



## SPIS TREŚCI NUMERU 5 (336)

Pomysł Archimedes	str. 1
Małe $h$ , wielka teoria	str. 2
Einstein twórcą teorii kwantów?	str. 2
Fale materii de Broglie'a	str. 3
Rozkład Maxwella	str. 3
Pomysł Gaussa, Borsuka i Riemanna	str. 4
Lorentz a przekształcenia Lorentza	str. 5
Boltzmann i prawdopodobieństwo	
<i>Adam Bednorz</i>	str. 6
Chaos	str. 7
Pomysły Keplera	str. 8
Zadania	str. 8
Wkładka – Mała Delta	
Tangram bez ograniczeń	<i>i</i>
O tym, jak bramkarz strzelił gola	
<i>Andrzej Dragan</i>	<i>iii</i>
Pomysł Euklidesa	<i>iv</i>
Czy coś zostało dla nas?	
<i>Józef Przytycki</i>	<i>v</i>
Pomysł Cantora	str. 9
Pomysł Kopernika	str.10
Teoria względności Einsteina	str.10
Pomysł Gödla	str.11
Pomysł Fouriera	str.12
Aktualności	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Maj	str.16
Gammalimathias	str.17

### W następnym numerze:

#### O słodkiej strategii

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delty* można znaleźć w portalu Eduseek  
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
– wiceprzewodniczący  
Krzysztof Ciesielski  
Jan A. Gaj  
Piotr Goldstein  
Andrzej Hryniewicz  
Wiesław A. Kamiński  
Marta Kicińska-Habior  
Zbigniew Marciniak  
Krzysztof Maślanka  
Janusz Matkowski  
Andrzej Mąkowski  
Zdzisław Pogoda  
Michał Różycka  
Konrad Rudnicki  
Grzegorz Sitarski  
Andrzej Woszczyk  
Wiesław Żelazko – przewodniczący

#### Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol  
Krzysztof Biesaga  
Ewa Czuchry  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Anna Ludwicka  
Urszula Marciniak  
Anna Rudnik  
Witold Sadowski  
Joanna Udalska  
Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:  
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
tel. 853-59-61, 55-33-216  
BARTOL@MIMUW.EDU.PL  
Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.  
Wydrukowano  
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.  
w Warszawie, ul. Mińska 65.

#### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

#### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2002 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

## Pomysł Archimidesa

Jak wiadomo (lub nie wiadomo – zależy jak komu), kwadraturę koła można wykonać za pomocą spirali Archimidesa. Spirala Archimidesa to linia, jaką wyznacza mucha wędrująca ruchem jednostajnym prostoliniowym od środka obracającej się na adapterze starej „czarnej” płyty gramofonowej. Można zapisać to za pomocą wzoru  $r = a\varphi$ , gdzie  $r$  to odległość od ustalonego punktu (np. początku układu współrzędnych), a  $\varphi$  to kąt od ustalonej, zaczynającej się w tym punkcie półprostej (np. dodatniej półosi  $Ox$ ).

Kwadraturę wykonuje się tak. Bierzemy jakąkolwiek spiralę Archimidesa (oznaczymy jej początek przez  $O$ ) i prowadzimy półprostą odpowiadającą kątowi  $\frac{3}{2}\pi$  i styczną w punkcie  $P$  spirali odpowiadającą kątowi  $2\pi$ . Przecięcie tej półprostej z tą styczną oznaczmy przez  $Q$ . Trójkąt  $OPQ$  ma pole równe polu koła o promieniu  $OP$ . Czyli kwadratura została dokonana, a to z tego powodu, że – po pierwsze – z trójkąta zrobić kwadrat to już żadna sztuka, i – po drugie – zrobienie kwadratury jednego koła pozwala (za pomocą podobieństwa) na zrobienie jej dla dowolnego.

Ale dlaczego to jest dobrze? W pracy „O linii spiralnej” Archimedes udowodnił (między innymi) załatwiająco tę sprawę twierdzenie (podam je w dzisiejszej terminologii).

*W dowolnym punkcie spirali Archimidesa kąt między styczną do spirali w tym punkcie a promieniem wodzącym ma tangens równy kątowi obrotu, któremu ten punkt odpowiada.*

A oto dowód. Weźmy na spirali o początku  $O$  dwa niezbyt odległe punkty  $S$  i  $T$ . Niech punktowi  $T$  odpowiada kąt obrotu  $\varphi$  i oznaczmy  $\sphericalangle TOS = \Delta\varphi$ ,  $\sphericalangle OST = \delta$ . Zastosujemy do trójkąta  $STO$  twierdzenie sinusów:

$$\frac{\sin \sphericalangle TSO}{TO} = \frac{\sin \sphericalangle STO}{SO}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sin \delta}{a\varphi} = \frac{\sin(\pi - \delta - \Delta\varphi)}{a(\varphi + \Delta\varphi)}.$$

I trzeba trochę porachować. Mamy

$$(\varphi + \Delta\varphi) \sin \delta = \varphi \sin(\delta + \Delta\varphi) = \varphi \sin \delta \cos \Delta\varphi + \varphi \cos \delta \sin \Delta\varphi,$$

zatem

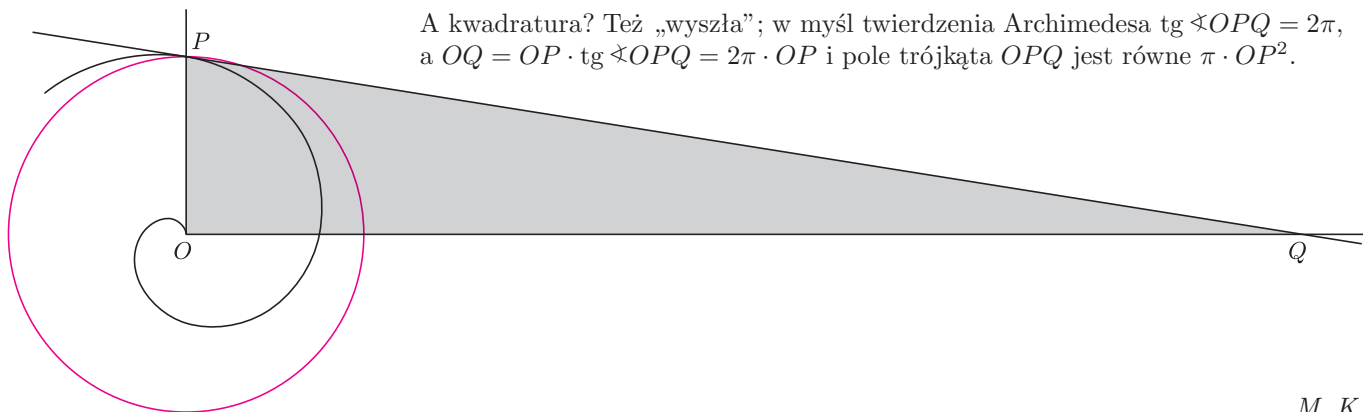
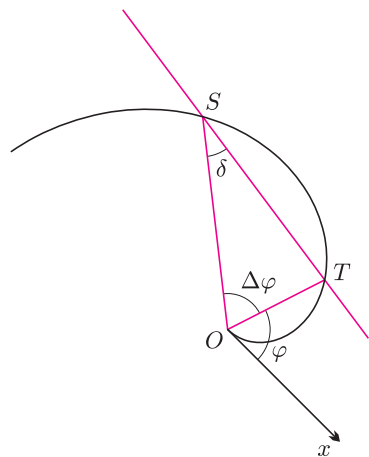
$$(\varphi + \Delta\varphi - \varphi \cos \Delta\varphi) \sin \delta = \varphi \sin \Delta\varphi \cos \delta$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \delta &= \frac{1}{\sin \Delta\varphi} + \frac{1}{\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} - \frac{\cos \Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} = \frac{1}{\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} + \frac{1 - \cos \Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} = \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} + \frac{2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{1}{\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} + \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Gdy teraz będziemy  $S$  przybliżali do  $T$  (czyli gdy kąt  $\Delta\varphi$  będzie dążył do zera), to – zgodnie z pomysłem przytoczonym w poprzednim numerze *Delty*, a orzekającym, że  $\frac{\sin x}{x}$ , dla  $x$  dążącego do zera, dąży do 1 – pierwszy składnik będzie dążył do  $\frac{1}{\varphi}$ , drugi do zera, a sieczna  $ST$  stanie się styczną. To razem dowodzi twierdzenia Archimidesa.

A kwadratura? Też „wyszła”; w myśl twierdzenia Archimidesa  $\operatorname{tg} \sphericalangle OPQ = 2\pi$ , a  $OQ = OP \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle OPQ = 2\pi \cdot OP$  i pole trójkąta  $OPQ$  jest równe  $\pi \cdot OP^2$ .



M. K.

## Małe $h$ , wielka teoria

Ciało doskonale czarne charakteryzuje się tym, że całkowicie pochłania padające na nie promieniowanie. Za model ciała doskonale czarnego często bierze się dużą wnękę z jednym małym otworem, ściany wnęki są nieprzepuszczalne i mają wszędzie taką samą temperaturę. We wnęce znajduje się promieniowanie elektromagnetyczne oddziałujące ze ściankami i pozostające z nimi w równowadze termodynamicznej. Interesuje nas widmo tego promieniowania (które wydostaje się na zewnątrz przez otwór w jednej ze ścianek).

We wzorze podanym przez Rayleigha był początkowo błąd rachunkowy, który został sprostowany później przez J. H. Jeansa, dlatego też nazywa się ten wzór prawem Rayleigha–Jeansa.

$$h = 6,62606876(52) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

## Einstein twórcą teorii kwantów?

Ruchy Browna to chaotyczne drgania drobnych cząsteczek zawieszonych w cieczy lub w gazie. Ich wyjaśnienie przez Einsteina i Smoluchowskiego miało podstawowe znaczenie dla zrozumienia zakresu stosowalności teorii makroskopowych.

W fizyce przełomu XIX i XX wieku pojawiło się sporo faktów doświadczalnych będących w głębokiej sprzeczności z ówczesnymi teoriami. Jednym z takich faktów był kształt rozkładu promieniowania ciała doskonale czarnego. Ciało takie ogrzane do pewnej temperatury emituje promieniowanie elektromagnetyczne na wszystkich zakresach długości fali. Wzór Wiena na rozkład natężenia promieniowania  $E(\lambda)$  jako funkcji długości fali promieniowania  $\lambda$  oparty na drugiej zasadzie termodynamiki, a w dokładniejszej jego wersji na sprawdzonym w termodynamice statystycznym rozkładzie prędkości cząsteczek w gazie, początkowo dobrze zgadzał się z wynikami doświadczalnymi. W 1900 roku pojawiły się nowe wyniki doświadczalne, które radykalnie zmieniły sytuację.

Interpretację tych nowych wyników podał już w tym samym roku J.W.S. Rayleigh. Biorąc za model ciała doskonale czarnego wnękę rezonansową, analizował on typy drgań pola elektromagnetycznego pozostającego w równowadze termodynamicznej ze ściankami wnęki. Zaproponowany przez niego wzór prowadził jednak do tzw. katastrofy w nadfiolecie – wynikało z niego, że całkowita wypromieniowywana energia liczona jako  $\int_0^\infty E(\omega) d\omega$  jest nieskończona, co było oczywiście nieakceptowalne z fizycznego punktu widzenia. Wynik ten brał się z faktu, że dla dużych częstotliwości (stąd „nadfiolet”) coś dziwnego działo się we wzorze na  $E(\omega)$ .

Obserwowany kształt krzywej  $E(\omega)$  wyjaśnił pod koniec 1900 r. Max Planck. Podobnie jak Rayleigh rozpatrywał on wnękę rezonansową i stosował wzór Boltzmanna (p. artykuł *Boltzmann i prawdopodobieństwo*, str. 6) na zależność entropii układu od liczby dopuszczalnych stanów. Planck wprowadził jednak jeszcze jeden dodatkowy element, który nijak się miał do obowiązujących czy nawet tylko hipotetycznie rozpatrywanych wtedy teorii fizycznych. Założył on, że część całkowitej wypromieniowywanej energii, przypadająca na jakiś jeden poszczególny atom drgający z częstotliwością  $\nu$ , może być tylko wielokrotnością energii  $h\nu$ , którą Planck nazwał kwantem energii, a  $h$  enigmatycznie kwantem działania. Opierając się na tym postulatcie i rozważaniach statystycznych, otrzymał on ostateczny wzór na promieniowanie ciała doskonale czarnego. Przez porównanie tego wzoru na  $E(\lambda)$  z danymi doświadczalnymi została wyznaczona wartość stałej  $h$ .

Stała Plancka  $h$ , razem z prędkością  $c$  światła w próżni, wartością ładunku elektrycznego elektronu  $e$  i stałą grawitacyjną  $G$ , jest uważana za podstawową i uniwersalną stałą przyrody. A dzień 14 grudnia 1900 roku, w którym Planck publicznie zaprezentował swoje rozważania, uważany jest za datę narodzin teorii kwantów.

*E. Cz.*

Albert Einstein, utożsamiany z niekwantową teorią względności i sporami o naturę mechaniki kwantowej, może być, obok Plancka, uważany także za twórcę teorii kwantów.

W 1905 roku Einstein opublikował trzy prace: jedna z nich jest wspomniana w artykule *Lorentz a przekształcenia Lorentza* (str. 5), są w niej zawarte podstawy szczególnej teorii względności. W pozostałych dwóch, równie przełomowych, Einstein analizował charakter ruchów Browna oraz zjawisko fotoelektryczne. Dla teorii kwantów fundamentalne znaczenie miało właśnie wyjaśnienie zjawiska fotoelektrycznego.

Polega ono na tym, że światło padając na jakiś materiał, powoduje wybijanie z niego elektronów. Zaobserwowano, że dla każdej substancji istnieje pewna częstotliwość progowa  $\nu_0$ , taka że promieniowanie o częstotliwości mniejszej od  $\nu_0$  nie wywołuje emisji fotoelektronów, a dla częstotliwości wyższych od  $\nu_0$  maksymalna energia fotoelektronów zależy od różnicy  $\nu - \nu_0$ , a nie od natężenia padającego promieniowania. Wyniki te były sprzeczne z przewidywaniami opartymi na klasycznej falowej naturze światła. Ale są one dobrze wytłumaczone hipotezą, zgodnie z którą promieniowanie elektromagnetyczne jest strumieniem cząstek (nazwanych później fotonami), z których każda niesie energię  $h\nu$ .

W pracy Einsteina najpierw pojawia się hipoteza o istnieniu fotonów, oparta na obserwacji, że entropię promieniowania ciała doskonale czarnego, w zakresie częstości opisywanych wzorem Wiena, można wyrazić takim samym wzorem jak entropię gazu doskonałego złożonego z cząsteczek o energii  $h\nu$  każda. Dopiero w dalszej części pracy Einstein zastanawiał się, co wynika z jego hipotezy zastosowanej dla niektórych zjawisk rozchodzenia się i powstawania światła, takich jak np. zjawisko fotoelektryczne. Słuszność wzoru Einsteina na maksymalną energię wybitego elektronu  $E = h(\nu - \nu_0)$  została potwierdzona doświadczalnie w 1917 roku przez R.A. Millikana.

Sformułowanie i zastosowanie teorii istnienia fotonów nie było jedynym wkładem Einsteina w budowę teorii kwantów, ale miało najbardziej fundamentalne znaczenie w budowaniu jej podstaw.

## Fale materii de Broglie'a

W 1924 roku L.V. de Broglie w swojej pracy doktorskiej wysunął hipotezę, że nie tylko światło może mieć dwoistą – falową i korpuskularną – naturę, lecz także cząstkom materii można przypisać pewne „fale fazowe” (traktowane przez de Broglie'a jeszcze jako konstrukcje czysto matematyczne).

W swojej hipotezie de Broglie oparł się na postulacie Plancka (p. artykuł *Małe h, wielka teoria*) oraz na szczególnej teorii względności Einsteina wiążącej energię oraz pęd cząstki w jedną wielkość – czteropęd. Sama zaś hipoteza była następująca: każdej cząstce o energii  $E$  i pędzie  $\mathbf{p}$  odpowiada fala o częstotliwości  $\nu$  i wektorze falowym  $\mathbf{k}$  określonymi następująco:

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{h}\mathbf{p}.$$

Pomysł ten mógł się wydawać początkowo absurdalny, a w dodatku nie poparty żadnymi przesłankami doświadczalnymi. Jednak już wkrótce – w 1925 roku – zaobserwowano dyfrakcję (a więc zjawisko czysto falowe) wiązki elektronów przechodzącej przez kryształ.

Hipoteza de Broglie'a została potwierdzona. Brakujące elementy, tzn. fizyczną interpretację „fal fazowych” oraz równanie opisujące ich propagację, podał w 1926 roku E. Schrödinger, formułując podstawy mechaniki kwantowej.

*E. Cz.*

## Rozkład Maxwella

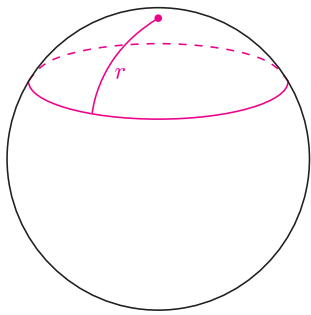
W połowie XIX wieku teoria molekularnej budowy materii była już dobrze rozwinięta. Ciągłe jeszcze pozostawało nierozwiązane zagadnienie, jak znane fenomenologiczne prawa termodynamiki mają się do cząsteczkowej struktury gazu. W 1821 roku J. Herapath zaczął rozważać hipotezę, mówiącą że ciśnienie gazu wynika z nieustannego bombardowania powierzchni przez cząstki. Analizując ruch  $n$  nieoddziałujących cząstek o prędkości  $v$  i masie  $m$  poruszających się w naczyniu o objętości  $V$  oraz zakładając, że zderzenia cząstek ze ściankami naczynia są doskonale sprężyste, otrzymał on, że  $pV = \frac{1}{3}nmv^2$ . A więc jeśli prędkość cząsteczek jest stała, iloczyn  $pV$  ma stałą wartość. Zgodnie z fenomenologicznym prawem Boyle'a–Mariotte'a fakt ten zachodzi dla gazu o stałej temperaturze. Stąd przesłanka, że temperaturę można w jakiś sposób powiązać z prędkością, np. z energią kinetyczną cząsteczki  $\frac{1}{2}mv^2$ . Herapath przyjął jednak, że temperatura wiąże się z pędem cząsteczki. W 1846 r. J.W. Waterson dokonał analogicznych obliczeń jak Herapath, przyjmując jednak, że temperatura wiąże się z energią kinetyczną. Praca Watersona została uznana początkowo za „czysty nonsens”. W 1848 r. Joule wykorzystał teorię Herapatha do wyznaczenia prędkości cząsteczek

gazu. Jego rozważania kontynuował Clausius, wprowadzając dodatkowo zderzenia między cząsteczkami. Wprowadził on też pojęcie średniej i średniej kwadratowej prędkości, ale wciąż przyjmował upraszczające założenie, że prędkości wszystkich molekuł są jednakowe. Dopiero Maxwell, w latach 1858–1860, wprowadził element różnicowania prędkości molekuł; uważał on, że zderzenia między cząsteczkami prowadzą nie do wyrównywania się ich prędkości, ale do pewnego określonego rozkładu prędkości. W odróżnieniu od swoich poprzedników skupił się on na odstępstwach prędkości cząsteczek od prędkości średniej, zamiast zakładać, że cząsteczki poruszają się mniej więcej z tymi samymi prędkościami. Wyprowadził on rozkład prędkości cząsteczek, zwany obecnie rozkładem Maxwella, rozważając prawdopodobieństwa zderzeń między cząsteczkami.

Ze swojego rozkładu prędkości Maxwell wyprowadził znane termodynamiczne prawa zachowania się gazów: równanie dyfuzji i przewodnictwa cieplnego, oraz przeanalizował zjawisko lepkości gazów. Prace Maxwella kontynuował Boltzmann (p. artykuł *Boltzmann i prawdopodobieństwo*, str. 6), tworząc podstawy mechaniki statystycznej.

*E. Cz.*

## Pomysł Gaussa, Borsuka i Riemanna



Gdy zajmujemy się geometrią na jakiejś powierzchni w zwykłej przestrzeni euklidesowej, to możemy to robić w taki sposób, jakby niczego poza tą powierzchnią nie było. Wystarczy w tym celu umówić się, że odlegością dwóch punktów będzie długość najkrótszego łuku łączącego po powierzchni te punkty (i założyć, że taki łuk istnieje – takie powierzchnie nazwano później geometrycznie akceptowalnymi). Uzyskana tym sposobem geometria nazywa się geometrią wewnętrzną i jest to **pomysł Carla Gaussa**.

Spójrzmy z tego punktu widzenia na sferę (czyli powierzchnię kuli) – niech jej promień będzie  $R$ . Największa odległość jej punktów w geometrii euklidesowej jest równa  $2R$ , a w jej geometrii wewnętrznej jest większa:  $\pi R$ . Zmieniają się nawet najprostsze wzory. Okrąg o euklidesowym promieniu  $r$  ma długość  $2\pi r$ , a w geometrii wewnętrznej sfery ma długość mniejszą:  $2\pi R \sin \frac{r}{R}$  (czy wszyscy umieją sprawdzić, że jest to długość mniejsza?). Nie wątpię natomiast, że każdy potrafi podać jeszcze cały szereg różnic między geometrią sfery w przestrzeni euklidesowej a geometrią sferyczną (bo tak nazywa się geometria wewnętrzna sfery).

Najciekawszym ze stosunkowo nowych twierdzeń o geometrii wewnętrznej jest **pomysł Karola Borsuka** z 1980 roku (ulepszony w tymże roku przez Juliusza Ołędzkiego i Stanisława Spieża), który orzeka, że

*przestrzeń euklidesową  $n$ -wymiarową można – bez zmiany jej geometrii wewnętrznej – zmieścić w dowolnie małej kulce przestrzeni  $(n + 1)$ -wymiarowej (przekształcenie zachowujące geometrię wewnętrzną nazywamy izometrią wewnętrzną).*

Dowód tego twierdzenia jest dość trudny (w *Delcie* 11/1980 można znaleźć dowód jego słabszej wersji), przykład postępowania, które sprowadza wewnętrzną izometrycznie płaszczyznę do małej kuli w przestrzeni, przedstawiony jest obok, a konsekwencje tego twierdzenia dla UFOlogii każdy może sobie wymyślić sam.

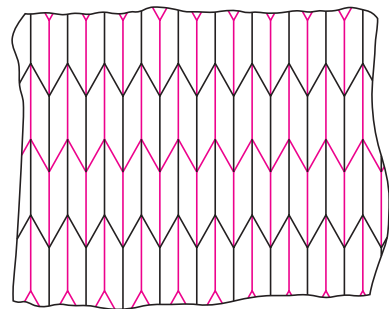
Przykładem powierzchni wewnętrźnie izometrycznych są np. odpowiednie fragmenty płaszczyzny, walca i stożka. Bardziej zaskakująca jest wewnętrzna izometria katenoidy i helikoidy. Dla kochających liczyć potrzebne do sprawdzenia dane: katenoida ma przedstawienie parametryczne  $(t, \cosh t \cos \varphi, \cosh t \sin \varphi)$ , helikoida  $(v \cos w, v \sin w, w)$ , wewnętrzna ich izometria dana jest wzorem  $h(x) = \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \sinh x_1, \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \sinh x_1, \arctg \frac{x_3}{x_2} \right)$ ;

do sprawdzenia jest to, że  $h(x)$  nakłada katenoidę na helikoidę i że nie zmienia przy tym długości żadnej krzywej leżącej na katenoidzie.

Wewnętrzna izometryczność dwóch powierzchni oznacza, że mają one identyczną geometrię wewnętrzną, czyli że żyłoby się na nich jednakowo.

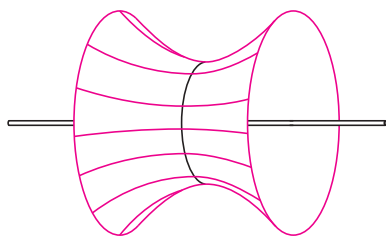
Znaczenie pojęcia geometrii wewnętrznej uświadomił matematykom, ale przede wszystkim fizykom i astronomom, **pomysł Bernharda** (używał swojego trzeciego imienia) **Riemanna**. Riemann został mianowicie zobowiązany przez Gaussa do poświęcenia swojego wykładu habilitacyjnego geometrii (którą się nie zajmował – jego specjalnością była analiza). Polegał ten pomysł na tym, że Riemann zauważył, iż geometria wewnętrzna powierzchni nie wymaga wcale istnienia jakiejś przestrzeni, w której ta powierzchnia się znajduje: po prostu zszywamy z kawałków płaszczyzny „coś” (naukowo: rozmaitość) tak, jak zszywa się z latek np. kozuch, i umawiamy się, jak na tym „czymś” mierzy się długości łuków. Skoro tak, to nie ma powodu ograniczać się do powierzchni, czyli tworów dwuwymiarowych – wymiar może też być dowolny. Tak pomyślana geometria wewnętrzna nazywa się dziś geometrią riemannowską i w takiej postaci (lub niewiele uogólnionej) używają geometrii praktycznie wszyscy przyrodnicy.

Ciekawostką jest tutaj fakt, że pomysł Riemanna został przez wszystkich jego kolegów (w tym i Gaussa) zlekceważony i ponownie odkryto go dopiero po kilkunastu latach (Hermann Helmholtz i Felix Klein).

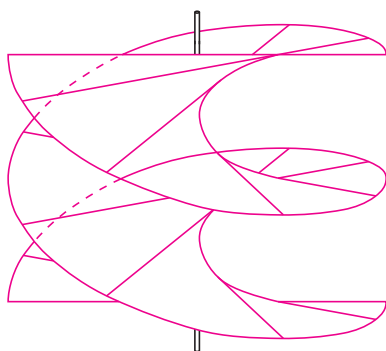


Linie czarne zaginamy do siebie, a kolorowe od siebie.

**Katenoida** to powierzchnia powstała przez obracanie krzywej łańcuchowej – linii wzdłuż której układa się zawieszony na dwóch gwoździach łańcuch. Inaczej: powierzchnia, jaką utworzy błona mydlana rozpięta na dwóch okręgach leżących w płaszczyznach prostopadłych do prostej łączącej ich środki. Wygląda ona tak:



**Helikoida** to powierzchnia powstała przez jednostajne obracanie prostej wokół osi i równoczesne jednostajne przesuwanie wzdłuż tej osi. Wygląda ona tak:



M. K.

## Lorentz a przekształcenia Lorentza

Zmiana koncepcji czasu i przestrzeni, wprowadzona przez teorię względności, wykluwała się przez dłuższy czas. Już w 1887 roku W. Voight w swojej pracy [1] (wciąż opartej na istnieniu eteru jako ośrodka rozchodzenia się światła) nadmienia, że z matematycznego punktu widzenia może być dogodne wprowadzenie czasu lokalnego  $t'$  do poruszającego się układu odniesienia. Czas ten miał być liniową funkcją zmiennych przestrzennych, ale skala „prawdziwego czasu” miała być niezmienniona. Tym sposobem postać równania falowego byłaby zachowana także w poruszającym się układzie odniesienia. Te uwagi przeszły w zasadzie bez większego echa, aż podobne transformacje zostały zaproponowane w 1892 r. niezależnie przez H.A. Lorentza i G.F. Fitzgerala jako wyjaśnienie ujemnego wyniku doświadczenia Michelsona–Morleya. Swoje twierdzenia motywowali oni zmianą oddziaływań międzycząsteczkowych wewnątrz poruszającego się ciała. Zakładając, że cząsteczki znajdują się w położeniu równowagi, a oddziaływania między nimi są tylko elektromagnetyczne, otrzymali oni, że w poruszającym się układzie odniesienia cząsteczki będą dalej w położeniach równowagi, jeśli długość poruszających się ciał zostanie skrócona o czynnik  $\sqrt{1 - \beta^2}$  (gdzie  $\beta$  jest stosunkiem prędkości  $v$  ciała do prędkości  $c$  światła), a wymiary poprzeczne do kierunku ruchu nie ulegają zmianie. To skrócenie miało wyjaśniać negatywny wynik doświadczenia Michelsona–Morleya.

Wzory na przekształcenie długości, jak i czasu, znane obecnie jako przekształcenia Lorentza (nazwane tak przez Poincarégo), zostały po raz pierwszy podane przez Larmora [2]. H.A. Lorentz w swojej wcześniejszej pracy [3] rozpatrywał tylko przekształcenia zmiennych przestrzennych. Zmianę w skali czasu dodali: wspomniany J.J. Larmor i H.A. Lorentz w swojej późniejszej pracy [4], w której pokazał on, że równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego w próżni są niezmiennicze względem takich transformacji. Lorentz jeszcze nie zakładał równoważności dwóch poruszających się układów, w jego ujęciu człony zawierające gęstość ładunku i prąd nie są takie same w układzie spoczynkowym i poruszającym się. Poincaré w 1905 roku [5] uzupełnił teorię Lorentza, dodając zasadę, że wszystkie prawa fizyki muszą być niezmiennicze względem transformacji Lorentza. Pełne wyprowadzenie przekształceń Lorentza opiera się na sformułowanej przez A. Einsteina w 1905 roku [6] teorii względności opartej na postulacie stałej we wszystkich układach odniesienia prędkości światła i niezmienniczości podstawowych praw fizyki we wszystkich układach inercjalnych. Jego praca pojawiła się prawie w tym samym czasie co artykuł Poincarégo i miała podobny tytuł, autor pisząc ją nie znał jeszcze wyników Lorentza z 1904 roku.

E. Cz.

Doświadczenie Michelsona–Morleya przeprowadzone w 1887 roku miało na celu bezpośrednie sprawdzenie wpływu ruchu orbitalnego Ziemi na prędkość światła – tzn. czy prędkość światła zależy od prędkości układu, w którym ją się mierzy, a pośrednio sprawdzenie istnienia eteru kosmicznego. Z wielu zjawisk (takich jak aberracja światła i doświadczenie Fizeau) wynikało, że eter jest nieruchomy i tylko częściowo porywają go ciała w ruchu. Z hipotezy nieruchomego eteru wynikało, że prędkość światła względem Ziemi powinna być równa  $c+v$  lub  $c-v$ , zależnie od tego, czy światło biegnie w kierunku ruchu Ziemi czy w kierunku przeciwnym ( $v$  – prędkość ruchu orbitalnego Ziemi,  $c$  – prędkość światła w eterze). Celem doświadczenia było stwierdzenie tej różnicy prędkości. Gdyby światło biegło w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach z różnymi prędkościami, to obrót przyrządu o  $90^\circ$  powinien wywołać przesunięcie obrazu interferencyjnego. Takiego przesunięcia nie zaobserwowano.

W teorii względności przekształceniami Lorentza nazywa się związek między współrzędnymi przestrzennymi i czasem tego samego zdarzenia w dwóch inercjalnych układach odniesienia. Jeśli dwa takie układy  $K(x, y, z, t)$  i  $K'(x', y', z', t')$  pokrywają się w chwili  $t = t' = 0$ , a  $K'$  porusza się względem  $K$  z prędkością  $v$  w kierunku osi  $x$ , przekształcenie Lorentza jest wtedy postaci:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y,$$
$$z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$\beta = v/c$ ,  $c$  – prędkość światła w próżni (stała we wszystkich układach inercjalnych). Stąd wynika wzór na tzw. skrócenie Lorentza, tzn. związek między długością ciała  $l$  w układzie  $K$  a długością tego samego ciała  $l_0$  w jego układzie spoczynkowym  $K'$ :  
 $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ .

- [1] W. Voight, „Über das Dopplersche Prinzip”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1887) 41.
- [2] J.J. Larmor, *Aether and Matter* (Cambridge 1900), 167–177.
- [3] H.A. Lorentz, „De relative beweging van de aarde en dem aether”, *Versl. gewone Vergad. Akad. Amsterdam*, **1** (1892) 74.
- [4] H.A. Lorentz, „Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light”, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, **6** (1904) 809 (*Versl. gewone Vergad. Akad. Amsterdam*, **12** (1904) 986).
- [5] H. Poincaré, „Sur la dynamique de l'électron”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **140** (1905) 1504.
- [6] A. Einstein, „Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, *Ann. Phys. Leipzig*, **17** (1905) 891.



## Boltzmann i prawdopodobieństwo



W dziewiętnastym wieku dokonał się wielki przełom, kiedy fizycy utożsamili ciepło z energią. Istniała bowiem teoria ciepłika, zgodnie z którą ciepło było pewną substancją przepływającą między ciałami. Ilość ciepła liczono w skądinąd dzisiaj bardzo popularnych kaloriach. Liczne doświadczenia potwierdzały jednak, że można zamienić ciepło na pracę i odwrotnie. Mniej więcej w połowie wieku ustalono liczbową zależność między ciepłem i energią: 1 kaloria = 4,186 J. W końcu sformułowano zasadę zachowania energii (pierwszą zasadę termodynamiki) w postaci wzoru

$$\Delta U = Q + W,$$

gdzie  $\Delta U$  oznacza zmianę energii danego ciała, a  $Q$  i  $W$  to odpowiednio ciepło dostarczone temu ciału i praca nad nim wykonana.

Dużo większy problem był z drugą zasadą termodynamiki, która wymagała wprowadzenia pojęcia entropii (patrz *Delta* 7/2001). Ta zasada **postuluje** istnienie entropii  $S$ , czyli funkcji, która w układach izolowanych nigdy nie maleje i pozostaje stała w procesach odwracalnych. Druga zasada ma kilka sformułowań: Clausiusa, Kelvina, Plancka i innych, ale żadne z nich nie odwołuje się do równań mikroskopowych. Jest bowiem jasne, że na poziomie mikroskopowym wszystkie procesy są odwracalne, a więc coś trzeba dodać.

W końcu w 1877 roku austriacki fizyk Ludwig Boltzmann skojarzył entropię termodynamiczną z prawdopodobieństwem. Zauważył, że nie da się określić dokładnie, w jakim stanie (mikroście) znajduje się układ, ale można założyć, że wszystkie mikrostanu są równie prawdopodobne. W ten sposób po raz pierwszy w fizyce pojawiło się prawdopodobieństwo. Było to coś na owe czasy niebywałego. Świat powinien przecież zachowywać się w sposób deterministyczny (stworzona pół wieku później mechanika kwantowa też jest deterministyczna).

Boltzmann poszedł dalej w swoich rozważaniach i zaczął zastanawiać się, jak pokazać, że entropia może wzrastać. Rozważył prosty model rozrzedzonego gazu doskonałego i napisał równanie ewolucji na prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki o danej prędkości w ustalonym punkcie przestrzeni. Potrzebował jednak istotnego założenia o tym, że cząsteczki poruszają się niezależnie (nie ma między nimi korelacji statystycznych). Następcy Boltzmanna rozwinęli ten pomysł i nazwali go **zasadą maksymalizacji entropii**. Oznacza to, że w układzie fizycznym wyróżniamy pewne wielkości, które możemy mierzyć. Może to być energia, liczba cząstek, pewne korelacje itp. W jednym kroku czasowym najpierw zmieniamy rozkład prawdopodobieństwa zgodnie z mikroskopowymi równaniami ruchu (równaniem Liouville'a lub równaniem von Neumanna), a następnie zmieniamy rozkład prawdopodobieństwa tak, aby przy ustalonych średnich wartościach naszych wyróżnionych wielkości entropia była największa. Wtedy wszelkie korelacje są najmniejsze, a entropia musi wzrastać.

Pomysł Boltzmann'a doprowadził jednak do wielkiej kłótni między fizykami, którym nie podobały się argumenty statystyczne prowadzące do drugiej zasady termodynamiki. Podstawowy zarzut dotyczył niemożności uzyskania równania nieodwracalnego z odwracalnych równań mikroskopowych. Trzeba jednak pamiętać, że zasada maksymalizacji entropii jest subiektywna (nie opisuje stanu faktycznego, ale stan naszej wiedzy), a kierunek upływu czasu także zależy od człowieka (proces myślenia jest możliwy dzięki zasadzie wzrostu entropii). Krytycy Boltzmann'a uważali też, że każdy układ fizyczny powraca po jakimś czasie do mikrostanu początkowego. Jest to prawda, tyle że dla litra wody średni czas powrotu przekroczyłby o wiele rzędów wielkości wiek Wszechświata. Tak samo zasada równych prawdopodobieństw mikrostanów w stanie równowagowym była krytykowana za brak solidnej argumentacji. Boltzmann twierdził, że układ fizyczny przechodzi dowolnie blisko każdego dozwolonego (odpowiadającego ustalonej energii) mikrostanu. Tym razem się mylił, bo nawet jeśli to prawda, to czas potrzebny do obejścia wszystkich mikrostanów jest rzędu czasu powrotu. Dziś wiadomo, że nie trzeba



### Rozwiązanie zadania M 988.

a) Jeśli punkty  $X$  i  $Y$  są symetryczne względem prostej  $l_3$ , to punkty  $S_{l_1}(X)$  i  $S_{l_1}(Y)$  są symetryczne względem prostej  $l_2$ , tzn.  $S_{l_1}(X) = S_{l_2} \circ S_{l_1}(Y)$ . Stąd  $S_{l_1} \circ S_{l_3} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ , czyli  $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$ .

b) Załóżmy, że rozpatrywany wielokąt ma trzy osie symetrii, które nie przecinają się w jednym punkcie. Osie te tworzą wtedy trójkąt, gdyby bowiem pewne dwie z nich były równoległe, to złożenie symetrii osiowych względem tych prostych byłoby przesunięciem, które nie może być symetrią ograniczonej figury jaką jest wielokąt. Niech  $M$  będzie pewnym punktem wewnętrznym owego trójkąta,  $X$  zaś – punktem wielokąta, dla którego odległość  $|MX|$  jest maksymalna. Punkty  $X$  i  $M$  leżą po jednej stronie pewnej z rozpatrywanych trzech osi symetrii  $l$ . Jeśli  $X'$  jest obrazem  $X$  przy symetrii osiowej względem  $l$ , to oczywiście  $X'$  jest punktem naszego wielokąta i  $MX' > MX$ , co przeczy temu, że  $X$  jest punktem wielokąta maksymalnie oddalonym od  $M$ .

**Uwaga:** Zauważmy, że teza zadania a) jest prawdziwa również w przestrzeni.

tu analizować ewolucji poszczególnych mikrostanów, ale można skorzystać z zasady maksymalizacji entropii.

Warto pamiętać, że druga zasada termodynamiki czy też zasada maksymalizacji entropii jest fundamentalnym prawem przyrody i nie można jej wyprowadzić z bardziej podstawowych praw, lecz tylko potwierdzać doświadczalnie. Dlatego Boltzmann w istocie przyczynił się do powstania nowego prawa fizyki.

Do dzisiaj idea Boltzmann'a nie jest w pełni doceniana przez fizyków, którym bardzo trudno przestawić się z myślenia „to jest mój układ fizyczny” na „to jest moja informacja o układzie”. Sprawę komplikuje dodatkowo statystyczna interpretacja mechaniki kwantowej, która nie ma nic wspólnego ze statystyką w sensie Boltzmann'a.

Adam BEDNORZ

## Chaos

Suma przesądów nabytych w dzieciństwie podpowiada, że ruch zawsze jest dość prosty, choćby nawet wyglądał na skomplikowany. Rzeczywiście, nie wydaje się zbyt pogmatwany ruch upuszczonego kamienia, ruch wahadła czy wystrzelonego pocisku, a pozornie chaotyczny ruch planet nad naszymi głowami też daje się prosto wytłumaczyć jako nałożenie kilku ruchów periodycznych o różnych okresach (nazywa się taki ruch quasi-periodycznym). Oczywiście, ktoś złośliwy mógłby zapytać: a co z opisaniem ruchu cząsteczek w szklance wody? Czy to też taki prosty ruch? Ale my moglibyśmy wzruszyć ramionami i odpowiedzieć, że ruch ten jest skomplikowany tylko dlatego, że cząsteczek jest tak dużo, iż nawet nie potrafimy ich efektywnie ponumerować, a co dopiero obliczać ich trajektorie. Problem nie tkwi więc w charakterze ruchu, lecz w liczbie składników układu.

Odkrycie chaosu dokonało się wtedy, gdy rozumiano, że nawet w bardzo prostych układach złożonych z niewielu cząstek możemy spotkać się z ruchem praktycznie nieprzewidywalnym, w którym drobne zmiany początkowego położenia powodują olbrzymie zmiany w ewolucji całego układu, a cząstki poruszają się po niezwykle zagmatwanych trajektoriach, nie dążą do żadnego stanu stacjonarnego ani nie poruszają się ruchem periodycznym czy też quasi-periodycznym. Niektórzy podejrzewają, że w połowie XIX wieku J.C. Maxwell wiedział już, że tego typu „dziwny ruch” charakteryzuje dwie zderzające się cząsteczki gazu umieszczone w pudełku. Podobnie dziwny ruch o niezwykle skomplikowanych trajektoriach odkrył pod koniec XIX stulecia H. Poincaré badając ruch trzech ciał oddziałujących na siebie siłą grawitacji. Później odkrywali chaos nie tylko matematycy, ale nawet żołnierze w okopach, choć ci ostatni pewnie nie do końca zdawali sobie z tego sprawę. Nieraz przeklinali bowiem wzmacniacze radiowe i ich producentów, nie wiedząc, że problem tkwił w samym równaniu, które opisuje sygnał wyjściowy wzmacniacza, gdy na wejściu jest czysty sinus. Jak odkryli potem M. Cartwright i J. Littlewood, przy dużych mocach rozwiązanie wspomnianego równania stają się właśnie nieperiodyczne, chaotyczne. Wreszcie, pod koniec lat sześćdziesiątych XX wieku E. Lorenz odkrył, że rozwiązania pewnego bardzo prostego układu równań różniczkowych, wykorzystywanego w meteorologii, są bardzo wrażliwe na drobne zmiany warunków początkowych. Okazało się bowiem, że wystarczy zmienić cyfrę choćby na szóstym miejscu po przecinku w określeniu stanu początkowego, a układ będzie ewoluował zupełnie odmiennie. Odkryciem E. Lorenza nikt się jednak nie interesował, bo opublikował je w piśmie meteorologicznym, a jaki matematyk czyta takie pisma? Wyjątkowy raczej. W końcu jednak wraz z upowszechnieniem komputerów oglądanie wykresów rozwiązań prostych układów równań stało się zajęciem powszechnym i nagle zrozumiano, że ruch chaotyczny wcale nie jest wyjątkiem, lecz raczej regułą.

Kto zatem „wymyślił chaos”? Kto pierwszy zdał sobie sprawę z jego istnienia i powszechności? Trudno jednoznacznie odpowiedzieć. W końcu już starożytni Grecy twierdzili, że był on na początku...

W. S.



### Rozwiązanie zadania M 989.

Jak wynika z zadania 988b) wszystkie osie symetrii przechodzą przez jeden punkt  $O$ . Jeśli  $l_1$  i  $l_2$  są osiami symetrii  $W$ , to, jak wynika z zadania 988a),  $l_3 = S_{l_1}(l_2)$  również nią jest. Wybierzmy jedną z osi symetrii  $l$ . Pozostałe osie można rozbić na pary osi symetrycznych względem  $l$ . Prosta  $l'$  prostopadła do  $l$  i przechodząca przez  $O$  musi być osią symetrii  $W$ , w przeciwnym bowiem razie liczba osi symetrii byłaby nieparzysta. Złożenie  $S_{l'} \circ S_l$  jest symetrią względem  $O$  i przeprowadza  $W$  na siebie. Wynika stąd, że  $O$  jest środkiem symetrii  $W$ .



### Rozwiązanie zadania M 990.

Wybierzmy jedną z osi symetrii  $l$  rozpatrywanej bryły. Pokażemy, że pozostałe osie można połączyć w pary, z czego będzie wynikać teza zadania. Jeśli  $l'$  jest osią symetrii, która nie przecina  $l$  lub nie jest do niej prostopadła, to prostą  $l''$  łączymy w parę z prostą symetryczną do  $l'$  względem  $l$  (jest ona osią symetrii na mocy tezy zadania 988a) – patrz uwaga). Jeśli zaś oś  $l'$  jest prostopadła do  $l$  i przecina ją w pewnym punkcie  $O$ , to łączymy ją w parę z prostą  $l''$ , która jest prostopadła do  $l$  i  $l'$  i przechodzi przez  $O$  (jest ona osią symetrii, bowiem jak nietrudno dowieść  $S_{l''} = S_{l'} \circ S_l$ ). Jak więc widać, rozbić na pary zbioru wszystkich osi symetrii oprócz  $l$  jest możliwe, z czego wynika teza zadania.



## Pomysły Keplera

Keplerowi należy się miano twórcy mechaniki nieba przynajmniej z jednego powodu: chciał on nie tylko znaleźć zręczny sposób opisu ruchu planet, lecz chciał też dociec przyczyn takiego ruchu. Dlatego nie podobały mu się deferenty i epicykle; w środkach tych wszystkich kół niczego przecież nie ma. Nie jest łatwo prześledzić, jak w końcu doszedł do nazwanych jego nazwiskiem praw ruchu planet. Uporczywie szukał harmonii we Wszechświecie, ale pomysły trafne przeplatają się u niego z zupełnie szalonymi. Takim szalonym z dzisiejszego punktu widzenia pomysłem jest np. zauważenie, że jeżeli między sześć sfer o promieniach takich, jakie mają orbity (znanych wtedy) planet, wpisać pięć wielościanów foremnych (w odgadniętym porządku), to konstrukcja taka całkiem nieźle przedstawi względne rozmiary orbit.

Co do praw ruchu planet, to nawet ich dzisiejsza numeracja nie odpowiada kolejności chronologicznej ich odkrywania. Kepler odkrył najpierw prawo drugie o stałości prędkości polowej planet. Dokonał tego, gdyż dysponował bardzo dokładnymi, jak na owe czasy, obserwacjami Marsa, wykonanymi przez jego mistrza, Tycho Brahego. W dodatku Mars ma przypadkowo orbitę dość silnie różną od koła, dlatego drugie prawo Keplera dało się odkryć. Trudno dociec, dlaczego pierwsze prawo, mówiące o eliptyczności orbit, sformułował Kepler później – zdawałoby się, że gdy badacz ma odległości Marsa od Słońca dla

różnych kierunków, to kształt elipsy sam mu się pojawi. Może przyczyną tego opóźnienia było zaangażowanie się Keplera w próby wyjaśnienia ruchu planet oddziaływaniem magnetycznym Słońca. Wynik był w każdym razie przełomowy: Kepler zerwał z odwieczną tradycją deferentów i epicykli i ogłosił, że każda z planet obiega Słońce po elipsie, przy czym Słońce tkwi w jednym z jej ognisk. Przyjąwszy, że dotyczy to też orbity Ziemi, Kepler uzyskał dla Marsa zgodność teorii z obserwacjami z dokładnością do  $1'$ , czyli z dokładnością obserwacji Brahego. Dostał też to, na czym mu zawsze zależało, a mianowicie, że w ognisku elipsy znajduje się ciało materialne, Słońce, które jest źródłem siły rządzącej ruchem planet.

A co z trzecim prawem? Kepler tak był przekonany o istnieniu harmonii obejmującej cały Układ Słoneczny, że w końcu ją znalazł, aczkolwiek zajęło mu to jeszcze kilka lat. Harmonia ta mówi, że okresy obiegu planet wokół Słońca są wprost proporcjonalne do rozmiarów orbit w potęgę  $3/2$ . W tym przypadku uczony właściwie nie mógł mieć żadnych pomysłów – z dopasowania znanych już w jego czasach wartości liczbowych, po prostu wyszedł mu taki właśnie wykładnik potęgi. Później prawa Keplera posłużyły Newtonowi do wyprowadzenia prawa grawitacji, obecnie natomiast mówi się o nich raczej jako o skutkach prawa grawitacji, ale to już tylko sprawa dydaktyki.

T. K.

### Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delt!

Rozwiąż czerwcowe (tak, czerwcowe) zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji:

<http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 571.** Naturalny izotop wodoru – deuter – odkryto odparowując cztery litry wodoru do momentu, gdy zostało tylko kilka centymetrów sześciennych cieczy. Badając następnie widmo pozostałej cieczy, stwierdzono obecność deuteru. Dlaczego parowanie zwiększa procentową zawartość deuteru w próbce? Rozwiązanie na str. 9

**F 572.** Wodór występuje normalnie w postaci cząsteczek  $H_2$ . Jeśli z jednego mola  $H_2$  powstaną dwa mole atomów H, entropia wzrasta ze 130 do 230 J/K. Dlaczego więc wodór występuje w postaci cząsteczkowej, skoro dysocjacja prowadzi do wzrostu entropii? Energia wiązania cząsteczek wodoru wynosi  $4,3 \cdot 10^5$  J/mol.

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Łukasz WIECHECKI

W poniższych zadaniach przez  $S_l$  będziemy oznaczać symetrię osiową na płaszczyźnie lub w przestrzeni względem prostej  $l$ .

**M 988.** a) Dane są proste  $l_1, l_2, l_3$  spełniające warunek  $l_3 = S_{l_1}(l_2)$ . Udowodnić, że  $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$ .

b) Udowodnić, że jeśli wielokąt ma więcej niż dwie osie symetrii, to wszystkie one przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie na str. 6

**M 989.** Udowodnić, że jeśli wielokąt  $W$  na płaszczyźnie ma parzystą liczbę symetrii, to ma również środek symetrii.

Rozwiązanie na str. 7

**M 990.** Udowodnić, że w przestrzeni nie istnieje bryła, która ma parzystą, większą od 0, skończoną liczbę osi symetrii.

Rozwiązanie na str. 7

## Pomysł Cantora



### Rozwiązanie zadania F 571.

Zgodnie z zasadą ekwipartycji energii średnia prędkość kwadratowa cząsteczek deuteru jest o czynnik  $1/\sqrt{2}$  mniejsza od średniej prędkości kwadratowej cząsteczek zwykłego wodoru. Oznacza to, że liczba cząsteczek deuteru o dużych prędkościach jest odpowiednio mniejsza i deuter paruje słabiej niż wodór.

Kiedy funkcja ma jednoznaczny reprezentację w postaci szeregu trygonometrycznego? Problem, bardzo aktualny w drugiej połowie XIX wieku, zainteresował także młodego Georga Cantora. Wiadomo już było, że funkcja nie musi być ciągła, pod warunkiem, że ma skończenie wiele punktów nieciągłości. To nasunęło Cantorowi pierwszy, chciałoby się powiedzieć, wstępny pomysł: przyjrzeć się dziedzinie funkcji i dopuszczalnemu rozkładowi „złych” punktów. Okazało się, że może być ich nieskończenie wiele (bez utraty jednoznaczności przedstawienia w postaci szeregu trygonometrycznego), choć nie dowolnie rozłożonych, a ich struktura – struktura zbioru takich punktów – może być dość skomplikowana. Próba jej opisu doprowadziła do drugiego, zasadniczego pomysłu Cantora.

Jak porównać wielkość dwóch zbiorów? Potrafimy to zrobić bez trudu, gdy oba są skończone: liczymy elementy jednego, liczymy elementy drugiego i porównujemy otrzymane liczby. W ten sposób w gruncie rzeczy porównujemy oba te zbiory z pewnym początkowym fragmentem zbioru liczb naturalnych. Wszak to, że zbiór ma  $n$  elementów, oznacza tylko tyle, że można je postawić we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z liczbami ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Małe dziecko nie przechodzi przez ten etap: porównuje od razu elementy dwóch zbiorów. Na przykład, wyliczając swoje koleżanki z przedszkola, zagina kolejny paluszek przy każdym następnym imieniu, wskazując w ten sposób na taką wzajemnie jednoznaczność między zbiorem swoich koleżanek i zbiorem swoich paluszków. Cantor spojrział na zbiory oczami dziecka: taki sposób porównywania zbiorów nadaje się także do zbiorów nieskończonych! I na tym właśnie polega ów zasadniczy pomysł Cantora: uznać, że dwa zbiory  $A$  i  $B$  są tak samo duże (matematycy mówią: *równoliczne*), gdy istnieje różnowartościowa funkcja ze zbioru  $A$  w  $B$ , której zbiór wartości pokrywa się z  $B$ . Mówimy wtedy, że oba zbiory mają tę samą moc. Czy wynika z tego coś ciekawego? Okazało się na przykład, że istnieją różne nieskończoności. Moc zbioru wszystkich liczb naturalnych  $\mathbb{N}$  jest mniejsza od mocy zbioru wszystkich liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Inaczej mówiąc, żaden ciąg nie może zawierać wszystkich liczb rzeczywistych, a nawet wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału  $(0, 1)$ . Każdą liczbę rzeczywistą z tego przedziału można zapisać (jednoznacznie!) w postaci rozwinięcia dziesiętnego, w którym występuje nieskończenie wiele cyfr różnych od 0 (np.  $0,1$  to także  $0,0(9)$ ). Niech  $(a_n)$  będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych z przedziału  $(0, 1)$ , a  $0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots$  rozwinięciem dziesiętnym liczby  $a_n$ . Jeśli utworzymy teraz liczbę  $b = 0, b_1b_2b_3 \dots$ , tak aby w jej rozwinięciu dziesiętnym  $b_n$  była dowolną cyfrą różną od 0 i od  $a_{nn}$ , to  $b$  będzie liczbą z przedziału  $(0, 1)$ , zawierającą nieskończenie wiele cyfr różnych od 0 i różną od wszystkich liczb z ciągu  $(a_n)$ : od każdej z nich różni się bowiem na pewnym miejscu po przecinku. Stąd wniosek: żaden ciąg nie wyczerpuje wszystkich liczb z przedziału  $(0, 1)$ , a więc tym bardziej nie wyczerpuje zbioru wszystkich liczb rzeczywistych.

Można, na przykład, określić  $b$  w taki sposób:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a_{nn} \neq 1, \\ 2 & \text{gdy } a_{nn} = 1. \end{cases}$$

Okazało się jeszcze, że zbiory, wydawałoby się, tak różnej wielkości, jak zbiór wszystkich liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$  i zbiór wszystkich liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$  mają tę samą moc co zbiór  $\mathbb{N}$ , mimo że zbiór  $\mathbb{Z}$  jest „dziurawy” w  $\mathbb{R}$ , natomiast między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi można zawsze znaleźć liczbę wymierną, a nawet nieskończenie wiele takich liczb. Okazało się, że przestrzeń  $\mathbb{R}^3$ , a nawet każda przestrzeń  $\mathbb{R}^n$  dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$ , ma tę samą moc co  $\mathbb{R}$ , a  $\mathbb{R}$  jest równoliczny z każdym swoim przedziałem otwartym (np. funkcja tangens przekształca przedział  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  w sposób różnowartościowy na cały zbiór  $\mathbb{R}$ ). Okazało się również, że nie ma największej nieskończoności, bo dla każdego zbioru  $A$  można zbudować zbiór o mocy większej niż moc  $A$ ; takim zbiorem jest, na przykład, zbiór wszystkich podzbiorów  $A$ .

W. B.

## Pomysł Kopernika

Średniowieczny Wszechświat był całkiem sprawnie działającym mechanizmem. Wokół stabilnej Ziemi, zajmującej w nim centralne miejsce, krążyły planety, w miarę możliwości – jednostajnie po kołach, a jeżeli nie zgadzało się to z obserwacjami, to dodawało się więcej tych kół, czyli epicykli, tak aby tę zgodność uzyskać. Tak było od czasów Ptolemeusza przez półtora tysiąca lat i trzeba przyznać, że nie był to zły model Wszechświata. Miał cechy, które i dziś w nowoczesnej nauce są w cenie, mianowicie zgadzał się z obserwacjami, umożliwiał przewidywanie przyszłych zjawisk i miał możliwość ciągłego udoskonalania. Czego chcieć więcej?

No, może jeszcze prawdy, czyli chciałoby się jeszcze wiedzieć, co wokół czego „naprawdę” krąży. Bowiem dziś wiemy, że opisywać ruch można względem czegokolwiek, robi się więc to tak, żeby było najwygodniej. „Obiektywnego” rozstrzygnięcia, co wokół czego krąży, dostarcza dopiero dynamika. Mówiąc po prostu, obiekt lżejszy musi krążyć wokół cięższego. Ale w Średniowieczu mas ciał niebieskich jeszcze nie znano. Centralne miejsce w modelu Wszechświata było więc dla Ziemi zarezerwowane bez dyskusji, było to podstawowe założenie, z którym nikt nie polemizował – właściwie nikomu przez półtora tysiąca lat do głowy nie przyszło, że może być inaczej. Prawdę mówiąc, myśli takie, czy – jak kto woli – spekulacje, pojawiały się już w Starożytności (Filolaos, Hiketas, Ekfantos, Herakleides, Arystarch, Seleukos), poszły jednak w zapomnienie, zwłaszcza że wszystkich

przytoczył autorytet Arystotelesa. Wreszcie jednak Mikołajowi Kopernikowi przyszło do głowy, by sprawę zbadać porządnie, czyli by sprawdzić – dysponując nowymi obserwacjami i nagromadzoną przez stulecia wiedzą – czy obserwowane z Ziemi ruchy planet nie mogą być skutkiem obieganiami ich wszystkich, łącznie z Ziemią, wokół Słońca. Szczerze przy tym przyznawał, że sam pomysł nie jest jego.

Kopernik tę sprawę zbadał rzeczywiście porządnie. Okazało się przede wszystkim, że wskutek przeniesienia układu odniesienia do Słońca można było pewne składowe ruchy planet, identyczne u wszystkich planet, natychmiast zastąpić ruchem Ziemi. Liczba kół niezbędnych w opisie ruchu planet została w ten sposób zmniejszona wprawdzie o połowę, jednak Układ Słoneczny nadal opisywało kilkadziesiąt deferentów i epicykli (o tym, jak się ich astronomia pozbyła, też jest w tym numerze). Ważniejsze było co innego, mianowicie że ktoś w ogóle rozpoczął dyskusję o systemie świata. Kopernik jawnie pisał, że jest przekonany o centralnej pozycji Słońca, że brak paralaktycznych przesunięć gwiazd wynika zapewne stąd, iż gwiazdy są widocznie dalej, niż się komukolwiek dotąd zdawało. Nie miał jednak – bo nie mógł wówczas mieć – na to żadnych dowodów. W rezultacie chociaż to on na dobre „ruszył Ziemię”, jego teoria nie spowodowała – na razie – praktycznie żadnej rewolucji w astronomii. Została jednak podchwycona przez następców, przez co przyczyniła się do jednej z największych rewolucji światopoglądowych.

T. K.

## Teoria względności Einsteina

Jakikolwiek przegląd przełomowych pomysłów w nauce nie może się oczywiście obyć bez Alberta Einsteina i jego teorii względności.

Jak zostało wspomniane w artykule *Lorentz a przekształcenia Lorentza*, Einstein w jednej przełomowej pracy poradził sobie z wieloma problemami nękającymi fizykę początku XX wieku, takimi jak zagadnienie istnienia eteru i sposób rozchodzenia się światła, i na podstawie dwóch prostych postulatów wyprowadził mętnie dotąd motywowane transformacje Lorentza. Inne wnioski z tych postulatów wybiegały dalej, poza stan ówczesnej wiedzy i pojęć.

Teoria Einsteina opierała się na postulacie względności, tzn. założeniu, że każde prawo fizyczne ma taką samą postać we wszystkich układach inercjalnych. Sam postulat względności, zwany zasadą względności Galileusza, nie był wystarczający, aby np. równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego były niezmiennicze względem wyboru układu inercjalnego. Do tego potrzebne było dodatkowe założenie. Einstein na podstawie tylko eksperymentów myślowych dodał postulat stałej prędkości rozchodzenia się światła w próżni, niezależnie od ruchu jego źródła. Pomysł ten okazał się bardzo trafny.

Konsekwencje fizyczne teorii Einsteina były rewolucyjne. Jednym z jej wniosków było np. to, że czas nie jest wielkością absolutną, niezależną od układu odniesienia. Synchronizacja zegarów jest czynnością czysto fizyczną, a równoczesność dwóch różnych zdarzeń zależy od wyboru układu odniesienia: zawsze można wskazać układ, w którym są one równoczesne (albo układ, w którym zachodzą w tym samym miejscu). Czas i przestrzeń przestały być odtąd niezależne: w teorii względności zjawiska fizyczne zachodzą w czterowymiarowej czasoprzestrzeni, której punkty (zdarzenia) są charakteryzowane współrzędnymi przestrzennymi  $x, y, z$  i czasem  $t$ , wyznaczonymi w pewnym inercjalnym układzie odniesienia. Związek między współrzędnymi czasoprzestrzennymi w różnych inercjalnych układach odniesienia jest dany transformacją Lorentza.

Ogólna teoria względności Einsteina (1916 r.) wprowadziła już równoważność zjawisk we wszystkich układach odniesienia, także tych nieinercjalnych. Szczególna teoria względności (nazwana tak w odróżnieniu od tej późniejszej, ogólniejszej) obowiązywała dalej, ale pod nieobecność pola grawitacyjnego. Teoria względności jest obecnie jedną z najlepiej potwierdzonych doświadczalnie teorii fizycznych.

E. Cz.

## Pomysł Gödla

Rozwój matematyki w XIX wieku, pojawienie się nowych teorii aksjomatycznych i lepsze zrozumienie istoty aksjomatyzacji, które zawdzięczano m.in. pracom nad geometriami innymi niż euklidesowa, rozbudziły nowe nadzieje. W latach 1910–1913 Bertrand Russell i Alfred N. Whitehead opublikowali trzy tomy dzieła *Principia Mathematica*, stanowiącego próbę zbudowania matematyki na fundamencie niedużego zbioru aksjomatów i reguł wnioskowania. Nadzieja Davida Hilberta, by całą matematykę przedstawić w postaci niesprzecznej teorii sformalizowanej, w której dla każdego dającego się zapisać w języku tej teorii zdania  $p$  istniałby albo dowód  $p$ , albo dowód zdania *nieprawda*, że  $p$  – dowód korzystający z wyraźnie określonych reguł wnioskowania z równie jasno określonych aksjomatów – wydawała się bliska realizacji.

Rozważmy zdanie  $p$  następującej treści: „zdanie  $p$  jest fałszywe”. Czy to zdanie, nieco uściślona wersja tzw. paradoksu kłamcy, jest prawdziwe czy fałszywe? Bez trudu sprawdzisz, drogi Czytelniku, że każda odpowiedź prowadzi do sprzeczności. Mamy więc zdanie, którego prawdziwości nie można ustalić na gruncie, nazwijmy to, zwykłej logiki. Pomysł Kurta Gödla polegał na tym, by ten paradoks przekształcić w zdanie sformułowane w języku arytmetyki liczb naturalnych (tzw. arytmetyki Peano, od nazwiska twórcy aksjomatycznych podstaw tej teorii) i wykazanie, że ani otrzymane zdanie, ani jego zaprzeczenie dowodu w arytmetyce Peano nie mają. Teorię, dla której takie zdanie istnieje, nazywa się teorią niezupełną.

Pomińmy tu trudności matematyczne i logiczne rozumowania Gödla, zatrzymajmy się na kwestii, wydawałoby się, drugorzędnej, ale która dla całej sprawy jest kluczowa i to rozumowanie umożliwia. Zdanie  $p$  – albo podobne zdanie  $p'$ , które głosiłoby, że  $p'$  nie ma dowodu – orzeka coś o zdaniach (wręcz samo o sobie), podczas gdy zdania arytmetyki wyrażają własności liczb naturalnych. Kluczem do twierdzenia o niezupełności arytmetyki stał się pomysł kodowania symboli języka teorii, jej formuł (czyli pewnych ciągów symboli), a także dowodów (czyli pewnych ciągów formuł) za pomocą liczb naturalnych. W ten sposób każda relacja między formułami (np. stwierdzenie, że ciąg formuł  $\Phi$  jest dowodem formuły  $\varphi$ ) staje się relacją między liczbami naturalnymi.

Każdemu symbolowi języka arytmetyki Gödel przypisał liczbę nieparzystą, nie większą od 13 – każdemu innej. Każdej zmiennej reprezentującej liczbę przyporządkował liczbę pierwszą, większą od 13, każdej zmiennej reprezentującej zbiory liczb – kwadrat liczby pierwszej większej od 13, każdej zmiennej reprezentującej zbiory zbiorów (np. relacje dwuargumentowe) – trzecią potęgę liczby pierwszej większej od 13 itd. Formule, będącej ciągiem symboli o numerach  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , odpowiadała liczba  $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ , gdzie  $p_k$  oznacza  $k$ -tą liczbę pierwszą. Wreszcie kodem dowodu, będącego ciągiem formuł o numerach, kolejno,  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , stała się liczba  $2^{m_1} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r}$ . Ten sposób kodowania dawał gwarancję jednoznaczności: nie tylko każdy symbol, każda formuła i każdy dowód został opatrzony jednoznacznie określonym numerem, ale z każdej liczby, będącej kodem, można jednoznacznie odczytać obiekt (symbol, formułę, dowód), którą ta liczba koduje. Zdania o formułach mają więc swoje dokładne odpowiedniki w zdaniach o liczbach i odwrotnie; Gödel pokazał, jak takie odpowiedniki budować.

Teraz pozostaje już tylko zapisać w języku arytmetyki formułę  $C(x)$ , orzekającą, że liczba  $x$  jest numerem formuły nie mającej dowodu, i podstawić za  $x$  numer formuły  $C(x)$ ...

Teoria jest *niesprzeczna*, gdy wśród jej twierdzeń, a więc zdań mających dowód, nie ma dwóch zdań wzajemnie sprzecznych. Równoważnie, gdy istnieje zdanie, które nie ma dowodu w tej teorii.

Gödel użył następujących symboli: „0” (reprezentujący liczbę 0), „f” (symbol funkcji następnika), „~” (negacja), „v” (alternatywa), „v” (kwantyfikator ogólny), „(” (lewy nawias), „)” (prawy nawias). Ich kodami były odpowiednio liczby 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.



W. B.

## Pomysł Fouriera

**Twierdzenie Fouriera.** „Każdą” funkcję określoną na przedziale  $[-l, l]$  można reprezentować przez szereg sinusów i cosinusów w następujący sposób

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

gdzie współczynniki  $a_k$  i  $b_k$  są określone wzorami

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(s) \cos \frac{k\pi s}{l} ds,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(s) \sin \frac{k\pi s}{l} ds.$$

Kiedy rozpoczęto próby matematycznego opisu drgającej struny, w naturalny sposób pojawiło się pytanie: jakie funkcje określone na pewnym odcinku da się zapisać w postaci nieskończonej sumy sinusów i cosinusów?

Pomysł Jeana Baptiste’a Fouriera polegał na tym, żeby na powyższe pytanie odpowiedzieć: **WSZYSTKIE**.

Fakt, że powyższe twierdzenie jest ściśle biorąc fałszywe, w niczym nie umniejsza ani wielkości twierdzenia, ani wielkości jego twórcy.

Do wielkości Fouriera wkrótce dojdziemy, teraz natomiast przyjrzyjmy się, jak on sam dowodził swego twierdzenia. Rozpoczął od tego, że zapisał formalnie równość  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)$ , która miała być spełniona dla „każdej” funkcji określonej na odcinku  $[0, \pi]$  (na takim odcinku wystarczają same sinusy lub cosinusy). Następnie zastąpił sinusy przez ich rozwinięcia w szereg potęgowy  $\sin(nx) = (nx) - \frac{(nx)^3}{3!} + \frac{(nx)^5}{5!} - \dots$ , a wreszcie zmieniając kolejność sumowania, przedstawił „dowolną” funkcję w postaci szeregu potęgowego. Obecnie można za coś takiego „wylecieć” z egzaminu z analizy na I roku studiów (nawet funkcje nieskończenie wiele razy różniczkowalne mogą nie dać się przedstawić w postaci szeregu potęgowego), jednak Fourier żadnego egzaminu nie zdawał, więc liczył dalej. Doszedł wreszcie do formalnego wzoru na współczynniki  $b_n$ :

$$b_n = \frac{\prod_{m=1, m \neq n}^{\infty} m^2}{n \prod_{m=1, m \neq n}^{\infty} (m^2 - n^2)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{n^{2q}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(2q+2k-1)}(0)}{(2k-1)!} \pi^{2k-2}.$$

Warto dostrzec piękno tego wzoru, w którym dzieli się dwa iloczyny rozbieżne do nieskończoności. Fourier nie przejmował się tym „drobiazgiem”, martwiło go natomiast skomplikowanie tego wzoru i doszedł do wniosku, że warto by ten wzór nieco uprościć, co udało mu się rewelacyjnie, gdyż w ostatecznej postaci przybrał on formę

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin ns \, ds.$$

Warto przy okazji zauważyć, że ten sam wzór otrzymał wcześniej Euler (o czym Fourier nie wiedział) i to w sposób bardziej elegancki, choć też nie najprostszy (Euler korzystał z tożsamości trygonometrycznych, Fourier z równań różniczkowych zwyczajnych, ale obaj przegapili skorzystanie z prostej własności całek z iloczynu funkcji typu  $\cos nx$  i  $\cos mx$  oraz  $\sin nx$  i  $\sin mx$ , które znikają na przedziale  $(0, \pi)$ , gdy  $n$  jest różne od  $m$ ).

Dlaczego zatem uważa się Fouriera za geniusza? Przecież ani nie był pierwszym, który odkrył wzór na współczynniki dziś zwane jego imieniem, ani nie uniknął w swoim „dowodzie” niezbyt ściśle sformułowanego twierdzenia rażących błędów. Większość komentatorów stwierdza, że wartość dokonań Fouriera leży w głębi jego interpretacji. Otóż Fourier spostrzegł, iż formuła na współczynniki rozwinięcia ma sens także dla funkcji bardzo nieregularnych: przecież  $b_n$  to po prostu pole pod wykresem pewnej funkcji. Idąc dalej, Fourier wyliczył kilka pierwszych współczynników dla rozmaitych przykładów i stwierdził, że rozwinięcia trygonometryczne rzeczywiście przybliżają nawet bardzo dziwne, nieciągłe funkcje. To utwierdziło go w przekonaniu, że „każda funkcja” ma takie rozwinięcie. Fakt, że matematycy potrzebowali potem 170 lat, by sprecyzować, co znaczy w tym kontekście „każda funkcja” i co to znaczy, że jej szereg Fouriera jest zbieżny, najdobitniej świadczy o głębi myśli Fouriera. Praca Fouriera miała też niesłychaną głębię: okazało się, że pojęcie funkcji ciągłej niezbyt pasuje do szeregów Fouriera, natomiast właściwe dla nich „środowisko” to przestrzenie Hilberta, całka i miara Lebesgue’a, zbieżność prawie wszędzie – a zatem fundamentalne pojęcia współczesnej analizy funkcjonalnej, która w dużej mierze na szeregach Fouriera wyrosła. A „przy okazji” z rozważań nad szeregami Fouriera zrodziła się Cantorowska teoria mnogości...

W. S.

Właściwie zwieńczenie badań nad twierdzeniem Fouriera przyszło dopiero w 1966 r., gdy L. Carleson wykazał, że każda funkcja, która podniesiona do kwadratu ma skończoną całkę (Lebesgue’a) na przedziale  $(0, l)$ , jest sumą swego szeregu Fouriera w prawie wszystkich punktach odcinka  $(0, l)$  (tzn. wszędzie poza zbiorem tak małym, że da się go nakryć przeliczalną rodziną odcinków o dowolnie małej sumarycznej długości).

## Jednokierunkowy strumień ciepła

Czy można zrobić ciepły odpowiednik podstawowych elementów elektronicznych, czyli przepuszczającej prąd tylko w jedną stronę diody czy sterowanego zewnętrznym sygnałem tranzystora?

Żeby tego dokonać, należałoby dysponować czymś, co dobrze przewodzi ciepło w jedną stronę, a źle w drugą. Gdyby przeprowadzić na ten temat sondę uliczną, to większość zapytanych nie widziałaby powodu, dla którego takiego materiału miałyby nie być. W potocznym (błędnym) rozumieniu tak właśnie działają izolacje cieplne (np. puchowa kołdra). Gdyby jednak przeprowadzający sondę zawędrował w okolice zamieszkane przez miłośników fizyki, to polaryzacja odpowiedzi byłaby prawdopodobnie przeciwna – przecież puchowa kołdra równie dobrze chroni nas przed zimnem, jak i przed ciepłem. Tylko rzadko wypada nam chronić się przed gorącym istotnie większym od temperatury ciała. Stąd powszechnie używane określenia „ciepła kołdra” czy „ciepłe ubranie”.

A jak jest naprawdę? Skoro o tym piszę, to raczej muszą mieć profani. Na pocieszenie miłośnikom pozostaje to, że „opinia publiczna” nie potrafiłaby podać przykładu tego, o czym twierdziłaby, że istnieje. Natomiast wśród miłośników na pewno znaleźliby się tacy, którzy wskazałoby urządzenie codziennego użytku, które działa właśnie jak ciepła dioda.

Tym urządzeniem jest... garnek [1,2]. W miarę szybkie zagotowanie wody (która jest dość dobrym izolatorem) w dużym garnku jest możliwe dzięki konwekcji powodowanej różnicą gęstości cieplej i zimnej wody. Gdyby wodę w garnku grzać od góry, a nie od dołu, to woda wyparowałaby, zanim by się zagotowała. Można dodać jeszcze, że z odpowiednio wysokiego garnka można zrobić ciepły tranzystor. Grzany od góry przewodziłby ciepło tylko wtedy, gdyby w nim mieszać – przewodnictwo cieplne zależałoby od intensywności mieszania. (Pytanie do miłośników: w jakiej sytuacji wodę należy grzać z góry, by ją szybciej podgrzać?)

Zauważmy jednak, że działanie wyżej opisanej diody cieplnej jest możliwe tylko dzięki umieszczeniu jej w polu grawitacyjnym. Autorzy pracy [1] przekonują jednak, że materiał przewodzący ciepło lepiej w jedną stronę niż w drugą może istnieć ([2] jest popularnym opisem publikacji [1]). Rozpatrują oni jednowymiarowy model, w którym połączenie między termostatami o różnych temperaturach jest zrealizowane za pomocą łańcucha oscylatorów składającego się z trzech części. W obu skrajnych częściach znajdują się oscylatory harmoniczne, ale o różnych częstościach własnych, a w środkowej oscylatory anharmoniczne, dla których częstości własne zależą od amplitudy, czyli od temperatury. Jeżeli temperatura jest niska, to kontakt cieplny między częścią środkową a końcem o małej częstości własnej jest dobry, natomiast z końcem o dużej zły. W wysokiej temperaturze jest na odwrót. W takim razie łańcuch grzany od „sztywnego” końca (tego o wysokiej częstości własnej), a chłodzony od „giętkiego”,

będzie lepiej przewodził ciepło niż przy różnicy temperatur o przeciwnym znaku. Autorzy argumentują, że takie własności mogą mieć odpowiednio dobrane łańcuchy DNA lub innych podobnych makrocząsteczek. Być może takie łańcuchy są wykorzystywane przez Naturę. Mogłoby to wyjaśniać niezwykłą powolność niektórych procesów zachodzących w komórkach żywych organizmów na poziomie molekularnym.

Teoretyczne rozważania oparte na komputerowych symulacjach są na tyle ogólne, że powinny się stosować również w przypadku trójwymiarowym. Nie jest więc wykluczone wykonanie kołderki, która będzie przewodzić ciepło lepiej w jedną stronę niż w drugą.

## Przechowywanie światła

Robi się coraz cieplej. Świeża zieleń młodych liści pokrywa się kwieciami. Kasztany jak co roku ogłaszają zbliżanie się kolejnych... „najdłuższych weekendów nowożytnej Europy”.

Gdy już uda nam się znaleźć w miejscu, w którym „widok zapiera dech w piersiach”, to chciałoby się zachować go na później. Pomysłowość ludzka nie zna granic. Mamy do wyboru zrobienie zdjęć, nakręcenie filmu lub wykonanie „konserwy” (zamykamy oczy i zapamiętujemy rozpierające nas poczucie piękna). Czy można jednak docierając do nas sygnał świetlny po prostu zatrzymać, schować do kieszeni, a później odtworzyć?

Od pewnego czasu jest to możliwe (niestety w mocno ograniczonym stopniu – nie od razu Kraków zbudowano). W *Delcie 5/1999* wspominaliśmy o spowolnieniu sygnału świetlnego do prędkości istotnie mniejszej od prędkości dźwięku w silnie nieliniowym ośrodku optycznym. Po pewnym czasie naukowcom udało się nawet taki impuls całkowicie zatrzymać, a ostatnio powtórzyć te osiągnięcia w ciele stałym [3].

To ostatnie dokonanie jest istotne dlatego, że pozwala żywić nadzieję na praktyczne zastosowanie tego typu zabaw ze światłem do „nieliniowej optyki niskiej intensywności oraz obróbki i przechowywania kwantowej informacji”, gdyż rozwinięte metody pozwalają na zapamiętanie nie tylko amplitudy, ale i fazy sygnału świetlnego, a ciała stałe lepiej nadają się do budowania urządzeń niż rozrzedzone „opary” metali.

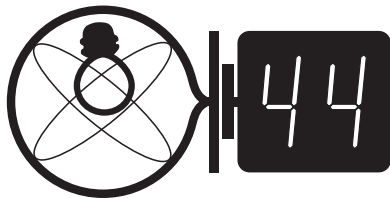
Czy powstanie kiedyś sztuczny odpowiednik „konserwy” obrazów? Nie potrafię sobie tego wyobrazić, ale nie mówiłbym, że nie.

Piotr ZALEWSKI

[1] M. Terraneo, M. Peyrard i G. Casati, *Controlling the Energy Flow in Nonlinear Lattices: A Model for a Thermal Rectifier*, Phys. Rev. Lett. 88.094302 4/03/2002

[2] J.R. Minkel, *One-Way Heat Traffic*, Physical Review Focus 26/02/2002

[3] A.V. Turukhin, V.S. Sudarshanam i M.S. Shahriar, *Observation of Ultraslow and Stored Light Pulses in a Solid*, Phys. Rev. Lett. 88.023602 14/01/2002



Skrót regulaminu

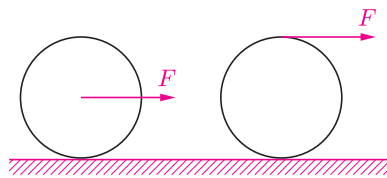
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VII 2002

Zadania z fizyki nr 338, 339

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**338.** Na dwa jednorodne i jednakowe walce spoczywające na poziomym stole działają poziome siły, przy czym w jednym z tych przypadków siła jest przyłożona do osi walca, a w drugim – do górnej krawędzi (rys. 1). Jeśli współczynnik tarcia o stół ma dla obu walców



Rys. 1

jednakową wartość, to na który walec możemy podziałać większą siłą, nie wprawiając go przy tym w poślizg? Który walec będzie się wtedy toczył z większym przyspieszeniem?

**339.** Półkula o promieniu 10 cm wykonana ze szkła o współczynniku załamania 1,5 leży na stole płaską stroną do dołu. Nad wierzchołkiem półkuli na wysokości 3 cm znajduje się punktowe źródło światła. Ile wynosi promień oświetlonego koła na powierzchni stołu pod półkulą?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2002

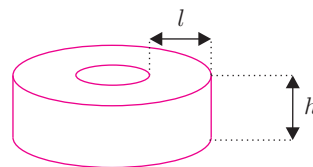
**330.** Równię pochyłą o masie  $M$  i kącie nachylenia  $\alpha$  postawiono na poziomym stole, a na równi położono na pewnej ustalonej wysokości  $h$  ciało o masie  $m$  (rys. 2). Jeśli na żadnej powierzchni nie występuje tarcie, to czy można tak dobrać parametry równi ( $M$  i  $\alpha$ ), aby ciało w chwili zsunięcia się z równi miało dowolnie małą prędkość względem ziemi, czy też istnieje jakieś ograniczenie od dołu na tę prędkość?

**331.** Aby zmniejszyć natężenie prądów wirowych w rdzeniu transformatorów (czyli zmniejszyć straty energii), rdzenie te wykonuje się z izolowanych blaszek żelaznych zamiast z litej masy

Przypominamy treść zadań:

żelaza. W przypadku autotransformatora rdzeń ma kształt toroidalny o przekroju prostokątnym (rys. 3). Jaki sposób zestawienia blaszek

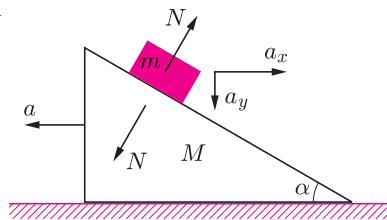
- a) ułożenie w stos płaskich kółek z dziurką,
- b) zwinięcie w rulon długiej taśmy o szerokości  $h$ ,
- c) złożenie rdzenia z prostokątnych płytek o wymiarach  $l \times h$ ?



Rys. 3

**330.** Oznaczmy siłę nacisku ciała na równię jako  $N$ , składowe przyspieszenia ciała jako  $a_x$  i  $a_y$  (zob. rys. 2), a przyspieszenie równi jako  $a$ .

Obowiązują równania dynamiczne  
 $N \sin \alpha = Ma = ma_x$ ,  
 $mg - N \cos \alpha = ma_y$ ,  
 oraz kinematyczne równanie wynikające z faktu, że ciało



Rys. 2

pozostaje na powierzchni równi:  $a_y = (a_x + a) \operatorname{tg} \alpha$ .

Z równań tych eliminujemy  $N$  i wyznaczamy przyspieszenia; w szczególności

$$a_x = \frac{Mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad a_y = \frac{(M + m)g \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Mnożąc  $a_x$  i  $a_y$  przez czas  $t$  obliczymy składowe końcowej prędkości ciała; z drugiej strony, czas ten jest dany wzorem

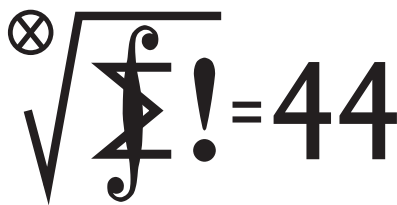
$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_y}}.$$

Kwadrat końcowej prędkości ciała jest więc opisany wyrażeniem

$$v^2 = (a_x^2 + a_y^2)t^2 = 2gh \frac{M^2 \cos^2 \alpha + (M + m)^2 \sin^2 \alpha}{(M + m)(M + m \sin^2 \alpha)}.$$

Nietrudno sprawdzić, że dobierając odpowiednio małe  $M$  i  $\alpha$  można dowolnie zmniejszyć  $v^2$ . Trzeba przy tym zauważyć, że istotna jest kolejność dokonania przejść granicznych  $M \rightarrow 0$  i  $\alpha \rightarrow 0$  (najpierw należy przejść do granicy z  $\alpha \rightarrow 0$ ; w praktyce wystarczy, jeśli  $\alpha$  będzie proporcjonalne do  $M$ ).

**331.** Sposób c) jest, oczywiście, najgorszy, gdyż prądy wirowe płynęłyby w płaszczyźnie płytek bez przeszkód. Po starannej analizie można dojść do wniosku, że sposób b) jest nieco lepszy od a), gdyż prąd w uzwojeniu autotransformatora ma obok składowej „wokół prostokąta” także niewielką składową „w koło” (jest to faktycznie jeden zwój). Ta składowa wytwarza pole magnetyczne równoległe do osi walca, a związane z nią prądy wirowe będą silnie tłumione przy zastosowaniu sposobu b).



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VII 2002

**Zadania z matematyki nr 441, 442**

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**441.** Rozważamy wielomian  $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  o współczynnikach rzeczywistych  $a, b, c, d$  oraz trójmian kwadratowy  $T(x) = x^2 + px + q$  ze współczynnikami  $p = 2 - a + b, q = W(-1)$ . Dowieść, że jeżeli trójmian  $T(x)$  ma co najmniej jeden pierwiastek nieujemny, to wielomian  $W(x)$  ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

**442.** Niech  $J$  oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych niż 1. Czy istnieje funkcja  $f: J \rightarrow J$ , ciągła, ściśle rosnąca i taka, że wartości funkcji  $g(x) = f(x)/x$  wypełniają zbiór wszystkich liczb dodatnich?

Zadanie 442 zaproponował pan Marcin Peczański z Latchorzewa.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2002**

**433.** Znaleźć wszystkie funkcje wymierne

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (P, Q - \text{wielomiany rzeczywiste})$$

mające tę własność, że  $f(x)^2 - f(x^2)$  jest funkcją stałą na zbiorze tych liczb  $x \in \mathbb{R}$ , dla których  $Q(x) \neq 0$  oraz  $Q(x^2) \neq 0$ .

**433.** Każda funkcja stała spełnia zadane warunki. Dalej szukamy funkcji  $f = P/Q$  różnych od stałej. Można przyjąć, że wielomiany  $P$  i  $Q$  są względnie pierwsze i że w wielomianie  $Q$  współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest równy 1; zatem  $Q(x) = x^n + M(x)$ , gdzie  $M$  jest wielomianem stopnia niższego niż  $n$ . Oznaczając przez  $c$  stałą wartość różnicy  $f(x)^2 - f(x^2)$  otrzymujemy równanie

$$P(x)^2 Q(x^2) = Q(x)^2 [cQ(x^2) + P(x^2)],$$

równoważne (wobec przyjętych założeń) układowi równań

$$Q(x^2) = Q(x)^2, \quad P(x)^2 = cQ(x^2) + P(x^2).$$

Z pierwszego równania tego układu dostajemy związek  $2x^n M(x) + M(x)^2 = M(x^2)$ , który jest spełniony tylko wtedy, gdy  $M$  jest wielomianem zerowym (wystarczy porównać stopień po obu stronach). Zatem  $Q(x) = x^n$  ( $n \geq 0$ ) i drugie równanie układu przybiera postać

$$(1) \quad P(x)^2 = cx^{2n} + P(x^2).$$

Jeśli  $c = 0$ , to  $P(x)^2 = P(x^2)$  i powtarzając rozumowanie przeprowadzone dla wielomianu  $Q$  wnosimy, że  $P(x) = x^k$  ( $k \geq 0$ ). Skoro  $f = P/Q \neq \text{const}$ , wykładniki  $n$  i  $k$  nie są jednocześnie zerami. Dostajemy rozwiązanie

$$(2) \quad f(x) = x^m; \quad m \neq 0 - \text{liczba całkowita.}$$

Pozostaje przypadek, gdy  $c \neq 0$ . Gdy  $n \geq 1$ , równość (1) pokazuje, że  $P(x) \neq \text{const}$ ; gdy zaś  $n = 0$ , to także  $P(x) = f(x) \neq \text{const}$ , w myśl przyjętego założenia. Tak więc  $P$  jest wielomianem stopnia dodatniego.

Niech  $p \geq 1$  będzie najniższym wykładnikiem, dla którego  $x^p$  występuje w wielomianie  $P$  ze współczynnikiem  $a \neq 0$ . Zapisujemy więc ten wielomian w postaci

$$P(x) = b + ax^p + x^{p+1}R(x),$$

podstawiamy to do równania (1) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} b^2 + 2bax^p + a^2x^{2p} + 2bx^{p+1}R(x) + \\ + 2ax^{2p+1}R(x) + x^{2p+2}R(x)^2 = \\ = b + cx^{2n} + ax^{2p} + x^{2p+2}R(x^2). \end{aligned}$$

Gdy  $n = 0$ , przyrównanie wyrazów wolnych ( $b^2 = b + c$ ) pokazuje, że  $b \neq 0$  (bo  $c \neq 0$ ); po odjęciu wyrazów wolnych mamy po prawej stronie wielomian podzielny przez  $x^{2p}$ , a po lewej – nie. Zatem  $n \geq 1$  i porównując wielomiany po obu stronach stwierdzamy kolejno, że  $b^2 = b, 2ba = c, p = 2n, a^2 = a$ ; skoro  $c \neq 0$ , to  $b \neq 0$ , więc  $b = 1, a = 1,$

Przypominamy treść zadań:

**434.** Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg. Proste styczne do tego okręgu w punktach  $A$  i  $C$  przecinają się w punkcie  $P$ , a styczne w punktach  $B$  i  $D$  przecinają się w punkcie  $Q$ . Dowieść, że punkty  $A, C, Q$  są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty  $B, D, P$  są współliniowe.

$c = 2$ ; trzy pierwsze składniki po obu stronach znoszą się. Dzieliąc pozostałą równość przez  $x^{p+1}$  otrzymujemy

$$2R(x) + 2x^p R(x) + x^{p+1} R(x)^2 = x^{p+1} R(x^2).$$

Jeśli wielomian  $R$  nie jest zerowy, to po obu stronach tej równości najwcześniejszy niezerowy współczynnik pojawia się przy różnych potęgach zmiennej. Wobec tego  $R(x) \equiv 0$ , czyli  $P(x) = 1 + x^{2n}$ , skąd

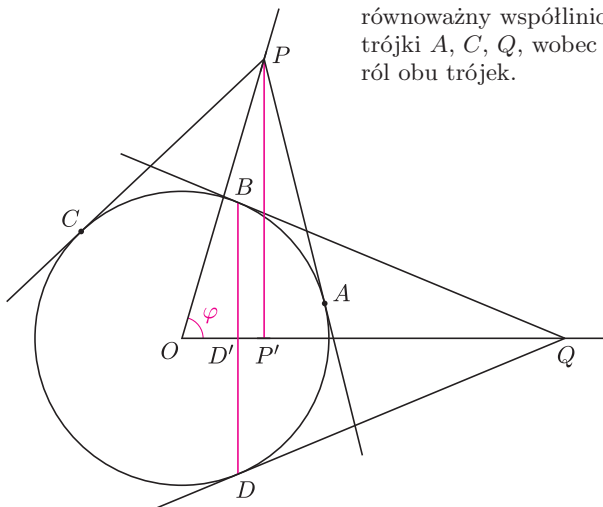
$$(3) \quad f(x) = x^n + x^{-n}; \quad n \geq 1 - \text{liczba całkowita.}$$

Każda funkcja postaci (2) lub (3) oraz każda funkcja stała spełnia wymagane warunki; a z przeprowadzonego rozumowania wynika, że są to wszystkie takie funkcje.

**434.** Oznaczmy przez  $O$  i  $r$  środek i promień okręgu. Przyjmijmy, że wypukły kąt  $POQ$  ma miarę  $\varphi$ . Jeżeli  $\varphi = 0^\circ$  lub  $\varphi \geq 90^\circ$ , to ani punkty  $A, C, Q$ , ani  $B, D, P$  nie tworzą trójki punktów współliniowych. Dalej zakładamy, że  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ . Rozważamy rzuty  $D'$  i  $P'$  punktów  $D$  i  $P$  na półprostą  $OQ^{-}$ .

Warunek współliniowości trójki  $B, D, P$  jest teraz równoważny równości  $|OD'| = |OP'|$ . Ponieważ zaś  $|OD'| \cdot |OQ| = r^2$  oraz  $|OP'| = |OP| \cdot \cos \varphi$ , uzyskana równość jest równoważna następującej:  $|OP| \cdot |OQ| \cdot \cos \varphi = r^2$ . Ten ostatni warunek,

niezmienniczy przy zamianie  $P$  z  $Q$ , jest jednocześnie równoważny współliniowości trójki  $A, C, Q$ , wobec symetrii ról obu trójek.





## Patrz w niebo



Każda normalna galaktyka to dość skomplikowany obiekt, w którym gwiazdy są nie tylko „punktami materialnymi” biorącymi udział w rotacji galaktyki i powstawaniu ramion spiralnych. Mianowicie gwiazdy ewoluują, wskutek czego cała galaktyka również podlega ewolucji, nie tylko mechanicznej. Gwiazdy powstają z rozproszonej materii międzygwiazdowej i, kończąc życie, również przekazują przynajmniej część swojego budulca z powrotem materii międzygwiazdowej, a z niej tworzą się następne pokolenia gwiazd. Nietrudno przewidzieć, że materia powtórnie wchodząca do obiegu nie jest taka sama jak materia pierwotna, z której powstało pierwsze pokolenie gwiazd – jest ona wzbogacona w pierwiastki ciężkie syntetyzowane z wodoru i helu w gorących wnętrzach gwiazd. Różnice w składzie chemicznym gwiazd najstarszych i gwiazd nowego pokolenia wyraźnie obserwuje się na podstawie analizy widmowej.

Okazuje się jednak, że galaktyki, które uważamy za normalne, wcale nie są galaktykami najczęściej występującymi we Wszechświecie. Najczęstsze są tzw. galaktyki karłowate. Niedawne drobiazgowo obserwowanej jednej z nich, stosunkowo bliskiej galaktyki UGC 9749 położonej w Wielkiej Niedźwiedzicy, prowadzone również za pomocą Teleskopu Hubble’a, pokazały, że jest ona zbudowana wyłącznie z gwiazd bardzo ubogich w pierwiastki ciężkie. Zawartość tych pierwiastków oceniono na mniej niż 1/150 ich zawartości w Słońcu, a wiek gwiazd na 14 mld lat. Własności tych gwiazd odpowiadają więc własnościom gwiazd tworzących najstarsze gromady kuliste towarzyszące naszej Galaktyce. Wydaje się, że po uformowaniu pierwszego pokolenia gwiazd galaktyki karłowate nie są w stanie utrzymać materii stanowiącej wiatry gwiazdowe czy produkty wybuchów supernowych i dlatego te „surowce wtórne” są przez nie bezpowrotnie tracone. Istnieje pogląd, że galaktyki karłowate byłyby czymś pośrednim między gromadami kulistymi a normalnymi galaktykami.

*Tomasz KWAST*



## Maj

Najszybciej poruszającą się gwiazdą na całym niebie jest Gwiazda Barnarda, niewidoczna gołym okiem gwiazda (9,54 mag) położona w Wężowniku, który w majowe wieczory dopiero wschodzi. Za to widać w całej okazałości wysoko na niebie gwiazdozbiór Wolarza, którego najjaśniejsza gwiazda, Arktur, jest również gwiazdą bardzo szybką, co odkrył Edmond Halley w 1717 r. Zarówno gwiazda Barnarda, jak i Arktur są gwiazdami dość bliskimi (odpowiednio 1,8 i 11,1 pc), dlatego właśnie szybko zmieniają położenie. Arktur jest najjaśniejszą gwiazdą na północnej półkuli (−0,05 mag). Jest pomarańczowym olbrzymem typu K2 o temperaturze 4000 K (jego barwę doskonale widać gołym okiem), świeci ponad 100 razy silniej niż Słońce, a przesuwa się na niebie mniej więcej o średnicę tarczy Słońca w ciągu 800 lat.

Prawie wszystkie jasne planety grupują się w maju w Byku, tylko Jowisz znajduje się obecnie w Bliźniętach. Najprawdopodobniej środki masowego przekazu będą znowu straszyć „ustawieniem się planet na jednej linii”. Można to tak nazwać, ale z tego powodu dokładnie nic nam nie grozi. Na początku maja można próbować po zachodzie Słońca znaleźć na niebie Merkurego – 4 V znajdzie się on w odległości 21° na wschód od Słońca. W wyniku skupienia się planet w Byku można będzie zaobserwować (choć wszystkie te planety wkrótce po zachodzie Słońca też zachodzą) zblżenia: Marsa i Saturna 4 V na odległość 2°, Wenus i Saturna 7 V też na 2° oraz Wenus i Marsa 10 V na 0°, 3. Ponadto 14 V Księżyc zakryje po kolei Saturna, Marsa i Wenus, ale z Polski żadne zakrycie nie będzie widoczne – tylko zblżenia Księżyca do tych planet. Nów Księżyca wypada 12 V, a pełnia 26 V i nastąpi wtedy jego półcieniowe zaćmienie, a więc praktycznie niezauważalne, a ponadto i tak z Polski niewidoczne, gdyż będzie to około południa.

*T.K.*



### Rozwiązanie zadania F 572.

Dysocjacja powoduje wzrost entropii mola wodoru o 100 J/K. Zerwanie wiązania wymaga energii, która musi być pobrana z otoczenia, zatem temperatura otoczenia musi się obniżyć. W temperaturze 300 K związany z tym obniżeniem temperatury spadek entropii wyniósłby  $\Delta Q/T = 4,3 \cdot 10^5 / 300 = 1400 \text{ J/K}$ . Oznacza to wypadkowe zmniejszenie entropii o 1300 J/K, a więc dysocjacja w temperaturze 300 K jest niemożliwa.

## O RÓWNYCH SUMACH TRZECH PIĄTYCH POTĘG I NIE TYLKO

Nie są znane przykłady równych sum dwóch piątych potęg, bez trudu przychodzi jednak znalezienie równych sum trzech piątych potęg liczb całkowitych dodatnich. W liczbach mniejszych od 100 znajdujemy cztery przykłady:

$$\begin{aligned} 66^5 + 44^5 + 18^5 &= 64^5 + 51^5 + 13^5 \\ 67^5 + 28^5 + 24^5 &= 62^5 + 54^5 + 3^5 \\ 74^5 + 43^5 + 21^5 &= 68^5 + 62^5 + 8^5 \\ 83^5 + 67^5 + 56^5 &= 81^5 + 72^5 + 53^5. \end{aligned}$$

Rozwiązania równania

$$(5.3.3) \quad a^5 + b^5 + c^5 = d^5 + e^5 + f^5$$

lubią spełniać jednocześnie równanie

$$(1.3.3) \quad a + b + c = d + e + f.$$

Spośród 204 rozwiązań pierwotnych (tzn. o największym wspólnym dzielniku 1) równania (5.3.3) w liczbach mniejszych od 1000 aż 131 spełnia równanie (1.3.3).

Najmniejszym rozwiązaniem równania (5.3.3) niespełniającym równania (1.3.3) jest

$$118^5 + 85^5 + 26^5 = 116^5 + 90^5 + 53^5.$$

Wiadomo, że równanie (5.3.3) ma nieskończenie wiele rozwiązań pierwotnych w liczbach całkowitych dodatnich, znane są bowiem rozwiązania parametryczne tego równania.

Ciekawym przykładem jest rozwiązanie w liczbach pierwszych:

$$6379^5 + 3833^5 + 2657^5 = 6089^5 + 5003^5 + 1777^5.$$

Jednak najbardziej zafascynowany jestem następującymi czterema rozwiązaniami:

$$\begin{aligned} 1258^5 + 582^5 + 455^5 &= 1153^5 + 1037^5 + 105^5 \\ 47273^5 + 9717^5 + 5681^5 &= 47242^5 + 15398^5 + 31^5 \\ 55772^5 + 25403^5 + 19264^5 &= 51858^5 + 44667^5 + 3914^5 \\ 71362^5 + 37983^5 + 27745^5 &= 65728^5 + 59070^5 + 12292^5. \end{aligned}$$

Jeśli uruchomisz swoją spostrzegawczość, Drogi Czytelniku, zapewne odkryjesz, jaką wspólną własność mają powyższe rozwiązania. Nie wiem, czy istnieją inne rozwiązania o tej własności, jeśli znajdziesz jeszcze jedno, daj mi znać, będę pod wrażeniem.

Z sumami piątych potęg wiąże się poniższa hipoteza Eulera, będąca uogólnieniem wielkiego twierdzenia Fermata:

**HIPOTEZA EULERA:** Dla dowolnej liczby  $n \geq 3$  równanie

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_{n-1}^n = a_n^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich

$a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Innymi słowy, zgodnie z hipotezą Eulera  $n$ -tej potęgi nie można przedstawić przy pomocy sumy mniej niż

$n$   $n$ -tych potęg. Hipoteza wydawała się całkiem sensowna, zważywszy że o przykłady rozkładu  $n$ -tej potęgi na sumę  $n$   $n$ -tych potęg nietrudno. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} 5^2 &= 4^2 + 3^2 \\ 6^3 &= 5^3 + 4^3 + 3^3 \\ 353^4 &= 315^4 + 272^4 + 120^4 + 30^4. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, zgodnie z wielkim twierdzeniem Fermata, sześciannu liczby całkowitej dodatniej nie można rozłożyć na sumę dwóch sześciannów.

Hipoteza Eulera „była prawdziwa” do roku 1966, kiedy to Lander, Parkin i Selfridge znaleźli rozkład piątej potęgi na sumę **czterech** piątych potęg:

$$(5.1.4) \quad 144^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5.$$

Sformułowali oni wówczas następującą hipotezę:

**HIPOTEZA (LANDER, PARKIN, SELFRIDGE):**

Dla dowolnej liczby naturalnej  $n > 3$  równanie

$$(n.k.l) \quad a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n = b_1^n + b_2^n + \dots + b_l^n$$

nie ma nietrywialnych rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich, gdy  $k + l < n$ .

Innymi słowy, żadne nietrywialne równanie nie może być spełnione przez mniej niż  $n$   $n$ -tych potęg. Hipoteza ta do dziś nie została obalona, ani udowodniona.

Rozwiązania równania  $(n.k.l)$ , gdzie  $k \leq l$ , będziemy nazywać rozwiązaniami typu  $(n, k, l)$ .

Interesujący jest przypadek  $k + l = n$ . Otóż dotychczas znanych jest 6 typów takich rozwiązań. O trzech typach wiadomo, że mają nieskończenie wiele istotnie różnych rozwiązań:

$(4, 2, 2)$  – o równych sumach dwóch czwartych potęg napisaliśmy w kwietniu,

$(4, 1, 3)$  – o tym poniżej,

$(6, 3, 3)$  – o tym za miesiąc, zgodnie z zasadą, że o  $n$ -tych potęgach piszemy głównie w  $n$ -tym miesiącu roku  $6^4 + 5^4 + 3^4 = \binom{6+5+3}{5}$ .

Dla trzech typów znanych jest po jednym

(**słownie: jednym**) rozwiązaniu. Są to:  $(5, 1, 4)$ ,  $(5, 2, 3)$  i  $(8, 3, 5)$ .

Rozwiązanie typu  $(5, 2, 3)$  znaleźli Scher i Seidl w 1997 roku:

$$14132^5 + 220^5 = 14068^5 + 6237^5 + 5027^5.$$

Jeśli zaś chodzi o czwarte potęgi równe sumie trzech czwartych potęg, co jest jedynym znanym oprócz  $(5, 1, 4)$  kontrprzykładem do hipotezy Eulera, to pierwszy przykład

$$20615673^4 = 18796760^4 + 15365639^4 + 2682440^4$$

wraz z dowodem istnienia nieskończenie wielu rozwiązań podał Noam Elkies w 1986 roku.

Później znaleziono najmniejsze rozwiązanie:

$$422481^4 = 414560^4 + 217519^4 + 95800^4.$$

A oto inne rozwiązania, do których udało mi się dotrzeć:

$$\begin{aligned} 2813001^4 &= 2767624^4 + 1390400 + 673865^4 \\ 8707481^4 &= 8332208^4 + 5507880 + 1705575^4 \\ 12197457^4 &= 11289040^4 + 8282543 + 5870000^4 \\ 16003017^4 &= 14173720^4 + 12552200 + 4479031^4 \\ 16430513^4 &= 16281009^4 + 7028600 + 3642840^4 \\ 638523249^4 &= 630662624^4 + 275156240^4 + 219076465^4. \end{aligned}$$

Korespondencję do  $\Gamma$ -limatius prosimy kierować pod adresem:

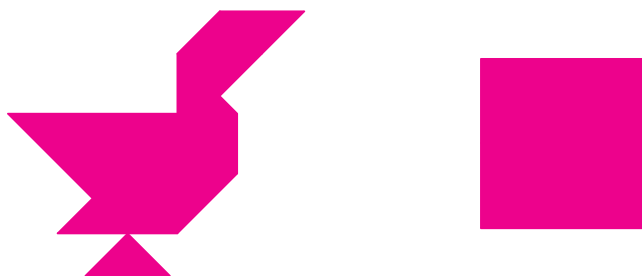
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl



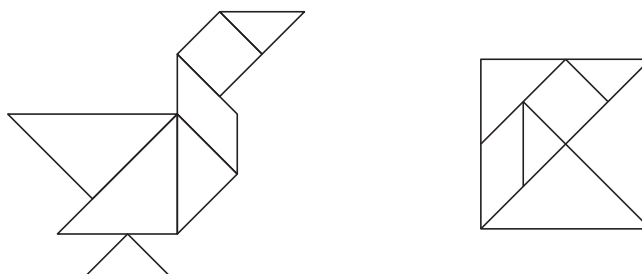
# mała delta

## Tangram bez ograniczeń

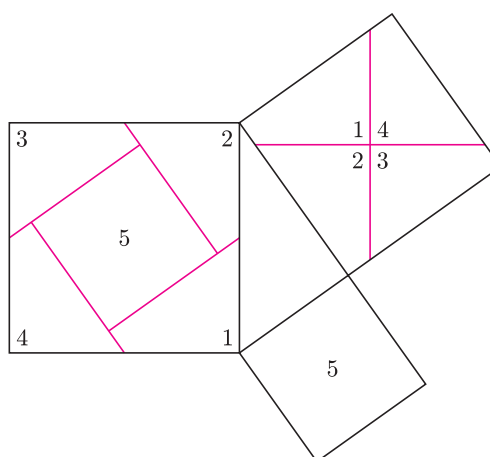
Czy dwie figury, widoczne na rysunku, mają równe pola?



Znawcy gry o wdzięcznej nazwie „tangram” wiedzą z pewnością, że tak, ponieważ każda z tych figur jest zbudowana z tych samych wielokątów.



A jeśli wielokąty są te same, to i sumy ich pól, równe polom całych dużych wielokątów, są te same. Nietrudno sobie wyobrazić, że odnosi się to nie tylko do klocków tangramu: jeśli jeden wielokąt można pociąć na wielokąty mniejsze, z których można złożyć drugi, to oba mają równe pola. Oto przykład: dwa kwadraty rozłożono na wielokąty, z których można złożyć jeden, większy kwadrat. (Czy nie ma w tym jakiegoś twierdzenia geometrycznego?)

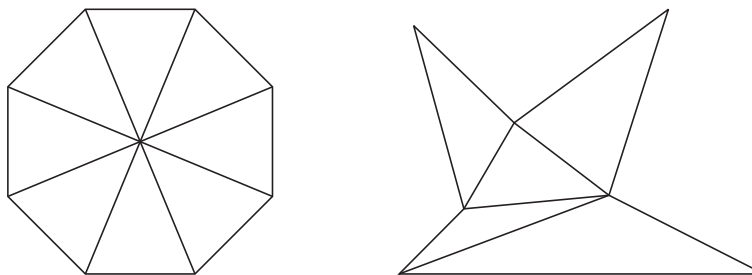


A czy jest odwrotnie? Czy mając dwa wielokąty o równym polu można jeden z nich pociąć tak, aby z otrzymanych kawałków złożyć drugi?

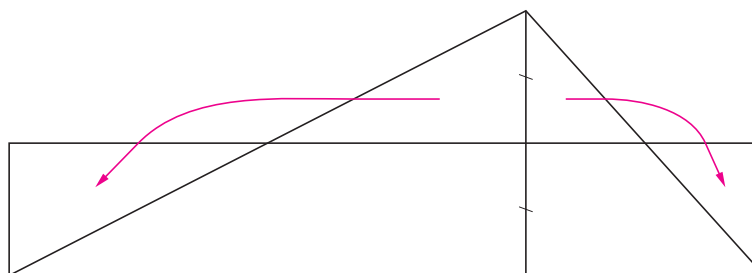


Okazuje się, że można (choć wiemy to dopiero od 170 lat). Zobaczmy, jak to zrobić. Niech  $A$  i  $B$  będą wielokątami o równych polach.

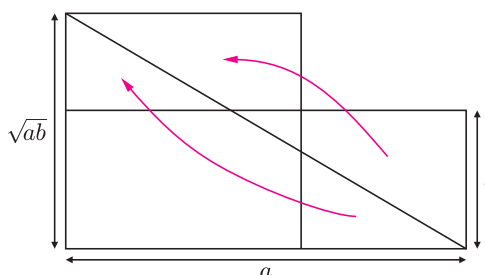
Po pierwsze, tnijemy wielokąt  $A$  na trójkąty (wszystko jedno jak); możemy to, oczywiście, zrobić z każdym wielokątem, nie tylko wypukłym:



Po drugie, z każdego z otrzymanych trójkątów budujemy prostokąt, tak jak na rysunku:



Po trzecie, każdy z prostokątów rozcinamy na części, z których budujemy kwadrat, jak na rysunku:



Jeśli nie można tego wykonać, to znaczy, że bok  $a$  prostokąta jest za długi w stosunku do boku  $b$  (dokładniej: musi być  $\sqrt{ab} \leq 2b$ , czyli  $a \leq 4b$ ); wtedy rozcinamy prostokąt w połowie i jedną połówkę nakładamy na drugą. Stosunek dłuższego boku do krótszego zmniejszy się i możemy tak postępować tak długo, aż będzie spełniony warunek umożliwiający konstrukcję z rysunku powyżej.

Mamy tyle kwadratów, ile trójkątów wycięliśmy z wielokąta  $A$ . Teraz więc pora na po czwarte: składając z dwóch kwadratów jeden, np. tak jak na ostatnim rysunku z poprzedniej strony, sprowadzamy wszystko do jednego kwadratu o polu równym polu wielokąta  $A$ . A co z wielokątem  $B$ ?

Wielokąt  $B$  możemy też sprowadzić do jednego kwadratu (dokładnie takiego, jak kwadrat powstały z  $A$ , bo przecież  $A$  i  $B$  mają równe pola) – a jeśli możemy to zrobić, to możemy też całą operację odwrócić i z tego kwadratu „odbudować” wielokąt  $B$ . W ten sposób mamy drogę prowadzącą od wielokąta  $A$  do wielokąta  $B$ .

Na koniec proste zadanie.

Jak pociąć wielokąt z rysunku obok, aby złożyć z niego kwadrat o tym samym polu? I jak to zrobić „od razu”, bez przejścia całej opisanej wyżej drogi?

*W. B.*



## O tym, jak bramkarz strzelił gola

„Białe” światło słoneczne, jakkolwiek dziwnie może to zabrzmieć, jest bardzo kolorowe. Kto nie wierzy, może to sprawdzić używając pryzmatu, który rozszczepi wszystkie kolorowe składniki. Pozorna jednokolorowość białego światła jest tylko wrażeniem naszego mózgu rejestrującego całe spektrum kolorów. Prawdopodobnie pierwszą osobą, która zdała sobie z tego sprawę, był Izaak Newton. Przez wiele, wiele lat wszystkim wydawało się, że światło słoneczne zawiera wszelkie możliwe kolory. Sytuacja zmieniła się dopiero, gdy zaczęto używać precyzyjnej spektrografii, dzięki której można było badać widmo światła o wiele dokładniej.

Nowe wyniki były zaskakujące, okazało się bowiem, że spektrum światła słonecznego wcale nie obejmuje wszystkich kolorów. Jeśli wyobrazimy sobie, że kolory od czerwonego poprzez żółty i zielony, aż do niebieskiego i fioletowego reprezentowane są przez punkty na odcinku, to tylko niektóre punkty wchodziły w skład widma słonecznego. Ponieważ punkty te były ułożone bardzo gęsto, to nieprecyzyjne pomiary przy użyciu pryzmatu mogły sugerować, że widmo jest ciągle. Wrażenie to było dodatkowo spotęgowane tym, że z pewnych powodów linie widmowe (czyli punkty naszego odcinka) są trochę rozmyte i częściowo na siebie nachodzą.

Zaczęto wykonywać wiele eksperymentów spektrograficznych nie tylko ze światłem słonecznym. Napełniano szklane rurki różnymi gazami i przepuszczano przez nie prąd elektryczny. W efekcie gaz zaczynał świecić i można było zbadać widmo emitowanego przezeń światła. Wyniki ponownie wprawiły wszystkich w zdumienie. Okazało się, że każdy gaz świecił tylko kilkoma ściśle ustalonymi kolorami, czyli widać było kilka „linii spektralnych”. Nikt na świecie nie był w stanie powiedzieć, dlaczego tak się działo. W miarę zwiększania czułości spektrografów ilość obserwowanych linii widmowych rosła dla każdego gazu. Obecnie wiadomo, że każdy gaz ma nieskończone spektrum linii, które nie obejmuje jednak pełnego widma kolorów.

Częstości obserwowanych linii analizowano i katalogowano dla wielu różnych gazów. Kilku naukowcom udało się nawet zauważyć, że dla najbliższego gazu – wodoru – odległości między liniami spektralnymi spełniają pewne proste algebraiczne prawo. Wciąż jednak natura tych linii pozostawała niewyjaśnioną zagadką. Aby rozwiązać problem, trzeba było odkryć schemat budowy materii i naturę pochłaniania i emisji światła.

Od czasu doświadczeń Rutherforda wiadomo było co nieco na temat budowy materii. Mniej więcej tyle, że wewnątrz atomów, wokół ciężkiego jądra poruszają się po orbitach kołowych lekkie elektrony przypominające planety okrążające słońce. Hipoteza ta była, niestety, sprzeczna z klasycznymi prawami elektromagnetyzmu, zgodnie z którymi ładunek elektryczny poruszający się z przyspieszeniem powinien emitować fale elektromagnetyczne. Zatem elektrony natychmiast wypromieniowałyby całą swoją energię kinetyczną, spadając na jądro. Z drugiej strony, zgodnie z klasyczną teorią, częstości emitowanych fal odpowiadałyby mniej więcej światłu widzialnemu. Wyraźnie brakowało kilku elementów układanki pozwalającej w pełni zrozumieć mechanizm emisji światła.

Na trop rozwiązania wpadł bramkarz młodzieżowej reprezentacji piłkarskiej Danii – Niels Bohr. Oprócz uprawiania sportu studiował on fizykę i natknąwszy się na wyniki eksperymentów spektrograficznych zaczął je uważnie studiować. Wkrótce potem przybył do sławnego wówczas Rutherforda, laureata Nagrody Nobla, znanego z apodyktyczności i lekceważącego stosunku do teoretyków. Niewiele ponad dwudziestoletni Bohr przedstawił się grzecznie i oznajmił Rutherfordowi, że przybywa z Danii, by mu pomóc. O wiele większym zaskoczeniem dla Rutherforda musiał być jednak sposób wytłumaczenia wyników eksperymentów przez nieznanego młodzieńca.





Według szalonej teorii Bohra elektrony co prawda poruszały się wokół jądra po kołowych orbitach, ale nie po byle jakich. Według niego istniała bowiem minimalna orbita, której nic nie mogło już zmniejszyć. Dozwolone dla elektronu były też orbity dalsze, ale tylko takie, dla których moment pędu elektronu był całkowitą wielokrotnością tajemniczej, znanej wówczas od kilkunastu lat stałej Plancka. Elektrony mogły przeskakiwać z orbity na orbitę, co związane było jednak z emisją lub absorpcją fotonów. Przeskokowi na orbitę bliższą jądra towarzyszyła emisja fotonu o energii równej różnicy energii elektronu na obu orbitach. Natomiast przeskok w przeciwnym kierunku musiał być wywołany absorpcją padającego z zewnątrz fotonu.

Ponieważ orbity elektronów były „dyskretne”, również energie emitowanych z atomu fotonów i ich częstotliwości nie mogły być dowolne. W dodatku dla atomu wodoru obserwacje idealnie pasowały do teorii Bohra. Nie było wyjścia, trzeba było pogodzić się z nowymi, niesamowitymi prawami.

Zakończenie historyjki było szczęśliwe – młody Duńczyk wkrótce sam otrzymał za swe odkrycie Nagrodę Nobla, a w kilka lat potem Erwin Schrödinger przybliżył naturę arbitralnych postulatów Bohra, za co również został nagrodzony. Dokonał się przewrót. Nieuchronnie zbliżała się nowa era w nauce – era mechaniki kwantowej. Chciałoby się rzec – „i żyli długo i szczęśliwie”, lecz wkrótce pojawiły się nowe kłopoty...

*Andrzej DRAGAN*

## Pomysł Euklidesa

Jak można wykazać, że czegoś jest nieskończenie wiele? Wystarczy ośmieszyć przypuszczenie, że jest przeciwnie.

Liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki. Skoro tak, to dzieli się ona tylko przez 1 i przez siebie, ale skoro dzielniki są dwa – nie jest równa 1.

Można udowodnić, że każda liczba naturalna większa od 1 da się przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych (niekoniecznie różnych) i to tylko w jeden – z dokładnością do kolejności czynników – sposób.

Oto, jak Euklides ośmieszył pomysł, że liczb pierwszych jest tylko skończona liczba. Zaproponował mianowicie, aby wszystkie liczby pierwsze od najmniejszej liczby pierwszej (którą jest 2) do największej (gdyby była ich skończona liczba, to byłaby i taka) przemnożyć i do tego iloczynu dodać 1.

Tak otrzymana liczba nie jest pierwsza, bo od każdej z liczb pierwszych (poprzednio mnożonych) jest większa – przecież jest większa od największej z nich. Nie jest także złożona, bo przez żadną liczbę pierwszą się nie dzieli – reszta z takiego dzielenia przez dowolną liczbę pierwszą wynosi przecież 1. Nie jest ani pierwsza, ani złożona – toż to bzdura.

Skoro otrzymaliśmy bzdurę w wyniku poprawnego rozumowania, to bzdura musiała być jego podstawą. A podstawą było założenie o istnieniu tylko skończonej liczby liczb pierwszych. Skoro to jest bzdura, to liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Ale, gdy już sprawę załatwiliśmy, zastanówmy się, jakie to byłyby kolejne liczby zaprojektowane przez Euklidesa, gdybyśmy przypuszczali, że liczb pierwszych jest tylko określona liczba.

Gdybyśmy wzięli tylko pierwszą liczbę pierwszą, mielibyśmy – posługując się receptą Euklidesa – sumę  $2 + 1$ , czyli drugą liczbę pierwszą. Z kolei przypuszczenie, że to już wszystko, daje w myśl recepty Euklidesa  $2 \cdot 3 + 1 = 7$  – nie jest to co prawda trzecia liczba pierwsza, ale liczbą pierwszą jest nadal. No to badajmy dalej – może za każdym razem otrzymamy liczbę pierwszą?

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31 \text{ – dobrze!}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211 \text{ – dalej dobrze!}$$

Teraz nie mamy już wyjścia: trzeba albo udowodnić, iż tak skonstruowana liczba zawsze jest pierwsza, albo podać przykład, że nie zawsze tak się składa.

Powodzenia!

*M. K.*

## Czy coś zostało dla nas? – 10 elementarnych zawężonych problemów

– Czy są może jeszcze w matematyce elementarne otwarte problemy, których sformułowanie mógłbym zrozumieć? – zapytał Tomek, znudzony pracą domową z geometrii.

– Nie pytaj, bo dostaniesz od Taty dziesięć, każdy bardziej zawężony – zaśmiał się Pawełek.

– Jak najbardziej! – podchwyciłem. – Mam dziesięć problemów, w sam raz dla *Małej Delty*, każdy dotyczy węzłów. A jak któryś rozwiążecie, będziecie sławni – dodałem.

– Jak sławni? – spytał nieufnie Tomek.

– A czy także bogaci? – dopytał Paweł.

– Wiem (np. *Delta* 4/2002), co to jest węzeł, wiem, że kilka węzłów tworzy splot – zastanawiał się Tomek. – Wiem, że węzły lub sploty reprezentujemy, rysując ich płaskie diagramy, wiem także, choć bez pełnego uzasadnienia, że gdy diagramy reprezentują ten sam splot, to od jednego do drugiego da się przejść za pomocą elementarnych ruchów, ruchów Reidemeistera (rys. 1). Wiem także, że węzły można czasami odróżniać, używając 3-kolorowania diagramu...

– To wiesz bardzo dużo – ze śmiechem przerwał Paweł. – Ale do otwartych problemów to chyba nie wystarczy, chociaż – i tu Paweł narysował zawity diagram – czy to jest trójlistnik? Tego pewnie nikt nie wie – dorzucił.

– Masz rację, nikt nie wie i może nigdy nie będzie wiedział, jeśli wyrzucisz tę kartkę. Ale serio, problem rozpoznawania węzłów jest problemem trudnym, lecz co najmniej w teorii rozwiązany przez niemiecko-amerykańskiego matematyka, W. Hakena (z pomocą innych, ale nie chcę tym zanudzać).

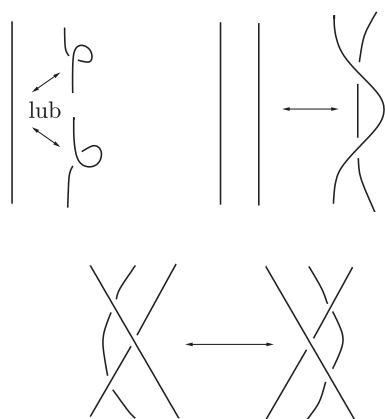
Co prawda, algorytm istnieje, ale nie jest przesadnie szybki i być może wszystkie komputery na Ziemi potrzebowałyby stu lat, by zbadać, jaki węzeł narysowałeś. Niemniej nie nazwałbym tego otwartym problemem – dodałem zdecydowanie. – Poza tym...

– Nie słuchaj już Pawełka – przerwał Tomek. – Tylko opowiedz pierwszy problem.

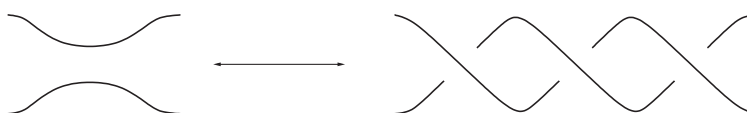
– Dawno, dawno temu – zacząłem bajkowym głosem – gdy każdy sąsiad Polski nazywał się inaczej niż dzisiaj, w dalekiej Japonii młody student Yasutaka Nakanishi zastanawiał się, jak upraszczać węzły w nietypowy sposób i przyszło mu do głowy, że jeśli dopuści trzy półskręty na parze łuków, to uprości każdy węzeł.

– Parze łuków? Co masz na myśli? – Tomek chciał precyzyjności.

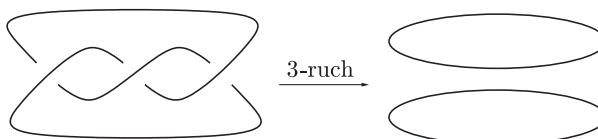
– Spójrz na rysunek. To nazwiemy 3-ruchem (rys. 2(a)). A tak upraszczamy trójlistnik (rys. 2(b)).



Rys. 1



(a)



(b)

Rys. 2

– Ależ Tata, dostałeś splot złożony z dwóch kawałków – zaprotestował Pawełek.

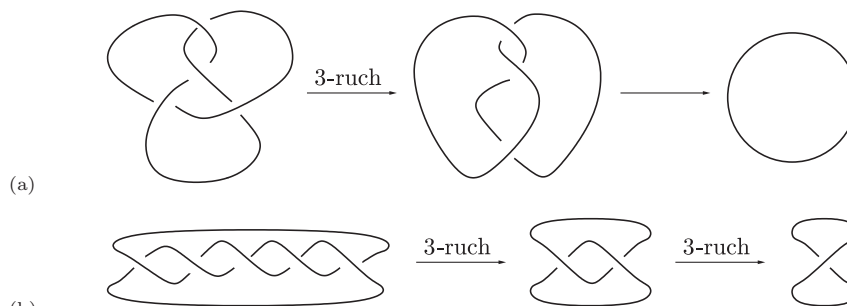
– Ale trywialny, może taki wynik dopuszczamy – domyślał się Tomek.

– Zgadza się, 3-ruch może zmienić liczbę składowych splotu, więc jako wynik uproszczenia dopuścimy trywialne sploty o dowolnej liczbie składowych.

Po tym wyjaśnieniu kontynuowałem:

– Nakanishi szybko zredukował węzeł ósemkowy i pięciolistnik (rys. 3), a kiedy uprościł już wszystkie, wzięte z tablic, węzły do 10 skrzyżowań (a jest ich 249),

był już pewien, że to nie przypadek i może każdy węzeł czy splot da się uprościć do jakiegoś trywialnego splotu.



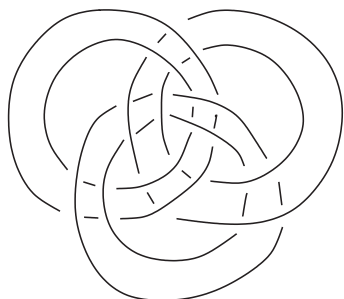
Rys. 3

**Problem 1 (nazywany hipotezą Montesinosa–Nakanishiego, 1981).**

*Czy każdy splot da się uprościć za pomocą 3-ruchów do pewnego trywialnego splotu?*

– Kto to był Montesinos? – zapytał się Pawełek. – Czy to nie jest czasem Tomka ojciec chrzestny? I dlatego dopisałeś go, Tata, do problemu?

– Ten sam, ale nie dopisałem – odpowiedziałem szybko. – To sam Nakanishi zasugerował taką nazwę hipotezy, bo pomysł rozpatrywania 3-ruchów wziął od Montesinosa. Sam Nakanishi zaczął z czasem tracić wiarę w swoją hipotezę, nie mogł bowiem uprościć splotu z rysunku 4(a), zwanego równoległym podwojeniem pierścieni Boromeuszów.



Rys. 4(a)

**Problem 2 (Nakanishi, 1994).** *Uprościć za pomocą 3-ruchów równoległe podwojenie pierścieni Boromeuszów.*

– Czy to jest najmniejszy nieuproszczony splot? – zapytał Tomek.

– Jakie sploty już rozwiązano 3-ruchami? – dopytywał Pawełek.

– Mój student, Chen – wyjaśniłem – sprawdził wszystkie sploty do 12 skrzyżowań, a tak naprawdę zaciął się dopiero przy pewnym splotcie o 20 skrzyżowaniach. Jest to najmniejszy testowany splot, którego nie umiemy rozwiązać – dodałem.

**Problem 3 (Chen, 1999).** *Uprościć za pomocą 3-ruchów splot z rysunku 4(b).*

– A co ze splotami, które mają od 12 do 20 skrzyżowań? – zaciekał się Pawełek. – Może je teraz uprościmy?

– To byłoby bardzo dużo pracy, bo takich splotów jest ze sto milionów. Chociaż z każdym z oddzielną nie powinniśmy mieć większych problemów – uśmiechnąłem się.

– Z taką liczbą splotów lepiej szukać ogólnych metod, niż sprawdzać jeden po drugim. Jedną z ról matematyki jest właśnie szukanie ogólnych struktur, które wyjaśniają nasze konkretne obserwacje. Jeszcze przed hipotezą o 3-ruchach Nakanishi zadał analogiczne pytanie o 4-ruchach, czyli modyfikacji splotu przez dodanie czterech półskrętów (rys. 5).



Rys. 4(b)



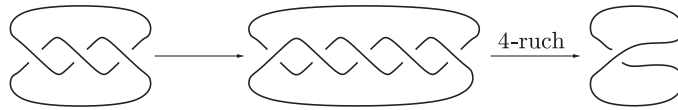
Rys. 5

**Problem 4 (Hipoteza Nakanishiego, 1979).** *Czy każdy węzeł da się zredukować do węzła trywialnego za pomocą 4-ruchów?*

– Dlaczego Nakanishi pyta tylko o węzły? – zamyślił się Tomek. – Przecież przy 3-ruchach trójlistnik, który jest przecież węzłem, redukowal się do splotu o dwóch składowych... Widzę! – zaraz dorzucił – 4-ruch nie miesza składowych. – Zgadza się – potwierdziłem. – Parzysta liczba skrętów nie miesza składowych. Przyjrzyjmy się redukcji trójlistnika.

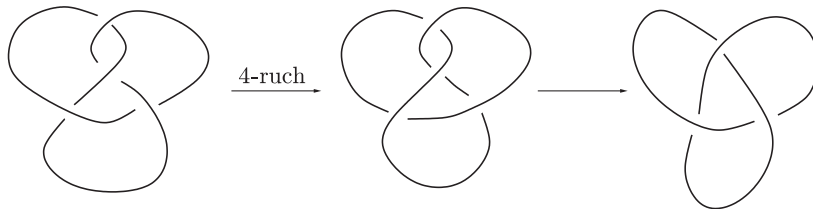


– Ja nawet nie wiem, jak zacząć redukować trójlistnik; on ma tylko 3 skrzyżowania. – Tomek wydawał się zagubiony.  
 – Pokręć trochę sznurkami od trójlistnika, a będziesz miał więcej skrzyżowań – podsunął Paweł.  
 – Coś w tym jest – wtrąciłem. – Do trzech skrzyżowań dodaj czwarte, drugim ruchem Reidemeistera – tu narysowałem środkowy diagram z rysunku 6.  
 – Teraz już pewnie widzicie, jak zrobić 4-ruch i zostać tylko z jednym skrzyżowaniem (rys. 6): Trójlistnik uprościliśmy do trywialnego węzła – podsumowałem.



Rys. 6

– To ciekawe – myślał głośno Tomek. – 4-ruch nie tylko likwiduje (lub tworzy) 4 półskrety, ale z trzech prawoskrętnych robi jeden lewoskrętny lub z 2 prawoskrętnych robi dwa lewoskrętne. To pewnie ułatwi nam redukcję; już widzę, jak uprościć węzeł ósemkowy.



Rys. 7

Otrzymałem trójlistnik, który już uprościliśmy.

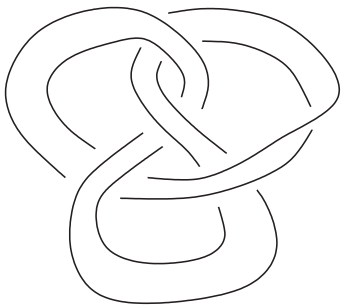
– Też bym tak potrafił, – powiedział Pawełek. – Ale dlaczego nie zadajemy

pytania dla splotów? Czy nic nie da się zrobić ze splotem  $\bigcirc \bigcirc$  ?

– Jest hipoteza dla splotów – zacząłem odpowiadać. – Ale wymaga ona bardziej zaawansowanego języka matematycznego. Tak czy owak tego splotu (zwanego splotem Hopfa) nie da się uprościć.

– To jaki jest najmniejszy nieuproszczony węzeł? Byśmy mieli nad czym myśleć? – zapytał Paweł.

– Najmniejszy taki węzeł, zasugerowany przez greckiego matematyka, Nikosa Askitasa, ma 17 skrzyżowań i możemy go nazwać węzłem ósemkowym podwójnie tkanym (choć mniej poetycko mówi się na niego: (2,1)-kabel węzła ósemkowego).



**Problem 5 (Askita, 1998).** Uprościć 4-ruchami węzeł z rysunku 8.

– Jasne, Tata, zaraz skończysz. Będziemy mieli dziesięć problemów, używając 5-, 6-, 7-, 8- i 9-ruchów. W przeciwnym przypadku do końca zanudzisz nas, nowoczesne dzieci, które nie mogą się dłużej skupić – z ironią oświadczył Paweł.  
 – Prawie masz rację – powiedziałem niezrażony – jednak 5-ruchy nie wystarczą do redukcji: nawet węzła ósemkowego nie da się uprościć.

– Jak to wykazać? – zapytał Tomek. – Czy może zamiast 3-kolorowania wziąć 5-kolorowanie, jeśli takie istnieje? – dodał z namysłem.

– Istnieje – szybko powiedziałem. – Fox wprowadził niezmiennik kolorowań dla każdej liczby. Ale tutaj 5-kolorowanie nie pomoże; tak naprawdę pod względem 5-kolorowań węzeł ósemkowy nie różni się od trywialnego splotu o dwóch składowych. Ale o tym innym razem – dokończyłem.

– To co weźmiesz zamiast 5-ruchów? – zaciekał się Pawełek. – Pewnie (2,5)-ruchy – dodał z uśmiechem.

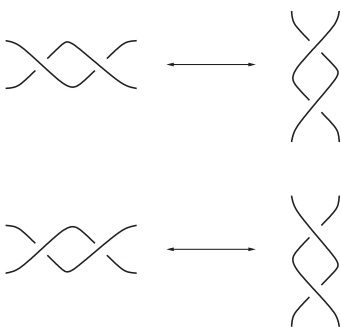
– Prawie zgadłeś, użyję ruchów z rysunku 9, ale nazwę je (2,2)-ruchami, a nie (2,5)-ruchami, bowiem dwa poziome półskrety zastąpię dwoma pionowymi.

– Co taki skrecony ruch ma wspólnego z 5-ruchem? – zapytał Tomek. –

Powinien chyba być delikatniejszy niż 5-ruch, jeśli miałby redukować wszystkie sploty – zauważył Tomek po chwili.

– Dwa razy **Tak** – podchwyciłem – 5-ruch jest delikatniejszy, w szczególności

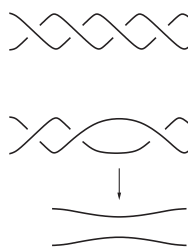
Rys. 8



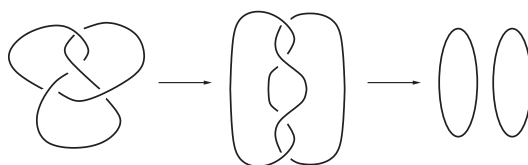
Rys. 9



możemy go otrzymać jako złożenie dwóch (2,2)-ruchów (rys. 10). A węzeł ósemkowy redukuje się do trywialnego splotu o dwóch składowych jednym ruchem (rys. 11).



Rys. 10

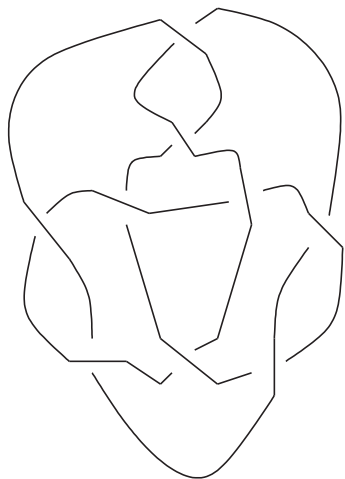


Rys. 11

Hipoteza o (2,2)-ruchach była także sformułowana w Japonii.

**Problem 6 (Hipoteza Harikae–Nakanishi, 1992).** *Czy każdy splot da się uprościć do trywialnego splotu za pomocą (2,2)-ruchów?*

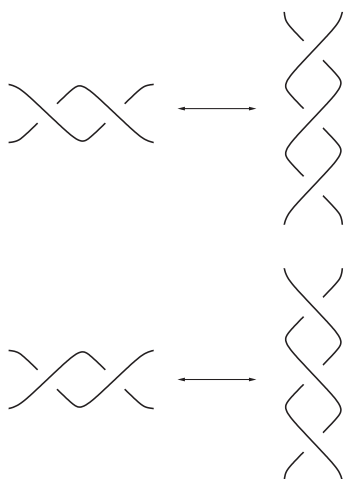
- Co wiadomo o tej hipotezie i jaki jest najmniejszy nieuproszczony węzeł? – zapytał szybko Paweł w nadziei, że jesteśmy blisko końca.
- Dużo mniej niż o poprzednich, ale więcej niż o następnych – stwierdziłem.
- Wszystkie sploty do ośmiu skrzyżowań zostały sprawdzone, a trudność sprawia węzeł z rysunku 12, nazywany ściśle, ale mało romantycznie  $9_{49}$ , bo w tablicach węzłów jest na 49 miejscu wśród węzłów z dziewięcioma skrzyżowaniami.



Rys. 12

**Problem 7.** *Uprościć (2,2)-ruchami węzeł  $9_{49}$ .*

- Jakie jeszcze skręcone ruchy przywołasz, Tata? – zapytał, udając zainteresowanie, Pawełek. – Czy pokonam nimi Shoguna, z którym teraz walczę na komputerze?
- To nie jest wykluczone – podchwyciłem. – Pamiętasz przecież Aleksandra Wielkiego i węzeł gordyjski. Następne ruchy, które może uprościć każdy splot, to (2,3)-ruchy z rysunku 13. Zastępujemy w nich dwa poziome skręty trzema pionowymi.
- Możemy chyba również zastąpić trzy poziome skręty dwoma pionowymi, bo inaczej skąd wiemy, jak patrzeć na kartkę z rysunkiem? – spytał Tomek.
- Masz rację i oto problem.



Rys. 13

**Problem 8 (1995).** *Czy każdy splot da się uprościć do splotu trywialnego za pomocą (2,3)-ruchów?*

- Widzę, że problemy są całkiem nowe – ucieszył się Pawełek. – Może masz, Tata, jakiś, który wymyśliłeś wczoraj? Ale ogłoś nagrodę, bo jesteśmy zmęczeni i przyszła sława nam nie wystarczy.
- Nie mam wczorajszego problemu, może dzisiejszy dam wam jutro – zaśmiałem się. – Ale problem, zanim się ogłosi, trzeba sprawdzić samemu, czy jest ciekawy i czy przypadkiem nie da się zrobić od ręki. Mało kto myślał o (2,3)-ruchach; ja zredukowałem każdy splot do ośmiu skrzyżowań włącznie, z wyjątkiem węzła z rysunku 14, zwanego  $8_{18}$ .

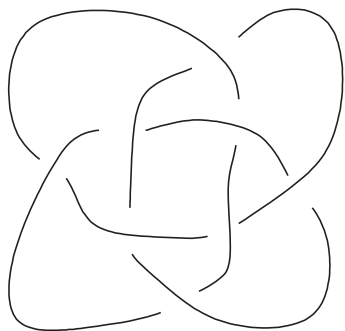
**Problem 9 (Marzec 2000; nagroda: dowolna gra komputerowa).** *Uprościć (2,3)-ruchami węzeł  $8_{18}$ .*

- Tato, bardzo nas już zmęczyłeś, a Shogun czeka. Powiedz szybko ostatni problem – powiedział Tomek.
- I ma być trudny, dynamiczny, w jednej linijce i każdy wyraz ma się zaczynać na literę **W** – dorzucił Paweł.

**Problem 10.** *Wymyślić ważny węzłowy wieloruch wyniszczający wszelki węzeł.*

- Świetnie, Tata! – wykrzyknęli Pawełek i Tomek. – Pomyślmy jutro o wieloruchu, a teraz do komputera.

*Z pomocą Tomka i Pawełka przygotował Józef PRZYTYCKI*



Rys. 14