

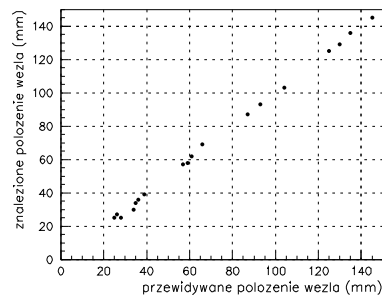
Korzystając z okazji, pragniemy jednocześnie podziękować Panu profesorowi Janowi Gajowi za poświęcony nam czas i pomoc, bez której nie powstałby niniejszy artykuł.

Pracę wykonano na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w ramach warsztatów naukowych organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci.

W przypadku fal sinusoidalnych liczba falowa k wynosi $2\pi/\lambda$. W naszym przypadku powstała fala stojąca jest superpozycją fal sinusoidalnych i wykładniczych, w związku z tym w prosty sposób nie da się go wyznaczyć z odległości między węzłami.



Rys. 3



Rys. 4

O pewnym problemie Eulera

Lev KOURLIANDTCHIK, Boris LURJE

Lev Kourliandtchik pracuje na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, a Boris Lurje – w Instytucie Matematyki w Sankt-Petersburgu.

Czy istnieje trójkąt, w którym długości boków, wysokości, dwusiecznych i środkowych są równocześnie liczbami całkowitymi? Odpowiedź na to pytanie postawione przez Eulera dotychczas nie jest znana.

Zbudowanie trójkąta, w którym całkowite są długości boków i wysokości, nie stwarza trudności.

W tym celu rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c . Wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość $\frac{2ab}{c}$. Poszukiwanym trójkątem jest, na przykład, trójkąt o bokach ac , bc , c^2 – dla trójkąta egipskiego o bokach 3, 4, 5 otrzymamy w ten sposób trójkąt o bokach 15, 20 i 25.

Zauważmy, że rozwiązania problemu Eulera można poszukiwać wśród trójkątów o elementach (długościach boków, wysokości i tak dalej) wymiernych, bowiem powiększając taki trójkąt, możemy uzyskać trójkąt o wszystkich tych elementach całkowitych.

Dlatego dalej wystarczy ograniczyć się do budowania trójkątów o elementach wymiernych.

Najpierw opiszemy konstrukcję niekoniecznie prostokątnego trójkąta o bokach i wysokościach całkowitej długości. Przypuśćmy, że mamy taki trójkąt. Sprawdźmy, że trójkąt ten jest podzielony na dwa trójkąty pitagorejskie przez wysokość poprowadzoną z wierzchołka największego kąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1.

Wykażemy, że wysokość dzieli trójkąt na dwa trójkąty pitagorejskie, czyli że a_1 i a_2 mają długości całkowite. Rzeczywiście, liczby a_1^2 , a_2^2 i $a_1 + a_2$ będą całkowite. Wtedy $a_1 - a_2 = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 + a_2}$ jest liczbą wymierną, co pociąga za sobą, że a_1 i a_2 są liczbami wymiernymi. Ponieważ ich kwadraty są liczbami całkowitymi, więc liczby a_1 i a_2 też są całkowite.

Wynika stąd, że trójkąty o wymiernych bokach i wysokościach to trójkąty powstałe przez zestawienie dwóch trójkątów pitagorejskich.

Przejdźmy teraz do budowania trójkątów o całkowitych długościach boków i dwusiecznych. Przypuśćmy więc, że mamy taki trójkąt i jest on przedstawiony na rysunku 2.

Po pierwsze zauważmy, że

$$\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2} \text{ i } \cos \frac{\gamma}{2}$$

są liczbami wymiernymi. Rzeczywiście, z twierdzenia kosinusów wynika, że

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{c^2 + l_a^2 - (\frac{ac}{b+c})^2}{2cl_a}$$

jest liczbą wymierną.

Udowodnimy, że

$$\sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2} \text{ i } \sin \frac{\gamma}{2}$$

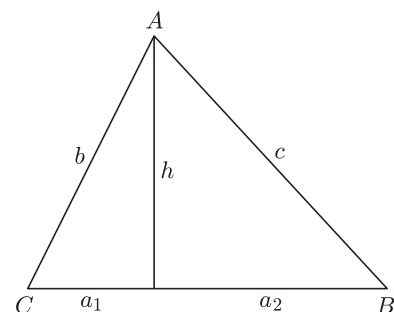
też są liczbami wymiernymi.

Najpierw zwróćmy uwagę, że wiemy już, iż $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\sin^2 \frac{\beta}{2}$ i $\sin^2 \frac{\gamma}{2}$ są liczbami wymiernymi.

Dalej mamy

$$p := \cos \frac{\beta}{2} = \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

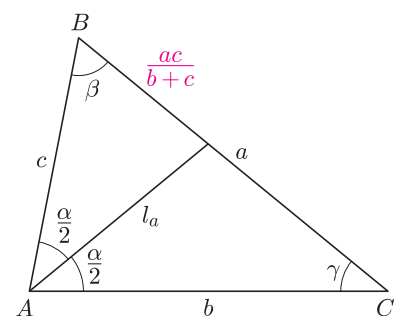
6



Rys. 1

Trójkąt pitagorejski to trójkąt prostokątny o bokach całkowitej długości.

Czytelnik zapewne bez trudu obliczy wysokości otrzymanego trójkąta za pomocą wysokości zestawianych trójkątów.



Rys. 2

Czytelnik oczywiście zauważył, że p jest liczbą wymierną.

Stąd

$$p^2 - 2p \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Podobnie postępujemy dla $\sin \frac{\beta}{2}$ i $\sin \frac{\gamma}{2}$.

A więc liczba $\sin \frac{\alpha}{2}$ jest wymierna.

Stąd natychmiast wynika, że sinusy kątów trójkąta są liczbami wymiernymi, a to oznacza, że wysokości też mają długość wymierną.

Ze wzoru

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

wynika, że liczba $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$ jest wymierna.

A więc warunkiem koniecznym istnienia żadanego trójkąta jest wymierność liczb

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \text{ i } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4}.$$

Sprawdźmy, że warunek ten jest też dostateczny. Co więcej, wystarczy żądać tylko wymierności dwóch spośród tych trzech liczb.

Rzeczywiście, zachodzi równość

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{4} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{4} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{4}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{4}}.$$

Na mocy wzorów

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}}$$

stwierdzamy, że liczby

$$\sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\gamma}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}, \cos \frac{\gamma}{2}$$

są wymierne. A więc wymierne są sinusy i kosinusy wszystkich kątów trójkąta.

Gdy dobierzemy trójkąt tak, aby średnica okręgu opisanego była liczbą wymierną, otrzymamy trójkąt, którego boki, wysokości i dwusieczne mają długości wymierne.

Podamy przykład takiego trójkąta.

Niech $\alpha = \beta$ i niech

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{3}, \quad \text{wtedy} \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4} = \frac{1}{7}.$$

Stąd

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{7}{24},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{7}{25}, \quad \sin \alpha = \frac{24}{25}, \quad \sin \gamma = \frac{336}{625}.$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy następujący trójkąt:

długości	boków	24 375	24 375	13 650,
	wysokości	13 104	13 104	23 400,
	dwusiecznych	14 000	14 000	23 400.

Dość łatwo stwierdzić, że nie jest to trójkąt Eulera, bowiem nie wszystkie jego środkowe są całkowite.

Dla Czytelników proponujemy zastanowienie się nad warunkami koniecznymi i wystarczającymi na to, by trójkąt miał boki całkowitej długości i

– całkowite pole;

– całkowity promień okręgu opisanego (wpisanego, dopisanego).

Problem dotyczący środkowych całkowitej długości jest bardziej skomplikowany, bowiem długości środkowych nie można wyrazić w sposób wymierny za pomocą funkcji trygonometrycznych kątów trójkąta. Autorzy umieją stosunkowo prosto wykazać, że ani żaden trójkąt równoramienny, ani żaden trójkąt prostokątny nie jest trójkątem Eulera. Ale to już dłuższa historia. Powróćmy do niej.

Rozwiązanie zadania M 991.

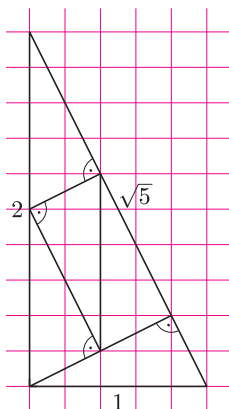
Przekształcając za pomocą jednokładności o skali 1/2 nasz prostokąt pokryty 100 kołami o promieniu 2, otrzymujemy prostokąt o dwukrotnie mniejszych wymiarach liniowych pokryty 100 kołami o promieniu 1. Z czterech takich prostokątów można złożyć prostokąt wyjściowy, skąd wynika teza.

Rozwiązanie zadania M 992.

Przekształcając za pomocą jednokładności o skali 1/2 nasz trójkąt pokryty 100 kołami o promieniu 2, otrzymujemy trójkąt o dwukrotnie mniejszych wymiarach liniowych pokryty 100 kołami o promieniu 1. Z czterech takich trójkątów można złożyć trójkąt wyjściowy (łącząc środki boków wyjściowego trójkąta, otrzymamy odpowiednie rozcięcie), skąd wynika teza.

Rozwiązanie zadania M 993.

Przekształcając za pomocą jednokładności o skali $1/\sqrt{5}$ nasz trójkąt (prostokątny!) pokryty tysiącem kół o promieniu r , otrzymujemy trójkąt prostokątny o bokach $1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1$, pokryty tysiącem kół o promieniu $r/\sqrt{5}$.



Jak pokazano na rysunku, z pięciu trójkątów prostokątnych o bokach $1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1$ można złożyć trójkąt prostokątny o bokach 1, 2, $\sqrt{5}$, skąd wynika teza.

Błyskająca supernowa

Rozbłyski gamma są najpotężniejszymi eksplozjami rejestrowanymi przez astronomów. Przez moment są jaśniejsze od galaktyk, w których znajdują się ich źródła. Po raz pierwszy zarejestrowano je w latach sześćdziesiątych XX wieku przy okazji monitorowania przestrzegania moratorium na próby nuklearne. Przez lata pozostawały niewyjaśnioną zagadką. Nie wiadomo było nawet, czy są niezwykle potężnymi eksplozjami na krańcach Wszechświata, czy też dość niepozornymi fajerwerkami w naszej Galaktyce. Kilka lat temu udało się wreszcie zarejestrować poświaty rozbłysków i z ich pomocą ustaliliśmy, że przynajmniej niektóre z nich są katastrofami w odległych zakątkach Wszechświata. Zwolennicy hipotezy lokalnej twierdzą co prawda, że pewna frakcja rozbłysków nie pasuje do kosmologicznej hipotezy, niemniej jednak istnienie eksplozji o niewyobrażalnej mocy stało się astronomicznym faktem.

Nadal nieznanym jest jednak mechanizm powstawania rozbłysków. Ostatnio popularność zdobyły dwie hipotezy (ale jest ich już dużo więcej). Według pierwszej źródłami eksplozji są zderzenia gwiazd neutronowych. Według drugiej towarzyszą one niektórym wybuchom supernowych. Choć w tym drugim przypadku i tak nie bardzo wiadomo, jaki konkretnie miałby być mechanizm generacji błysku (co nie znaczy, że brakuje pomysłów – raczej odwrotnie – jest ich zbyt dużo), to właśnie on uzyskał doświadczalne potwierdzenie w postaci analizy rentgenowskiej poświaty rozbłysku GRB 011211.

Promieniowanie gamma zostało najpierw (tradycyjnie) odkryte przez włosko-holenderskiego satelitę BeppoSAX. Był to najdłuższy z dotąd zarejestrowanych przez tego satelitę błysków. Trwał aż 270 sekund. Następnie został wysłany do społeczności astronomów alarm „rozblyskowy”. Już po 11 godzinach od odkrycia umożliwiło to skierowanie „na miejsce zbrodni” najbardziej precyzyjnego instrumentu do rejestrowania promieniowania X, jaki „fruwa” w pobliżu Ziemi, czyli X-ray Multi-Mirror satellite XMM-Newton. Newton zdążył (podobno kilka godzin później już byłoby za późno) i dokonał dwóch bardzo interesujących obserwacji.

Po pierwsze, źródło rentgenowskiej poświaty rozszerzało się z prędkością rzędu 10% prędkości światła. Po drugie, spektroskopia tego źródła pozwoliła na ustalenie, że zawiera ono dużo magnezu, krzemu, siarki, argonu i krzemu, a bardzo mało żelaza. Zmierzono rozmiar rozszerzającej się sfery materii, otrzymując w wyniku 10 miliardów kilometrów. Obserwacje te zgadzają się doskonale z hipotezą wybuchu supernowej kilka dni wcześniej.

Konkurencyjna hipoteza zderzenia gwiazd neutronowych miałaby kłopoty z wyjaśnieniem zaobserwowanego tak przestrzennego rozkładu, jak i składu rozszerzającego się obłoku materii.

Czy wszystkie rozbłyski są związane z wybuchami supernowych, a jeżeli tak, to jaki dokładnie jest mechanizm generowania promieniowania gamma – nadal nie wiadomo.

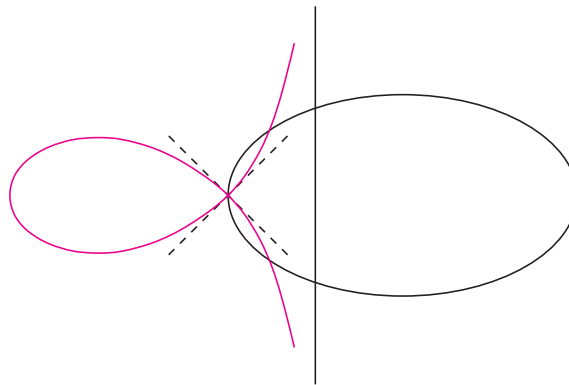
Piotr ZALEWSKI

Na podstawie internetowych materiałów XMM-Newton.

Liść Kartezjusza

Krzywa tak nazwana jest cissoidą prostej i elipsy. Cissoida dwóch krzywych danych w biegunowym układzie współrzędnych przez zależności $r_1(\varphi)$ i $r_2(\varphi)$ jest dana w tymże układzie przez zależność $r(\varphi) = r_1(\varphi) - r_2(\varphi)$.

Konkretnie liść Kartezjusza otrzymamy, biorąc elipsę o stosunku osi $\sqrt{3} : 1$ i prostą przecinającą większą półosi tej elipsy pod kątem prostym w jej połowie.



Liść Kartezjusza jest krzywą algebraiczną stopnia trzeciego i w stosownym układzie współrzędnych ma równanie $x^3 + y^3 - axy = 0$, gdzie a jest pomnożoną przez $3\sqrt{2}$ odległością prostej użytej do konstrukcji liścia od środka symetrii elipsy.

Liść Kartezjusza ma punkt samoprzecięcia; styczne w tym punkcie są prostopadłe. Ma też asymptotę – jest nią prosta użyta do jego konstrukcji. Pole obszaru ograniczonego pętlą liścia Kartezjusza jest równe polu obszaru ograniczonego przez dwie nieskończone gałęzie i asymptotę. Każde z tych pól jest równe potrojnemu polu trójkąta wyznaczonego przez asymptotę i styczne w punkcie samoprzecięcia.

M. K.

Dowodzenie nierówności

Hojoo LEE; Seoul, Korea

W tym artykule zobaczymy kilka typowych metod podejścia do zadań olimpijskich, dotyczących nierówności. Często występują w nich pewne dodatkowe warunki, takie jak

$$ab = 1, \\ xyz = 1, \\ x + y + z = 1, \text{ itp.}$$

Włączenie tych ograniczeń do nierówności pozwala niekiedy uprościć problem. Zacznijmy od następującego przykładu.

Zadanie 1 (Węgry 1996). Niech a i b będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, takimi że $a + b = 1$. Wykazać, że

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z warunku $a + b = 1$, możemy sprowadzić naszą nierówność do postaci jednorodnej:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{(a+b)(a+(a+b))} + \frac{b^2}{(a+b)(b+(a+b))}$$

lub

$$(a+b)(2a+b)(2b+a) \leq 3(a^2(a+2b) + b^2(2a+b)),$$

co po przekształceniach daje nierówność

$$2(a^3 + b^3) + 7(a^2b + ab^2) \leq 3(a^3 + b^3) + 6(a^2b + ab^2).$$

Mamy więc udowodnić

$$a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3,$$

a to wynika z nierówności

$$(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = (a-b)^2(a+b) \geq 0.$$

Nierówność $a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3$ można uogólnić.

Twierdzenie 1. Niech a_1, a_2, b_1, b_2 będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunki

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \quad \text{i} \quad \max(a_1, a_2) \geq \max(b_1, b_2).$$

Jeśli x i y są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} \geq x^{b_1}y^{b_2} + x^{b_2}y^{b_1}.$$

Dowód. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $a_1 \geq a_2, b_1 \geq b_2, a_1 \geq b_1$. Jeśli x lub y jest zerem, nierówność jest oczywiście spełniona. Przyjmijmy zatem, że obie liczby, x i y , są różne od zera. Łatwo sprawdzić, że

$$\begin{aligned} x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} - x^{b_1}y^{b_2} - x^{b_2}y^{b_1} &= \\ = x^{a_2}y^{a_2}(x^{a_1-a_2} + y^{a_1-a_2} - x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2} - & \\ - x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}) &= \\ = x^{a_2}y^{a_2}(x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2})(x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2}) &= \\ = \frac{1}{x^{a_2}y^{a_2}}(x^{b_1} - y^{b_1})(x^{b_2} - y^{b_2}) \geq 0. \end{aligned}$$

Zanim zajmiemy się przykładem nierówności z trzema zmiennymi, wprowadźmy dwa zapisy sumacyjne

$$\sum_{\text{cykl}} i \sum_{\text{sym}}.$$

Niech $P(x, y, z)$ będzie funkcją trzech zmiennych x, y, z . Definiujemy:

$$\sum_{\text{cykl}} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y),$$

$$\sum_{\text{sym}} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + \\ + P(y, z, x) + P(z, x, y) + P(z, y, x).$$

Na przykład,

$$\sum_{\text{cykl}} x^3y = x^3y + y^3z + z^3x,$$

$$\sum_{\text{sym}} x^3 = 2(x^3 + y^3 + z^3),$$

$$\sum_{\text{sym}} x^2y = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y,$$

$$\sum_{\text{sym}} xyz = 6xyz.$$

Zadanie 2 (Międz. Olimp. Matem. 1984). Niech x, y, z będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, takimi że $x + y + z = 1$. Wykazać, że

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Rozwiązanie. Dzięki warunkowi $x + y + z = 1$ możemy sprowadzić nierówność z zadania do postaci jednorodnej, tzn.

$$0 \leq (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \leq \frac{7}{27}(x + y + z)^3.$$

Nierówność po lewej stronie jest trywialna, ponieważ jest równoważna warunkom

$$0 \leq xyz + \sum_{\text{sym}} x^2y \quad \text{i} \quad x, y, z \geq 0.$$

Prawa nierówność upraszcza się do postaci

$$7 \sum_{\text{cykl}} x^3 + 15xyz - 6 \sum_{\text{sym}} x^2y \geq 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} 7 \sum_{\text{cykl}} x^3 + 15xyz - 6 \sum_{\text{sym}} x^2y &= \\ = 2 \sum_{\text{cykl}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y + 5(3xyz + \sum_{\text{cykl}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y), \end{aligned}$$

więc wystarczy wykazać, że

$$2 \sum_{\text{cykl}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y \quad \text{i} \quad 3xyz + \sum_{\text{cykl}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y.$$

Zauważmy, że

$$2 \sum_{\text{cykl}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2 y = \sum_{\text{cykl}} (x^3 + y^3) - \sum_{\text{cykl}} (x^2 y + x y^2) = \\ = \sum_{\text{cykl}} (x^3 + y^3 - x^2 y - x y^2) \geq 0.$$

Drugą nierówność możemy zapisać tak:

$$\sum_{\text{cykl}} x(x-y)(x-z) \geq 0,$$

a to jest szczególny przypadek następującej nierówności Schura.

Twierdzenie 2 (Schur). Niech x, y, z będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej r

$$\sum_{\text{cykl}} x^r(x-y)(x-z) \geq 0.$$

Dowód. Żadna permutacja trzech zmiennych nie narusza tej nierówności, więc możemy założyć, że $x \geq y \geq z$ i przekształcić nierówność do następującej postaci:

$$(x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0,$$

w której każdy wyraz po lewej stronie jest oczywiście nieujemny.

Nierzadko przydaje się następujący szczególny przypadek nierówności Schura:

$$\sum_{\text{cykl}} x(x-y)(x-z) \geq 0 \Leftrightarrow 3xyz + \sum_{\text{cykl}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2 y.$$

Oto inne zadanie z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, które można rozwiązać za pomocą tej nierówności.

Zadanie 3 (Międz. Olimp. Matem. 2000). Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi, takimi że $abc = 1$. Udowodnić nierówność

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Rozwiązanie. Nierówność z zadania jest równoważna następującej nierówności jednorodnej

$$\left(a - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{b}\right) \cdot \left(b - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{c}\right) \cdot \\ \cdot \left(c - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{a}\right) \leq abc.$$

Podstawiamy: $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, gdzie $x, y, z > 0$, otrzymując

$$\left(x^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{y^3}\right) \cdot \left(y^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{z^3}\right) \cdot \\ \cdot \left(z^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{x^3}\right) \leq x^3 y^3 z^3.$$

To można uprościć do postaci następującej

$$(x^2 y - y^2 z + z^2 x) \cdot (y^2 z - z^2 x + x^2 y) \cdot \\ \cdot (z^2 x - x^2 y + y^2 z) \leq x^3 y^3 z^3$$

lub

$$3x^3 y^3 z^3 + \sum_{\text{cykl}} x^6 y^3 \geq \sum_{\text{cykl}} x^4 y^4 z + \sum_{\text{cykl}} x^5 y^2 z^2,$$

lub

$$3(x^2 y)(y^2 z)(z^2 x) + \sum_{\text{cykl}} (x^2 y)^3 \geq \sum_{\text{sym}} (x^2 y)^2 (y^2 z),$$

co już jest szczególnym przypadkiem nierówności Schura.

Z kolei przykład nierówności z dodatkowym warunkiem $abc = 1$.

Zadanie 4 (Turniej Miast 1997). Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi spełniającymi warunek $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

Rozwiązanie. Nierówność możemy przedstawić w następującej postaci

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}} + \frac{1}{b+c+(abc)^{1/3}} + \\ + \frac{1}{c+a+(abc)^{1/3}} \leq \frac{1}{(abc)^{1/3}}.$$

Podstawiamy: $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, gdzie $x, y, z > 0$, i dochodzimy do nierówności

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

równoważnej następującej

$$xyz \sum_{\text{cykl}} (x^3 + y^3 + xyz)(y^3 + z^3 + xyz) \leq \\ \leq (x^3 + y^3 + xyz)(y^3 + z^3 + xyz)(z^3 + x^3 + xyz).$$

Z tej otrzymujemy nierówność

$$\sum_{\text{sym}} x^6 y^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^5 y^2 z^2,$$

która jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego twierdzenia.

Twierdzenie 3 (R.F. Muirhead). Jeśli $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ są liczbami rzeczywistymi, takimi że $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0$, $a_1 \geq b_1$, $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, oraz x, y, z są liczbami nieujemnymi, to

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}.$$

Dowód. Przypadek 1. $b_1 \geq a_2$:

Z nierówności

$$a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1 \text{ i } a_1 \geq b_1$$

wynika, że

$$a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1),$$

a więc

$$\max(a_1, a_2) = a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1).$$

Z kolei z

$$a_1 + a_2 - b_1 \geq b_1 + a_3 - b_1 = a_3$$

i

$$a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3$$

wnioskujemy, że

$$\max(a_1 + a_2 - b_1, a_3) \geq \max(b_2, b_3).$$

Stosując teraz dwukrotnie twierdzenie 1, mamy

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{\text{cykl}} z^{a_3} (x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1}) \geq \\ &\geq \sum_{\text{cykl}} z^{a_3} (x^{a_1+a_2-b_1} y^{b_1} + x^{b_1} y^{a_1+a_2-b_1}) = \\ &= \sum_{\text{cykl}} x^{b_1} (y^{a_1+a_2-b_1} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_1+a_2-b_1}) \geq \\ &\geq \sum_{\text{cykl}} x^{b_1} (y^{b_2} z^{b_3} + y^{b_3} z^{b_2}) = \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}. \end{aligned}$$

Przypadek 2. $b_1 \leq a_2$:

Z nierówności

$$3b_1 \geq b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + a_2 + a_3$$

otrzymujemy

$$b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$$

oraz

$$a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1,$$

a w konsekwencji

$$\max(a_2, a_3) \geq \max(b_1, a_2 + a_3 - b_1)$$

i

$$\max(a_1, a_2 + a_3 - b_1) \geq \max(b_1, b_3).$$

Stosując ponownie dwa razy twierdzenie 1, dochodzimy do nierówności

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{\text{cykl}} x^{a_1} (y^{a_2} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_2}) \geq \\ &\geq \sum_{\text{cykl}} x^{a_1} (y^{b_1} z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1} z^{b_1}) = \\ &= \sum_{\text{cykl}} y^{b_1} (x^{a_1} z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1} z^{a_1}) \geq \\ &\geq \sum_{\text{cykl}} y^{b_1} (x^{b_2} z^{b_3} + x^{b_3} z^{b_2}) = \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}. \end{aligned}$$

Ostatnie twierdzenie można także wykorzystać do rozwiązania następującego zadania z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 5 (Międz. Olimp. Matem. 1995).

Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi, takimi że $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie. Równoważnie, mamy udowodnić nierówność

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2(abc)^{4/3}}.$$

Przyjmijmy $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, gdzie $x, y, z > 0$. Wówczas nierówność przybiera postać

$$\sum_{\text{cykl}} \frac{1}{x^9(y^3+z^3)} \geq \frac{3}{2x^4y^4z^4}.$$

Likwidując mianowniki, dochodzimy do postaci następującej:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} + 2 \sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 + \sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6 &\geq \\ &\geq 3 \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5 + 6x^8y^8z^8 \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5 \right) + \\ + 2 \left(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5 \right) + \\ + \left(\sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6 - \sum_{\text{sym}} x^8y^8z^8 \right) \geq 0, \end{aligned}$$

gdzie na mocy twierdzenia 3 każdy wyraz po lewej stronie jest nieujemny.

ZADANIA

1. (Międz. Olimp. Azji i Pacyfiku 1998) Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi. Udowodnić, że

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

2. (Jugosławia 1987) Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Udowodnić, że

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

3. (Międz. Olimp. Matem. 1998, propozycja)

Udowodnić, że jeśli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz = 1$, to

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

4. (Wielka Brytania 1999) Liczby rzeczywiste nieujemne p, q, r spełniają warunek $p + q + r = 1$. Udowodnić, że

$$7(pq + qr + rp) \leq 2 + 9pqr.$$

5

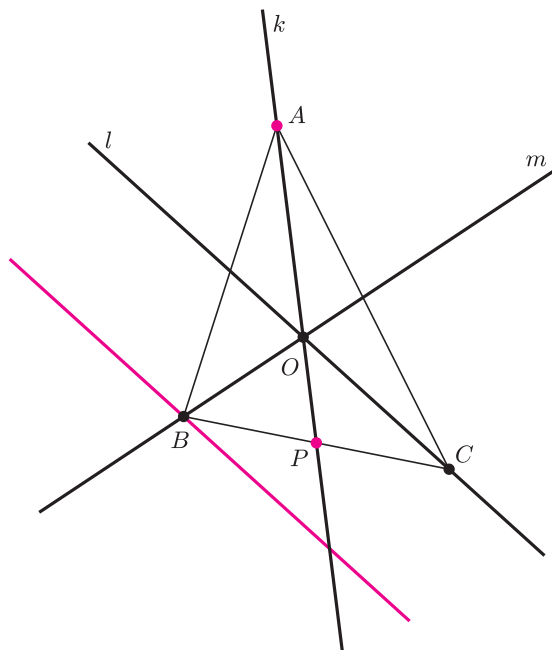
mała delta

Czy taki trójkąt istnieje ?

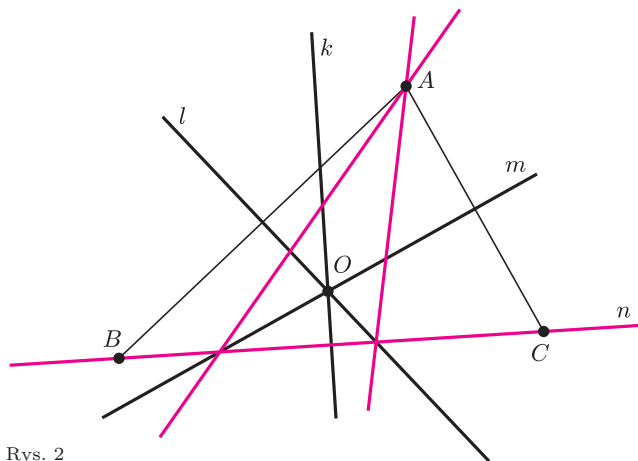
Dane są trzy proste k, l i m przechodzące przez jeden punkt O . To będzie motyw przewodni naszej zabawy.

Czy istnieje trójkąt, którego środkowe zawarte są w tych trzech prostych?

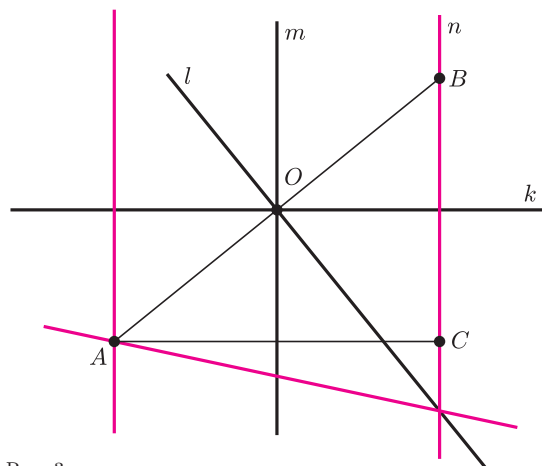
Oczywiście istnieje. Oto jak go znaleźć (rys. 1). Na jednej z prostych, powiedzmy k , obieramy jakiś punkt P (byle nie punkt przecięcia wszystkich prostych). Następnie odbijamy symetrycznie l względem P i znajdujemy przecięcie otrzymanej prostej z m – oznaczamy je B . Obraz symetryczny B względem P nazywamy C . Wreszcie po przeciwnej stronie O niż P odkładamy odcinek $2 \cdot OP$ – jego nienazwany koniec nazywamy A . I pozostawiamy Czytelnikowi uzasadnienie, że środkowe trójkąta ABC są zawarte w prostych k, l i m .



Rys. 1



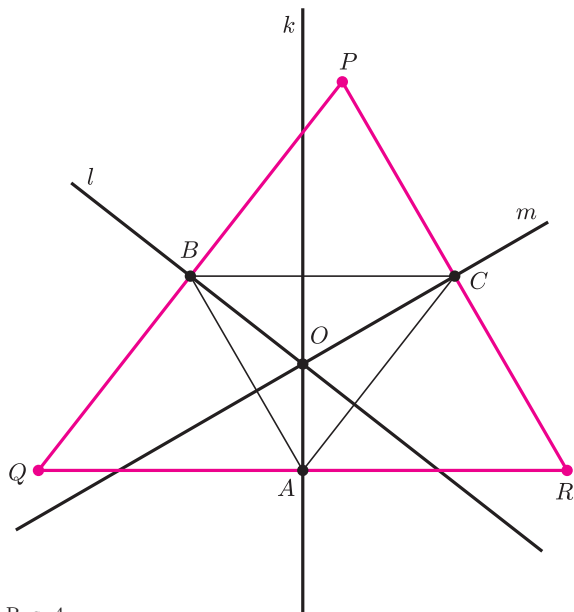
Rys. 2



Rys. 3

Czy istnieje trójkąt, którego symetralne boków zawarte są w tych trzech prostych?

Oczywiście istnieje. Oto jak go znaleźć. Prowadzimy prostą n prostopadłą do jednej z prostych k, l, m – przeważnie może to być dowolna z nich, gdy jednak dwie są prostopadłe, wybrać należy jedną z nich (rys. 2, rys. 3). Niech tą prostą będzie k . Następnie odbijamy symetrycznie n względem l i względem m – przecięcie ich obrazów nazwijmy A . Jego obrazy symetryczne względem l i m (leżące na n – prawda?) oznaczamy B i C . A Czytelnikowi zostawiamy uzasadnienie, że symetralne boków trójkąta ABC to właśnie proste k, l i m , oraz wyjaśnienie, po co były te fanaberie z prostopadłością.



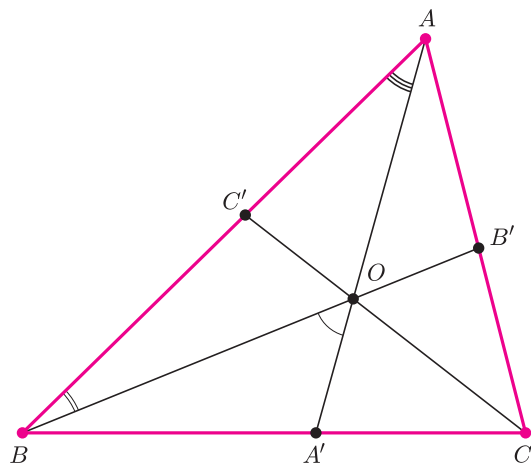
Rys. 4

Czy istnieje trójkąt, którego dwusieczne kątów zawarte są w tych trzech prostych?

To zależy od dobrej woli rozwiązującego to zadanie. A oto jak przedstawia się ta – raczej niecodzienna w matematyce – sytuacja.

Najpierw podam, jak znaleźć taki trójkąt (rys. 5). Na prostej k obieramy jakiś punkt A (byle nie O) i odbijamy go symetrycznie względem l i m . Następnie punkty przecięcia prostej łączącej obrazy punktu A z prostymi l i m nazywamy B i C . A Czytelnikowi zostawiamy uzasadnienie, że dwusieczne kątów trójkąta ABC są zawarte w prostych k, l i m .

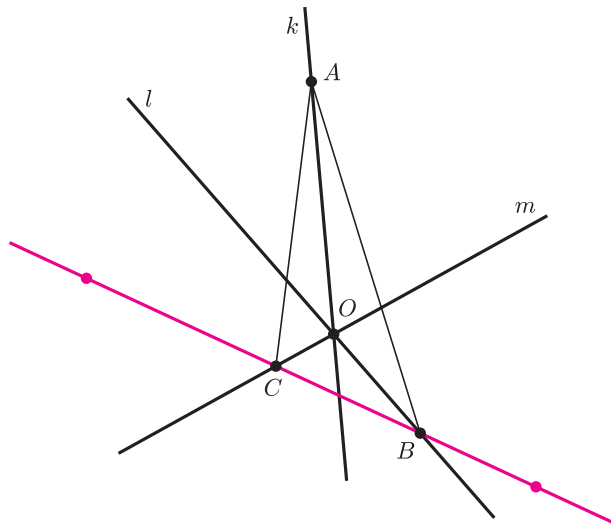
Czytelnik oczywiście bez trudu znajduje to uzasadnienie i wtedy patrzy na kolejny rysunek, na którym sytuacja jest jakby trochę inna (rys. 6). Po chwili jednak odkrywa, że tym razem proste l, m są – co prawda – dwusiecznymi, ale kątów zewnętrznych znalezionej trójkąta. I musi tak być, albowiem...



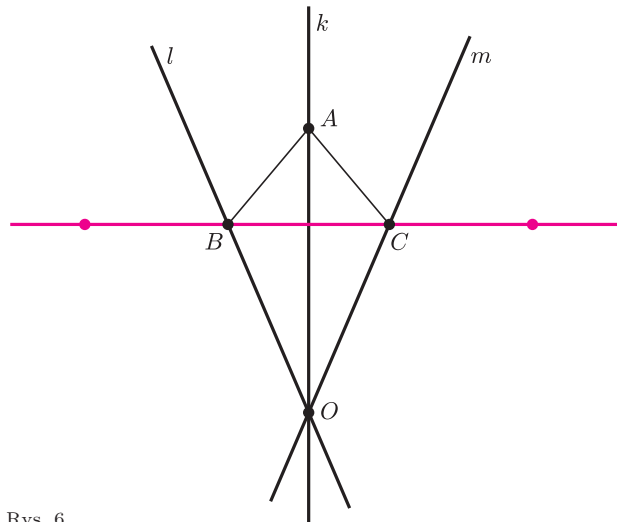
Rys. 7

Czy istnieje trójkąt, którego wysokości zawarte są w tych trzech prostych?

Oczywiście istnieje. Oto jak go znaleźć (rys. 4). Rysujemy trójkąt PQR , dla którego proste te są symetralnymi boków. Środki boków tego trójkąta nazywamy A, B i C . A Czytelnikowi zostawiamy uzasadnienie, że wysokości trójkąta ABC są zawarte w prostych k, l i m .



Rys. 5

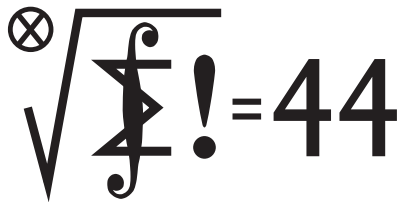


Rys. 6

Dwusieczne wewnętrznych kątów trójkąta dzielą płaszczyznę na same kąty ostre.

I tego już dowiodę sam (bo łatwe). Oznaczmy przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC z przeciwległymi bokami przez A', B' i C' (rys. 7). Gdyby np. kąt BOA' był prosty lub rozwarty, to suma kątów OAB i OBA' byłaby co najmniej równa 90° . Zatem suma kątów CAB i CBA , jako dwa razy większa, byłaby co najmniej równa 180° . A tymczasem kąty te dopiero z kątem ACB dają 180° . Sprzeczność, która dowodzi, że przypuszczenie, iż kąt między dwusiecznymi nie jest ostry, okazuje się fałszywe.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2002

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z matematyki nr 443, 444

443. Rozważamy alfabet złożony z trzech znaków: 0, 1, 2. Niech a_n będzie liczbą słów długości n , w których nie występuje blok 11 ani 22. Niech b_n będzie liczbą słów długości n , w których nie występuje blok trójelementowy złożony z trzech różnych znaków. Wykazać, że $3a_n = b_{n+1}$.

Zadanie 444 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kęt.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2002

435. Rozważamy słowa binarne dowolnej długości skończonej. Słowo powstałe przez napisanie pod rząd trzech identycznych kopii dowolnego słowa binarnego będziemy nazywać *trójniakiem*. Określamy operacje dopuszczalne. Każda taka operacja polega na rozerwaniu słowa w dowolnym miejscu i wstawieniu w powstałą lukę dowolnego trójniaka (także dopisanie trójniaka na początku lub na końcu słowa), bądź też na wykreśleniu dowolnego fragmentu

435. Przyporządkujemy słowu $W = c_1 c_2 \dots c_n$ ($c_j \in \{0, 1\}$) liczbę

$$s(W) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + nc_n = \sum_{j=1}^n j c_j.$$

Weźmy pod uwagę słowo W' powstałe z W przez wstawienie pomiędzy znaki c_k i c_{k+1} dowolnego trójniaka TTT , $T = t_1 t_2 \dots t_m$:

$$W' = c_1 \dots c_k t_1 \dots t_m t_1 \dots t_m t_1 \dots t_m c_{k+1} \dots c_n.$$

Spójrzmy, jak zmienia się wartość $s(W)$:

$$\begin{aligned} s(W') &= \sum_{j=1}^k j c_j + \sum_{i=1}^m (k+i)t_i + \sum_{i=1}^m (k+m+i)t_i + \\ &+ \sum_{i=1}^m (k+2m+i)t_i + \sum_{j=k+1}^n (3m+j)c_j = \\ &= s(W) + \sum_{i=1}^m (3k+3m+3i)t_i + \sum_{j=k+1}^n 3m c_j. \end{aligned}$$

Tak więc $s(W') \equiv s(W) \pmod{3}$. To znaczy, że reszta z dzielenia $s(W)$ przez 3 jest niezmiennikiem operacji dopuszczalnych. Ponieważ $s(01) = 2$, $s(10) = 1$, nie jest możliwe przejście od słowa 01 do słowa 10.

436. Niech f będzie jedną z szukanych funkcji. Dla liczb $x \neq 0$ zachodzi równość

$$(1) \quad f'(2x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

444. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D , E , F leżą odpowiednio na bokach BC , CA , AB , przy czym proste AD , BE , CF przecinają się w jednym punkcie. Prosta EF przecina okrąg opisany na trójkącie AEB w punktach E i P , a okrąg opisany na trójkącie AFC w punktach F i Q . Udowodnić, że punkt A jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PDQ wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki AD , BE , CF są wysokościami trójkąta ABC .

Przypominamy treść zadań:

będącego trójniakiem. Startujemy od słowa 01 i wykonujemy ciąg operacji dopuszczalnych. Czy jest możliwe uzyskanie słowa 10?

436. Znaleźć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(2x) = f(x) + x f'(2x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

która pokazuje, że funkcja f' jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jest też ciągła w punkcie 0, bowiem we wzorze (1) można przejść do granicy ($x \rightarrow 0$) w sposób następujący:

$$f'(2x) = 2 \cdot \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} \rightarrow 2f'(0) - f'(0) = f'(0).$$

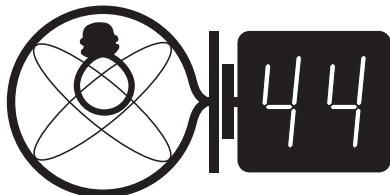
Zatem f' jest funkcją ciągłą w całym zbiorze \mathbb{R} .

Ustalmy dowolną liczbę $x_0 > 0$. Niech A będzie zbiorem tych liczb $x \geq 0$, dla których $f'(x) = f'(x_0)$. Wobec ciągłości funkcji f' jest to zbiór domknięty; jest więc w nim liczba najmniejsza α . Przypuśćmy, że $\alpha > 0$. W myśl twierdzenia Lagrange'a istnieje w przedziale $(\frac{1}{2}\alpha; \alpha)$ liczba ξ spełniająca równość

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\frac{1}{2}\alpha)}{\alpha - \frac{1}{2}\alpha} = \frac{f(\alpha) - f(\frac{1}{2}\alpha)}{\frac{1}{2}\alpha}.$$

Otrzymany iloraz jest równy $f'(\alpha)$, zgodnie ze wzorem (1). Tak więc $f'(\xi) = f'(\alpha) = f'(x_0)$, czyli $\xi \in A$, wbrew temu, że α jest najmniejszą liczbą w zbiorze A . Sprzeczność dowodzi, że $\alpha = 0$, i wobec tego $f'(0) = f'(x_0)$.

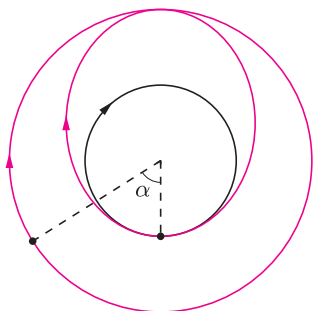
Ta równość zachodzi dla każdej liczby $x_0 > 0$. To znaczy, że funkcja f' jest stała na przedziale $(0; \infty)$. Analogicznie wykazujemy, że jest stała w przedziale $(-\infty; 0)$. Jest więc stała w zbiorze \mathbb{R} , czyli f jest funkcją postaci $f(x) = ax + b$. Nietrudno sprawdzić, że każda funkcja takiej postaci spełnia zadane równanie.



Zadania z fizyki nr 340, 341

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2002



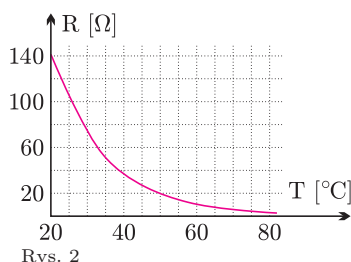
Rys. 1

340. Dwie stacje kosmiczne krążą wokół Ziemi po orbitach kołowych leżących w tej samej płaszczyźnie, przy czym zwrot obiegu orbit jest zgodny, a ich promienie wynoszą odpowiednio R_Z i $2R_Z$, gdzie R_Z jest promieniem Ziemi (oczywiście, w praktyce promień pierwszej orbity musi być nieco większy ze względu na opór powietrza). Aby przenieść się z pierwszej stacji na drugą, kosmonauta wsiada do „taksówki kosmicznej”, która odłącza się od pierwszej stacji i rozpędza do prędkości takiej, aby jej orbita sięgnęła orbity drugiej stacji (rys. 1); w chwili zbliżenia do drugiej stacji kolejne włączenie napędu „taksówki” powoduje zrównanie prędkości obu pojazdów. Oba czasy rozpędzania „taksówki” uznajemy za bardzo krótkie w porównaniu z okresem obiegu Ziemi przez którąkolwiek ze stacji.

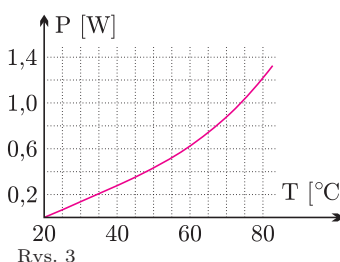
a) Ile powinien wynosić przyrost prędkości „taksówki” przy każdym włączeniu napędu? Dana jest wartość v_k prędkości kosmicznej (prędkości orbitalnej) pierwszej stacji).

b) O jaki kąt α powinna wyprzedzać druga stacja pierwszą w chwili rozpoczęcia podróży „taksówki”, czyli przy pierwszym włączeniu silników?

341. Oporność termistora półprzewodnikowego zależy od temperatury według rysunku 2, a szybkość odpływu ciepła z termistora zależy od temperatury według



Rys. 2

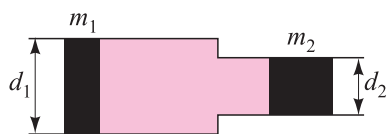


Rys. 3

rysunku 3. Jakie maksymalne napięcie można przyłożyć do termistora, nie powodując przy tym nieograniczonego wzrostu temperatury?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2002

332. Rura składa się z odcinków o średnicach d_1 i d_2 , w których mogą się poruszać bez tarcia tłoki o masach m_1 i m_2 (rys. 4). Początkowo drugi tłok był nieruchomy, a pierwszy poruszając się w prawo zaczął sprężać gaz. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby w pewnej chwili drugi tłok osiągnął energię kinetyczną równą początkowej energii pierwszego? Założyć, że przemiana gazu jest odwracalna.



Rys. 4

332. Ruch tłoków podlega równaniom

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -pS_1, \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = pS_2,$$

gdzie p jest nadwyżką ciśnienia gazu nad ciśnieniem zewnętrznym, a S_1 i S_2 – powierzchniami tłoków. Widzimy, że wielkość

$$\frac{m_1 v_1}{S_1} + \frac{m_2 v_2}{S_2}$$

pozostaje stała w czasie ruchu tłoków, a stąd

$$\frac{m_1 v_1}{S_1} = \frac{m_1 v'_1}{S_1} + \frac{m_2 v'_2}{S_2},$$

gdzie primy odpowiadają chwili, w której nastąpiło rozprężenie gazu, czyli ponowne wyrównanie ciśnienia z ciśnieniem zewnętrznym. Zgodnie z zasadą zachowania energii energia kinetyczna tłoków jest wtedy równa energii początkowej:

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2.$$

Przypominamy treść zadań:

333. Na rysunku 5 przedstawiony jest schemat pewnej zabawki fizycznej. Wewnątrz cylindra wypełnionego przezroczystą cieczą pływa szklana klepsydra z piaskiem. Początkowo klepsydra jest przy górnym końcu cylindra; zatem po jego obróceniu znajdzie się na dole i pozostaje tam, podczas gdy piasek w niej się przesypuje. Dopiero, gdy przesypie się około połowy piasku, klepsydra zaczyna powoli wypływać w górę. Dlaczego klepsydra początkowo pozostaje na dole i dlaczego zaczyna wypływać?



Rys. 5

Drugi tłok osiągnie maksymalną energię kinetyczną, jeśli $v'_1 = 0$. Jak nietrudno sprawdzić, warunek ten jest równoważny następującemu:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4.$$

(Inspiracją do opracowania tego zadania był opis tzw. działa gazowego, użytego przy wytwarzaniu metalicznego wodoru – zob. *Świat Nauki*, sierpień 2000 r.)

333. Gdy większość piasku jest w górnej komorze klepsydry, jej pozycja w cieczy jest niestabilna i gdyby pływała w niej swobodnie, to by się odwróciła o 180° . Stąd wynika pewien nacisk klepsydry na ścianki cylindra (np. górnej jej części w lewo, a dolnej w prawo), a wynikająca stąd siła tarcia przyczynia się do utrzymania klepsydry przy dnie. (Takie wyjaśnienie nasunęło się autorowi; być może Czytelnicy znajdą inne, równie logiczne.)



Rozwiązanie zadania F 573.
Oznaczmy przez p_0 ciśnienie atmosferyczne. Z równania Bernoulliego mamy:

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2),$$

zatem

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2,$$

gdzie v jest prędkością przepływu gazu wewnątrz zbiornika.



Rozwiązanie zadania F 574.
Ciągłość przepływu masy, przy zaniedbaniu zmian gęstości gazu, oznacza, że

$$Sv = S_0v_0.$$

Jeżeli otwór jest bardzo mały, tzn. $S_0 \gg S$, wtedy $v_0 \gg v$ i w równaniu na prędkość wypływu gazu otrzymanym w poprzednim zadaniu możemy pominąć człon v^2 . Wtedy wzór na prędkość wypływu przyjmuje postać:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}.$$

Siła ciągu rakiety wyraża się przez prędkość wypływu masy, tzn. jest równa $v_0 \, dM/dt$. Masa gazu wypływającego w czasie dt wynosi $dM = \rho S_0 v_0 dt$, zatem siła ciągu rakiety wynosi:

$$F_{\text{ciągu}} = \rho S_0 v_0^2;$$

biorąc pod uwagę wyrażenie na v_0 , mamy:

$$F_{\text{ciągu}} = 2S_0(p - p_0).$$

Cząstki zwykłego gazu wymieniają się energią i pędem w wyniku zderzeń. Wyobrażenie sobie takiego zderzenia jako zderzenia po prostu dwóch sprężystych kulek całkiem nieźle odpowiada rzeczywistości. Przy każdym zderzeniu łączny pęd i energia pary kulek nie zmieniają się, niemniej jednak układ zawierający np. bilion cząstek bardzo szybko ewoluuje. Przyczyną jest ogromna częstość zderzeń cząstek gazu w najczęściej spotykanych warunkach. Bardzo podobnie zachowuje się „gaz”, którego cząstkami są gwiazdy. Mechanizm zderzeń jest tu całkiem inny, gdyż gwiazdy działają wzajemnie na siebie dalekozasięgowymi siłami przyciągania (a nie krótkozasięgowymi siłami odpychania), a jednak ewolucja gazu gwiazdowego przebiega pod wieloma względami podobnie. Na przykład w obu przypadkach rozkład prędkości cząstek dąży do rozkładu Maxwella. Oznacza to, że w stanie równowagi najwięcej cząstek ma prędkość zbliżoną do średniej, a odpowiednio mniej jest cząstek bardzo powolnych i bardzo szybkich. I tu pojawia się różnica między gazem w naczyniu a zbiorowiskiem gwiazd. Mianowicie „gaz gwiazdowy” nie ma ścianek i dlatego gwiazdy wyjątkowo szybkie mogą z danej galaktyki uciec. Nie ulega wątpliwości, że w przestrzeni międzygalaktycznej błąka się sporo gwiazd wyrzuconych z galaktyk w wyniku tego elementarnego zjawiska.

A czy gwiazdy mogą powstawać w przestrzeni międzygalaktycznej? Na zdrowy rozum miejsce powstawania wydaje się mniej istotne, najważniejsze, by gwiazdy te miały z czego powstać. Wszystko wskazuje na to, że gaz międzygalaktyczny jest zbyt rzadki, by mógł stać się budulcem gwiazd, chyba że z innych powodów został już zgęszczony. O jednym takim przypadku wspomnieliśmy w *Patrz w niebo* w *Delcie* 9/2001: gwiazdy mogą powstać w strumieniu materii wyciągniętym z galaktyki działaniem sił pływowych galaktyki sąsiedniej. Niedawno wykonane obserwacje tzw. Kwintetu Stephana ujawniły drugi taki przypadek. Kwintet Stephana to znajdująca się w Pegazie ciasno zgrupowana na niebie piątka galaktyk (NGC 7317, 7318A, 7318B, 7319 i 7320), fizycznie tworząca właściwie kwartet, bo NGC 7320 do zespołu nie należy – znajduje się w zupełnie innej odległości niż pozostała czwórka. Otóż zdjęcie Kwintetu w podczerwieni wykonane przez satelitę ISO (*Infrared Space Observatory*) ujawniło obecność szóstej „plamy świetlnej” nieobecnej na zdjęciach w świetle widzialnym. Drobiazgowo badania wydają się świadczyć o tym, że jest to zgęszczony wskutek ruchu galaktyki NGC 7318B obłok materii międzygalaktycznej, który świeci dlatego, że formują się w nim młode gwiazdy. Skąd ten obłok tam się wziął – to inna sprawa. Na razie nie wiadomo, nasuwa się jednak przypuszczenie, że również wyrwany został z którejś galaktyki (a może z niejednej) wskutek działania sił pływowych.

Tomasz KWAST

Czerwiec

Gwiazda nowa to przede wszystkim gwiazda podwójna. Jednym z jej składników jest biały karzeł, a drugim olbrzym, z którego materia, czyli głównie wodór, przepływa na białego karła. Gdy zbiera się go tam dostatecznie dużo, biały karzeł wybuchowo pozbywa się go, inaczej mówiąc w otocze białego karła następuje eksplozja termojądrowa – i to jest właśnie rozbłysk gwiazdy nowej. Potem cały cykl powtarza się, a przynajmniej w to obecnie wierzymy, gdyż odstęp czasu między wybuchami liczy się setkami lat. Podobny typ gwiazd, tzw. nowe powrotne, to takie gwiazdy nowe, które wybuchają z mniejszą mocą, za to częściej. Nazwa ta nie jest zbyt szczęśliwa, bo w końcu wszystkie nowe są „powrotne”, ale akurat u nich zaobserwowano już w czasach nowożytnych po kilka rozbłysków. Taką gwiazdą jest np. T Korony Północnej, który to gwiazdozbiór wieczorem w czerwcu widać blisko zenitu. Gwiazda ta w latach 1866 i 1946 zwiększyła jasność z 10 mag

do 2 mag, czyli podczas wybuchu była jaśniejsza niż alfa tego gwiazdozbioru.

Venus jest w Raku i świeci na zachodnim niebie. Bliżej Słońca, w Bliźniętach, znajdują się Mars i Jowisz, zachodzą więc jeszcze wcześniej niż Venus, a Saturn jest za Słońcem i w ogóle go nie widać. Nów Księżycy wypada 11 VI i nastąpi wtedy obrączkowe zaćmienie Słońca, ale widoczne we wschodniej Azji, na Pacyfiku, w USA i Kanadzie. Pełnia będzie 24 VI i nastąpi wtedy półcieniowe zaćmienie Księżycy. Maksymalna faza wypada około północy, ale zaćmienia półcieniowe są właściwie niezauważalne. 12 VI Księżyc zakryje Marsa, ale zjawisko to będzie widoczne tylko z okolic arktycznych. 21 VI będzie przesilenie letnie, czyli formalnie początek lata i zarazem od tej daty dnia będzie już ubywać. Tego samego dnia nad ranem można próbować odszukać Merkurego, gdyż znajdzie się w maksymalnej kątowej odległości od Słońca.

T.K.

O RÓWNYCH SUMACH SZÓSTYCH POTĘG

Rozwiązania równania

$$(6.3.3) \quad a^6 + b^6 + c^6 = d^6 + e^6 + f^6,$$

czyli równe sumy trzech szóstych potęg znajdujemy bez trudu. W liczbach poniżej 100 mamy pięć istotnie różnych rozwiązań:

$$\begin{aligned} 23^6 + 15^6 + 10^6 &= 22^6 + 19^6 + 3^6, \\ 67^6 + 37^6 + 36^6 &= 65^6 + 52^6 + 15^6, \\ 74^6 + 47^6 + 33^6 &= 73^6 + 54^6 + 23^6, \\ 81^6 + 43^6 + 32^6 &= 80^6 + 55^6 + 3^6, \\ 81^6 + 50^6 + 37^6 &= 78^6 + 65^6 + 11^6. \end{aligned}$$

Wszystkie powyższe rozwiązania spełniają jednocześnie równanie

$$(2.3.3) \quad a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2.$$

Spośród 60 rozwiązań równania (6.3.3) w liczbach mniejszych od 1000 aż 46 spełnia równanie (2.3.3).

Najmniejszym rozwiązaniem równania (6.3.3), które nie spełnia równania (2.3.3), jest

$$138^6 + 62^6 + 25^6 = 135^6 + 92^6 + 82^6.$$

Równanie (6.3.3) ma nieskończenie wiele rozwiązań pierwotnych w liczbach całkowitych dodatnich, gdyż znane są rozwiązania parametryczne tego równania. Z rozwiązań

$$\begin{aligned} 303^6 + 185^6 + 124^6 &= 300^6 + 211^6 + 83^6, \\ 300^6 + 211^6 + 125^6 &= 289^6 + 249^6 + 68^6 \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} 303^6 + 185^6 + 125^6 + 124^6 &= 300^6 + 211^6 + 125^6 + 83^6 = \\ &= 289^6 + 249^6 + 83^6 + 68^6, \end{aligned}$$

co pozostaje prawdą po zmianie wykładnika 6 na 2.

Odnotujmy również

$$30^n + 25^n + 16^n + 7^n = 29^n + 27^n + 14^n + 8^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 6,$$

$$25^n + 21^n + 16^n + 2^n = 24^n + 23^n + 14^n + 5^n \quad \text{dla } n = 2, 4, 6,$$

$$82^n + 63^n + 61^n + 15^n + 9^n = 81^n + 69^n + 55^n + 18^n + 7^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 6,$$

$$17^n + 14^n + 12^n + 5^n + 4^n = 16^n + 16^n + 10^n + 7^n + 3^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 4, 6,$$

$$\begin{aligned} 70^n + 64^n + 47^n + 24^n + 23^n + 11^n &= \\ &= 68^n + 67^n + 44^n + 31^n + 15^n + 14^n \end{aligned} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, 6,$$

$$\begin{aligned} 84^n + 70^n + 68^n + 39^n + 30^n + 11^n + 1^n &= \\ &= 81^n + 79^n + 56^n + 50^n + 19^n + 18^n \end{aligned} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Nie jest znany rozkład szóstej potęgi na sumę sześciu szóstych potęg, mamy jednak

$$(6.1.7) \quad 1141^6 = 1077^6 + 894^6 + 702^6 + 474^6 + 402^6 + 234^6 + 74^6.$$

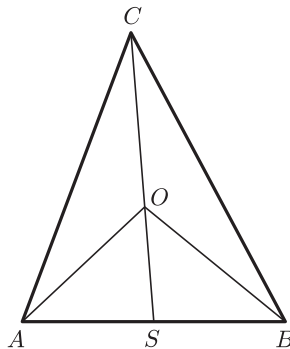
Warto przytoczyć też

$$(6.2.5) \quad 1117^6 + 770^6 = 1092^6 + 861^6 + 602^6 + 212^6 + 84^6.$$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (30)

Zadanie: W trójkącie ABC środek okręgu opisanego, wierzchołek C oraz środek boku AB leżą na jednej prostej. Dowiedz, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Rozwiązanie: Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , a S środkiem boku AB (zob. rysunek). Wówczas $AO = BO$, czyli trójkąt ABO jest równoramienny i jego środkowa OS jest zarazem jego wysokością. Skoro prosta OS jest prostopadła do boku AB , to także środkowa CS trójkąta ABC jest jego wysokością, skąd $AC = BC$.



DWIE HIPOTEZY (1)

Hipoteza: Wśród dowolnych 65000 kolejnych liczb naturalnych liczby pierwsze stanowią mniej niż 10%.

Argumenty na poparcie hipotezy:

Doświadczenie uczy, że liczby pierwsze najgęściej upakowane są na samym początku. Dokładniej, można uwierzyć, że wśród kolejnych N liczb naturalnych nie może być więcej liczb pierwszych niż wśród liczb od 2 do $N + 1$.

Dwie liczby pierwsze możemy znaleźć wśród dwóch kolejnych liczb: 2 i 3. Nigdzie dalej w ciągu liczb pierwszych nie jest tak dobrze – w najlepszym razie znajdujemy dwie liczby pierwsze wśród trzech kolejnych liczb naturalnych (liczby pierwsze bliźniacze).

Trzy liczby pierwsze znajdujemy wśród czterech kolejnych liczb: 2, 3, 4, 5. Potem wśród pięciu: 3, 4, 5, 6, 7. Nigdzie dalej wśród sześciu kolejnych liczb nie znajdziemy trzech liczb pierwszych, trzeba wziąć siedem kolejnych liczb, aby mieć nadzieję na to, że trzy z nich są pierwsze.

Wśród 30 kolejnych liczb 2, 3, ..., 31 jest aż 11 liczb pierwszych. Wśród 30 kolejnych liczb, z których najmniejsza jest większa od 5, aż 22 są podzielne przez 2, 3 lub 5, może być więc co najwyżej 8 liczb pierwszych – np. liczby pierwsze 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303 mieszczą się wśród 30 kolejnych liczb.

Jeśli więc wierzyć w powyższe argumenty, należy przyjąć, że wśród dowolnych 65000 kolejnych liczb naturalnych jest nie więcej liczb pierwszych niż wśród liczb 2, 3, 4, ..., 65001. A tu liczb pierwszych jest dokładnie 6493, czyli mniej niż 10%.

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl



Dodatek Olimpijski

Zadania II stopnia oraz finału Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

LIII OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2001/2002

ZAWODY II STOPNIA (22–23 lutego 2002)

1. Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle ADB = 2 \sphericalangle ACB \text{ oraz } \sphericalangle BDC = 2 \sphericalangle BAC.$$

Udowodnić, że $AD = CD$.

3. W n -osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi nie mniej niż $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mniej niż $n/30$ osób, należących do obu tych komisji.

4. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb pierwszych $p \leq q \leq r$, że liczby

$$pq + r, \quad pq + r^2, \quad qr + p, \quad qr + p^2, \quad rp + q, \quad rp + q^2$$

są pierwsze.

5. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości

$$AD = BD \text{ oraz } AB = CD.$$

Udowodnić, że $\sphericalangle ACD \geq 30^\circ$.

6. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n , że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$x_1 x_2 \dots x_n + y_1 y_2 \dots y_n \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \dots \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

ZAWODY III STOPNIA (3–4 kwietnia 2002)

1. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych a, b, c , że liczby $a^2 + 1$ i $b^2 + 1$ są pierwsze oraz

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1.$$

2. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL , punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

3. Na tablicy są napisane trzy nieujemne liczby całkowite. Wybieramy z tej trójki dwie liczby k, m i zastępujemy je liczbami $k + m$ i $|k - m|$, a trzecia liczba pozostaje bez zmiany. Z otrzymaną trójką postępujemy tak samo. Rozstrzygnąć, czy z każdej początkowej trójki liczb

całkowitych nieujemnych, kontynuując to postępowanie, można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ i dla każdego ciągu liczb dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n zachodzi co najmniej jedna z nierówności

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}$$

(przyjmujemy $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$ oraz $x_0 = x_n, x_{-1} = x_{n-1}$).

5. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC oraz sfera s rozłączna z płaszczyzną ABC . Przez każdy z punktów A, B, C poprowadzono prostą styczną do tej sfery. Punkty

styczności oznaczono odpowiednio K , L , M . Punkt P leży na sferze s i spełnia warunki

$$\frac{AK}{AP} = \frac{BL}{BP} = \frac{CM}{CP}.$$

Udowodnić, że sfera opisana na czworoboku $ABCP$ jest styczna do sfery s .

6. Dana jest liczba naturalna k . Określamy ciąg (a_n) wzorami

$$a_1 = k + 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k \text{ dla } n \geq 1.$$

Wykazać, że jeżeli $m \neq n$, to liczby a_m i a_n są względnie pierwsze.

Końcowa klasyfikacja

Nagrody stopnia pierwszego

Paweł PARYS (**36 pkt.**), kl. IV, LO im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach (nauczyciele: Dariusz Nowak i Józef Kalinowski).

Marcin PILIPCZUK (**36 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Agnieszka Kałamajska, Michał Krych, Leszek Sidz, Jakub Wojtaszczyk i Piotr Przytycki).

Wojciech CZERWIŃSKI (**35 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Wojciech Boratyński, Jerzy Konarski i Jakub Wojtaszczyk).

Michał JÓŹWIKOWSKI (**35 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciele: Jerzy Konarski, Wojciech Boratyński i Edward Stachowski).

Roman ŁOMOWSKI (**35 pkt.**), kl. IV, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Henryk Pawłowski, Lev Kourliandtchik i Anna Karaszewska).

Jarosław WRONA (**34 pkt.**), kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: Andrzej Bysiewicz).

Nagrody stopnia drugiego

Michał LASOŃ (**30 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Lucyna Cięciwa, Ryszard Gruca i Mieczysław Jędrzejowski).

Krzysztof DZIOŁAK (**29 pkt.**), kl. IV, I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie (n.: Paweł Rudecki).

Nagrody stopnia trzeciego

Kamil DUSZENKO (**26 pkt.**), kl. II, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Bożena Ingłot).

Mateusz MICHAŁEK (**26 pkt.**), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka, Ryszard Gruca i Tomasz Michałek).

Aleksander ZABŁOCKI (**26 pkt.**), kl. III, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (n.: Zbigniew Bobiński i Maria Kobus).

Karol CWALINA (**24 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Wojciech Boratyński, Jerzy Konarski, Edward Stachowski, Jakub Wojtaszczyk i Kazimierz Cegiłka).

Krzysztof GRYGIEL (**24 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Jerzy Konarski).

Jakub HERCZYŃSKI (**24 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Jerzy Konarski, Wojciech Boratyński i Edward Stachowski).

Witold REBACZ (**24 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Lucyna Cięciwa, Zdzisław Pogoda, Mieczysław Jędrzejowski, Witold Jarnicki, Grzegorz Kapustka i Michał Kapustka).

Wojciech SAMOTIJ (**24 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Wiesław Suchocki i Cezary Urban).

Lech STAWIKOWSKI (**24 pkt.**), kl. II, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Augustyn Kałuża, Zbigniew Romanowicz i Rafał Kulik).

Bartosz WALCZAK (**24 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Lucyna Cięciwa, Mieczysław Jędrzejowski i Ryszard Gruca).

Bartłomiej ROMAŃSKI (**23 pkt.**), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Wiktor Bartol i Jerzy Bednarczuk).

Robert PISZCZATOWSKI (**22 pkt.**), kl. IV, I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku (n.: Zofia Parchanowicz).

Wyróżnienia

Paweł JANUSZEWSKI (**20 pkt.**), kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Lucyna Cięciwa, Zdzisław Pogoda i Mieczysław Jędrzejowski).

Marek MISZTAŁ (**20 pkt.**), kl. IV, II LO w Końskich (n.: Adam Kowalczyk).

Maciej BRYŃSKI (**19 pkt.**), kl. IV, I LO im. Jana Smolenia w Bytomiu (n.: Halina Pasieczna i Józef Kalinowski).

Kamil FABER (**19 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Waldemar Pałuba, Jakub Wojtaszczyk, Edward Stachowski i Tomasz Żukowski).

Piotr DANILEWSKI (**18 pkt.**), kl. II, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka i Ryszard Gruca).

Joanna DOMAN (**18 pkt.**), kl. IV, IX LO im. Karola Libelta w Poznaniu (n.: Ryszard Doman).

Paweł GAWRYCHOWSKI (**18 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Wiesław Suchocki, Cezary Urban, Artur Jeż i Mateusz Kwaśnicki).

Tomasz KAZANA (**18 pkt.**), kl. IV, VIII LO im. Władysława IV w Warszawie (n.: Grażyna Czernikowska i Iwona Kazana).

Tomasz KAZIMIERCZUK (**18 pkt.**), kl. III, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (n.: Ewa Wierdak).

Andrzej KOŚNIKOWSKI (**18 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Stanisław Buś i Zbigniew Romanowicz).

Krzysztof KULEWSKI (**18 pkt.**), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Wiktor Bartol i Jerzy Bednarczuk).

Jakub ŁOPUSZAŃSKI (**18 pkt.**), kl. IV, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Augustyn Kałuża, Hanna Garuga i Przemysław Szczepaniak).

Krzysztof NALEWAJKO (**18 pkt.**), kl. IV, LO im. Jana Bażyńskiego w Ostródzie (n.: Anna Dmitruk).

Piotr POWAŁOWSKI (**18 pkt.**), kl. IV, V LO przy Lubuskim Ośrodku Doskonalenia Nauczycieli w Zielonej Górze (n.: Dorota Krassowska).

Marek RAMS (**18 pkt.**), kl. IV, Katolickie LO oo. Pijarów w Krakowie (n.: Waclaw Tomala, Witold Jarnicki, Michał Kapustka, Grzegorz Kapustka i Krzysztof Reczek).

Jerzy SODZAWICZNY (**18 pkt.**), kl. IV, I LO im. Edwarda Dembowskiego w Gliwicach (n.: Małgorzata Urgacz).

Przemysław UZNAŃSKI (**18 pkt.**), kl. III, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (n.: Wojciech Tomalczuk i Witold Zakrzacki).

Karol WRONSKI (**18 pkt.**), kl. IV, VI LO im. Wacława Sierpińskiego w Gdyni (n.: Irena Hofman-Kotewa).

Maksymilian HUMPICH (**17 pkt.**), kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Jerzy Konarski, Wojciech Boratyński, Jakub Wojtaszczyk i Piotr Przytycki).

Michał KORCH (**17 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Agnieszka Kałamajska, Leszek Sidz, Michał Krych, Jakub Wojtaszczyk, Wojciech Tomalczuk i Piotr Przytycki).

Aleksandra KWIATKOWSKA (**17 pkt.**), kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Wiesław Suchocki, Artur Jeż i Mateusz Kwaśnicki).

Marcin MICHAŁSKI (**17 pkt.**), kl. III, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (n.: Wojciech Tomalczuk i Witold Zakrzacki).

Jarosław PASZEK (**17 pkt.**), kl. IV, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (n.: Wojciech Tomalczuk, Witold Zakrzacki i Gerard Paszek).

Michał STAROMIEJSKI (**17 pkt.**), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Ryszard Gruca, Janina Kłapyta i Paweł Walter).

Marcin SUSZCZEWICZ (**17 pkt.**), kl. II, XIII LO w Szczecinie (n.: Beata Bogdańska i Adam Neugebauer).

Grzegorz SZUBA (**17 pkt.**), kl. IV, I LO im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie (n.: Jacek Bagiński, Grażyna Komarzyniec, Teresa Markiewicz, Leszek Pieniążek, Jacek Dymel, Witold Jarnicki i Grzegorz Kapustka).

Wiktor TOMCZAK (**17 pkt.**), kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Gdańsku (n.: Andrzej Danke).

Jan ŻANKOWSKI (**16 pkt.**), kl. IV, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (n.: Henryk Pawłowski).



XLV OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2001/2002

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (druga seria)

1. Planetoidy – drobne ciała Układu Słonecznego – mają różną strukturę wewnętrzną. Część z nich stanowi konglomerat wielu elementów spojonych jedynie siłami grawitacji. Sporządź wykres zależności minimalnych okresów rotacji takich planetoid od ich średniej gęstości, w zakresie od 2500 do 3500 kg/m³. Upraszczająco przyjmij, że planetoidy mają kształt sferyczny.

2. Podczas całkowitego zaćmienia Księżyca obserwator na Ziemi może widzieć nad horyzontem Słońce lub Księżyc.

Czy są tacy obserwatorzy, którzy w fazie całkowitego zanurzenia Księżyca w stożku cienia Ziemi nie widzą nad horyzontem żadnego z tych ciał niebieskich. Czy są tacy, dla których w takiej sytuacji obydwie te ciała niebieskie w całości znajdują się nad horyzontem.

Przedyskutuj ten problem dla obserwatora na lądzie i na morzu.

4. Omów pojęcie liczby Wolfa, krótko opisz do czego jest stosowana i jakie dotąd dzięki niej uzyskano wyniki. Tabela podaje miesięczne średnie liczby Wolfa z lat 1999–2001:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1999.	67,9	64,6	70,3	64,6	100,9	150,2	119,9	97,9	74,9	118,7	131,9	88,6
2000.	93,3	116,3	140,7	121,4	119,8	124,1	163,2	121,1	101,3	95,3	106,2	103,0
2001.	96,7	85,1	117,3	110,9	94,0	131,8	79,7	109,2				

Przeanalizuj te dane pod kątem stanu aktywności słonecznej w tym czasie.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Czy ze stacji badawczej im. Arctowskiego, położonej w miejscu o współrzędnych geograficznych $\varphi = 62,2^\circ$ S, $\lambda = 58,5^\circ$ W, można oglądać program telewizyjny satelitarnej nadawany z satelity geostacjonarnego znajdującego się nad południkiem 15° E?

Załącz, że Ziemia jest kulą, a program można odbierać w tych miejscach, dla których satelita znajduje się ponad horyzontem astronomicznym.

Jako dane przyjmij: pierwszą prędkość kosmiczną $v = 7,9$ km/s, promień Ziemi $R = 6400$ km i dobę gwiazdową $P = 23^h 56^m$.

2. Jasność bolometryczna gwiazdy zmiennej fizycznie waha się w ciągu okresu o $\Delta m = 0,8^m$. Przyjmując, że w momencie minimum jasności gwiazda ma temperaturę efektywną $T_1 = 2000$ K, a w momencie maksimum jasności $T_2 = 2800$ K wyznacz dla tych momentów procentową zmianę promienia.

3. W oddziaływaniach jądrowych ważną rolę spełniają neutrino. W szczególności powstają one w dużej ilości w trakcie ewolucji gwiazd, zarówno ciągu głównego, jak i w ostatnich etapach ewolucji np. w gwiazdach neutronowych. Opisz jak wygląda ruch neutrino z centrum Słońca do jego powierzchni oraz analogiczny ruch

3. Pewnego dnia 1854 roku żaglowiec kliper „Champion of the Seas” znajdował się na półkuli południowej płynąc bardzo szybko w sztormie. Udało się jednak określić jego pozycję geograficzną z pomiaru górowania Słońca. Udało się również określić pozycję z następnej kulminacji, która nastąpiła 23 godziny i 17 minut później. Log (przyrząd do pomiaru przebytej przez statek drogi) wskazał przebycie między tymi kulminacjami fantastycznej dla żaglowca odległości 465 mil morskich (wykazywanej wśród rekordowych przebiegów dobowych żaglowców). Zakładając kierunek żeglugi wzdłuż równoleżnika i pomijając zmiany wartości równania czasu oblicz szerokość geograficzną na jakiej odbywała się żegluga.

Uwaga. 1 mila morska to z definicji jedna minuta szerokości geograficznej lub inaczej odległość dwóch punktów na południku różniących się o jedną minutę szerokości geograficznej. W rozwiązaniu zakładamy kulistość Ziemi.

w przypadku gwiazdy neutronowej o tej samej co Słońce masie i promieniu równym 10 km. Odpowiedz (w świetle tego opisu), czy i w jakim przypadku należałoby uwzględnić neutrino przy obliczaniu ciśnienia wewnątrz gwiazdy.

Załącz, że zarówno w Słońcu, jak i w gwiazdzie neutronowej neutrino rozpraszają się głównie na nukleonach. Prawdopodobieństwo oddziaływania neutrin z nukleonami opisane jest przekrojem czynnym, który można uważać za stały i równy $\sigma = 10^{-45}$ m². Oddziaływania neutrin z innymi cząstkami można pominąć.

Przyjmij, że masa i rozmiary Słońca wynoszą odpowiednio $2 \cdot 10^{30}$ kg i $7 \cdot 10^5$ km oraz załącz, że gęstość gwiazdy neutronowej i Słońca są stałe. Czy w świetle faktu, że gęstość w centrum Słońca nie przekracza 160 g/cm³, to ostatnie założenie jest istotne?

Potrzebne stałe uniwersalne odszukaj samodzielnie.

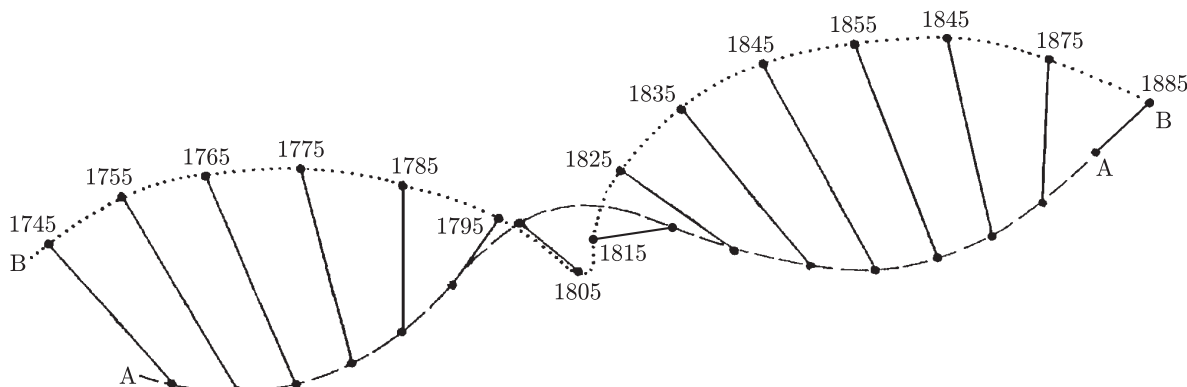
Wskazówka. Oszacuj średnią drogę swobodną neutrino w materii ciał obu typów.

Średnia droga swobodna, to średnia odległość jaką pokona neutrino między reakcjami. Jest ona opisana wzorem: $x_0 = \frac{1}{\sigma \cdot N}$, gdzie N jest liczbą cząstek rozpraszających w jednostce objętości.

4. Zmiany położenia na sferze niebieskiej składników gwiazdy fizycznie podwójnej wywołane są wzajemnym ruchem obiegowym gwiazd oraz ruchem środka masy układu w przestrzeni. Na rysunku 1 linią przerywaną wykreślono zmiany położenia składnika A, natomiast linią wykropkowaną – składnika B. Dla wybranych lat

zaznaczono wzajemne usytuowanie obu gwiazd. Metodą graficzną wyznacz mimośród keplerowskiej orbity składnika B wokół składnika A oraz okres obiegu i moment przejścia składnika B przez peryastron.

Wskazówka. Na podstawie danych wynikających z rysunku można skonstruować rzut orbity keplerowskiej na sferę niebieską.



Rys. 1

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Gwiazda zaćmieniowa o identycznych składnikach, z których każdy ma masę $1 M_{\odot}$ i o okresie zmian jasności $P_z = 0,750000$ doby, tworzy układ fizycznie podwójny z inną gwiazdą o masie $1,8 M_{\odot}$, znajdującą się w odległości $a = 5,7$ AU.

Jak będą się zmieniały obserwowane momenty minimów gwiazdy zaćmieniowej względem efemerydy liniowej

$$T_{\text{obl}} = T_o + P_z \cdot E,$$

gdzie E jest liczbą całkowitą, a T_o – wybranym momentem początkowym? Przyjmij, że wszystkie gwiazdy poruszają się po orbitach kołowych w tej samej płaszczyźnie. Obliczenia przeprowadź w układzie związanym ze środkiem Słońca.

2. W centrach galaktyk znajdują się duże masy rejestrowane dzięki analizie prędkości obiegających je gwiazd. W szczególności, w centrum Mlecznej Drogi znajduje się masa o wartości równej $2,6 \cdot 10^6$ mas Słońca. Zwykle uważa się, że takie masy są w formie czarnych dziur. Być może nie jest to jedyna możliwość. Jedną z konkurencyjnych hipotez jest koncepcja, że taką masą może być kula neutrin. Okazuje się, że jeden z modeli teoretycznych przewiduje istnienie pewnego rodzaju neutrin, tzw. neutrin sterylnych, które mogłyby tworzyć kule o masach rzędu milionów mas Słońca i rozmiarach zgodnych z wynikami pomiarów astronomicznych. Koncepcja jest o tyle obiecująca, że dość łatwo można ją będzie w ciągu najbliższych lat zweryfikować. Według niej neutrin sterylne rozpada się bowiem na dwa takie same kwanty gamma i jedno ze zwykłych neutrin, przy czym prawie całą energię spoczynkową neutrina sterylnego unoszą kwanty gamma. Jeżeli więc stwierdzi się przewidywany rodzaj promieniowania, będzie można tę koncepcję potwierdzić. Wprawdzie rejestracja tych kwantów jest (używając przyrządów umieszczonych na orbicie) dość łatwa i da się zarejestrować nawet strumień rzędu 10^{-16} W/m², to jednak należy się liczyć z tym, że w wyniku pochłaniania w materii otaczającej centrum Galaktyki, w okolicy Ziemi dociera co najwyżej co tysięczny kwant. Oszacuj, ile powinien wynosić półokres życia neutrin sterylnych, aby hipoteza o kuli neutrinowej była możliwa do weryfikacji obserwacyjnej. Odległość

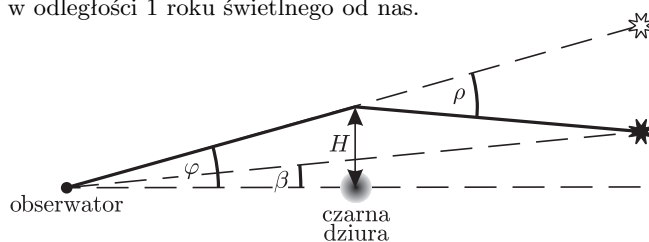
do centrum galaktyki wynosi 28 tysięcy lat świetlnych, a przewidywana masa neutrin sterylnych ok. $m = 15$ keV. Proces rozpadu cząstek opisany jest wzorem

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right),$$

gdzie N i N_0 są odpowiednio aktualną i początkową liczbą cząstek, t jest czasem, a T – okresem półrozpadu. Załóż, że rozważana neutrinowa kula jest na tyle „zimna”, by jej masa była bliska sumie mas tworzących ją cząstek.

Uwaga. Jest zupełnie oczywiste, że neutrinu sterylnego musi mieć okres półrozpadu co najmniej rzędu wieku Wszechświata – w przeciwnym przypadku obiekt nie byłby wystarczająco trwały, by do teraz istnieć w Galaktyce. Tym samym, w małych przedziałach czasu $N \approx N_0$, lub inaczej $\exp(-\frac{\ln 2}{T} t)$, co może znacznie ułatwić rachunki.

3. Pod wpływem dużych pól grawitacyjnych promienie świetlne odchylają się. Teoretycznie możliwe jest zaobserwowanie podwójnych obrazów gwiazd wskutek istnienia czarnej dziury między obserwatorem a gwiazdą. Spróbuj oszacować przydatność praktyczną tej metody do odkrycia hipotetycznej czarnej dziury o masie Słońca w odległości 1 roku świetlnego od nas.

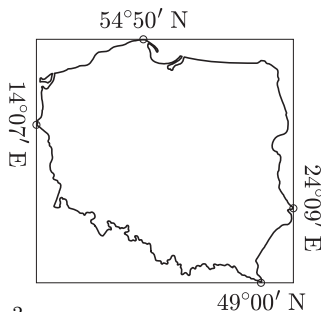


Uwagi:

- ugięcie ρ promienia wynosi $\rho = \frac{2R_g}{H}$, gdzie R_g – promień grawitacyjny czarnej dziury,
- jasność I obrazu gwiazdy powstałego wskutek zakrzywienia światła w polu czarnej dziury dana jest wzorem:

$$I = \frac{\left(\frac{\varphi}{\beta}\right)^2}{\left|2\frac{\varphi}{\beta} - 1\right|} \cdot I_0,$$

- gdzie I_0 – jasność gwiazdy niezaburzona, pozostałe symbole z powyższych uwag wyjaśnia rysunek,
- rozwiązanie ułatwią rachunki przybliżone, stosowane dla małych kątów.



Rys. 2

Korzystając z udostępnionych materiałów, określ z możliwie największą dokładnością datę oraz odległość sztucznego satelity od Ziemi w momencie obserwacji.

6. Tabela podaje przewidywane dane dotyczące przelotów niektórych sztucznych satelitów Ziemi, które można będzie dostrzec z tarasu naszego obserwatorium astronomicznego, dzisiaj w godzinach 19.00–19.45.

Na schematycznej mapce (rys. 3) nieba zaznacz te części torów satelitów, które uda Ci się zaobserwować gołym okiem oraz podaj choć jeden moment przejścia satelity przez jakiś charakterystyczny układ gwiazd lub w pobliżu zidentyfikowanych przez Ciebie ciał niebieskich. Na mapce jest pokazany przewidywany tor jednego ze słabszych satelitów Okean 1-7.

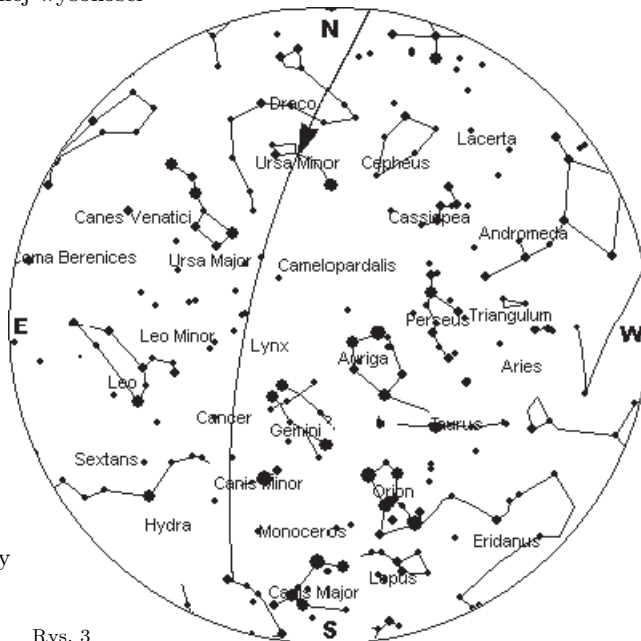
4. Jakie warunki powinny być spełnione, aby podczas górowania Księżyca obserwator znajdujący się na terenie Polski widział Księżyc na minimalnej wysokości.

Oblicz wartość tej minimalnej wysokości

z dokładnością do jednej minuty kątowej (rys. 2).

Potrzebne dane liczbowe wyszukaj samodzielnie.

5. Oglądamy widok nieba z pokładu sztucznego satelity Ziemi w jakimś dniu 2002 roku.



Rys. 3

Nazwa	Jasność (w wielk. gwiazd.)	Pojawienie się satelity			Największa wysokość satelity		
		moment (CSE)	wysokość w stop.	kierunek	moment (CSE)	wysokość w stop.	kierunek
Kosmos 2367	2,6	19 ^h 06 ^m	10	WSW	19 ^h 10 ^m	43	NW
Kosmos 1151 Rakieta	3,9	19 ^h 07 ^m	10	N	19 ^h 11 ^m	58	ENE
Kosmos 426 Rakieta	3,8	19 ^h 08 ^m	10	NNW	19 ^h 12 ^m	59	ENE
UARS	3,8	19 ^h 09 ^m	10	NW	19 ^h 13 ^m	37	NNE
Okean 1-7	4,3	19 ^h 09 ^m	10	N	19 ^h 14 ^m	67	ENE
Kosmos 1862 Rakieta	4,3	19 ^h 10 ^m	10	N	19 ^h 15 ^m	65	ENE
Lacrosse 4 Rakieta	2,5	19 ^h 15 ^m	10	NW	19 ^h 20 ^m	81	WSW
Okean O Rakieta	3,8	19 ^h 26 ^m	28	ENE	19 ^h 26 ^m	28	ENE
Meteor PRIRODA	4,3	19 ^h 42 ^m	54	SSE	19 ^h 43 ^m	80	ENE
Meteor 1-31 Rakieta	3,9	19 ^h 43 ^m	31	S	19 ^h 45 ^m	75	WSW

Końcowa klasyfikacja

Laureaci

I miejsce Aleksander SĄDOWSKI, kl. IV, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Mariusz Sobczak).

II miejsce Krzysztof NALEWAJKO, kl. IV, LO im. Jana Bożyńskiego w Ostródzie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Ryszard Dakowski).

III miejsce Tomasz TYRANOWSKI, kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: Teresa Mach).

IV miejsce Piotr GUZIK, kl. II, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr inż. Grzegorz Depczyński).

Finaliści

V miejsce Przemysław KLIŚ, kl. IV, Zespół Szkół Mechaniczno-Elektrycznych w Żywcu (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Bożena Piątek).

VI miejsce ex aequo

Krzysztof BARCZYŃSKI, kl. III, LO im. Bolesława Chrobrego w Pszczynie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Cezary Filipiuk).

Radosław MAKSYM, kl. III, XLI LO im. Joachima Lelewela w Warszawie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Kazimierz Piotrowski).

Pozostali uczestnicy finału

Mariusz FIRSZT, kl. III, VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach;

Bartosz FORMAL, kl. III, I LO im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie;

Łukasz GŁOWACKI, kl. IV, I LO im. Juliusza Słowackiego w Skarżysku-Kamiennej;

Michał HARASIMOWICZ, kl. II, I LO im. Tadeusza Kościuszki w Legnicy;

Piotr KOKOCKI, kl. II, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu;

Łukasz KRYSIAK, kl. II, V LO w Piotrkowie Trybunalskim;

Dawid ŁUSZCZKI, kl. III, II LO im. Pułkownika Leopolda Lisa-Kuli w Rzeszowie;

Michał PELCZAR, kl. III, V LO w Bielsku-Białej;

Paweł PUTERLA, kl. IV, II LO im. Mikołaja Kopernika w Mielcu;

Rafał SAMBORSKI, kl. II, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim;

Piotr STANKIEWICZ, kl. IV, II Społeczne LO w Warszawie;

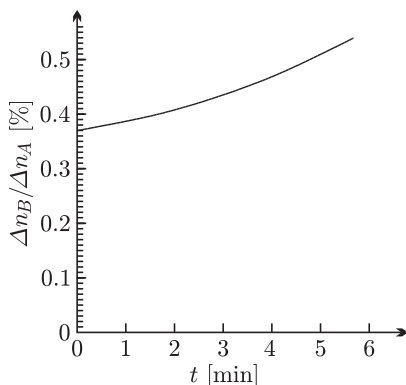
Paweł WOLAK, kl. IV, I LO Collegium Gostomianum w Sandomierzu.

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Nad elektroniczną wagą zwisa swobodnie jednorodny sznurek o masie $M = 0,01$ kg i długości $L = 1$ m. Jego koniec dotyka szalki wagi. Sznurek jest wiotki, to znaczy zmiana jego kształtu nie wymaga wykonania pracy. W pewnym momencie sznurek puszczono i zaczął on spadać w taki sposób, że jego część znajdująca się nad szalką była stale pionowa. Jakie było maksymalne wskazanie wagi? Załóż, że waga bez opóźnienia wskazuje aktualny nacisk na szalkę.

2. Pewna próbka zawiera gazowy tlen w postaci cząsteczek O_2 składających się z dwóch atomów ^{16}O (cząsteczki A) lub jednego atomu ^{16}O i jednego atomu ^{18}O (cząsteczki B). Liczbę cząsteczek zbudowanych z dwóch atomów ^{18}O można zaniedbać.

Próbkę podgrzano do wysokiej temperatury, tak by zaczęła wydzielać gaz, a następnie wyznaczono zależność od czasu wielkości $r(t) = \Delta n_B / \Delta n_A$, gdzie Δn_A (Δn_B) oznacza liczbę cząsteczek A (B) wydzielanych z próbki w ciągu krótkiego czasu Δt . Otrzymana w doświadczeniu zależność $r(t)$ przedstawiona jest na rys. 1.



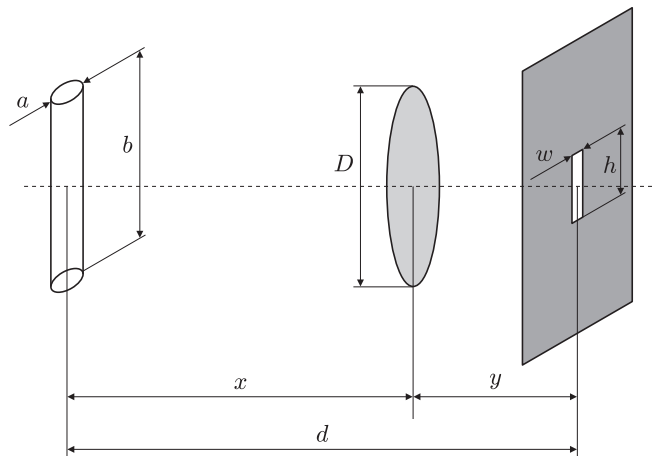
Rys. 1

- Uzasadnij, że dla każdego rodzaju cząsteczek spełniona jest zależność $\Delta n = \alpha n \Delta t$, gdzie n oraz Δn oznaczają odpowiednio liczbę cząsteczek danego rodzaju w próbce oraz w gazie wydzielanym przez próbkę w czasie Δt . Znajdź zależność współczynnika α od masy cząsteczki i temperatury gazu.
- Oznaczmy przez n_{0A} oraz n_{0B} liczbę cząsteczek A oraz B zawartych w próbce przed podgrzaniem. Ile wynosiła wartość n_{0B}/n_{0A} oraz jaki był początkowy (przed podgrzaniem) stosunek liczby atomów ^{16}O do liczby atomów ^{18}O w badanej próbce?
- Jaka jest fizyczna przyczyna zmienności funkcji $r(t)$, tzn. dlaczego skład izotopowy wydzielanego gazu zmienia się w czasie?

Przyjmij, że wydzielanie gazu przez próbkę jest równoważne jego wypływowi z naczynia przez mały otworek.

3. Aby zbadać widmo źródła światła, na przykład rurki ze świecącym gazem, wiązkę światła z tego źródła kieruje się na szczelinę wejściową spektrometru. Ze względu na ograniczoną czułość tego przyrządu ważne jest, by możliwie duża część promieniowania wyemitowanego przez źródło trafiła do spektrometru. Ponieważ nie zawsze jest możliwe ustawienie źródła światła tuż przed szczeliną, pomiędzy źródłem a przyrządem ustawia się soczewkę skupiającą, której zadaniem jest wytworzenie obrazu źródła w płaszczyźnie szczeliny i zwiększenie w ten sposób mocy światła przechodzącego przez nią.

Rozważ układ przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2

Rozciągnięte źródło światła o mocy $P_0 = 10$ mW ma kształt rurki o średnicy $a = 1$ mm i wysokości $b = 25$ mm. Ustawione jest ono w odległości d od szczeliny spektrometru. Pomiedzy źródłem a spektrometrem umieszczona jest soczewka skupiająca o średnicy $D = 30$ mm i ogniskowej $f = 30$ mm. Soczewka daje ostry obraz źródła na szczelinie.

- Wyznacz odległość d_{\max} źródła światła od szczeliny oraz odległość y_{\max} soczewki od szczeliny, przy których moc światła przechodzącego przez szczelinę jest największa. Wyznacz tę maksymalną wartość mocy. Przyjmij, że szczelina ma kształt prostokąta o wymiarach $w = 0,1$ mm i $h = 2$ mm. Jej dłuższy bok jest równoległy do osi rurki. Uwzględnij też warunek, że spektrometr działa poprawnie, gdy rozmiar pionowy obrazu jest nie mniejszy niż wysokość szczeliny h .
- Przeprowadź analizę zależności wyznaczonej maksymalnej mocy P_{\max} od parametrów opisujących soczewkę, czyli od D i f .

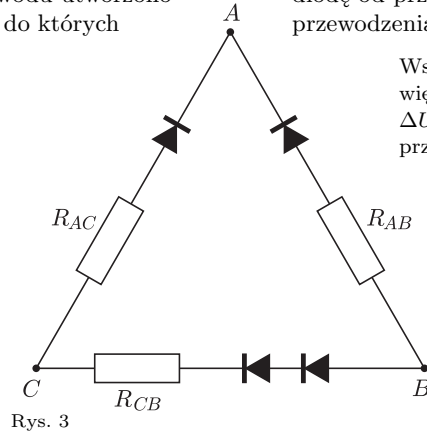
Przyjmij, że rozkład natężenia promieniowania można uznać za izotropowy (taki jak od źródła punktowego).

Zadanie doświadczalne. Cztery identyczne diody oraz trzy oporniki o oporach nie różniących się od siebie o więcej niż 2% połączono szeregowo w zamknięty obwód elektryczny. Elementy obwodu zostały umieszczone w rurkach izolacyjnych w taki sposób, że nie można ustalić ich rozmieszczenia. W trzech punktach obwodu utworzono kontakty oznaczone literami A , B oraz C , do których można podłączyć przewody elektryczne.

Masz do dyspozycji:

- woltomierz,
- amperomierz,
- zasilacz napięcia stałego, regulowanego w zakresie 0–4,5 V,
- przewody i zaciski umożliwiające zestawienie układu pomiarowego,
- papier milimetrowy.

Wykonaj pomiary zależności natężenia prądu od przyłożonego napięcia dla każdej pary kontaktów.



Rys. 3

Na podstawie uzyskanych wyników:

1. znajdź schemat elektryczny obwodu,
2. wyznacz opór każdego z oporników i oszacuj niepewność znalezionych wartości,
3. wyznacz zależność natężenia prądu płynącego przez diodę od przyłożonego do niej napięcia w kierunku przewodzenia.

Wskazówka. Przyjmij, że dla prądów o natężeniu I większym niż 15 mA przyrost napięcia na diodzie ΔU spowodowany wzrostem natężenia płynącego przez nią prądu o ΔI spełnia zależność:

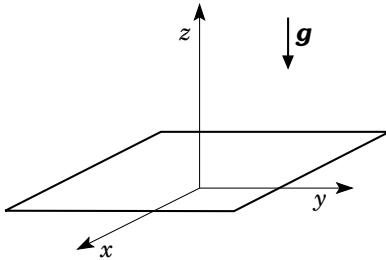
$$\frac{\Delta U}{\Delta I} \ll R,$$

gdzie R oznacza opór dowolnego z oporników występujących w obwodzie.

Schemat obwodu, który otrzymali uczestnicy zawodów, przedstawiony jest na rysunku 3.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Kwadratowa ramka o boku a , masie m oraz współczynniku samoindukcji L , wykonana jest z przewodnika o całkowitym oporze R . Ramkę umieszczono w jednorodnym polu grawitacyjnym oraz niejednorodnym polu magnetycznym o wektorze indukcji magnetycznej $\vec{B} = (-\alpha x, 0, \alpha z)$, gdzie α jest dodatnią stałą. Oś z jest równoległa do kierunku działania siły ciężkości, środek ramki leży na osi z , a boki ramki są w chwili początkowej równoległe do osi x i y , jak pokazano na rysunku. Ramkę wprowadzono w ruch postępowy nadając jej prędkość początkową v_0 skierowaną wzdłuż osi z .



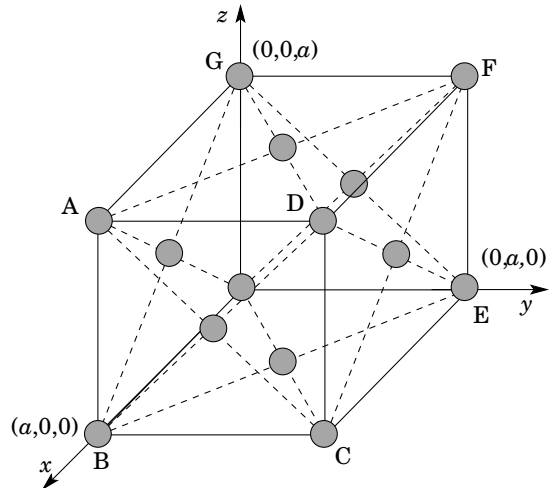
Rys. 1

1. Czy można tak dobrać warunki początkowe: położenie z_0 , prędkość ramki v_0 oraz wartość prądu I_0 płynącego w ramce w chwili $t = 0$, aby ramka poruszała się ze stałą prędkością? Rozważ przypadki: $R \neq 0$ oraz $R = 0$ (nadprzewodnik).
2. Wyznacz ruch środka ramki w przypadku $R = 0$, jeśli w chwili początkowej $I_0 = 0$, $z_0 = 0$ oraz $v_0 = 0$.

2. Rysunek 2 przedstawia komórkę sieci krystalicznej pewnego metalu. Atomy znajdują się w wierzchołkach sześcianu oraz w środkach jego ścian. Stała sieci (długość krawędzi sześcianu na rysunku) wynosi $a = 3,92 \times 10^{-10}$ m.

Na kryształ skierowano wiązkę elektronów o energii 64 eV. Wiązka ta pada na powierzchnię kryształu pokrywającą się z płaszczyzną ADFG pod kątem $\phi_0 = 15^\circ$ do normalnej do tej płaszczyzny. Wektory pędu elektronów padających na płaszczyznę i rozproszonych są równoległe do płaszczyzny ABEF. Zakładamy, że elektrony ulegają rozproszeniu jedynie na atomach znajdujących się na powierzchni kryształu.

- a) Oblicz długość fali materii odpowiadającej elektronom padającym na powierzchnię kryształu.
- b) Wyznacz kąty odpowiadające maksimum dyfrakcyjnym rozproszonych (odbitych) elektronów.



Rys. 2

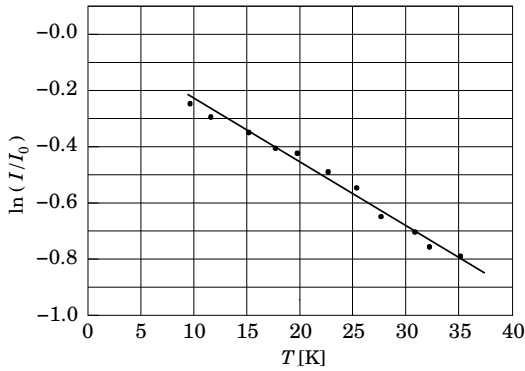
Na podstawie pomiarów rozpraszania elektronów można określić częstotliwość oraz średnią amplitudę termicznych oscylacji atomów sieci. Oscylacje te mają charakter harmoniczny, a ich energia jest wprost proporcjonalna do temperatury kryształu T . Natężenie I wiązki rozproszonej w kierunku maksimum dyfrakcyjnego związane jest z wychyleniem atomów z położenia równowagi $\vec{u}(t)$ relacją

$$I = I_0 \exp \left\{ - \left(\frac{2\pi}{h} \right)^2 \langle [(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{u}]^2 \rangle \right\},$$

gdzie I_0 oznacza natężenie wiązki rozproszonej przez ten kryształ w temperaturze zera bezwzględnego, \vec{p} oraz \vec{p}' są pędami elektronów padających oraz rozproszonych, h jest stałą Plancka, a nawiasy $\langle \rangle$ oznaczają uśrednianie po czasie.

W eksperymencie detektor mierzył natężenie wiązki elektronów rozproszonych sprężysto w kierunku odbicia

zwierciadlanego. Wynik, czyli wykres zależności $\ln(I/I_0)$ od temperatury kryształu T pokazano na rysunku 3.



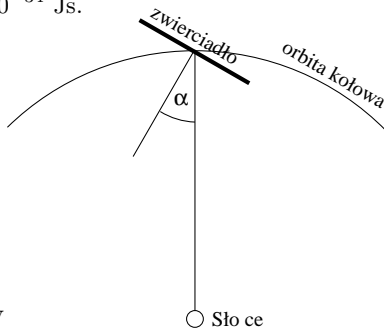
Rys. 3

- Wyznacz częstotliwość drgań atomów w kierunku prostopadłym do tej powierzchni kryształu, na którą padają elektrony.
- Oblicz średnie wychylenie kwadratowe, czyli wartość $(\langle u_z^2 \rangle)^{1/2}$, atomów na powierzchni kryształu w temperaturze 300 K.

Założ, że średnia całkowita energia ruchu oscylacyjnego atomu w kierunku prostopadłym do powierzchni kryształu jest równa $k_B T$, gdzie k_B jest stałą Boltzmana.

W obliczeniach przyjmij następujące dane:
 masa atomów sieci $M = 3,24 \times 10^{-25}$ kg,
 stała Boltzmana $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K,
 masa elektronu $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg,
 ładunek elektronu $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C,
 stała Plancka $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js.

3. Rozważa się zastosowanie zwierciadła odbijającego promienie słoneczne do napędu próbników kosmicznych. Rozpatrz próbnik o masie $m = 1000$ kg poruszający się wokół Słońca po orbicie kołowej o promieniu równym promieniowi orbity Ziemi $R_0 = 1,5 \times 10^{11}$ m.



Rys. 4

W pewnej chwili próbnik rozwinął płaskie zwierciadło, które stanowi powierzchnię doskonale odbijającą promienie słoneczne. Pole powierzchni zwierciadła wynosi $S = 2000$ m², a kąt pomiędzy normalną do jego powierzchni oraz kierunkiem padania promieni słonecznych wynosi α (rysunek 4).

- Wyznacz składowe siły \vec{F} (składową prostopadłą i styczną do toru próbnika) spowodowanej odbiciem promieni słonecznych od zwierciadła.
- Wykaż, że w warunkach zadania składowa siły \vec{F} wzdłuż kierunku padania promieni słonecznych jest bardzo mała w porównaniu z siłą grawitacyjnego przyciągania próbnika przez Słońce.
- Wyznacz kąt α_0 , dla którego składowa siły \vec{F} styczna do toru jest maksymalna.
- Pod wpływem działania siły \vec{F} orbita próbnika zmienia się na tyle wolno, że w ciągu każdego obiegu można ją przybliżyć okręgiem. Przyjmij, że kąt $\alpha = \alpha_0$ i oblicz po jakim czasie odległość próbnika od Słońca stanie się równa średniemu promieniowi R_1 orbity Marsa ($R_1 = 1,52R_0$).

Pomiń wpływ planet na ruch próbnika. Masa Słońca jest równa $M = 2 \times 10^{30}$ kg, stała grawitacyjna $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg², moc promieniowania na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku padania promieni słonecznych w okolicach Ziemi wynosi $I_0 = 1,35 \times 10^3$ W/m².

Zadanie doświadczalne. Masz do dyspozycji:

- magnes o kształcie walca, z biegunami na jego podstawach,
- plastelinę,
- nitkę,
- statyw,
- linijkę,
- papier milimetrowy,
- dwie prostokątne płytki metalowe o identycznych wymiarach: a) aluminiową, b) wykonaną z nieznanego metalu.

Przyjmując, że opór właściwy aluminium wynosi $\rho_{Al} = 2,5 \cdot 10^{-8}$ Ω m, wyznacz opór właściwy nieznanego metalu ρ .

Uwaga!

- Magnes jest bardzo silny. Nie należy go zbliżać do zegarków, kart magnetycznych, itp.
- Rozwiązanie zadania powinno zawierać bezpośrednie wyniki pomiarów oraz ich analizę.

Końcowa klasyfikacja

Laureaci

Marek Krzysztof MISZTAŁ, kl. IV, II LO w Końskich (nauczyciel: mgr Robert Misztal).
 Piotr POWAŁOWSKI, kl. IV, V LO w Zielonej Górze (nauczyciel: mgr Józef Sozański).
 Wojciech SAMOTIJ, kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (nauczyciel: mgr Marian Bąk).
 Aleksander Bogdan SĄDOWSKI, kl. IV, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku (nauczyciel: mgr Mariusz Sobczak).
 Miron Jacek SADZIAK, kl. IV, II LO im. Marii Konopnickiej w Opolu (nauczyciel: mgr Teresa Libura).
 Michał Krzysztof JÓŻWIKOWSKI, kl. IV, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska).
 Adam Stawomir DZIAŁAK, kl. IV, IV LO im. Hanki Sawickiej w Kielcach (nauczyciel: mgr Krystyna Dworecka).
 Paweł Zbigniew BUDZOWSKI, kl. III, Zespół Szkół Ogólnokształcących im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli (nauczyciel: mgr Stanisław Szymonik).

Marcin Łukasz PILIPCZUK, kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska).
 Adam Jan LATOSIŃSKI, kl. III, I Społeczne LO im. Hetmana Jana Tarnowskiego w Tarnobrzegu (nauczyciel: mgr Jacek Bąk).
 Marek Maria RAMS, kl. IV, Katolickie LO oo Pijarów w Krakowie (nauczyciel: mgr Jadwiga Bendo).
 Bartłomiej Maciej SZCZYGIEŁ, kl. II, II LO im. Cypriana Kamila Norwida w Jeleniej Górze (nauczyciel: mgr Andrzej Jarnuszkiewicz).
 Piotr Krystian OSTROWSKI, kl. V, Zespół Szkół Elektronicznych im. Gen. Zajączka w Warszawie (nauczyciel: mgr Barbara Zygmunt).
 Dawid Stanisław TOTON, kl. IV, IV LO im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie (nauczyciel: mgr Franciszka Kita).
 Damian KONIECKI, kl. III, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: mgr Grzegorz Depczyński).
 Krzysztof Grzegorz SOBCZAK, kl. III, V LO im. Ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie (nauczyciel: mgr Wanda Wagner).