

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (332)

Kres epepei Mira <i>Krzysztof Ziolkowski</i>	str. 1
Krzywe i węzły <i>Tadeusz Krasiński</i>	str. 4
Zadania	str. 6
Mała Delta	str. 7
Duże i małe liczby Ramseya <i>Jerzy Tyszkiewicz</i>	str.10
Aktualności	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Styczeń	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:
Znów duża Mała Delta

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Damian Dynda*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delty*
można znaleźć w portalu Eduseek
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Redaguje kolegium w składzie:

Andrzej Białynicki-Birula	Wiktor Bartol
Bogdan Cichocki	Krzysztof Biesaga
– wiceprzewodniczący	Ewa Czuchry
Krzysztof Ciesielski	Krystyna Kordos – sekr. red.
Jan A. Gaj	Marek Kordos – red. nac.
Piotr Goldstein	Tomasz Kwast
Andrzej Hryniewicz	Anna Ludwicka
Wiesław A. Kamiński	Urszula Marciniak
Marta Kicińska-Habior	Anna Rudnik
Zbigniew Marciniak	Witold Sadowski
Krzysztof Maślanka	Joanna Udalska
Janusz Matkowski	Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Andrzej Mąkowski	
Zdzisław Pogoda	
Michał Różycka	
Konrad Rudnicki	
Grzegorz Sitarski	
Andrzej Woszczyk	
Wiesław Żelazko – przewodniczący	

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61, 55-33-216
BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

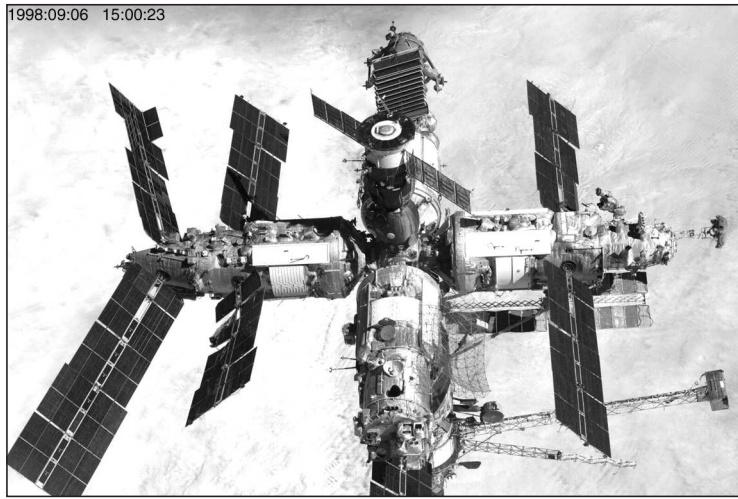
1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2002 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

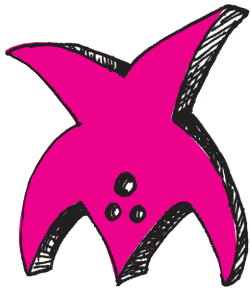
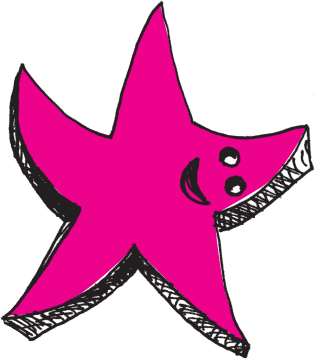
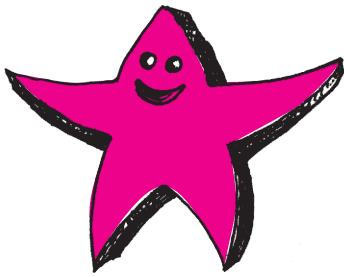


Kres epopei Mira *Krzysztof ZIOŁKOWSKI*

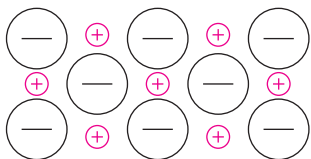
Niejednemu astronautce zakręciła się pewnie łza w oku, gdy 23 marca 2001 roku szczątki stacji kosmicznej Mir wpadły do Pacyfiku, kończąc w ten sposób piętnastoletni okres funkcjonowania na orbicie okołozemskiej obiektu, który był miejscem wielkiej przygody i ciężkiej pracy 105 osób. Tyłu bowiem ludzi, różnych płci i narodowości, przebywało na pokładzie Mira, doświadczając wszystkich blasków i cieni związanych z obecnością człowieka w przestrzeni kosmicznej. Wprawdzie 40 lat po locie Gagarina wyprawy w Kosmos stały się już niemal codziennością, to jednak nie należy zapominać, że rutyna dzisiejszych działań jest w niemałym stopniu wynikiem sprawności i umiejętności nabytych dzięki stacji orbitalnej Mir. Dotyczy to, oczywiście, nie tylko bezpośrednich lokatorów Mira, ale także, a może nawet przede wszystkim, całej ogromnej infrastruktury naukowej, technicznej, przemysłowej i organizacyjnej, która umożliwiła realizację i powodzenie tego przedsięwzięcia.

Mir był pierwszą dużą, wielomodułową stacją kosmiczną na orbicie okołozemskiej. Koncepcja utworzenia sztucznego satelity Ziemi, spełniającego rolę permanentnie działającego laboratorium, w którym mogliby pracować ludzie, wykrystalizowała się w latach siedemdziesiątych, stanowiąc – jak to wyraźnie widać z obecnej perspektywy – kontynuację rywalizacji ówczesnych potęg kosmicznych. Rosjanie, którym nie udało się wysłać człowieka na Księżyc, usiłowali bagatelizować spektakularny wyczyn Amerykanów z końca lat sześćdziesiątych, starając się wykazać potrzebę koncentracji działań związanych z eksploracją przestrzeni kosmicznej przede wszystkim na tworzeniu warunków do zdalnego badania Ziemi oraz naukowego i utylitarne go spożytkowania jej najbliższego otoczenia. Od 1971 roku zaczęli umieszczać w przestrzeni kosmicznej obiekty o nazwie Salut, będące poniekąd prototypami Mira. Początki były trudne, nie wszystko się udawało, nawet ginęli ludzie.

Szczególnie owocnym okazał się pięcioletni lot wokół Ziemi stacji kosmicznej Salut 6 działającej w latach 1977–1982. Na jej pokładzie przebywało ogółem 27 kosmonautów (w tym sześciu dwukrotnie), którzy – oprócz zadań technicznych – wykonywali różne eksperymenty naukowe. Przykładem mogą być dokonania polskiego uczestnika tego programu, Mirosława Hermaszewskiego, który na przełomie czerwca i lipca 1978 roku spędził kilka dni na stacji Salut 6. Wprawdzie jego lot został nadużyty propagandowo, ale nie można zapominać, że umożliwił polskim naukowcom wykonanie kilku ciekawych prac. Najwartościowszą było zbadanie, jak w warunkach mikrogravitacji przebiega proces krystalizacji z fazy ciekłej pewnego typu półprzewodników (na Ziemi konwekcja wynikająca z istnienia grawitacji utrudnia otrzymanie jednorodnych stopów takich półprzewodników, a ich jakość i własności fizyczne zależą właśnie od jednorodności materiału). Interesujące wyniki przyniosły również eksperymenty medyczne, którym poddany został polski astronauta.



Rozwiązanie zadania F 563.
Rozpatrzmy płaszczyznę z tzw. szachowym uporządkowaniem jonów.



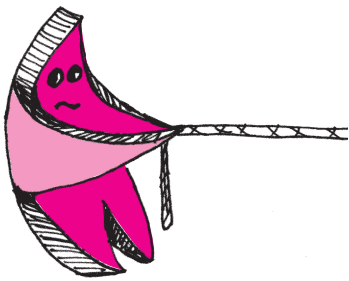
Napężenie niszczące wynosi $\sigma_M = F_0 n$, gdzie

$$F_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

jest siłą wzajemnego oddziaływania dwóch sąsiadujących jonów, a $n = 1/a^2$ jest koncentracją jonów na jednostce powierzchni. Zatem

$$\sigma_M = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^4},$$

dla chlorku sodu jest to $3,8 \cdot 10^{10}$ Pa.



Amerykanie także podjęli wyzwanie utworzenia stacji kosmicznej. Wykorzystując elementy pozostałe po przerwaniu w 1972 roku programie księżycowym Apollo, już w następnym roku uruchomili stację Skylab, w której trzykrotnie przebywały trzyosobowe załogi. Ich praca zaowocowała wieloma wartościowymi wynikami w różnych dziedzinach; dla przykładu warto wspomnieć głośną w 1973 roku kometę Kohoutka, która zasłynęła niespełnieniem przewidywań jej dużej jasności na niebie. Wiarygodne wytłumaczenie dziwnego zachowania się tej komety stało się możliwe dzięki wszechstronnym jej obserwacjom nie tylko z powierzchni Ziemi, ale także z pokładu Skylaba (były to jedne z pierwszych obserwacji komet spoza atmosfery ziemskiej, które znacząco wzbogaciły wiedzę o tych ciągle tajemniczych ciałach niebieskich).

Kres istnienia zarówno Skylaba, jak i kończącej serię Saluta 7, był identyczny. Kilka lat po zaprzestaniu ich wykorzystywania jako laboratoriów orbitalnych oba obiekty wymknęły się spod kontroli służb naziemnych. Stopniowo przybliżając się do powierzchni Ziemi – podobnie jak wiele innych sztucznych satelitów – uległy spaleni w górnych warstwach jej atmosfery. Ale ze względu na stosunkowo duże rozmiary i masy nie zostały zniszczone całkowicie i pozostałości po nich spadły na Ziemię w miejscach i momentach, których jednak nie dało się dokładnie przewidzieć. Skylab, którego masa sięgała 75 ton, wtargnął do atmosfery 11 lipca 1979 roku nad Oceanem Indyjskim, a jego resztki znaleziono na wybrzeżu Australii. Salut 7 o masie około 40 ton zakończył swój żywot 6 lutego 1991 roku; przypuszcza się, że co najmniej trzy jego fragmenty metrowych rozmiarów runęły na terytorium Argentyny, ale ślad po nich zaginął.

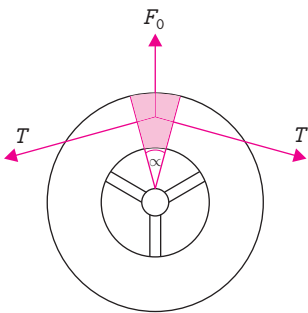
Pamięć o tych wydarzeniach spotęgowała obawy związane z projektami zakończenia lotu Mira. Ta stacja kosmiczna była znacznie większa od swych poprzedniczek (osiągnęła masę niemal 140 ton), a więc nic dziwnego, że możliwość niekontrolowanego spadku na Ziemię pozostałości takiego kolosa budziła uzasadniony niepokój. Podjęcie decyzji o zniszczeniu Mira nie było łatwe, tym bardziej że w świadomości wielu mieszkańców dawnego Związku Radzieckiego wydawał się on być bodaj ostatnim już symbolem mocarstwowości i potęgi ich kraju. Jednak liczne protesty, a także próby ratowania wysłużonej i coraz bardziej niszczonej stacji kosmicznej na nic się zdały w sytuacji kompletnego braku funduszy na jej remont oraz dalszą eksploatację. Zwyciężył zdrowy rozsądek, zrozumienie uludy świetności minionych czasów i pragmatyzm w usiłowaniu niedopuszczenia do zmarnowania ogromnego przecież potencjału intelektualnego i zaplecza technicznego w dziedzinie badań i wykorzystania przestrzeni kosmicznej. Konieczność autentycznej współpracy międzynarodowej w tym zakresie zdominowała nawyki działań inspirowanych rywalizacją. Mir poniekąd wymusił tę zmianę starego na nowe.

Epopeja Mira rozpoczęła się 20 lutego 1986 roku wystrzeleniem na orbitę okołozemską podstawowego członu przyszłej stacji orbitalnej. Ten główny moduł w kształcie cylindra o długości 13,1 m i średnicy 4,2 m miał masę prawie 21 ton i służył przede wszystkim jako pomieszczenie mieszkalne załogi oraz centrum sterowania pracą całej stacji i jej łączności z Ziemią. W kwietniu 1987 roku przyłączono do niego 11-tonowy moduł o nazwie Kwant 1 będący obserwatorium astronomicznym wyposażonym m.in. w teleskop rentgenowski skonstruowany we współpracy z Europejską Agencją Kosmiczną. Moduł ten przeznaczony był także do prowadzenia eksperymentów biotechnologicznych. Moduł Kwant 2 o masie 18,5 tony, zawierający przede wszystkim służący do wychodzenia astronautów na zewnątrz stacji, dołączono w listopadzie 1989 roku; służył on także do przechowywania materiałów do badań biologicznych. W maju 1990 roku stacja wzbogaciła się o moduł Kristall, mający masę prawie 20 ton, będący laboratorium do badań w dziedzinie inżynierii materiałowej (kilka lat później uzupełniono go o urządzenie umożliwiające cumowanie do Mira amerykańskich wahadłowców Space Shuttle). Kolejny moduł o nazwie Spekt, będący kopią poprzedniego, ale wyposażony w urządzenia do obserwacji teledetekcyjnych Ziemi, przyłączono w maju 1995 roku. I wreszcie dodanie ostatniego modułu Priroda zakończyło rozbudowę stacji

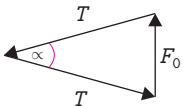


Rozwiązanie zadania F 564.

Zadanie rozwiązaliśmy w wirującym układzie odniesienia. Wydzielmy myślowo fragment koła zamachowego widziany ze środka pod niewielkim kątem α .



Na ten kawałek metalu działa odśrodkowa siła bezwładności i dwie siły sprężystości. Te trzy siły spełniają następujący warunek równowagi $F_o = T\alpha$.



Tutaj $T = \sigma S$, gdzie S jest przekrojem poprzecznym koła, a σ – naprężeniem. Objętość wyodrębnionego fragmentu wynosi $V = lS = \alpha SR_{sr}$, gdzie $R_{sr} = \frac{1}{2}(R + r)$ oznacza średni promień obwodu koła zamachowego. Siła odśrodkowa bezwładności wynosi

$$F_o = m\omega^2 R_{sr} = \omega^2 R_{sr} \rho V = \alpha \rho S \omega^2 R_{sr}^2,$$

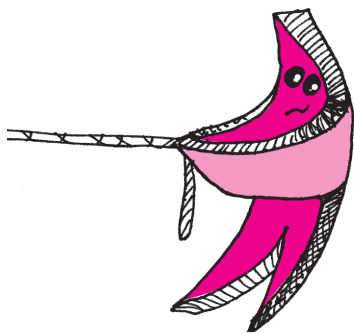
gdzie ρ jest gęstością metalu.

Po podstawieniu do warunku równowagi otrzymujemy zależność naprężenia w metalu od prędkości obrotów:

$$\sigma = \rho \omega^2 R_{sr}^2.$$

Rozzerwanie koła nastąpi wtedy, gdy naprężenie osiągnie wartość naprężenia rozrywającego, czyli dla

$$\omega_{rozryw} = \frac{2}{R + r} \sqrt{\frac{\sigma_M}{\rho}} \approx 7500 \text{ obr./min.}$$



w kwietniu 1996 roku; był on przeznaczony do monitorowania problemów ekologicznych Ziemi. Na jego pokładzie znajdowała się, zbudowana w Centrum Badań Kosmicznych PAN w Warszawie, cyfrowa kamera telewizyjna WIZJER przeznaczona do śledzenia Słońca dla odpowiedniego ukierunkowywania platformy obserwacyjnej.

Składnikami Mira były też statki kosmiczne Sojuz i Progress niemal stale przycumowane do stacji. Obiekty Sojuz służyły do transportu ludzi do stacji i umożliwiały im powrót na Ziemię, a statki Progress zaopatrywały stację w materiały niezbędne do jej funkcjonowania (po wykonaniu zadania były kierowane ku Ziemi i wlatując do atmosfery spalały się). Wszystkie te elementy tworzyły w przestrzeni konstrukcję, której maksymalne rozmiary (uwzględniając panele baterii słonecznych) sięgały 33 m (Progress – Kwant 1 – moduł główny – Sojuz) \times 31 m (Priroda – Kristall – moduł cumowniczy) \times 27,5 m (Kwant 2 – Spektr). Całkowita masa stacji zmieniała się w granicach od 130 do 140 ton.

Piętnastoletnie dzieje Mira obfitowały w interesujące wydarzenia. Już pierwsza dwuosobowa załoga stacji popisała się przelotem statkiem Sojuz z Mira na Saluta 7 i z powrotem. Pierwsze poważne kłopoty pojawiły się przy cumowaniu modułu Kwant 1; udało się ono dopiero po interwencji kosmonautów, którzy po wyjściu na zewnątrz stacji zdołali naprawić węzeł cumowniczy. W lipcu 1987 roku gościł na Mirze pierwszy obcokrajowiec: obywatel zaprzyjaźnionej z ówczesnym Związkiem Radzieckim Syrii. Jeszcze dziwniejsza wizyta nastąpiła w następnym roku: na pokładzie Mira znalazł się mieszkaniec wstrząsanego w tym czasie wyniszczającą wojną Afganistanu. O badaniach kosmicznych w Syrii i Afganistanie świat nic nie słyszał. Zmiany polityczne na świecie, które symbolizuje rok 1989, na Mirze zaznaczyły się wizytą na jego pokładzie japońskiego dziennikarza. Na przyłot Amerykanów trzeba jednak było czekać aż do 1995 roku: w lipcu po raz pierwszy przycumował do Mira wahadłowiec Space Shuttle. Nieco wcześniej dzięki Mirowi padają rekordy: w marcu 1995 roku powraca na Ziemi Walery Poljakow, który spędził w stacji orbitalnej nieprzerwanie 438 dni, a w październiku 1994 roku, po 169 dniach pobytu na Mirze ląduje Elena Kondakowa, która do dziś dzierży kobiecy prym długości przebywania w przestrzeni kosmicznej.

Rysujący się w połowie lat dziewięćdziesiątych okres wyraźnej prosperity Mira został przerwany tragicznymi w skutkach wydarzeniami. W końcu lutego 1997 roku w głównym module Mira wybuchł pożar. Szybko go ugaszono i nikomu z załogi ani samej stacji nic się nie stało. Rozpoczęła się jednak czarna seria awarii. Psuły się m.in. urządzenia do uzdatniania powietrza i systemy chłodzenia. Najpoważniejszy wypadek nastąpił w czerwcu: statek transportowy Progress nie trafił w węzeł cumowniczy i uderzył w moduł Spektr, który został rozhermetyzowany i do tego stopnia zniszczony, że naprawić go na orbicie już się nie udało. Od tej pory coraz częściej pojawiały się jakieś kłopoty. I to chyba w znacznej mierze przesądziło o tym, że w końcu sierpnia 1999 roku ostatnia załoga opuściła Mira. Wprawdzie w czerwcu 2000 roku dwóch śmiałków jeszcze raz znalazło się na jego pokładzie, ale ich głównym zadaniem było już po prostu przygotowanie stacji do zrzucenia jej na Ziemię.

W operację sprowadzenia Mira z orbity były zaangażowane – oprócz oczywiście gospodarza stacji – amerykańska agencja NASA i Europejska Agencja Kosmiczna. Wspólny wysiłek najbardziej doświadczonych eksploratorów Kosmosu uchronił mieszkańców Ziemi przed trudnymi do przewidzenia skutkami niekontrolowanego spadku. Zgodnie z przewidywaniami resztki Mira spoczęły na dnie południowej części Pacyfiku. Pozostaje natomiast problem dziedzictwa Mira. Nie ukazało się jeszcze żadne kompetentne i rzetelne podsumowanie działalności i dokonań zawdzięczanych tej stacji kosmicznej. W nauce nie odnotowano błyskotliwych osiągnięć ani spektakularnych odkryć dzięki niej uzyskanych. Na razie trzeba więc zadowolić się oczywistą konstatacją, że Mir umożliwił zdobycie umiejętności, które – miejmy nadzieję – są i będą odpowiednio wykorzystane w budowie i eksploatacji Międzynarodowej Stacji Kosmicznej Alfa.



Rozwiązanie zadania M 976.

Żaden. Cyfra jedności liczby a_{2n+1} jest równa n -tej cyfrze po przecinku w zapisie dziesiętnym liczby $\sqrt{10}$. Ponieważ zaś liczba $\sqrt{10}$ jest niewymierna, więc ciąg (a_{2n+1}) , czyli tym bardziej ciąg (α_n) , jest nieokresowy. Niech $\gamma_n = 0$, jeśli β_n jest parzysta i $\gamma_n = 1$, jeśli β_n jest nieparzysta. Wtedy γ_{2n+1} jest n -tą cyfrą po przecinku w zapisie dwójkowym liczby $\sqrt{2}$. Wobec niewymierności liczby $\sqrt{2}$ ciąg (γ_n) , a więc tym bardziej ciąg (β_n) , jest nieokresowy.



Rozwiązanie zadania M 977.

Niech
$$a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n.$$

Łatwo sprawdzić, że $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$. Z równania tego i z $a_0 = 2$, $a_1 = 10$ wynika, że $a_n \in \mathbb{Z}$. Poza tym dla każdego n liczba $a_n + a_{n+2} = 10a_{n+1}$ jest podzielna przez 10, a więc także liczba $a_{n+4} - a_n = (a_{n+4} + a_{n+2}) - (a_{n+2} + a_n)$ jest podzielna przez 10. Oznacza to, że wszystkie liczby w ciągu $a_0, a_4, a_8, \dots, a_{1000}$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 10. Ponieważ $a_0 = 2$, więc liczba całkowita a_{1000} kończy się cyfrą 2. Wreszcie $a_{1000} > (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2000} > a_{1000} - (0,5)^{2000} > a_{1000} - 0,1$, z czego wynika, że w liczbie $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2000}$ cyfra jedności to 1, a pierwsza cyfra po przecinku to 9.

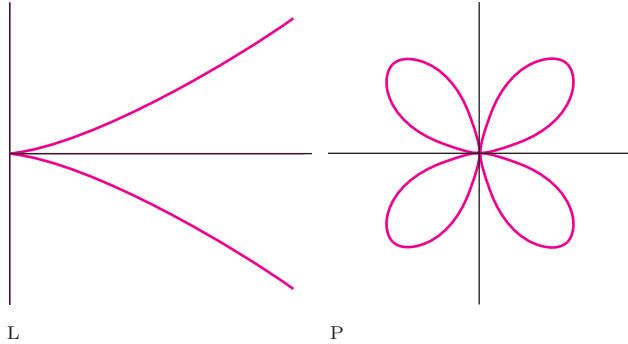


Rozwiązanie zadania M 978.

Para taka nie istnieje. Jeśli $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$, to również $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$, co jest jednak niemożliwe, bowiem $|5 - 3\sqrt{2}| < 1$ i $|3 - 5\sqrt{2}| > 1$.

Krzywą definiujemy jako zbiór punktów na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 o współrzędnych (x, y) spełniających równanie $F(x, y) = 0$, gdzie F jest wielomianem dwóch zmiennych. Oto przykłady:

1. $y^2 - x^2 = 0$ (dwie proste o równaniach $y = x$ i $y = -x$),
2. $y^2 + x^2 = 0$ (jeden punkt $(0, 0)$, początek układu współrzędnych),
3. $y^2 + x^2 - 1 = 0$ (okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1),
4. $y^2 + x^2 + 1 = 0$ (zbiór pusty),
5. $y^2 - x^3 = 0$ (parabola półsześcienna, rysunek L),
6. $(y^2 + x^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ (czterolistna koniczynka, rysunek P).



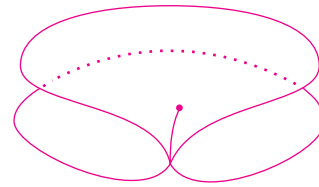
Te proste przykłady pokazują różnorodność tworów geometrycznych opisanych równaniem wielomianowym $F(x, y) = 0$. Okazuje się, że ta różnorodność znacznie się zmniejsza, gdy oprócz punktów (x, y) o współrzędnych rzeczywistych spełniających równanie $F(x, y) = 0$ rozważymy również punkty (z, w) o współrzędnych zespolonych spełniających to samo równanie, tzn. punkty $(z, w) = (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)$, gdzie x_1, x_2, y_1, y_2 są liczbami rzeczywistymi a i jednostką urojoną, dla których $F(z, w) = 0$ (zbiory takie nazywamy krzywymi zespolonymi). Działania na liczbach zespolonych wykonujemy dokładnie tak samo jak na rzeczywistych, należy tylko pamiętać, że $i^2 = -1$. Wówczas np. równania $z^2 - w^2 = 0$ i $z^2 + w^2 = 0$, opisujące tak różnorodne twory geometryczne w \mathbb{R}^2 , przedstawiają podobne struktury geometryczne, bo

$$\begin{aligned} z^2 - w^2 &= (z - w)(z + w), \\ z^2 + w^2 &= (z - iw)(z + iw). \end{aligned}$$

W obu przypadkach zbiorami rozwiązań są dwie płaszczyzny zespolone ($z = w$ i $z = -w$ w pierwszym przypadku oraz $z = iw$ i $z = -iw$ w drugim przypadku).

Punkty zespolone $(z, w) = (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)$ możemy interpretować jako punkty przestrzeni czterowymiarowej, gdyż każdemu punktowi zespolonemu $(z, w) = (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)$ możemy wzajemnie jednoznacznie przyporządkować punkt (x_1, x_2, y_1, y_2) przestrzeni czterowymiarowej

(będziemy ją oznaczać \mathbb{R}^4). Wówczas każda krzywa zespolona $F(z, w) = 0$, już jako twór geometryczny w \mathbb{R}^4 , jest powierzchnią dwuwymiarową, która może mieć tylko pojedyncze punkty osobliwe. Natychmiast powstaje pytanie, jakie kształty mają te powierzchnie. Odpowiedź nie jest łatwa, gdyż powierzchnie te (a więc twory geometryczne dwuwymiarowe) leżą w przestrzeni czterowymiarowej. Na przykład krzywa zespolona $z^2 - w^2 = 0$ (i podobnie $z^2 + w^2 = 0$) jest sumą dwóch płaszczyzn przecinających się tylko w jednym punkcie (ten punkt jest właśnie jedynym punktem osobliwym tej krzywej). Niestety, nie da się tego narysować w przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 . Podobnie krzywa zespolona $z^2 - w^3 = 0$ ma tylko jeden punkt osobliwy $(0, 0)$ i jeśli dopuścimy na rysunku samoprzecięcia, których ona w przestrzeni czterowymiarowej w istocie nie ma, to będzie ona miała w pobliżu tego punktu osobliwego kształt przedstawiony na rysunku poniżej.



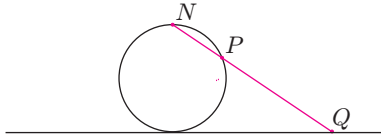
Istnieje jednak pewien sposób geometrycznego i wiernego przedstawienia kształtu tej powierzchni w pobliżu danego jej punktu. Oczywiście najciekawszy będzie przypadek, gdy punkt ten będzie punktem osobliwym powierzchni, gdyż w przypadku punktu nieosobliwego kształt powierzchni w jego pobliżu nie jest ciekawy – jest to po prostu kawałek gładkiej powierzchni. Przejdźmy zatem do opisu tego przedstawienia.

Jak wyjaśniliśmy powyżej, krzywe zespolone $F(z, w) = 0$ w naszej interpretacji leżą w przestrzeni czterowymiarowej \mathbb{R}^4 . Załóżmy dla uproszczenia, że krzywa ta przechodzi przez początek układu współrzędnych, tzn. $F(0, 0) = 0$. Rozważmy teraz w \mathbb{R}^4 sferę trójwymiarową S_r^3 o środku w początku układu współrzędnych i dostatecznie małym promieniu r , określoną równaniem

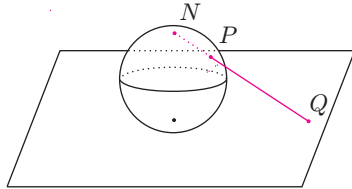
$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = r^2.$$

Jest to twór analogiczny do okręgu na płaszczyźnie (o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$) i sfery w przestrzeni (o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$). Sfera S_r^3 jest obiektem trójwymiarowym i może być zinterpretowana jako zwykła przestrzeń trójwymiarowa \mathbb{R}^3 z dołączonym jednym dodatkowym punktem (oznaczanym przez ∞), tzn. $S_r^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Ponownie możemy to sobie wyobrazić poprzez analogię z przypadkiem okręgu i sfery. Mianowicie, okrąg można przedstawić sobie jako prostą z dołączonym jednym punktem (tę odpowiedniość dobrze oddaje rzut stereograficzny,

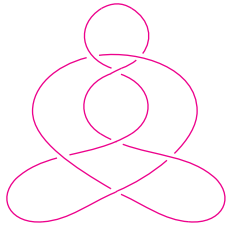
patrz rysunek poniżej),



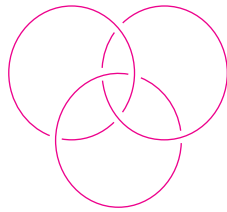
który każdemu punktowi P okręgu (z wyjątkiem bieguna N) przyporządkowuje punkt Q na prostej, a biegunowi N ten dodatkowy punkt ∞ . Podobnie sferę dwuwymiarową możemy zinterpretować jako płaszczyznę z dołączonym jednym punktem (również tutaj można tę odpowiedniość zilustrować rzutem stereograficznym).



Zatem jeśli krzywą zespoloną $F(z, w) = 0$, a dokładniej odpowiadającą jej powierzchnię w \mathbb{R}^4 przetniemy sferą S_r^3 , to ślad tego przecięcia możemy w sposób wierny narysować (przedstawić) w przestrzeni \mathbb{R}^3 (bo zawsze możemy zmienić układ współrzędnych w \mathbb{R}^4 tak, że przecięcie to nie będzie przechodziło przez punkt ∞ w $S_r^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$). Okazuje się, że jeśli tylko promień r tej sfery jest dostatecznie mały, to przecięcie to jest zapętlonym okręgiem w \mathbb{R}^3 (takie obiekty nazywamy węzłami) lub skończoną sumą zapętlonych rozłącznych okręgów (takie obiekty nazywamy splotami).

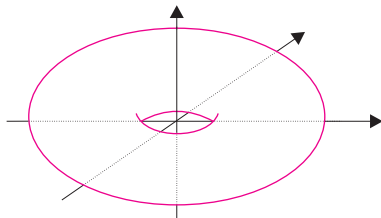


węzeł



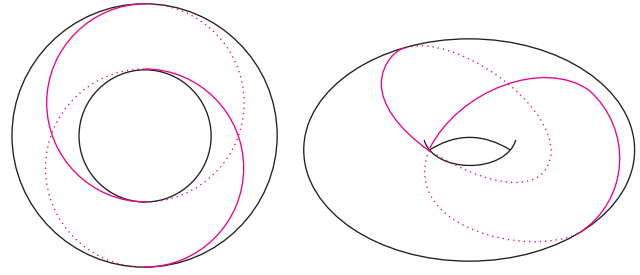
splot

Co więcej, kształt tych węzłów lub splotów nie zależy od wyboru promienia r (o ile jest on dostatecznie mały). Można wykazać, że przez odpowiednią zmianę współrzędnych w \mathbb{R}^4 możemy zawsze uzyskać to, że te węzły lub sploty będą leżały w pełnym torusie w \mathbb{R}^3 .

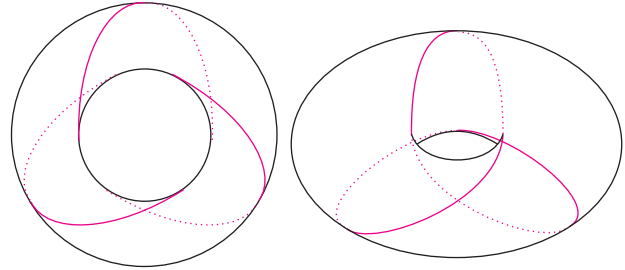


Na przykład, ślad krzywej zespolonej $z^2 + w^2 = 0$ (a także $z^2 - w^2 = 0$) w S_r^3 to splot złożony

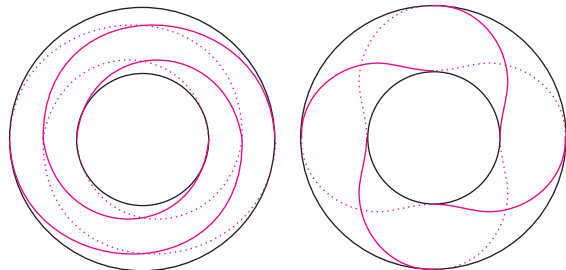
z dwóch okręgów leżących na powierzchni torusa.



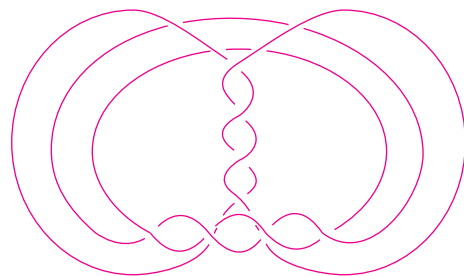
Ślad krzywej $z^2 - w^3 = 0$ to węzeł leżący na powierzchni torusa i obiegający tę powierzchnię 2-krotnie wzdłuż i 3-krotnie wokół osi tego torusa.



Ślad czterolistnej koniczynki to splot czterech okręgów, z których jedna para leży na powierzchni torusa, a druga na powierzchni torusa zawartego w pierwszym. Na zewnętrznym torusie każdy z dwóch okręgów obiega tę powierzchnię dwa razy wzdłuż i raz wokół, na wewnętrznym zaś odwrotnie: każdy z dwóch okręgów obiega tę powierzchnię raz wzdłuż i dwa razy wokół.



Jeśli w sposób ciągły (bez rozrywania i sklejanie) zdeformujemy ten splot czterech okręgów i zrezygnujemy z narysowania torusów, to otrzymamy splot przedstawiony na rysunku poniżej.



Czytelnicy piszą

Szanowna Redakcjo!

W majowym numerze *Małej Delty* w artykule „Same ostre” pojawiło się następujące stwierdzenie:

Nie istnieje podział kwadratu na mniej niż 8 trójkątów ostrokątnych.

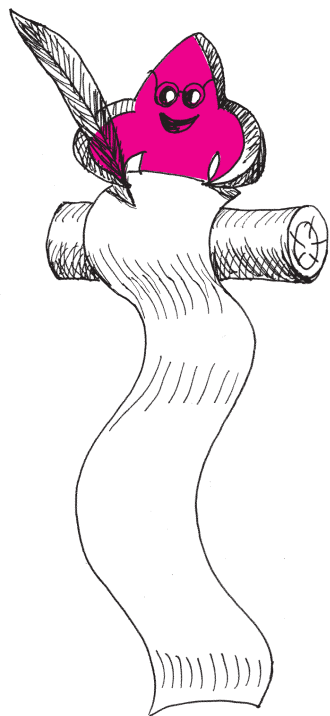
Oto mój dowód.

Załóżmy, że mamy podział kwadratu na t trójkątów ostrokątnych. Rozważmy zbiór wierzchołków trójkątów tworzących ten podział. Podzielmy punkty tego zbioru ze względu na wartość sumy miar tych kątów wewnętrznych trójkątów, których to kątów dany punkt jest wierzchołkiem. Zauważmy, że występują trzy rodzaje punktów: punkty typu p , leżące we wnętrzu kwadratu i takie, że kąty wewnętrzne trójkątów, stykające się w nim, tworzą kąt pełny; punkty typu q , w których stykające się kąty wewnętrzne trójkątów tworzą kąt półpełny (mogą to być punkty leżące na boku kwadratu lub w jego wnętrzu na boku jakiegoś trójkąta); punkty typu r , w których stykające się kąty wewnętrzne trójkątów tworzą kąt prosty (są to wierzchołki kwadratu). Oznaczmy liczbę poszczególnych punktów odpowiednio przez p , q i r . Mamy, oczywiście, $r = 4$.

Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych trójkątów tworzących podział kwadratu wynosi z jednej strony $t \cdot 180^\circ$, a z drugiej $p \cdot 360^\circ + q \cdot 180^\circ + r \cdot 90^\circ$. Stąd wynika, że $t = 2p + q + 2$. Z ostrokątności trójkątów tworzących podział wynika, że w każdym punkcie typu p styka się wierzchołkami co najmniej 5 trójkątów, w każdym punkcie typu q stykają się wierzchołkami co najmniej 3 trójkąty, a w każdym punkcie typu r stykają się wierzchołkami co najmniej 2 trójkąty. Zatem we wszystkich trójkątach tworzących podział jest łącznie co najmniej $5p + 3q + 2r$ kątów wewnętrznych. Z drugiej strony łączna liczba kątów wewnętrznych wszystkich trójkątów tworzących podział wynosi $3t$. Stąd wnioskujemy, że $3t \geq 5p + 3q + 8$. Podstawiając do tej nierówności wartość t z pierwszej równości, mamy $6p + 3q + 6 \geq 5p + 3q + 8$, czyli $p \geq 2$. Istnieją więc dwa różne takie punkty X i Y , że w każdym z nich styka się wierzchołkami co najmniej 5 trójkątów. Ale wśród tych trójkątów mogą istnieć tylko dwa takie, których wierzchołkami są jednocześnie oba punkty X i Y . Zatem liczba trójkątów tworzących podział wynosi co najmniej 8.

c.b.d.u.

Marcin PECZARSKI



Zadania



Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 976. Który z ciągów (α_n) i (β_n) składających się z cyfr jedności liczb $(\sqrt{10})^n$ i $(\sqrt{2})^n$ jest okresowy?

Rozwiązanie na str. 3

M 977. Znaleźć cyfrę jedności i pierwszą cyfrę po przecinku liczby $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2000}$.

Rozwiązanie na str. 3

M 978. Znaleźć wszystkie pary liczb naturalnych m, n , dla których spełniona jest równość $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$.

Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 563. Określić wytrzymałość na rozerwanie (naprężenie niszczące) kryształu jonowego NaCl, zaniedbując oddziaływanie wszystkich jonów z wyjątkiem sąsiednich. W chlorku sodu odległość między środkami sąsiadujących jonów wynosi $n = 2,81 \text{ \AA}$.

Rozwiązanie na str. 1

F 564. Stalowe koło zamachowe ma postać masywnego pierścienia o zewnętrznej średnicy równej 40 cm i wewnętrznej 30 cm. Przy jakiej prędkości koło rozerwie się na części? Naprężenie niszczące dla stali wynosi około 10^9 Pa , a gęstość stali wynosi $7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Rozwiązanie na str. 2



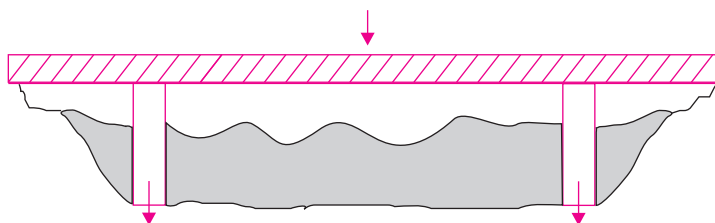
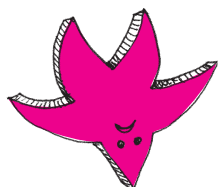
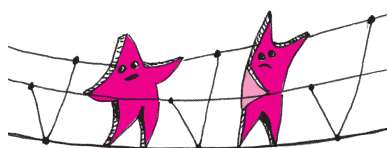
mała delta

Mosty

Po tym, jak zaintrygowała mnie konstrukcja łuku rzymskiego (*Mała Delta* 11/2001), obserwowanie mostów łukowych i różnego rodzaju sklepień stało się moją obsesją. W dodatku latem zaczęłam dojeżdżać rowerem do pracy, ścieżka rowerowa biegnie wzdłuż Wisły, więc przejeżdżając tamtędy dwa razy dziennie zaczęłam z coraz większym zainteresowaniem przyglądać się kolejnym mijanym mostom.

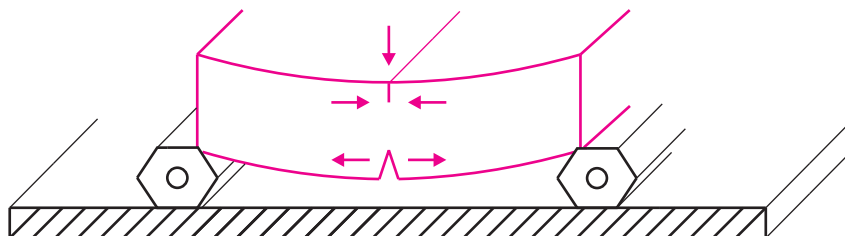
Konkretne nazwy nie są istotne, opiszę tylko parę głównych rodzajów konstrukcji mostów. Są to przede wszystkim: most belkowy (typowa „kładka” przez rzekę), most łukowy (pisałam o nim w *Delcie* 11/2001, ponieważ nie lubię się powtarzać, tutaj pominię opis tej konstrukcji), most wiszący (prawdę mówiąc, takiego akurat nie zauważyłam w okolicy, najsłynniejszy tego typu to Golden Gate w San Francisco), no i most podwieszany, przypominający bardzo most wiszący, ale zasadniczo różny od niego pod względem konstrukcyjnym.

Most belkowy jest najprostszym (i zazwyczaj najtańszym) rodzajem mostu. Składa się on, w uproszczeniu, z poziomej kładki podpartej na końcach.

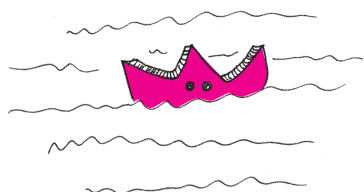


Ciężar belki działa bezpośrednio na podpory. Sama kładka musi być więc na tyle wytrzymała, aby nie uginać się pod swoim własnym ciężarem oraz spodziewanym obciążeniem.

Przypatrzmy się rozkładowi sił działających na belkę, konstruując prosty model mostu belkowego. Potrzebna jest płaska gumka do ścierania i dwa ołówki służące jako podparcia. Wykonaj nacięcie w poprzek gumki, na dole i na górze, i połóż ją na ołówkach.

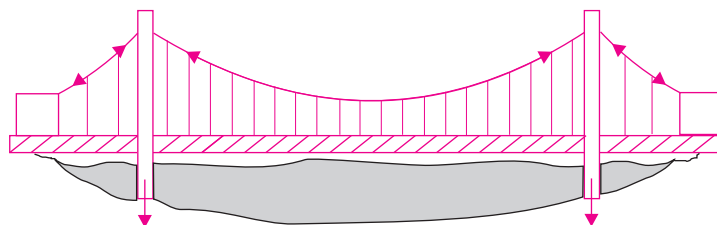


Naciskając gumkę od góry, możemy zobaczyć, jakie naprężenia działają na konstrukcję.



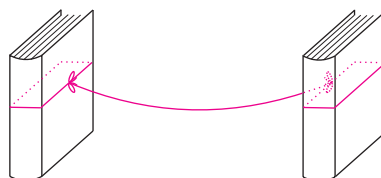
Do budowy belki potrzebny jest więc materiał odporny na ściskanie i wyginanie. Zazwyczaj stosuje się uzbrojony beton albo konstrukcje metalowe. Belka może być skonstruowana na wiele różnych sposobów, metalowa konstrukcja może przebiegać nad drogą albo pod, stosuje się też różne rozkłady gęstości materiału. Im większa odległość między filarami, tym słabsza staje się konstrukcja mostu. Dlatego ten typ konstrukcji nie jest używany przy większych odległościach.

Zgodnie z nazwą, **most wiszący** jest utrzymywany za pomocą grubych i długich lin albo łańcuchów, rozciągających się „swobodnie” między jednym pylonem a drugim. Liny te opierają się na pylonach, a ich końce są dobrze zakotwiczone w kamiennych albo betonowych wspornikach.

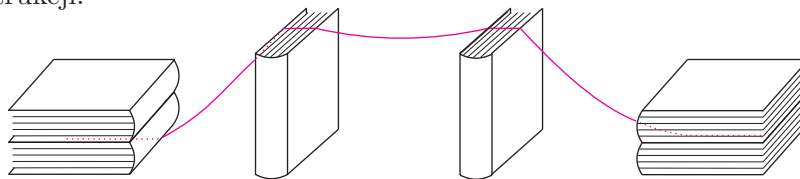


Pylony pozwalają linom rozciągać się na dużych odległościach. Większość ciężaru mostu jest przenoszona linami do miejsc zakotwiczenia.

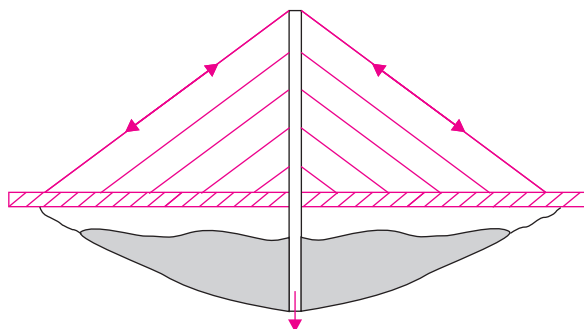
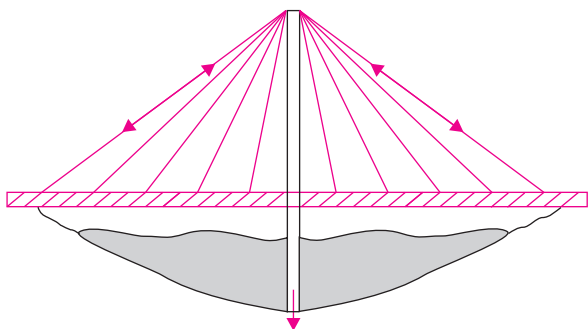
Prześledźmy, jak to działa w praktyce i wykonajmy następujące doświadczenie. Zawiąż dwa kawałki sznurka dookoła dwóch książek w twardej okładce i o podobnym rozmiarze. Końce trzeciego sznurka przywiąż do książek tak, jak na rysunku.

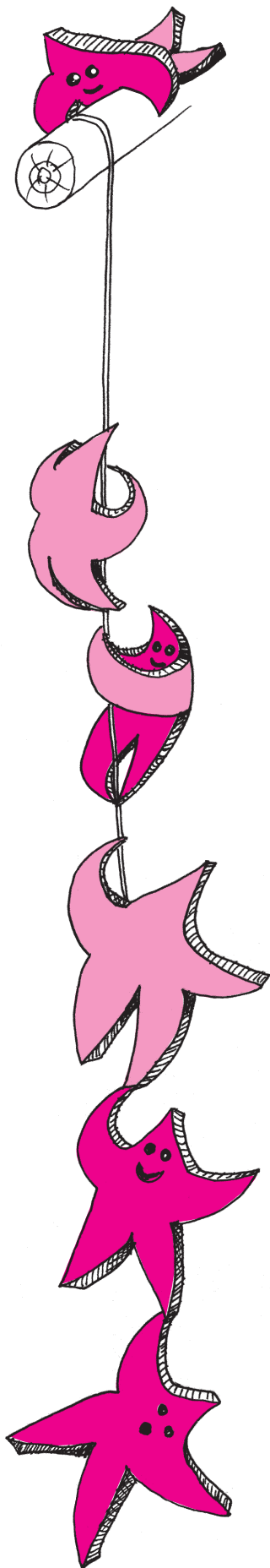


Naciśnięcie sznurka pośrodku powoduje... oczywiście zawalenie się konstrukcji. Spróbujmy więc trochę zmodyfikować konstrukcję naszego modelu. Postaw dwie książki w odległości kilkunastu centymetrów i połóż na nich sznurek. Końce sznurka zabezpiecz kładąc na nich parę innych książek. Naciskanie sznurka pośrodku już nie narusza stabilności konstrukcji.



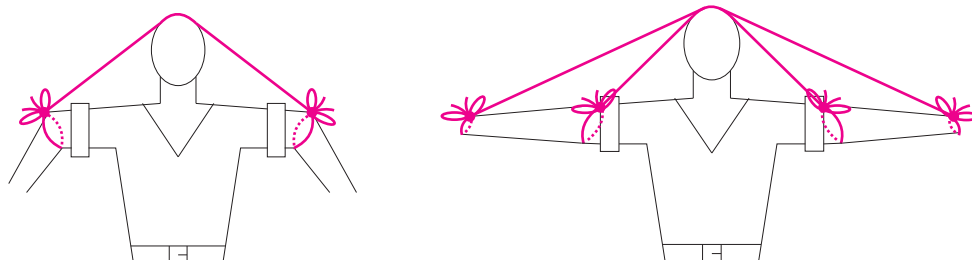
Mosty podwieszane wyglądają bardzo podobnie do mostów wiszących – w obu typach są liny podtrzymujące konstrukcję i pylony.





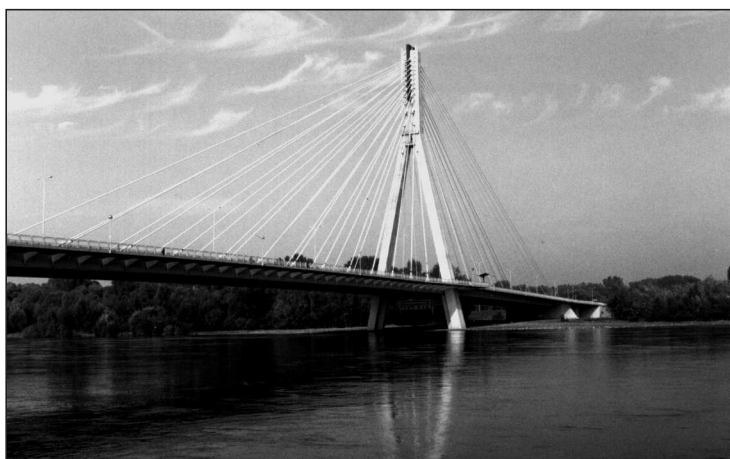
Ale sposób, w jaki liny utrzymują ciężar mostu, jest znacząco różny. W mostach wiszących liny przebiegają „swobodnie” między pylonami, przenoszą obciążenie na zakotwiczenia po obu stronach mostu. W mostach podwieszanych liny są przymocowane do pylonów, i na nie jest przenoszone obciążenie w całości. Liny mogą utrzymywać most na co najmniej dwa różne sposoby – radialny i równoległy.

Spróbujmy i teraz skonstruować na własny użytek model mostu podwieszanego. Model ten będzie trochę inny od poprzednich, potrzebny jest do niego tylko sznurek i... Czytelnik (może się przydać jeszcze jedna osoba do pomocy). A więc weź odpowiednio długi kawałek sznurka i przywiąż oba końce do łokci jak na rysunku poniżej. Środek sznurka niech spoczywa na Twojej głowie.



Weź jeszcze dłuższy sznurek i przywiąż do nadgarstków (rysunek powyżej). Spróbuj naciskać rękoma w dół. Czy czujesz, jak ciężar jest przenoszony na Twoją głowę?

Mosty tego typu są trochę tańsze do wykonania niż mosty wiszące, zużywa się dużo mniej stalowych lin, i sama konstrukcja przebiega szybciej. Na niewielkich odległościach wystarczy pojedynczy pylon – czego przykładem jest jedna z najnowszych budowli warszawskich – Most Świętokrzyski. W zasadzie most ten mógłby się obejść bez pylonu, szerokość Wisły nie jest duża i można by postawić most belkowy albo łukowy (na paru filarach). Konstrukcja wymagałaby wtedy większej liczby filarów, a most musiałby być położony wyżej nad poziomem wody niż to jest obecnie (ze względu na zabezpieczenie zimą przed kawałkami kry), a wszystko to wiązałoby się z dodatkowymi kosztami. Lekko futurystyczny kształt Mostu Świętokrzyskiego nie jest więc kolejnym estetycznym kaprysem architekta, lecz ma techniczne i ekonomiczne uzasadnienie.



Małą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY

Co to takiego: liczby Ramseya?

Frank Plumpton Ramsey, 1903-1930, matematyk angielski, zajmował się logiką, podstawami matematyki, ekonomii i filozofii.

Graf to skończony zbiór wierzchołków połączonych krawędziami. Najprościej wierzchołki można sobie wyobrazić jako punkty w przestrzeni, a krawędzie jako odcinki prostych, łączące te wierzchołki.

Historia liczb Ramseya zaczęła się od następującego twierdzenia:

Twierdzenie Ramseya (1930). *Dla dowolnych naturalnych k, l istnieje takie n , że dowolny graf o n wierzchołkach zawiera albo k wierzchołków połączonych każdy z każdym, albo l wierzchołków nie połączonych żaden z żadnym.*

Twierdzenie Ramseya należy do działu określanego jako kombinatoryka (a ściślej jest to historycznie pierwsze z ważnych tzw. *twierdzeń podziałowych*), choć dla samego Ramseya stanowiło ono tylko narzędzie do badań z zakresu logiki matematycznej.

Jest już tradycją kombinatoryki, której częścią jest teoria grafów, że gdy się pojawia interesujące twierdzenie o istnieniu jakiejś liczby, natychmiast pada pytanie „Jak duża jest ta liczba?” Tak stało się też z n w twierdzeniu Ramseya. Otrzymało ono nazwę i stało się samo obiektem badań.

Definicja. Najmniejszą liczbę n o własności opisanej w twierdzeniu Ramseya oznacza się $R(k, l)$ i nazywa *liczbą Ramseya*.

Liczbę $R(3, 3)$ daje się łatwo wyznaczyć:

$$R(3, 3) = 6.$$

Zbiór niezależny to podzbiór wierzchołków grafu, pomiędzy którymi nie ma żadnych krawędzi.

Najpierw udowodnimy, że $R(3, 3) \leq 6$. Musimy wykazać, że dowolny graf G o sześciu wierzchołkach zawiera albo trójkąt, albo zbiór niezależny o trzech wierzchołkach. Ustalmy dowolny wierzchołek v grafu G . Pozostałych wierzchołków jest pięć, więc wśród nich albo są trzy wierzchołki połączone krawędziami z v , albo są trzy wierzchołki niepołączone z v .

W tym pierwszym przypadku, jeśli którekolwiek dwa spośród trzech wierzchołków sąsiadnych v są połączone krawędzią, to tworzą one wraz z v trójkąt. Jeśli zaś żadnych takich dwóch nie ma, to ci trzej sąsiedzi v tworzą zbiór niezależny.

W drugim przypadku (trzech nie-sąsiadów, rys. 1) rozumowanie jest symetryczne.

Teraz zaś wskażemy przykład grafu o pięciu wierzchołkach, bez trójkąta i bez zbioru niezależnego o trzech wierzchołkach, co będzie znaczyło, że $R(3, 3) > 5$. Jest on na rysunku 2.

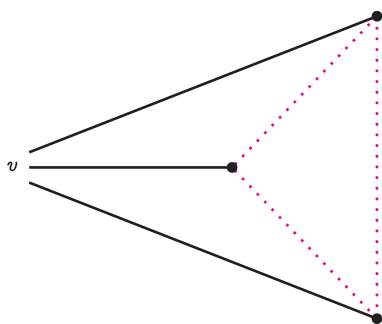
Tym samym dowód równości $R(3, 3) = 6$ jest zakończony.

Aktualny stan wiedzy o liczbach Ramseya

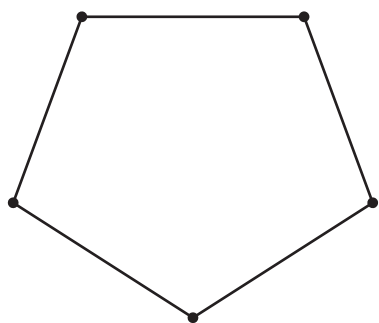
Po obejrzeniu dowodu równości $R(3, 3) = 6$ można dojść do przekonania, że nietrudno jest obliczać liczby Ramseya. Ale to nieprawda. Naprawdę wyznaczanie liczb Ramseya jest niesłychanie trudne. To, co dzisiaj o nich wiemy, można z grubsza podzielić na trzy kategorie:

- Twierdzenia o asymptotycznym zachowaniu liczb Ramseya (to liczby „duże” z tytułu).
- Twierdzenia o wartościach tych liczb dla konkretnych grafów (to liczby „małe” z tytułu).
- Twierdzenia o rekurencyjnych zależnościach między liczbami dla różnych k i l .

Rys. 1



Rys. 2



Duże liczby Ramsey'a

Pierwszym ważnym wynikiem było następujące oszacowanie Erdősa i Szekeres'a z 1935 roku:

$$(1) \quad R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1},$$

którego dowód opierał się na specjalnym dowodzie twierdzenia Ramsey'a, pozwalającym oszacować z góry szybkość wzrostu n . Dopiero 50 lat później udało się ten wynik ulepszyć w istotny sposób: Rodl (w 1986) i niezależnie Thomason (w 1987) udowodnili, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(n, n) / \binom{n+n-2}{n-1} = 0,$$

co oznacza, że nierówność (1) była „przeszacowana” o więcej niż stały czynnik. Jeśli chodzi o oszacowania dolne, to nadal rekordem jest oszacowanie Erdősa z 1961 roku, którego dowód poważnie uprościł Spencer w 1977 roku:

$$(2) \quad R(n, n) \geq n2^{n/2} \cdot (\sqrt{2}/e + f(n)),$$

gdzie f jest pewną funkcją, taką że $f(n) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.

I Erdős, i Spencer posłużyli się *konstrukcją probabilistyczną*: krawędzie pomiędzy n wierzchołkami rozmieszczali *losowo*, o istnieniu każdej krawędzi decydując za pomocą rzutu symetryczną monetą, niezależnie od pozostałych krawędzi. Celem jest udowodnienie, że z dodatnim prawdopodobieństwem w tak powstałym grafie albo jest odpowiednio dużo połączonych wierzchołków, albo odpowiednio dużo wierzchołków wzajemnie niepołączonych. Zauważmy, że ta metoda dowodu jest niekonstruktywna: dowód istnienia odbywa się bez wskazania metody konstrukcji.

Nadal nierozstrzygnięte jest pytanie Erdősa, czy granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R(n, n)}$ istnieje, i jeśli tak, to ile wynosi.

Jedyną dużą grupą liczb Ramsey'a, dla której znamy dokładne oszacowania ich wielkości, to liczby $R(n, 3)$:

$$c \frac{n^2}{\log n} \leq R(n, 3) < \frac{n^2}{\log(n/e)},$$

gdzie c jest pewną stałą dodatnią.

Oszacowanie górne podał Shearer w 1983 r., a dolne Kim w dwanaście lat później (jego dowód jest niekonstruktywny).

Małe liczby Ramsey'a

Poniższa tabelka zawiera wszystkie aktualnie znane dokładne wartości liczb Ramsey'a. Są one wyróżnione tłustym drukiem. W pozostałych polach górna liczba to najlepsze znane górne oszacowanie, dolna zaś to najlepsze znane dolne oszacowanie. Tu widać najlepiej, jak niewiele wiemy o liczbach Ramsey'a.

	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	41 35	61 49	84 55	115 69
5			49 43	87 58	143 80	216 95	316 121
6				165 102	298 109	495 122	780 153

Obliczenie właściwie każdej z wartości w tabeli było osiągnięciem. Jako przykład spójrzmy na historię badania $R(4, 5)$.

1965: $24 < R(4, 5) \leq 30$ (Kalbfleisch)

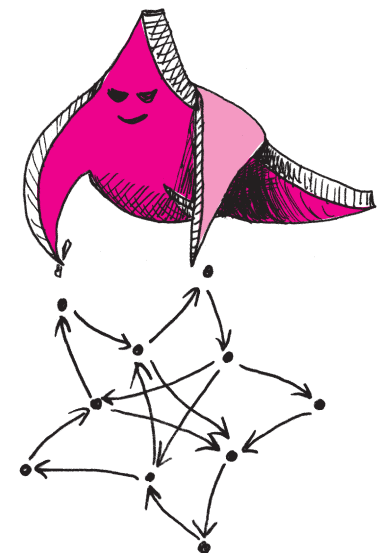
1968: $R(4, 5) \leq 28$ (Walker)

1988: $R(4, 5) \leq 27$ (McKay i Radziszowski)

1992: $R(4, 5) \leq 26$ (McKay i Radziszowski)

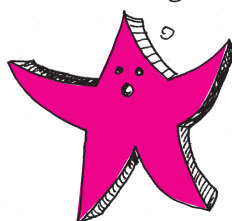
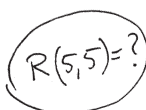
1995: $R(4, 5) \leq 25$ (McKay i Radziszowski)

Po trzydziestu latach górne i dolne oszacowania „spotkały” się i teraz wiemy już, że $R(4, 5) = 25$.



Z nierówności (1) i (2) można wyprowadzić (za pomocą wzoru Stirlinga)

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R(n, n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R(n, n)} \leq 4.$$



Warto zaznaczyć, że w tej historii ostatnim wynikiem uzyskanym metodami ręcznymi był ten pierwszy, autorstwa Kalbfleischa. Począwszy od Walkera wszystkie następne oszacowania wykorzystywały obliczenia komputerowe w coraz większym stopniu, a ostateczne ustalenie wartości $R(4, 5)$ przez McKaya i Radziszowskiego w 1995 roku było efektem obliczeń całej sieci komputerów, których łączny nakład pracy wynosił kilka lat pracy procesora. Przy tym algorytm wykorzystany w tym obliczeniu był bardzo skomplikowany i sprytny, bo przejrzanie wszystkich grafów o 25 wierzchołkach (aby się przekonać, że w każdym są albo krawędzie czworościanu, albo 5 wierzchołków bez żadnych krawędzi pomiędzy sobą) jest niewykonalne: wszystkich grafów do przejrzania byłoby co najmniej

$$\frac{2^{\binom{25}{2}}}{25!} \approx 0,13 \cdot 10^{66}.$$

Jest to liczba dosłownie kosmicznie wielka – jej kwadrat przekracza szacowaną liczbę protonów w całym obserwowalnym Wszechświecie.

Rekurencje dla liczb Ramseya

Pragnę wspomnieć tu kilka nierówności. Pierwsza z nich to ta, z której Erdős i Szekeres wydedukowali oszacowanie (1):

$$R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1).$$

Przy tym nierówność jest ostra, jeśli $R(m - 1, n)$ oraz $R(m, n - 1)$ są parzyste. Jej dowód jest bardzo podobny do przedstawionego już dowodu $R(3, 3) \leq 6$, który jest w istocie jej przypadkiem szczególnym (bo oczywiście $R(2, 3) = R(3, 2) = 3$). Zauważmy przy okazji, że sporą wartość ma dodatkowy warunek, gwarantujący ostrość nierówności w niektórych przypadkach. Wprawdzie zmniejsza on oszacowanie tylko o 1, ale przypomnijmy sobie, ile trudu i lat pracy wymagało za każdym razem zmniejszenie oszacowania liczby $R(4, 5)$ właśnie o 1. . .

Podobną uwagę można zrobić o nierówności Chunga, Cleve i Daguma (1993)

$$(3) \quad R(4, 4n + 1) \geq 6R(3, n + 1) - 5,$$

która jest tylko trochę mocniejsza od bardzo łatwej do udowodnienia nierówności

$$R(3, 4n + 1) \geq 4R(3, n + 1) - 3.$$

Liczby Ramseya i najazd z kosmosu

Erdős lubił przedstawiać trudność wyznaczania liczb Ramseya za pomocą następującej historii:

Wyobraźmy sobie, że na Ziemi pojawiają się przedstawiciele obcej cywilizacji o olbrzymiej przewadze technologicznej nad nami i, grożąc zniszczeniem Ziemi, zadają od nas informacji o liczbach Ramseya.

Erdős uważał, że

gdyby nas zapytali o wartość $R(5, 5)$, to należałoby wysłanie wszystkich matematyków świata skierować na ten problem. Natomiast gdyby pytanie dotyczyło $R(6, 6)$, to należałoby zaatakować najeźdźców, bo mielibyśmy o wiele większą szansę na zwycięstwo w walce zbrojnej niż na znalezienie żądanej liczby.

Autorowi tego artykułu wydaje się, że jest jeszcze jedna możliwość: należałoby oświadczyć obcym, że znaleźliśmy zadziwiający dowód równości $R(6, 6) = 102$, ale nie mamy pod ręką dość papieru, by go zapisać. Może zachowaliby się w tej sytuacji, tak jak na prawdziwych matematyków przystało. . .

Bosenova

Na zdjęciach widać dwóch poważnych i trzech uśmiechniętych osobników. Dwaj najbardziej uradowani zostali sfotografowani niedługo po tym, jak udało im się zrobić to, co przewidzieli ci poważni, którzy, niestety, nie doczekali realizacji swoich przewidywań. Sprawa jest naprawdę **cool** – od milionowych do miliardowych części stopnia powyżej bezwzględnego zera.

Gdzie może być tak zimno? Może w przestrzeni kosmicznej? Nie, tam jest co najmniej milion razy cieplej, bo taka jest przecież obecna temperatura promieniowania tła kosmicznego. Nie było wyjścia. Trzeba było wymyślić sposób na uzyskanie tak niskich temperatur w laboratorium, gdyż bez nich nie można doprowadzić do kondensacji Bosego-Einsteina.

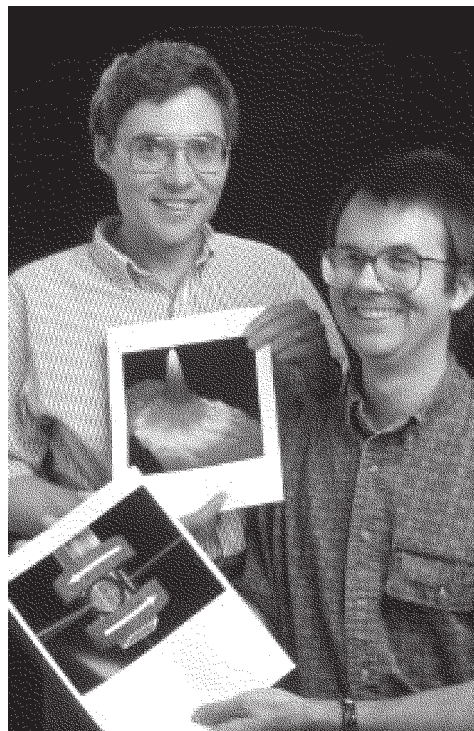
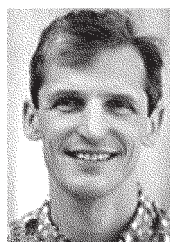
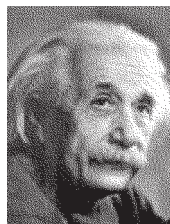
Historia ta sięga okresu sformułowania mechaniki kwantowej. W 1924 roku indyjski fizyk Satyendra Nath Bose wysłał Albertowi Einsteinowi pracę na temat statystyki, którą powinny spełniać kwanty promieniowania elektromagnetycznego. Einstein nie tylko spowodował jej opublikowanie, ale sam rozwinął pomysł indyjskiego kolegi, rozszerzając go na cząstki masywne o całkowitej spinowej liczbie kwantowej. Cząstki te obecnie nazywamy bozonami, a statystykę, której podlegają, statystyką Bosego-Einsteina.

Przypomnijmy, że oprócz bozonów są jeszcze fermiony charakteryzujące się połówkowym momentem pędu. Zachowują się one zgodnie ze statystyką Fermiego-Diraca – obowiązuje je zakaz Pauliego, dzięki czemu dwa fermiony nie mogą być jednocześnie w tym samym stanie kwantowym. Co innego bozony. Einstein przewidział w 1925 roku, że w temperaturze zera bezwzględnego, w nieograniczonej przestrzeni i przy liczbie identycznych bozonów, dążącej do nieskończoności, wszystkie one powinny znaleźć się w tym samym stanie kwantowym. Początkowo uważano to za przejaw absurdalności dosłownego posługiwania się matematycznym językiem mechaniki kwantowej, ale z czasem rozpoczęto poszukiwania takiego stanu materii nazwanego kondensatem Bosego-Einsteina. Udało się to dopiero 70 lat później, a sukces ten został uhonorowany **Nagrodą Nobla z Fizyki za rok 2001 dla Carla E. Wiemana, Erica A. Cornella i Wolfganga Ketterle za osiągnięcie kondensacji Bosego-Einsteina w rozrzedzonych parach litowców i za wczesne fundamentalne badania własności otrzymanych kondensatów.**

Sposób uzyskania kondensatu jest pojęciowo bardzo prosty. Wystarczy gaz bozonów oziębic do temperatury nanokelwinów. Chodzi o to, aby (proporcjonalna do odwrotności pędu) długość fali de Broglie'a atomów stała się większa od odległości międzyatomowych.

Realizacja wymaga jednak technicznej perfekcji. Zwłaszcza, że nie można w czasie chłodzenia dopuścić do normalnej kondensacji, czyli skroplenia czy też zestalenia gazu. Dlatego gaz musi być rozrzedzony, a oddziaływanie międzyatomowe powinno być odpychające. Niezbędny jest jeszcze idealny kriostat oraz jakiś genialny sposób

chłodzenia. Co ciekawe, doświadczenia te przeprowadza się w temperaturze pokojowej. Izolacja termiczna sprowadza się do stanu wysokiej próżni wewnątrz pułapki magneto-optycznej, optycznej lub magnetycznej.



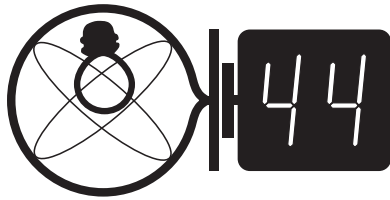
Początkowo atomy chłodzone są odpowiednio dobranymi wiązkami laserowymi. Za sam ten pomysł przyznano Nagrodę Nobla już cztery lata temu, o czym pisaliśmy w *Delcie 1/1998*. Ten zaskakujący sposób chłodzenia działa m.in. dzięki użyciu światła o częstotliwości mniejszej od częstotliwości rezonansowej, co powoduje, że tylko atomy lecące na spotkanie fotonom mogą (dzięki efektowi Dopplera) je zaabsorbować.

Ostateczne chłodzenie odbywa się w pułapce magnetycznej i okazuje się genialnie proste, gdy już wiadomo, jak to zrobić (rycinę ze schematem pułapki trzyma Cornell). Użyty sposób polega w zasadzie na tym samym co stygnięcie gorącej herbaty. Dobierając odpowiednio pole pułapki, pozwala się ulatywać najszybszym, a więc gorętszym niż średnia atomom, przez co układ atomów pozostających w pułapce ulega chłodzeniu.

Po zejściu poniżej temperatury krytycznej w pułapce zaczyna przybywać atomów w najniższym stanie. Aby je zobaczyć, można wyłączyć pole pułapki, pozwalając atomom na jej balistyczne opuszczenie. Oświetlenie ich światłem o częstotliwości rezonansowej pozwala na uzyskanie dwuwymiarowego obrazu, którego graficzną reprezentację pokazuje Wieman. Na osi pionowej zaznaczono stopień absorpcji odpowiadający przestrzennej gęstości atomów. Widać wyraźnie pozostający centralnie kondensat na tle rozpełzającej się reszty atomów.

Niestety, o tym, co to ma wspólnego z dzisiejszym tytułem, będzie można przeczytać dopiero za miesiąc.

Piotr ZALEWSKI



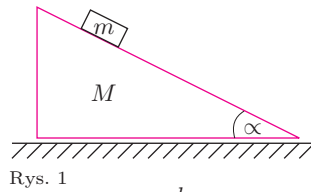
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2002

Skrót regulaminu

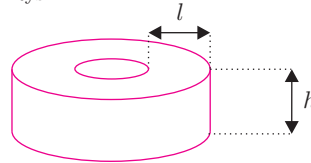
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z fizyki nr 330, 331

330. Równię pochyłą o masie M i kącie nachylenia α postawiono na poziomym stole, a na równi położono na pewnej ustalonej wysokości h ciało o masie m (rys. 1). Jeśli na żadnej powierzchni nie występuje tarcie, to czy można tak dobrać parametry równi (M i α), aby ciało w chwili zsunięcia się z równi miało dowolnie małą prędkość względem ziemi, czy też istnieje jakieś ograniczenie od dołu na tę prędkość?



Rys. 1



Rys. 2

331. Aby zmniejszyć natężenie prądów wirowych w rdzeniu transformatorów

Redaguje Jerzy B. BROJAN

(czyli zmniejszyć straty energii), rdzenie te wykonuje się z izolowanych blaszek żelaznych zamiast z litej masy żelaza.

W przypadku autotransformatora rdzeń ma kształt toroidalny o przekroju prostokątnym (rys. 2). Jaki sposób zestawienia blaszek jest najlepszy:

- układanie w stos płaskich kółek z dziurką,
- zwiniecie w rulon długiej taśmy o szerokości h ,
- złożenie rdzenia z prostokątnych płytek o wymiarach $l \times h$?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2001

Przypominamy treść zadań:

322. Na obracającej się ze stałą prędkością kątową ω_0 poziomej osce osadzono ciało (wahadło), które może się wokół niej obracać, przy czym moment sił tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości poślizgu i jest równy maksymalnemu momentowi tarcia statycznego. Moment ten ma wartość $M_t = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$, moment bezwładności wahadła względem osi obrotu $I = 1,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, a maksymalny moment siły ciężkości (równy iloczynowi ciężaru wahadła przez odległość jego

322. Jeżeli początkowa prędkość kątowa jest duża, to ze względu na tarcie wahadło będzie zwalniać, aż na pewien czas dojdzie do spoczynku względem osi. Ze względu na nierówność $M_t < M_g$ wahadło może pozostawać w spoczynku względem osi tylko w pewnym przedziale położenia; jak nietrudno sprawdzić, przedział ten jest określony warunkiem $|\sin \alpha| \leq M_t/M_g$, gdzie α jest kątem odchylenia wahadła od pionu. Aby upewnić się, czy obrót wahadła zostanie utrzymany, należy sprawdzić, czy w fazie wznoszenia się wahadło jest w stanie przebyć rozpędem przedział $|\sin \alpha| > M_t/M_g$, jeśli początkowo ma ono prędkość kątową ω_0 . Tak będzie, jeżeli

$$\frac{1}{2}I \omega_0^2 + M_t \left(\pi - 2 \arcsin \left(\frac{M_t}{M_g} \right) \right) > 2\sqrt{M_g^2 - M_t^2}.$$

Drugi składnik po lewej stronie jest tu pracą siły tarcia, a prawa strona – przyrostem energii grawitacyjnej (danej wzorem $E = -M_g \cos \alpha$). Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $\omega_0 > 1,0525 \text{ rad/s}$, a więc pod tym warunkiem ruch obrotowy będzie trwały. W przeciwnym przypadku wystąpią drgania wokół odchylnego od pionu położenia równowagi, albo też (przypadek graniczny) wahadło będzie nieskończenie długo dochodzić do niestabilnego górnego położenia równowagi.

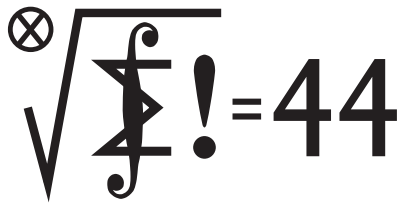
W powyższym rozwiązaniu brakuje analizy istotnego szczegółu: czy podczas wznoszenia się pokonywanie przedziału $|\sin \alpha| > M_t/M_g$ będzie się rozpoczynać od prędkości kątowej ω_0 ? Dla przyjętych tu danych jest to prawdą (można to wykazać rachunkiem lub eksperymentem komputerowym) – ale w przypadku $M_g = 2 \text{ N}\cdot\text{m}$ jest

środką masy od osi obrotu) $M_g = 1,5 \text{ N}\cdot\text{m}$. W chwili początkowej nadano wahadłu dużą prędkość kątową zgodną ze zwrotem ω_0 . Dla jakich wartości ω_0 wahadło po długim czasie będzie się obracać, a dla jakich – wykonywać drgania wokół pewnego położenia równowagi? Poza konkursem: Jaka jest odpowiedź dla przypadku, kiedy $M_g = 2 \text{ N}\cdot\text{m}$, a pozostałe dane są niezmiennicze?

323. Żarówka o mocy nominalnej 15 W jest dostosowana do napięcia 10 V . Ile ogniwo SEM równej $1,5 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym 2Ω trzeba wziąć i jak je połączyć, aby napięcie na żarówce było co najmniej równe nominalnemu?

inaczej, po upływie długiego czasu wahadło w żadnym niezerowym przedziale czasu nie będzie pozostawać w spoczynku względem osi. Zadanie staje się przez to znacznie trudniejsze, a rozwiązanie można oprzeć na eksperymencie komputerowym, tzn. analizie ruchu wahadła metodą „krok po kroku”. Minimalną wartością ω_0 , dającą trwałą obrót wahadła, jest wtedy $1,6443 \text{ rad/s}$.

323. Połączmy n ogniwo szeregowo i m takich zespołów równoległe. Opór zastępczy takiego układu wynosi nR_w/m , a siła elektromotoryczna – $n\varepsilon$, gdzie R_w i ε są oporem wewnętrznym i siłą elektromotoryczną pojedynczego ogniwa. Natężenie prądu płynącego przez żarówkę dołączoną do układu ma wartość $I = \frac{n\varepsilon}{R + nR_w/m}$, gdzie R jest oporem żarówki. Przekształcając to równanie wyznaczamy m , a całkowita liczba ogniwo N wynosi $N = mn = \frac{n^2 R_w I}{n\varepsilon - RI}$. Traktując n jako zmienną ciągłą możemy zbadać minimum funkcji $N(n)$ – występuje ono dla wartości $n = 2RI/\varepsilon$, $m = 2R_w I/\varepsilon$. Podstawienie danych liczbowych daje wyniki: $I = 1,5 \text{ A}$, $R = 6,67 \Omega$, $n = 13,33$, $m = 4$. Oczywiście, n musi być liczbą całkowitą – np. jeśli $n = 14$, to dla $m = 4$ mamy łącznie 56 ogniwo. Dobierając mniej typowe obwody, można „urwać” z tej liczby 2 ogniwa: wystarczy połączyć szeregowo 12 zestawów po 4 ogniwa równoległe i 2 zestawy po 3 ogniwa równoległe, razem 54 ogniwa. Równie skuteczne jest połączenie szeregowo 2 zestawów po 5 ogniwo równoległe i 11 zestawów po 4 ogniwa równoległe.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2002

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 421 (WT = 2,12) i 422 (WT = 1,09)
z numeru 5/2001

Adam Woryna	– Ruda Śląska	45,19
Marcin Peczański	– Lachorzew	43,58
Witold Bednarek	– Łódź	40,21
Jacek Klisowski	– Lublin	36,96
Tomasz Wietecha	– Tarnów	36,91
Michał Adamaszek	– Kęty	36,79
Jerzy Cisło	– Wrocław	35,33

Adam Woryna przekracza próg 44 p.
i zostaje dziewięćdziesiątym piątym
członkiem **Klubu 44 M**.

Zadania z matematyki nr 433, 434

Redaguje Marcin E. KUCZMA

433. Znaleźć wszystkie funkcje wymierne

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (P, Q - \text{wielomiany rzeczywiste})$$

mające tę własność, że $f(x)^2 - f(x^2)$ jest funkcją stałą na zbiorze tych liczb $x \in \mathbb{R}$, dla których $Q(x) \neq 0$ oraz $Q(x^2) \neq 0$.

434. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste styczne do tego okręgu w punktach A i C przecinają się w punkcie P , a styczne w punktach B i D przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że punkty A, C, Q są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty B, D, P są współliniowe.

Zadanie 434 zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2001

Przypominamy treść zadań:

425. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ o nierównoległych bokach AB i CD znajduje się punkt X taki, że $\angle ADX = \angle BCX < 90^\circ$ oraz $\angle DAX = \angle CBX < 90^\circ$. Symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie Y . Dowieść, że $\angle AYB = 2 \cdot \angle ADX$.

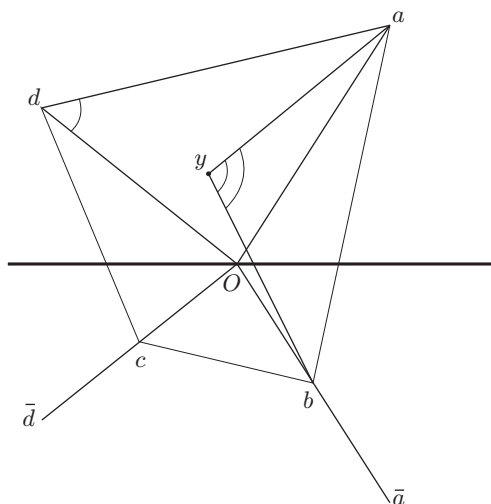
426. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $(b+c)(a+b+c) = c$ oraz $b+c < 0$. Dowieść, że wielomian $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma i iloczyn są równe.

425. Zadanie można wygodnie rozwiązać rachując na liczbach zespolonych. Punkty X, A, B, C, D, Y są reprezentowane przez liczby zespolone $0, a, b, c, d, y$. Trójkąty XAD i XBC są podobne, przy czym trójkąty (X, A, D) i (X, B, C) są przeciwnie zorientowane. Można zatem umieścić te trójkąty na płaszczyźnie zespolonej w taki sposób, by zachodziły równości $b = \lambda \bar{a}$, $c = \lambda \bar{d}$, ze współczynnikiem rzeczywistym $\lambda > 0$. Punkt Y jest wyznaczony przez warunki $|y - a| = |y - \lambda \bar{a}|$ oraz $|y - d| = |y - \lambda \bar{d}|$. Pierwszy z tych warunków przepisujemy w postaci $(y - a)(\bar{y} - \bar{a}) = (y - \lambda \bar{a})(\bar{y} - \lambda a)$, czyli

$$(\lambda a - \bar{a})y + (\lambda \bar{a} - a)\bar{y} = (\lambda^2 - 1)|a|^2.$$

Drugi warunek daje analogiczne równanie, w którym symbole a i \bar{a} są zastąpione przez d i \bar{d} . Otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z niewiadomymi y i \bar{y} ; tylko pierwsza z nich jest znacząca dla dalszego rozumowania. Rozwiązując układ, znajdujemy jej wartość:

$$y = \frac{\lambda \bar{a} d (a - d) + a d (\bar{d} - \bar{a})}{a \bar{d} - \bar{a} d}$$



(założenie, że proste AB i CD nie są równoległe, gwarantuje, iż $\lambda^2 \neq 1$ oraz $a \bar{d} \neq \bar{a} d$, więc rachunki są poprawne).

Należy dowieść, że argument kątowy ilorazu $(a - y)/(b - y)$ jest dwukrotnością argumentu ilorazu $(a - d)/(0 - d)$. To zaś jest równoważne wykazaniu, że dla pewnej liczby rzeczywistej $\mu > 0$ zachodzi równość

$$\frac{a - y}{b - y} = \left(\frac{d - a}{d} \right)^2 \cdot \mu.$$

Korzystając z otrzymanego wyrażenia dla liczby y , rachujemy:

$$a - y = \frac{\bar{d}(a - d)(a - \lambda \bar{a})}{a \bar{d} - \bar{a} d},$$

$$b - y = \lambda \bar{a} - y = \frac{d(\bar{a} - \bar{d})(a - \lambda \bar{a})}{a \bar{d} - \bar{a} d},$$

wobec tego

$$\frac{a - y}{b - y} = \frac{\bar{d}(a - d)}{d(\bar{a} - \bar{d})} = \frac{(\bar{d}(a - d))^2}{|d(a - d)|^2} = \left(\frac{d - a}{d} \right)^2 \cdot \frac{|d|^4}{|d(a - d)|^2},$$

i mamy równość, którą chcieliśmy uzyskać.

426. Wystarczy udowodnić, że wielomian $P(x)$ dzieli się przez trójmian kwadratowy postaci $x^2 - wx + w$ o wyróżniku $w(w - 4) > 0$; trójmian taki ma bowiem dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma i iloczyn mają jednakową wartość w . Chcemy więc wykazać, że dla pewnej pary liczb $w \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$ oraz $u \in \mathbb{R}$ jest tożsamościowo spełniona równość $P(x) = (x + u)(x^2 - wx + w)$, równoważna układowi równań

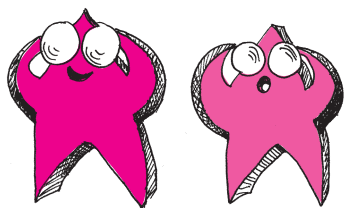
$$a = u - w, \quad b = w - uw, \quad c = uw.$$

Stałe a, b, c spełniają warunki podane w zadaniu. Z dwóch ostatnich równań widać, że trzeba przyjąć $w = b + c$; jest to z założenia liczba ujemna. Zachodzi równość $w(a + w) = c$ (warunek zadania). Przyjmujemy $u = a + w = c/w$ i mamy spełnione wszystkie trzy równania. Daje to dowodzoną tezę.

Każdy satelita podlega tzw. działaniu pływowemu ze strony macierzystej planety. Polega ono na tym, że satelita ulega rozciąganiu wzdłuż linii łączącej go z planetą. Przyczyną jest banalny fakt, że fragmenty satelity położone bliżej planety są przyciągane przez nią silniej niż fragmenty położone dalej. Mówi się, że działanie pływowe jest efektem różnicowym – chodzi o tę właśnie różnicę oddziaływań ze strony planety na bliższą i dalszą część satelity. Satelita może zostać rozerwany przez siły pływowe, jeżeli staną się one silniejsze od jego własnej spistości, określonej czy to przez własną grawitację, czy przez zwyczajną sztywność. Sztucznym satelitom latającym w pobliżu Ziemi jej działanie pływowe nic nie może zrobić, bo po prostu są one zbudowane z metali, Księżycowi – nawet gdyby był płynny – też nic nie groziłoby, bo jest dostatecznie daleko. Są jednak sytuacje, gdy na naszych oczach trwa pływowy kataklizm.

Od dawna wiadomo, że przestrzeń między galaktykami należącymi do znanej gromady w Warkoczu Bereniki (Coma) w pewnych miejscach nie jest tak czarna, jak można by oczekiwać. Powstało naturalne pytanie o naturę tego delikatnego świecenia, przy czym wielu badaczy zaczęło uważać, że odpowiedzialne za nie są po prostu gwiazdy rozproszone w przestrzeni międzygalaktycznej. Gromada odległa jest o co najmniej 100 Mpc, a z takiej odległości nie sposób żadnymi współczesnymi technikami (nawet z orbity) dostrzec poszczególnych gwiazd. Okazuje się jednak, że można zabrać głos w dyskusji na ten temat, dysponując obserwacjami wykonanymi tylko z powierzchni Ziemi, w dodatku za pomocą całkiem skromnego teleskopu. Kilka lat temu za pomocą 0,6-metrowego teleskopu w obserwatorium Kitt Peak w Arizonie wykonano zdjęcia gromady Coma, na których zarejestrowano kilka silnie wydłużonych, bardzo słabo świecących smug. Stwierdzono też, że barwa tych smug odpowiada barwie galaktyk eliptycznych o średnich rozmiarach. Ponadto przynajmniej w jednym przypadku smuga o długości co najmniej 100 kpc, widoczna w pobliżu olbrzymiej galaktyki eliptycznej NGC 4874 (jednej z dwóch takich olbrzymów stanowiących jądro gromady Coma), najprawdopodobniej jest resztką małej galaktyki, która przelatując koło olbrzyma, została zniszczona jego działaniem pływowym. Materia zniszczonej galaktyki, czyli po prostu jej gwiazdy, częściowo ulega rozproszeniu, a częściowo zasila zewnętrzne obszary galaktyki olbrzymiej. Częstość takich zjawisk, oceniona na podstawie gęstości galaktyk w gromadzie i ich względnej prędkości, dowodzi, że w ciągu kilku miliardów lat życia gromady kataklizmy pływowe musiały zajść wielokrotnie, nic więc dziwnego, że w przestrzeni międzygalaktycznej błąka się tam mnóstwo gwiazd, nienależących obecnie do żadnej konkretnej galaktyki.

T.K.



Styczeń

Drugi rok nowego wieku zaczął się równie niepostrzeżenie jak mnóstwo poprzednich i jak będzie z mnóstwem następnych. W styczniowe wieczory znowu od północnego zachodu do południowego wschodu przecina niebo Droga Mleczna, w której już przez lornetkę można dostrzec liczne gromady otwarte gwiazd i mgławice. Prawie w zenicie widać Perseusza. Jego łańcuszek jasnych gwiazd ma na południowym końcu doskonale widoczną bez pomocy przyrządów gromadę Plejad, a na północnym – chyba równie dobrze znaną, choć trudniej dostrzegalną gromadę podwójną h i χ Persei (odpowiednio NGC 869 i 884). Obie widać gołym okiem, ale naprawdę pięknie wyglądają w niewielkim teleskopie przy małym powiększeniu. Pierwsza z nich jest bogatsza w gwiazdy, druga zaś może sama robić wrażenie podwójnej. Choć na niebie niemal „zawadzają” o siebie, to w rzeczywistości dzieli je odległość ponad dziesięciokrotnie większa od ich rozmiarów: wynosi ona

około 300 pc, ich średnice zaś w przybliżeniu 25 pc. Bliższa z gromad, h Persei, leży w odległości 2300 pc.

Konfiguracja planet jest, oczywiście, inna niż rok temu i inna, niż będzie za rok. Wieczorem można próbować odszukać Merkurego; może się uda, bo 11 I znajdzie się kątowno najdalej od Słońca (o 19° na wschód). Wenus jest za Słońcem, więc jej nie widać (14 I ma górne złączenie ze Słońcem). Mars jest w Rybach, czyli wieczorem dość nisko na południowym zachodzie. Za to Jowisz 1 I ma opozycję, czyli znajduje się w Bliźniętach w kierunku przeciwnym niż Słońce, wskutek czego widać go przez całą noc. Niedaleko w Byku jest też Saturn, a więc widać go też praktycznie przez całą noc. Nów Księżycy wypada 13 I, a pełnia 28 I. Zaćmień nie ma, ale Księżyc zakryje Saturna 24 I i Jowisza 26 I – jednak z Polski widać będzie tylko zbliżenia Księżycy do tych planet.

T.K.

DLACZEGO? (III/2)

Na początek odnotujmy, że $a_{58} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$. Zgadza się! Początkowych 57 wyrazów ciągu to liczby całkowite, 58. jest liczbą niewymierną. To **DLATEGO** chcę o tym ciągu opowiedzieć. Ciąg dany jest wzorem

$$a_n = \sqrt{\lceil \sqrt{10080n} \rceil^2 - 10080n},$$

gdzie $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą niż x , czyli zaokrąglenie liczby x w górę do najbliższej liczby całkowitej.

Co wobec tego tak naprawdę robi zagmatwany wzór na a_n ? Otóż bierze on liczbę $10080n$ i w naiwny sposób stara się przedstawić tę liczbę w postaci różnicy kwadratów liczb całkowitych $s^2 - t^2$. A sposób jest naprawdę naiwny. Liczba s^2 to najmniejszy kwadrat, który nie jest mniejszy od $10080n$. A $t^2 = a_n^2$ to różnica $s^2 - 10080n$. I trzeba cudu, żeby ta różnica była kwadratem liczby całkowitej.

Nie ma więc sensu pytanie, **DLACZEGO** a_{58} nie jest liczbą całkowitą. Nie jest, bo nie ma powodów, żeby od pierwiastka kwadratowego z przypadkowo wziętej liczby oczekiwać całkowitości. Za to jak najbardziej na miejscu jest pytanie: **DLACZEGO** dla $n \leq 57$ otrzymujemy liczby całkowite?

Co to znaczy, że a_n jest liczbą całkowitą? Znaczy to tyle, że liczba $10080n$ jest postaci $s^2 - t^2$, gdzie s i t są całkowite nieujemne oraz t nie jest za duże, dokładniej $t < \sqrt{2\sqrt{10080n}}$. Ponieważ $s^2 - t^2 = (s-t)(s+t)$, więc tak naprawdę interesuje nas przedstawienie liczby $10080n$ w postaci iloczynu liczb jednakowej parzystości (czyli parzystych, wobec parzystości $10080n$), o niezbyt dużej różnicy. Ostatecznie, po podzieleniu liczby $10080n$ przez 4, otrzymujemy następujący wniosek.

Liczba a_n jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $2520n$ jest iloczynem dwóch liczb całkowitych o różnicy mniejszej od $\sqrt{2\sqrt{10080n}} = 2\sqrt{6}\sqrt[4]{70n}$. A to z kolei oznacza, że wśród dzielników liczby $2520n$ znajdzie się dzielnik nie za bardzo różniący się od $\sqrt{2520n}$.

Ponieważ $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, u liczby $2520n$ dzielników ci dostatek, nic więc szokującego w tym, że dla $n \leq 57$ udawało się wśród nich znaleźć odpowiedni dzielnik.

O SZKODLIWOŚCI DLA OGÓLNOŚCI

Często w dowodach używa się sformułowania *bez szkody dla ogólności możemy założyć, że...* Zajmijmy się taką oto szczególną sytuacją. W kontekście dosyć symetrycznego wyrażenia $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ chcemy użyć formuły: *bez szkody dla ogólności możemy założyć...* (i tu pewne nierówności pomiędzy x_1, x_2, \dots, x_n , które mogą być pomocne w dowodzie). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy $n = 5$, gdy wartość n jest bez istotnego znaczenia.

Sytuacja najprostsza. Wyrażenia: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, $x_1x_2x_3x_4x_5$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} + \sqrt{x_5}$ są symetryczne ze względu na x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tzn. nie zmieniają się przy dowolnej permutacji liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Liczby te możemy więc dla wygody uporządkować jak tylko chcemy, np. niemalejąco. Przy takich wyrażeniach możemy **bez szkody dla ogólności** założyć, że $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$.

Sytuacja trochę trudniejsza. Wyrażenie $x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_4^2 + x_4x_5^2 + x_5x_1^2$ nie ma pełnej symetrii. Istotnie, zamieniając x_1 i x_2 otrzymujemy wyrażenie $x_2x_1^2 + x_1x_3^2 + x_3x_4^2 + x_4x_5^2 + x_5x_2^2$, które jest inne niż wyjściowe. Widzimy jednak pewną, częściową symetrię, która powoduje, że każda z liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jest w nim równouprawniona. Wyrażenie to nie zmienia się przy cyklicznej permutacji (takich permutacji jest 5 łącznie z identycznością) liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Możemy więc **bez szkody dla ogólności** założyć, że x_1 jest najmniejszą z liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 lub też tylko, że $x_1 \leq x_2$. Ale nie

możemy już zakładać, że $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, bo np. liczby 5, 4, 3, 2, 1 nie dają się cyklicznie spermutować tak, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg niemalejący.

Sytuacja jeszcze trudniejsza. Wyrażenie $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1$ ma trochę więcej symetrii. Pozostaje niezmienione nie tylko przy cyklicznej permutacji liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , ale także przy jednoczesnej zamianie x_2 z x_5 i x_3 z x_4 . Ogólniej, gdyby liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 umieścić w wierzchołkach pięciokąta foremnego, to dane wyrażenie nie zmienia się przy dowolnej izometrii (jest ich 10) tego pięciokąta. Innymi słowy, mając dane liczby w wierzchołkach pięciokąta, możemy dać przepis na uzyskanie „legalnej” permutacji tych liczb: wybierz x_1 dowolnie, za x_2 weź dowolnego sąsiada x_1 , a dalej już nie masz wyboru – musisz posuwać się po obwodzie pięciokąta.

A teraz kilka prostych ćwiczeń, Drogi Czytelniku.

- 1) Uzasadnij, że w kontekście wyrażenia $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1$, **bez szkody dla ogólności** możemy założyć, że $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
- 2) Uzasadnij, że (w tym samym kontekście) jeżeli x_1 jest najmniejszą z liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , to wcale nie możemy, **bez szkody dla ogólności**, zakładać, że $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
- 3) Uzasadnij, że w kontekście wyrażenia $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$ ($n \geq 3$), założenie $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ odbywa się **bez szkody dla ogólności** przy n nieparzystym, natomiast dla n parzystego założenia tego poczynić nie można.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl