

SPIS TREŚCI NUMERU 11 (330)

Dlaczego kot Schrödingera
ląduje na czterech łapach?

*Marie Ericsson
Erik Sjöqvist*

str. 1

Suwanie wektora po krzywych

Marek Kordos

str. 2

Polowanie na jelenia
i równowagi Nasha

Jacek Mięksiz

str. 4

Liczby Stirlinga
a skoki narciarskie

Adam Woryna

str. 6

Mała Delta

str. 8

Dlaczego samolot lata? (II)

*Grzegorz Wrochna
Piotr Zalewski*

str.10

Aktualności
(nie tylko) fizyczne

str.12

Zadania

str.12

O pewnej trudności
w rysowaniu odcinków

Krzysztof Oleś

str.13

Obiektywy fotograficzne

Tomasz Kwast

str.14

Klub 44

str.15

Patrz w niebo

str.16

Listopad

str.16

Gammalimatias

str.17

**W następnym numerze:
Zrób to sam**

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim

<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delt*

można znaleźć w portalu Eduseek

<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Andrzej Hrynkiewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior

Zbigniew Marciniak
Krzysztof Maślanka

Janusz Matkowski
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda

Michał Różyczka
Konrad Rudnicki

Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk

Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Ewa Czuchry
Krystyna Kordos – sekr. red.

Marek Kordos – red. nac.

Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Urszula Marciniak

Anna Rudnik
Witold Sadowski
Joanna Udalska
Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa

tel. 853-59-61, 55-33-216

BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano

w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.

w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**

Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 122640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na I kwartał 2002 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII – na I kwartał roku następnego,

do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,

do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,

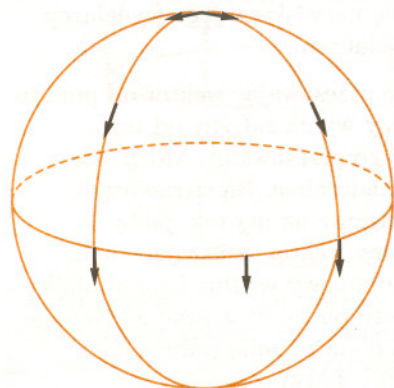
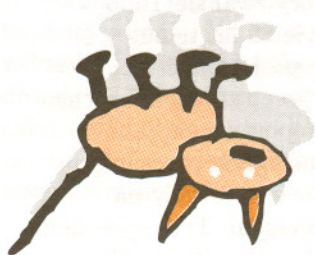
do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Dlaczego kot Schrödingera ląduje na czterech łapach?

Marie ERICSSON

Erik SJÖQVIST



Koty trzymane do góry nogami i upuszczone lądują niemal zawsze na czterech łapach. Nurkowie potrafią wykonywać manewry obrotowe bez żadnych początkowych momentów pędu. Satelity mogą zmieniać swą orientację bez zewnętrznego wpływu. Jak to im się udaje? Odpowiedź kryje się w holonomii, obrocie odbywającemu się bez lokalnej zmiany opartej na działaniu sił zewnętrznych.

Holonomię łatwo jest zademonstrować na przykładzie wektora. Jeśli bowiem wektor styczny do sfery przemieścimy równoległe wzdłuż krzywej zamkniętej na sferze, tzn. utrzymamy jego orientację w stosunku do promienia sfery, to po powrocie do punktu początkowego wektor wskazywać będzie inny kierunek niż początkowo. W ten sposób bez żadnej zmiany wektor „rotuje globalnie”. Kąt obrotu (kąt holonomii) jest zależny tylko od krzywizny powierzchni, a dokładniej: jest równy kątowi bryłowemu, jaki wycina promień wodzący poruszającego się punktu. W ten sposób można również interpretować skręt wahadła Foucault jako swoistą miarę krzywizny Ziemi.

Kąty holonomii są również charakterystyczną cechą mechaniki kwantowej, jak zostało to odkryte w 1984 roku przez M.V. Berry’ego. Wykazał on między innymi, że cząstki o spinie połówkowym (a w istocie każdy dwupoziomowy system) po obiegnięciu zamkniętej krzywej pod wpływem wolno rotującego pola magnetycznego osiągają fazę holonomiczną równą *połowie* kąta bryłowego wyciętego przez kierunek spinu. Ta tzw. faza geometryczna może być wyjaśniana przez przesunięcie równoległe wektora po sferze, tak jak na rysunku. Analogia z przesunięciem wektora jest jednak niekompletna, gdyż czynnik $1/2$, stojący przed miarą kąta bryłowego, jest charakterystyczną cechą kwantową, która nie znalazła klasycznego wyjaśnienia. Ogólnie, faza geometryczna dla jakiegokolwiek wartości spinu jest iloczynem tego spinu i kąta bryłowego, a zatem widać jej zależność od wielkości czysto kwantowej.

Fazy geometryczne próbuje się ostatnio wykorzystać w komputerach kwantowych. W komputerze takim zamiast klasycznych bitów, tzn. liczb 0 lub 1, mamy kwantowe układy dwupoziomowe (np. atom o jednym stanie wzbudzonym – wtedy „poziomami” są: stan podstawowy $|0\rangle$ i stan wzbudzony $|1\rangle$). Układ kwantowy nie musi znajdować się tylko w stanie $|0\rangle$ albo $|1\rangle$, tzn. być w stanie podstawowym albo wzbudzonym, ale może także znajdować się jednocześnie w dwóch stanach, np. w superpozycji „ $|0\rangle + |1\rangle$ ”. To, razem z możliwością korelacji qubitów, powoduje, że stan wejściowy N qubitów może składać się z 2^N różnych stanów kwantowych. To z kolei umożliwia prowadzenie 2^N -wymiarowych obliczeń równoległych.

Jednakże takie skorelowane stany są bardzo wrażliwe na szum zewnętrzny, który może usunąć korelację pomiędzy qubitami, a także zredukować qubity do zwykłych bitów, przez co traci się równoległość obliczeń. Ostatnio wysunięto i zastosowano pomysł wykorzystania fazy geometrycznej do zwalczania szumów w jądrowym rezonansie magnetycznym. O zjawisko to oparte są obiecujące systemy prowadzenia obliczeń kwantowych, w których qubitami są jądra atomowe o spinie $1/2$ umieszczone w zewnętrznym polu magnetycznym. W ten sposób wygenerowano tzw. *bramkę kontrolowanego przesunięcia fazy*. Wykorzystano przy tym oddziaływania między spinami pary jąder, stanowiących qubity, w ten sposób, że geometryczna faza jednego qubitu zależała od stanu drugiego qubitu. Dobierając odpowiednią fazę przesunięcia, uzyskujemy bramkę kontrolowanego zaprzeczenia C-NOT, o której można przeczytać w numerze majowym *Delty*.

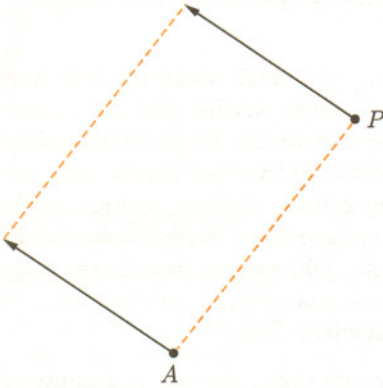


Przyczyny, dla których faza geometryczna stała się bardzo popularna od 1984 roku, to przede wszystkim uniwersalność pojęcia fazy występującej nie tylko w kwantowej, ale i klasycznej mechanice, piękno geometrycznej pamięci w ewolucji systemu, a także fakt, że przez długi czas nie dostrzegano wyraźnie tego pojęcia, choć mechanika kwantowa jest wśród nas nie od dziś...

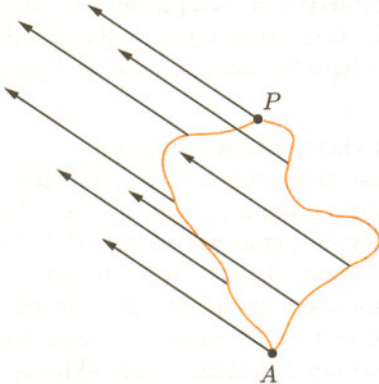
Suwanie wektora po krzywych

Marek KORDOS

Kiedy w szkole na lekcjach geometrii mówi się o przesunięciu równoległym wektora,



to nic nie mówi się o tym, jak ma się go przesunąć ze starego położenia w nowe. Ale można byłoby wyobrazić sobie, że rysujemy jakąś linię od A do P i po niej powolutku przesuwamy wektor. Nietrudno wtedy zauważyć, że wynik będzie taki sam, niezależnie od tego, jaką trasę przesuwania obierzemy.

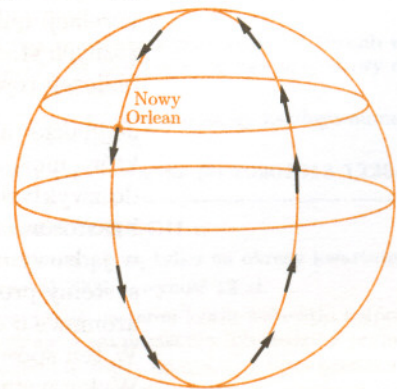


Sytuacja się komplikuje, gdy chcemy przesuwać wektor po jakiejś zakrzywionej powierzchni, np. po powierzchni kuli, walca czy stożka. Wydaje się, że do wyboru są dwie niedogodności. Jeśli bowiem przesuwany wektor będzie w każdym swoim położeniu miał ten sam kierunek, to – na ogół – bardzo prędko zacznie on mocno odstawać od powierzchni. Jeśli z kolei będziemy go suwać po powierzchni, to – znów na ogół i znów bardzo prędko – zmieni on kierunek, więc cóż to za równoległe przesuwanie?

Ktoś bardzo precyzyjny może powiedzieć, że sprzeczność tkwiła od razu w postawieniu problemu: jeśli bowiem powierzchnia jest zakrzywiona, to przecież żaden wektor i tak nie może na niej leżeć. Tu jednak matematycy „od zawsze” mieli wspólne zdanie. Zamiast wektora leżącego na powierzchni rozpatrywali wektory leżące w płaszczyźnie stycznej do powierzchni (dla płaszczyzny to wszystko jedno – prawda?). Można powiedzieć, że decydujemy się na wektory najbardziej leżące na powierzchni, jak to jest tylko możliwe.

Natomiast problem dobrego określenia przesuwania równoległego wektorów po powierzchniach długo czekał na jednoznaczne rozstrzygnięcie. Przyjęto w końcu pomysł Włocha, który zwał się Tulio Levi-Civita, a było to zaledwie 85 lat temu. Levi-Civita proponował, aby postępować tak. Interesować się będziemy tylko „poziomym” ruchem wektora, czyli będziemy postępowali tak, jakby po małym, rzeczywiście równoległym przesunięciu wektora został on prostopadle zrzutowany na płaszczyznę styczną do powierzchni. Tym sposobem jest on najbardziej równoległy, jak to tylko dla wektorów stycznych do powierzchni jest możliwe, na tyle równoległy, na ile mu powierzchnia pozwala. Takie przesunięcie nazywa się nazwiskiem jego wynalazcy lub przesunięciem absolutnym.

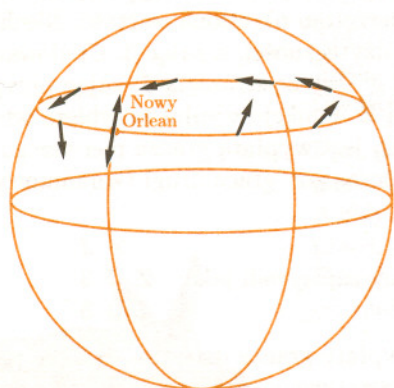
I wtedy okazuje się, że przesuując wektor od punktu do punktu otrzymujemy wynik zależny od tego, wzdłuż której krzywej go przesuujemy. Można się o tym przekonać doświadczalnie. Na sferze (czyli powierzchni kuli) – patrzmy na nią tak, jakby to był globus – przesuujemy wektor wskazujący nam (ziemski) kierunek południowy wzdłuż 90. południka długości zachodniej, a to po to, by zacząć od Nowego Orleanu (który ma na dodatek miłą północną szerokość 30° , czyli $\pi/6$). Łatwo zauważyć, że przesuwany i doginany wektor będzie stale wskazywał (ziemskie) południe, aż do chwili, gdy osiągnie biegun południowy, by dalej (już na 90. wschodnim południku) wskazywać konsekwentnie północ, aż do bieguna północnego, gdzie zacznie wskazywać południe i powróci do Nowego Orleanu w takim samym położeniu, jak był na starcie.



Taką własność mają linie najmniej krzywe na powierzchni – czy jak kto woli: najbardziej proste. My zresztą w codziennej praktyce takie właśnie linie na Ziemi nazywamy prostymi. Np. linia kolejowa łącząca Warszawę z Białymstokiem jest na większości swojej długości prosta właśnie w tym sensie. Oczywiście południki są też w tym właśnie sensie proste. Aby nie pisać ciągle, że „w tym sensie” matematycy mają na takie linie specjalną nazwę: to są **geodezyjne**. Jak poznać się geodezyjną? Jednym ze sposobów jest

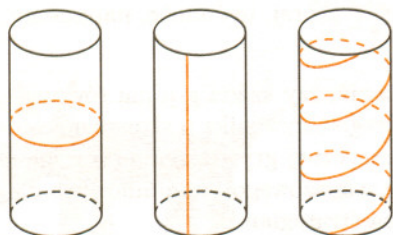
patrzenie, czy wektor przesuwany wzdłuż tej linii tworzy stale ten sam kąt ze styczną do tej linii.

Spróbujmy teraz przesunąć ten sam wektor wzdłuż 30. równoleżnika. Widzimy (jeśli faktycznie przeprowadzamy to doświadczenie na globusie, a nie tylko w myślach), że wektor – początkowo tworzący ze styczną do tego równoleżnika kąt prosty – coraz bardziej odstaje. Na 90. wschodnim południku wskazuje już wschód (albo zachód – stronę przeciwną do tej, w którą go przesuwamy), a po przemierzeniu całego równoleżnika ma kąt zmieniony aż o π , czyli o 180° , a więc wskazuje północ! Przy innych równoleżnikach zmiana kąta będzie, oczywiście, inna.

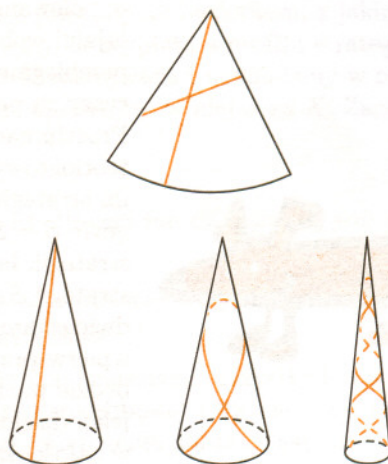


Tempo zmiany kierunku wektora przesuwanego wzdłuż jakiejś krzywej na powierzchni nazywa się krzywizną geodezyjną tej krzywej. Geodezyjne mają więc krzywiznę geodezyjną stale równą zero.

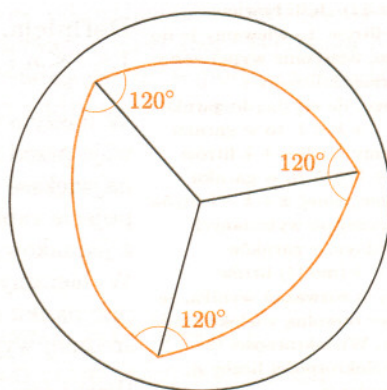
Bardzo interesujące jest spostrzeżenie, że krzywizna geodezyjna nie zmienia się przy wyginaniu powierzchni – byle jej tylko nie rozciągać przy tym ani nie skraćć materiału, z którego powierzchnia jest wykonana, czyli mówiąc ściśle: nie zmieniać długości żadnej z krzywych na powierzchni. Jest z tego morał pozwalający znajdować geodezyjne na powierzchniach rozwijalnych (czyli dających się, po ewentualnych rozcięciach położyć na płaszczyźnie). Mianowicie, ponieważ na płaszczyźnie geodezyjnymi są proste (jako faktycznie najmniej krzywe), to trzeba zobaczyć, co z nich po zwinięciu powstaje. Na walcu otrzymujemy przeto trzy rodzaje geodezyjnych: okręgi, proste i śruby.



Na stożku są to również proste, ale także pętle, których liczba samoprzecięć zależy od kąta rozwarcia stożka.



Karol Gauss ponad półtora wieku temu odkrył, że na powierzchniach jednakowych w każdym punkcie (jak sfera czy siodło), trójkąt utworzony przez łuki geodezyjnych ma pole proporcjonalne do różnicy między sumą kątów (daną w mierze łukowej) a π . Dla płaszczyzny współczynnik proporcjonalności wynosi zero, co czyni to odkrycie nieprzydatnym. Ale, na przykład, na sferze geodezyjnymi są najmniej krzywe okręgi, czyli okręgi wielkie (mające środek w środku sfery); współczynnikiem proporcjonalności, o której mówi Gauss, jest odwrotność kwadratu promienia sfery. Tak więc chcąc znaleźć pole trójkąta utworzonego na sferze o promieniu R przez łuki jej okręgów wielkich, wystarczy obliczyć sumę jego kątów, odjąć od tego π i pomnożyć przez R^2 .



Jest to akurat wielkość kąta bryłowego, którego przecięciem ze sferą jest ten trójkąt. Mam nadzieję, że każdy z Czytelników potrafi podać przepis na znalezienie pola czworo- czy pięciokąta utworzonego na sferze z łuków okręgów wielkich.

Krzywizna geodezyjna pozwoliła uogólnić ten sposób na dowolne krzywoliniowe wielokąty na powierzchniach, nazywa się to twierdzeniem Gaussa-Bonneta i powstało jeszcze w XIX wieku, przy innym określeniu krzywizny geodezyjnej. Tyle, że to już zupełnie inna bajka...

Polowanie na jelenia i równowagi Nasha

Jacek MIĘKISZ



Rozwiązanie zadania M 970.

a) Kolejne zawartości 5- i 3-litrowego garnka mogą być następujące:

(0,0), (0,3), (3,0), (3,3), (5,1), (0,1), (1,0), (1,3), (4,0).

b) n musi być podzielne przez $d = (k, l)$ (największy wspólny dzielnik). Jasne jest, że warunek ten jest konieczny, ponieważ po każdej czynności liczba litrów wody w każdym garnku jest podzielna przez d . Załóżmy, że $d|n$. Przyjmijmy $k < l$. Zauważmy, że jeśli możemy odmierzyć x litrów ($x \in \mathbb{Z}$), to możemy odmierzyć również $x + k \pmod{l}$. Jeśli bowiem odmierzyliśmy x litrów, to wlewamy je do garnka l -litrowego, następnie wypełniamy wodą z kranu garnek k -litrowy i przelewamy z niego, ile się da, do garnka l -litrowego. Jeśli $x + k < l$, to w garnku l -litrowym będziemy mieli $x + k$ litrów wody, jeśli zaś $x + k \geq l$, to w garnku k -litrowym będziemy mieli $x + k - l$ litrów wody. Tak czy inaczej po wykonanych czynnościach w jednym z garnków będziemy mieć $x + k \pmod{l}$ litrów wody. Z powyższych rozważań wynika, że możemy odmierzyć dowolną wielokrotność liczby k modulo l . Wielokrotności te stanowią zbiór wielokrotności liczby d , co dowodzi tezy zadania.

Odpowiedź na pytanie ze strony 13.

I tak, i nie... W przypadku rodzin nieskończonych należy dodatkowo założyć zwartość (czyli w przypadku \mathbb{R}^2 : domkniętość i ograniczoność) elementów rozważanej rodziny.

W przeciwnym przypadku twierdzenie jest fałszywe – wystarczy przymyśleć rodzinę półpłaszczyzn: $\{P_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq n, y \in \mathbb{R}\}; n \in \mathbb{N}\}$. Przykład na istotność założenia domkniętości pozostawiamy Czytelnikowi...

W 1762 roku Jean Jacques Rousseau napisał: „Myśliwi biorący udział w polowaniu na jelenia są w pełni świadomi, że aby go upolować, muszą być lojalni wobec siebie i pozostać na swoich posterunkach. Jeżeli jednak zając przebiegnie w pobliżu jednego z nich, nie ma wątpliwości, że myśliwy ten ruszy za pewną zdobyczą, doprowadzając do fiaska polowanie na jelenia.” Przetłumaczymy to na język współczesnej teorii gier. Aby sprecyzować model teoriogrowy, musimy określić zbiór graczy $I = \{1, \dots, n\}$, zbiór dostępnych im strategii $S_i = \{1, \dots, m_i\}$, $i = 1, \dots, n$ oraz funkcje wypłat $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$; wypłata każdego gracza zależy nie tylko od jego strategii, lecz również od strategii wszystkich jego oponentów, to znaczy profilu strategii S . W naszym przypadku każdy z dwóch myśliwych ma do dyspozycji dwie strategie: jelenia (**J**) albo zająca (**Z**). Aby podać funkcję wypłat, musimy wprawdzie przypisać obu nieszczęsnym zwierzętom określoną wartość. Niech jeleni będzie wart 10 jednostek ekonomicznej użyteczności, a zając 3. Upolowany jeleni dzielony jest równo między dwóch graczy ze strategią **J**, zając przypada w całości każdemu graczowi ze strategią **Z**. Funkcja wypłat przybiera wtedy postać macierzy 2×2 , której element u_{ij} jest wypłatą gracza pierwszego (wierszowego) grającego strategią i , podczas gdy gracz drugi (kolumnowy) gra strategią j :

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ co będziemy zapisywali jako } \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \mathbf{Z} \ \mathbf{J} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{Z} \\ \mathbf{J} \end{array} & \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{array} \end{array}$$

Gra jest symetryczna, co oznacza, że wypłaty gracza drugiego są dane przez macierz transponowaną do U . Gra jest rozgrywana w ten sposób, że gracze jednocześnie ogłaszają swoje strategie i dostają odpowiednie wypłaty. Macierz wypłat jest znana każdemu graczowi, który wie, że każdy z jego oponentów ją zna, wie, iż jego oponenti wiedzą, że on ją zna...

Pojawia się nagłe pytanie: Jak grać? John Nash zaproponował następującą definicję równowagi. W równowadze Nasha, przy ustalonych strategiach przeciwników, żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić swojej strategii. Formalnie:

Definicja. $X = (X_1, \dots, X_n) \in S$ jest **równowagą Nasha**, jeśli dla każdego $1 \leq i \leq n$ i $A \in S_i$ $u_i(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \geq u_i(X_1, \dots, A, \dots, X_n)$, gdzie $X_i \in S_i$.

W naszym przykładzie mamy dwie równowagi Nasha: (**J, J**) i (**Z, Z**). Stajemy więc przed problemem wyboru jednej z nich. Pierwsza równowaga daje nam największe wypłaty, druga natomiast jest dominująca ze względu na ryzyko – pojęcie zaproponowane przez Seltena i Harsanyi'ego. Zakładamy, że przeciwnik z jednakowym prawdopodobieństwem 1/2 zagra jedną z dwóch strategii. Wybieramy strategię, która daje nam większą wartość średnią. W naszym przypadku średnia wypłata dla strategii **Z** wynosi $(3 + 3)/2$ i jest większa od średniej wypłaty dla strategii **J** równej $(5 + 0)/2$.

Warto wspomnieć, że za swój wkład w teorię gier John Nash, Reinhard Selten i John Harsanyi zostali uhonorowani w 1994 roku Nagrodą Nobla z ekonomii.

Ostatnio zostało zaproponowanych kilka modeli dynamicznych, w których tylko niektóre równowagi Nasha danej gry są stabilnymi punktami stacjonarnymi, a więc zostają wybrane. Badaniem dynamicznego dochodzenia do równowag Nasha zajmuje się ewolucyjna teoria gier, o której, być może, napiszemy w przyszłości.

Wnikliwy Czytelnik zada oczywiście pytanie, czy każda gra ma równowagę Nasha. W odpowiedzi poprosimy wnikliwego Czytelnika o skonstruowanie dwóch gier niemających równowag Nasha: symetrycznej gry z trzema strategiami oraz gry niesymetrycznej (wypłaty dla gracza wierszowego i kolumnowego dane są przez dwie niezależne macierze) z dwiema strategiami.

Aby tradycji matematycznej stało się zadość i wystąpiło *twierdzenie o istnieniu*, wprowadźmy strategię mieszane. Strategia mieszana i -tego gracza to rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze strategii czystych S_i , czyli m_i nieujemnych liczb σ_{ij} sumujących się do 1; σ_{ij} jest prawdopodobieństwem, z jakim i -ty gracz zagra strategią j -tą. Przyjmujemy, że wypłata z profilu strategii mieszanych dana jest przez jej wartość oczekiwaną i uogólniamy w oczywisty sposób definicję równowagi Nasha, podstawiając w niej σ za X . Zachodzi wtedy następujące

Twierdzenie

Każda gra ze skończoną liczbą graczy i strategii ma co najmniej jedną równowagę Nasha w strategiach mieszanych.

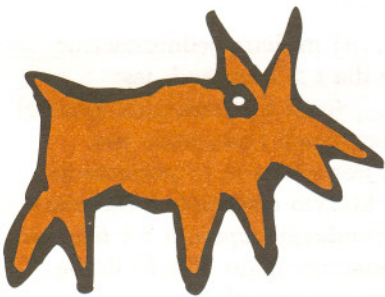
Dowód wykorzystuje jedno z twierdzeń o punkcie stałym (równowaga Nasha jest najlepszą odpowiedzią na równowagę Nasha).

Ambitnego Czytelnika poprosimy teraz o znalezienie wszystkich równowag Nasha dla dowolnej symetrycznej gry dwuosobowej z dwiema strategiami. Udowodni on w ten sposób powyższe twierdzenie dla tej klasy gier.

Przenieśmy się teraz z osiemnastowiecznego lasu do współczesnego miasta, gdzie dwóch pracowników właśnie zasiadło do wykończenia wspólnego projektu. Każdy z nich może albo pracować, $X_i = 1$, albo oszukiwać, czyli pozorować pracę, $X_i = 0$, $i = 1, 2$; praca wymaga inwestycji 3 jednostek naszej użyteczności. Przychód z wykonanego projektu $4(X_1 + X_2)$ jest dzielony równo między partnerów. Powyższa gra ma następujące przedstawienie macierzowe:

$$U = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Jedyną równowagą Nasha jest profil $(0, 0)$. Zauważmy, że w przypadku pracy obu partnerów ich wypłata jest większa. Profil $(1, 1)$ nie jest jednak równowagą Nasha. Staramy się więc działać racjonalnie, grać strategią w jedynej równowadze Nasha i efektem tego jest obustronny brak korzyści. Powyższa gra znana jest pod nazwą Dylematu Więźnia. Aby zrozumieć występowanie zachowań altruistycznych w układach rywalizujących jednostek, zaproponowano ostatnio proste modele dynamiczne, w których stabilne punkty równowagi nie są równowagami Nasha. Przeszliśmy więc od problemu wyboru jednej z równowag Nasha do problemu znalezienia równowagi nie będącej równowagą Nasha. Analiza dynamicznych strategii prowadzących do współpracy w powtarzanej grze typu Dylemat Więźnia wymaga oddzielnego omówienia.



Nietrudno domyślić się, skąd pochodzi nazwa Dylemat Więźnia: jeśli dwóch bandytów „pójdzie w zaparte”, to zostaną uniewinnieni, jeśli jeden z nich się przyzna, a drugi nie, to pierwszy z nich będzie miał silnie złagodzoną karę, a jeśli obaj, to ich kary będą tylko nieco złagodzone.



Rozwiązanie zadania M 971.

a) Kolejne zawartości 10-, 7- i 3-litrowego garnka mogą być następujące:

$(10,0,0)$, $(7,0,3)$, $(7,3,0)$, $(4,3,3)$, $(4,6,0)$, $(1,6,3)$, $(1,7,2)$, $(8,0,2)$, $(8,2,0)$, $(5,2,3)$.

b) $(k, l) | n \wedge k + l \geq n$. Możemy bez straty ogólności przyjąć $2n \geq l \geq k$. Niech X będzie zbiorem takich trójek liczb całkowitych (a, b, c) , że istnieje procedura przelewania prowadząca do sytuacji, w której w garnku $2n$ -, l - i k -litrowym znajduje się odpowiednio a , b i c litrów zupy. Niech $d = (k, l)$. Za pomocą prostej indukcji można wykazać, że jeśli $(a, b, c) \in X$, to co najmniej dwie liczby a, b, c są podzielne przez d . Wynika z tego łatwo, że jeśli na końcu jedna z liczb a, b, c ma być równa n , to musi być $d | n$.

Załóżmy, że $(k, l) | n$ i $n \leq k + l \leq 2n$. Udowodnimy, że jeśli $(2n - x, x, 0) \in X$, to również $(2n - y, y, 0) \in X$, gdzie $y = x - k \pmod{l}$. Jeśli $x \geq k$, to wykonujemy ciąg czynności:

$$(2n - x, x, 0) \rightarrow (2n - x, x - k, k) \rightarrow (2n - x + k, x - k, 0).$$

Jeśli natomiast $x < k$, to postępujemy według schematu:

$$(2n - x, x, 0) \rightarrow (2n - x, 0, x) \rightarrow (2n - l - x, l, x) \rightarrow$$

$$\rightarrow (2n - l - x, l - (k - x), k) \rightarrow (2n - l - x + k, l + x - k, 0)$$

(skorzystaliśmy po drodze z nierówności $k + l \leq 2n$). Ponieważ $(2n, 0, 0) \in X$, więc z powyższego wynika, że $(2n - x, x, 0) \in X$, gdzie x jest dowolną wielokrotnością liczby k modulo l . W szczególności $(n + k, n - k, 0) \in X$, co pociąga za sobą $(n, n - k, k) \in X$. To dowodzi tezy zadania.



Liczby Stirlinga a skoki narciarskie

Adam WORYNA



Przed niespełna rokiem mieliśmy wszyscy okazję podziwiać fenomenalne skoki Adama Małysza na dużej i średniej skoczni w Lahti. Gdy oglądałem popisy naszej gwiazdy, nasunął mi się następujący problem: ilu średnio skoczków, podczas jednej takiej serii skoków, zdobędzie tytuł lidera. Liderem, w każdym momencie konkursu, nazwiemy zawodnika, który do tego momentu uzyskał najlepszy wynik. Zawodnicy, zgodnie z regulaminem, startują kolejno według ustalonego wcześniej porządku i każdy z nich wykonuje jeden skok. Ponadto przyjmujemy, że uzyskane wyniki są różne oraz każda kolejność końcowa jest jednakowo prawdopodobna (nie ma faworytów).

Niech $n \geq 1$ będzie liczbą zawodników biorących udział w konkursie. Kluczem do rozwiązania postawionego problemu jest obliczenie dla każdego $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ prawdopodobieństwa zdarzenia, że podczas całego konkursu dokładnie k skoczków zdobędzie tytuł lidera. Zgodnie z definicją, zawodnik z pierwszym numerem startowym na pewno zdobędzie tytuł lidera. Stąd liczba liderów w konkursie będzie na pewno większa od zera. Możemy przyjąć, że każdego skoczka ocenia się w skali od 1 do n punktów. Ponieważ uzyskane wyniki są różne, więc końcowa klasyfikacja skoków jest pewną permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ określoną następująco: i -ta pozycja tej permutacji to ocena zawodnika z i -tym numerem startowym ($i = 1, \dots, n$).

Dla dowolnej permutacji w_1, \dots, w_n zbioru $\{1, \dots, n\}$ możemy jednoznacznie określić następujący ciąg wskaźników: $l_1 = 1$ oraz dla $i > 1$ wyraz l_i jest najmniejszym wskaźnikiem, dla którego $w_{l_i} > w_{l_{i-1}}$ (o ile taki wskaźnik istnieje). Długość tak określonego ciągu zależy od danej permutacji i na pewno jest nie większa niż n . Zauważmy, że jeżeli długość ta jest równa k , to permutacja przedstawia końcową klasyfikację w konkursie, w którym dokładnie k skoczków miało tytuł lidera. Permutację taką nazwiemy *permutacją stopnia n z k liderami*. Dla dowolnych liczb całkowitych $n \geq 1$ i $k \geq 0$ oznaczmy przez $S(n, k)$ liczbę wszystkich permutacji stopnia n z k liderami. Z wcześniejszych rozważań wynika, że

$$(1) \quad S(n, k) = 0, \quad \text{jeżeli } k = 0 \text{ lub } k > n$$

oraz

$$(2) \quad S(1, 1) = 1.$$

Założmy więc dalej, że $n \geq 2$ i $1 \leq k \leq n$. Podzielmy wszystkie permutacje stopnia n z k liderami na dwie rozłączne klasy: A i B . Do klasy A zaliczymy permutacje, w których na pierwszej pozycji znajduje się jedynek, a do klasy B – wszystkie pozostałe permutacje.

Policzmy teraz permutacje w klasie A . Zauważmy, że jeżeli w każdej takiej permutacji usuniemy liczbę 1 (znajdującą się na pierwszej pozycji), a następnie każdą z pozostałych liczb zmniejszymy o 1, to uzyskamy pewną permutację stopnia $n - 1$ z $k - 1$ liderami. Co więcej, powyższe przekształcenie wyznacza bijekcję między zbiorem permutacji klasy A a zbiorem permutacji stopnia $n - 1$ z $k - 1$ liderami. Stąd klasa A składa się z $S(n - 1, k - 1)$ permutacji.

Policzmy z kolei permutacje w klasie B . W tym celu dla dowolnie ustalonego $s \in \{2, \dots, n\}$ policzmy te permutacje klasy B , w których jedynek znajduje się na pozycji s -tej. Zauważmy, że jeżeli w takiej permutacji usuniemy jedynek, a następnie każdą z pozostałych liczb zmniejszymy o 1, to otrzymamy pewną permutację stopnia $n - 1$ z k liderami (usunięta jedynek nie była w tym przypadku oceną lidera). Podobnie jak poprzednio, powyższe przekształcenie wyznacza bijekcję między permutacjami klasy B , w których jedynek znajduje się na s -tej pozycji, a permutacjami stopnia $n - 1$ z k liderami. Ponieważ liczba s może przyjmować $n - 1$ wartości, więc klasa B składa się z $(n - 1) \cdot S(n - 1, k)$ permutacji. Stąd otrzymujemy wzór rekurencyjny

$$(3) \quad S(n, k) = (n - 1) \cdot S(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1) \quad \text{dla } n \geq 2 \text{ i } 1 \leq k \leq n.$$



Rozwiązanie zadania M 972.

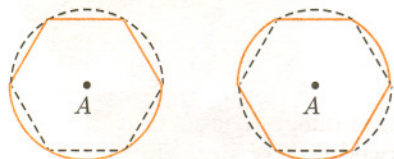
Liczby $k = 7$ i $l = 12$ są dobre.

Można to łatwo sprawdzić, znajdując wszystkie możliwe sytuacje (jest ich 20) i wykazując, że znaleziony zbiór jest zamknięty ze względu na wszystkie operacje przelewania (najlepiej narysować graf wszystkich możliwych sytuacji i połączeń pomiędzy nimi). Wśród wszystkich możliwych sytuacji nie ma takiej, w której w jednym z garnków jest 8 litrów zupy.

Uwaga: Ciekawym zadaniem wydaje się znalezienie warunku koniecznego i dostatecznego w przypadku ogólnym. Ja odpowiedzi nie znam. A może Czytelnicy rozwiążą ten problem?

Czytelnicy piszą

Oto para zbiorów wypukłych, których równoległe cięciwy poprowadzone przez dany punkt są równej długości.



Jest to jeden z przykładów nadesłanych nam przez Pana Mariusza Nawłatyń (patrz *Delta* 3 i 8/2001). Dziękujemy.

Redakcja

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia, że podczas całego konkursu dokładnie k skoczków zdobędzie tytuł lidera, wynosi

$$\frac{S(n, k)}{n!},$$

gdzie $S(n, k)$ jest określone rekurencyjnie równościami (1), (2), (3). Poszukiwana wartość oczekiwana liczby liderów jest równa

$$(4) \quad \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n i \cdot S(n, i).$$

Równości (1), (2), (3) generują tzw. *liczby Stirlinga pierwszego rodzaju* (posługuję się tu definicją pochodzącą z książki „Matematyka konkretna” autorstwa: R. L. Graham, D. Knuth, O. Patashnikov – str. 288). W literaturze matematycznej najczęściej spotyka się je przy wyznaczaniu liczby permutacji, które mają ustaloną liczbę cykli w rozkładzie na cykle lub też przy wyznaczaniu wartości współczynnika przy danej potędze x w wielomianie $W(x) = x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)$. Jak dotychczas, nie udało się znaleźć zgrabnego wzoru na te liczby. Okazuje się jednak, że mają one wiele ciekawych własności. Przede wszystkim zachodzi, oczywista niemal, równość

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n S(n, i) = n! \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Bardziej interesująca dla nas okaże się z pewnością tożsamość

$$(6) \quad \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n i \cdot S(n, i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i},$$

która stwierdza, że wartość oczekiwana liczby liderów w konkursie jest równa tzw. *n -tej liczbie harmoniczej*. Równość (6) można udowodnić metodą indukcji matematycznej. Poniżej jednak pokażę nieco inny sposób. Dla $n = 1, 2, 3, \dots$ oznaczmy przez $L(n)$ sumę (4). Dla $k = 1, 2, \dots, n$ pomnożmy przez k każdą ze stron równości (3). Dodając stronami wszystkie otrzymane w ten sposób równości, dostajemy (po zredukowaniu i skorzystaniu w pewnym momencie z (5))

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n k \cdot S(n, k) = (n-1)! + n \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot S(n-1, k) \quad \text{dla } n = 2, 3, \dots$$

Dzieląc obie strony (7) przez $n!$ dostajemy: $L(n) = 1/n + L(n-1)$ dla $n = 2, 3, \dots$, co w połączeniu z równością $L(1) = 1$ daje nam: $L(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$,

czyli tożsamość (6). Wszystkie powyższe rozważania biorą jednak w łeb, kiedy na skoczni pojawia się Adam Małysz...



Rozwiązanie zadania F 559.

W fotosferze atomy wodoru mają prędkość średnią kwadratową (pierwiastek średniego kwadratu prędkości)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ m/s},$$

gdzie μ jest masą cząsteczkową gazu. Druga prędkość kosmiczna wynosi

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}}} \approx 6,1 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Zatem średnia prędkość kwadratowa jest około 50 razy mniejsza od drugiej prędkości kosmicznej, więc większość atomów wodoru nie może wyrwać się z pola grawitacyjnego Słońca.



Rozwiązanie zadania F 560.

Grubość fotosfery jest niewielka, zatem możemy założyć jej stałą gęstość i zaniedbać zmiany przyspieszenia grawitacyjnego (spadku swobodnego). Aby fotosfera znajdowała się w równowadze, ciśnienie hydrostatyczne musi być równoważone przez ciśnienie gazu, tzn.

$$p = \rho g_{\odot} h = \rho \frac{RT}{\mu}.$$

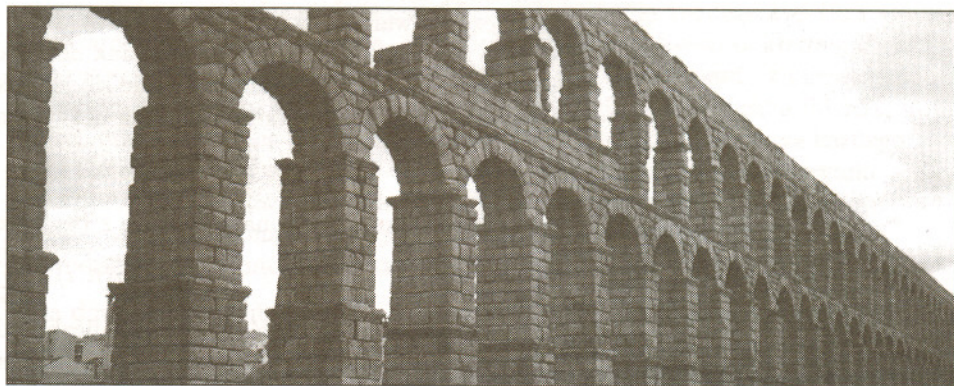
Ostatecznie

$$h = \frac{RT}{\mu g_{\odot}} \approx 1,7 \cdot 10^5 \text{ m} = 170 \text{ km}.$$

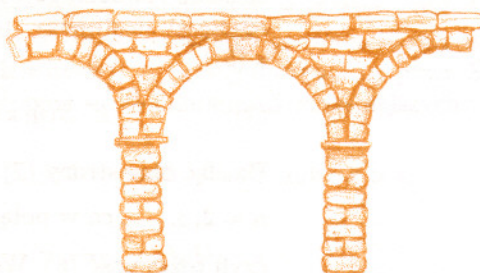


Konstrukcja łuku

W czasie jednej z wakacyjnych wypraw miałam okazję zobaczyć stary – pochodzący z czasów rzymskich – akwedukt. W przewodniku przeczytałam, że został on zbudowany z kamiennych bloków bez użycia zaprawy, ale początkowo nie zwróciłam na to dużej uwagi. Na miejscu zobaczyłam coś takiego:



W powiększeniu:



Część kamieni jest ułożona w kształt łuku. Najciekawsze jest to, jak cała konstrukcja trzyma się stabilnie razem, a kamienie z górnej części łuku nie spadają. Rozrysowanie na kartce papieru działających sił ciężkości, nacisku i reakcji pozwala wyjaśnić sytuację.

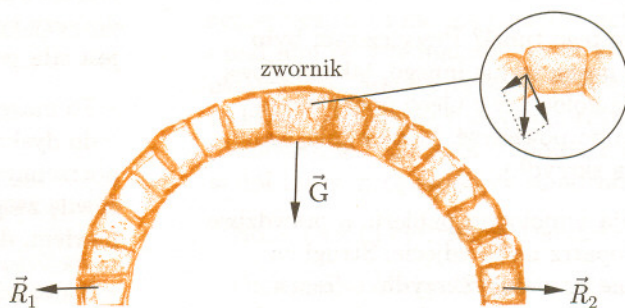
Ale po kolei. Możemy sami wykonać pewne doświadczenie, które obrazuje rozłożenie sił w łuku. Połóżmy na stole pasek kartonu, raz wygięty w łuk, a potem dodatkowo podparty po bokach książkami.



Naciskając od góry na niczym nie podparty pasek powodujemy rozsuwanie się brzegów. Podparcie książkami pomaga, dla sił nacisku z rozsądnego przedziału (nie powodujących deformacji kartonu) konstrukcja utrzymuje swoją strukturę.



Podobny mechanizm sprawia, że kamienne bloki w łuku trzymają się razem. Konstrukcja łuku opiera się przede wszystkim na klinach – to kształt kamieni powoduje, że całość trzyma się raczej stabilnie. Siłę ciężkości działającą na każdy blok możemy rozłożyć na składowe styczne i prostopadłe do krawędzi. Składowa prostopadła przenosi ciężar na następne bloki. Siły styczne do krawędzi powodują ściskanie się bloków, a więc także zacieśnianie się całej konstrukcji. Kształt bloków zabezpiecza przed zdeformowaniem się budowli w tym kierunku. Działające w przeciwnych kierunkach siły wywierane przez ściśnięty materiał przy podstawie łuku mają kierunek radialny na zewnątrz. Działanie pionowej siły ciężkości zostało przeniesione na poziome siły reakcji. Często więc buduje się mosty łukowe nad rzekami o grząskich brzegach.

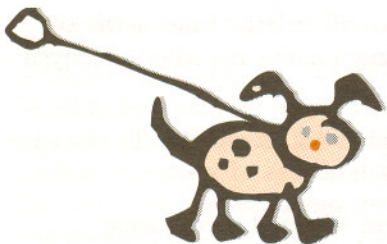


Owe naprężenia mogą spowodować nawet zawalenie się konstrukcji, dlatego pojedyncze łuki, np. łuki triumfalne, mają bardzo solidne podparcia. W akweduktach, gdy mamy szereg łuków obok siebie, siły te się znoszą i wystarczają silne podparcia na końcach każdego rzędu.

Konstrukcję łuku obserwujemy także w nowszych budowlach, przede wszystkim mostach. Są one zazwyczaj zbudowane z cegieł połączonych zaprawą. Cegły doskonale nadają się do konstrukcji takiego typu jak łuk, bowiem są one bardzo odporne na ściskanie. Do czego potrzebna jest zaprawa? Na pewno nie do „sklejania”, jakby się mogło wydawać na pierwszy rzut oka. Cegły mają nierówną, chropowatą powierzchnię, a więc stykają się tylko na niewielkim obszarze. Spore ciśnienie panujące w miejscach styku powoduje kruszenie się materiału. Proces ten może trwać aż do wyrównania się powierzchni, albo – co bardziej prawdopodobne – do zawalenia konstrukcji. Dla równomiernego rozłożenia nacisku cegły są więc oddzielane warstwą zaprawy.

Kamienne gązdy też są odporne na ściskanie. Trzeba je jednak obłupać i wygładzić. Odpowiednio obrobione nie wymagają dużej ilości zaprawy (a nawet wcale). Tego typu materiał był używany w czasach, gdy siła robocza była tania, dlatego obecnie korzysta się z innych materiałów. W zasadzie można by także używać bardziej miękkiej skały, np. piaskowca, dużo łatwiejszego do obróbki. Jest on jednak znacznie mniej odporny na erozję, i z czasem części zewnętrzne, wystawione na działanie czynników atmosferycznych, wykruszają się i odpadają.

Podczas budowy łuku (albo mostu) z cegły lub kamienia, używana jest specjalna konstrukcja podtrzymująca. Jest to drewniane rusztowanie o kształcie dokładnie takim samym jak mający powstać łuk. Podpiera ono konstrukcję do czasu położenia ostatniego bloku, zwanego zwornikiem. Leży on w środku łuku i łączy dwie jego części. Cała konstrukcja jest niestabilna, dopóki nie położą się tego ostatniego bloku.



Dlaczego samolot lata? (II)

Obrazki są na ostatniej stronie okładki.

– Adam, czytałeś wrześnieją „Małą Deltę”? – zagadnął mnie na przerwie Bolek.

– Tę o papierowych samolotach?

– Tak. Pamiętasz ten kawałek o tunelu hydrodynamicznym? Zrobiłem taki tunel i nawet udało mi się sfotografować przepływy. Zobacz.

– Super. Pokaż to naszemu fizykowi.

– Wiesz, dzięki temu tunelowi wreszcie zrozumiałem, dlaczego samolot lata.

– Bolek, po co ci do tego tunel? Przecież tam było wyjaśnione, że siła nośna to nic innego, jak siła oporu powietrza. Samolot leci z nieco pochylonym skrzydłem i naciska na powietrze, które z taką samą siłą musi działać na skrzydło.

– Tak to może latają samoloty z papieru, a prawdziwe zupełnie inaczej. Popatrz na to zdjęcie. Strugi za skrzydłem odchylane są w dół. Skrzydło odrzuca powietrze, podobnie jak rakietę spaliny. A z zasady zachowania pędu wynika, że jak powietrze leci w dół, to samolot do góry.

– No a jak leci poziomo?

– To wszystko jedno. Przyrost pędu równa się popędowi siły. W rakiemie też tak możesz dobrać ciąg, żeby nieruchomo zawisła. Pamiętasz ten kawałek o napędzie odrzutowym we wcześniejszym numerze? Niby nie ma nic wspólnego, ale ja ich z tej „Deltę” już znam. Jak taki kawałek wsadzili, to coś w tym musiało być.

– Bolek, ty się zastanów – wtrącił Czarek – przecież powietrze to jest PLYN, a nie odbijające się od skrzydła kulki. Chyba obaj przegapiliście najważniejszą część artykułu – tę o związku ciśnienia z prędkością. Samolot lata dlatego, że powietrze nad skrzydłem ma większą prędkość – a więc mniejsze ciśnienie, niż pod skrzydłem. To właśnie ta różnica ciśnień unosi samolot.

– Ale dlaczego prędkość nad skrzydłem ma być większa? – spytałem.

– Bo u góry skrzydło jest wypukłe. Powietrze ma dłuższą drogę do pokonania, więc musi poruszać się szybciej.

– Bzdury pleciesz – przerwał Bolek. – Włóż do rzeki zwinięty w pętlę wąż. Czy przez niego woda będzie płynęła z większą prędkością niż w rzece tylko dlatego, że ma dłuższą drogę?

– Już wiem! – coś mi błysnęło w głowie. – Nad skrzydłem powietrze porusza się szybciej, bo jest ciągnane przez niższe ciśnienie.

– Coś mi się zdaje, że wymyśliłeś *perpetuum mobile* – znów skrzytykował Bolek. – Nad skrzydłem jest niższe ciśnienie, bo powietrze porusza się szybciej, a porusza się szybciej, bo jest niższe ciśnienie. To tak jak z tym magnesem wysuniętym na kiju. Samolot będzie się poruszał, bo będzie przyciągany przez magnes, a magnes będzie się poruszał, bo jest przymocowany do samolotu.

– Ale gdyby zamiast samolotu usiąść na osle i, zamiast magnesu, do kija uwiązać marchewkę – to zadziała – podkpiwał Czarek.

– Zadziała, bo marchewka przyciąga osła, a osioł marchewki nie. Trzecia zasada dynamiki Newtona dotyczy tylko sił fizycznych, a przyciąganie marchewki jest siłą psychiczną – wyjaśnił uczenie Bolek.

– To może i samoloty latają dzięki sile psychicznej?

– do dyskusji włączył się Darek. – A drugi pilot potrzebny jest na wypadek, gdyby pierwszy miał chwilę zwątpienia? Osiołki moje – jak chcecie, to wam powiem, dlaczego NAPRAWDĘ samolot lata.

– No to powiedz, jak jesteś taki mądry.

– Samolot lata dzięki sile nośnej, która wywołana jest cyrkulacją powietrza wokół skrzydła – wyrecytował dumnie.

– Chyba ci się pokręciło z helikopterem – odparłem.

– Nic mi się nie pokręciło. Tak jest napisane w podręczniku aerodynamiki.

– On się znowu naoglądał obrazków w książkach starszego brata – pospieszył z wyjaśnieniem Czarek.

– Dobra, ale co to jest ta cyrkulacja i skąd się bierze? – spytał rzeczowo Bolek.

– Cyrkulacja to ruch okrężny powietrza. A bierze się z rozwiązań równań tak skomplikowanych, że nie macie pojęcia.

– Dobra, dobra. Równania mogą być trudne, ale jakiś sens fizyczny muszą mieć – próbowałem drażnić.

– Ja chyba nigdy nie polecę samolotem – wtrąciła Magda – skoro nikt nie wie, dlaczego on tak naprawdę lata.

W tym momencie zadzwonił dzwonek na lekcję fizyki.

– Panie psorze, Bolek zrobił świetny tunel aero-, to znaczy hydro-dynamiczny i nawet ma zdjęcia różnych przepływów!

– Pokaż, proszę. No, no! Praca na szóstkę. To teraz już wiesz, dlaczego samolot lata?

– Noo... , ja chyba wiem – bąknął niewyraźnie Bolek – ale Adam, Czarek i Darek twierdzą, że się mylę.

- A oni wiedzą?
 - Uważają, że tak, ale ja się z nimi nie zgadzam.
 - Tak naprawdę to każdy z nas ma swoją teorię – powiedziałem.
 - No proszę, cztery pomysły na latanie – to prawie jak Cyrano de Bergerac! – roześmiał się profesor – Opowiedzcie mi, proszę.
- Przedstawiliśmy więc nasze argumenty i z niepokojem czekaliśmy na werdykt profesora.
- A więc rację ma... – profesor na chwilę zawiesił głos
 - każdy z was i żaden jednocześnie.
- Popatrzyliśmy po sobie i, jedyne co było pewne, to to, że każdy z nas miał głupią minę.
- Podane przez was wyjaśnienia wzajemnie się uzupełniają. Choć każde jest poprawne, to – traktowane jako JEDYNE – może prowadzić do błędnych wniosków.
- Zacznijmy od Adama. Rzeczywiście – opór, czyli siła reakcji powietrza na siłę, z jaką nachylone w stosunku do kierunku ruchu samolotu skrzydło oddziałuje na powietrze, ma składową prostopadłą do tego kierunku – siłę nośną. Nie znaczy to jednak, że skrzydło odbija powietrze w dół jak rakietę tenisową piłki.
- Mówiłem, że Bolek nie ma racji! – nie wytrzymał Czarek.
 - Wprost przeciwnie. Bolek ma rację, bo nie tylko odwołał się do prawa zachowania, ale jeszcze sprawdził to doświadczalnie. W trakcie opływania skrzydła płyn nabiera składowej prostopadłej do kierunku ruchu samolotu. Z zasad dynamiki wynika, że jeżeli by tej składowej nie było, to siła nośna musiałaby być zerowa. Dodatkowo zdjęcia Bolka pokazują, że płyn rozpędza się i nabiera tej składowej głównie opływając skrzydło po stronie górnej.
 - Ale nie tłumaczy dlaczego – nie ustępował Czarek.
 - Twoje wyjaśnienie też nie – odparował Bolek.
 - Pochylone skrzydło „zgniata” powietrze przed (pod) sobą i rozciąga za (nad) sobą wytwarzając odpowiednio nad- i podciśnienie.
 - Czyli to ja miałem rację, a nie Czarek – ucieszyłem się – to różnica ciśnień powoduje wzrost prędkości nad skrzydłem, a nie na odwrót!
 - Obaj macie rację. To, o czym mówicie, to dwa aspekty tego samego prawa Bernoulliego, które nie jest niczym innym, jak konsekwencją zasady zachowania energii i zachowania masy. Jeżeli przepływ jest ustalony, a początkowo (przed samolotem) był jednorodny, to suma energii związanej z ruchem chaotycznym (ciśnienie statyczne) i uporządkowanym

(ciśnienie dynamiczne związane z prędkością) jest wszędzie taka sama. Tam, gdzie powietrze „musi” poruszać się z większą prędkością, tworzy się podciśnienie. Korzystając z wyjaśnienia Czarka należy tylko pamiętać, że to NIE „różnica dróg” powoduje różnicę prędkości. Objętości powietrza, rozdzielające się przed skrzydłem, wcale nie muszą spotkać się (i na ogół nie spotykają się) za skrzydłem.

- To dlaczego powietrze przeciska się nad skrzydłem, a nie pod skrzydłem?
- Pewien mędrzec, zapytany dlaczego zawsze odpowiada pytaniem na pytanie, odpowiedział „A czemu nie?”. Jeżeli ułożenie profilu nie jest symetryczne, to nie ma powodu, żeby prędkości pod i nad nim były jednakowe. Choć każdy profil można ustawić tak, aby wypadkowe prędkości były równe, to każde odchylenie spowoduje różnicę prędkości, lub równoważnie – odrzucanie powietrza za skrzydłem w dół lub w górę (spoilery samochodów wyścigowych).
- No, a co z tą cyrkulacją Darka?
- Otóż, jeśli rozwiążemy równania opisujące przepływ powietrza wokół skrzydła, to otrzymamy dwa szczególne rozwiązania. Jedno to dość jednostajny przepływ bez różnicy prędkości między górą i dołem, drugie to właśnie cyrkulacja wokół skrzydła. Każde inne rozwiązanie jest sumą tych dwóch, wziętych w odpowiednich proporcjach. Przepływ jednostajny nie daje siły nośnej. Jeżeli jednak dodamy do niego trochę cyrkulacji, to prędkości na górze dodadzą się, a na dole odejmą, co da nam naszą upragnioną różnicę.
- Genialne! Ale dlaczego przyroda wybiera właśnie takie, a nie inne rozwiązania?
- To wynika z warunków brzegowych. Kiedy samolot rozpoczyna ruch po pasie startowym, mamy jedynie przepływ jednostajny. Ale ostry kąt oderwania się powietrza natychmiast powoduje powstanie wiru i tak rozpoczyna się cyrkulacja.
- To już chyba wiem dlaczego skrzydło ma właśnie taki leżkowaty kształt. Zaokrąglony przód ułatwia przedostawanie się powietrza nad skrzydło, a wyostrenie tyłu utrudnia krążenie powietrza w odwrotną stronę, kierując strugi powietrza w dół.
- A nie mówiłem, że to właśnie dzięki cyrkulacji samolot lata? – podkreślił Darek. – W obliczeniach zastępuje się profil skrzydła obracającym się walcem, bo przecież to lepkość powietrza... .
- Wiesz – przerwała mu Magda – ty rzeczywiście masz coś z Cyrana de Bergeraca. Zadarty nos! Musisz uważać, żeby nie wytworzył za dużej cyrkulacji, bo pofruniesz!

Grzegorz WROCHNA, Piotr ZALEWSKI

Powakacyjny remanent

Większość z nas o wakacjach już (niestety...) zdążyła zapomnieć. Skąd więc ten tytuł? Po prostu są to pierwsze aktualności pisane po wakacjach. (Nie boimy się podać tej informacji, choć jest ona bezcenna dla konkurencji śledzącej każde posunięcie redakcji.)

Sezon ogórkowy w tym roku obfitował w ważne doniesienia i to zarówno po stronie „ma”, jak i „winien”. Bankructwo ogłosili „poszerzacz” tablicy Mendelejewa z Berkeley. Mianowicie odwołali odkrycie pierwiastków 118, 116 (oraz izotopu pierwiastka 114), o którym pisaliśmy dwa lata temu w aktualnościach. Redakcja *Delty* przeprowadziła prywatne śledztwo, nawiązując bezpośredni kontakt z Robertem Smolańczukiem, autorem teoretycznych szacunków przekrojów czynnych reakcji produkcji ww. pierwiastków. Nasz autor (drukował w *Delcie*) przebywa ostatnio dość często właśnie w Berkeley, ale jak tam nie przebywa, to część redakcji spotyka go na korytarzu. Okazuje się, że odwołanie odkrycia było spowodowane fiaskiem, jakim zakończyła się próba powtórzenia eksperymentu z większą o rząd wielkości świetlnością akceleratora. Zupełnie jednak nie wiadomo, co i dlaczego poprzednio zarejestrowano. Nie wiadomo też, co bardziej podziwiać: czy odwagę cywilną związaną z odwołaniem odkrycia, czy zbieg okoliczności, który doprowadził do wcześniejszego ogłoszenia tego, co właśnie odwołano. Nam bardziej imponuje to pierwsze, a nasz autor przystępuje do bardziej zaawansowanych rachunków (problem jest na tyle

skomplikowany, że tak czy inaczej konieczne jest użycie rozważań modelowych). Ich przeprowadzenie może zająć wiele miesięcy lub nawet lat.

Na rubrykę „ma” pozostało już niewiele miejsca. Wypełnimy ją w telegraficznym skrócie.

1. Po ponad 30 latach od odkrycia łamania symetrii kombinowanej CP (odbicie zwierciadlane i zamiana cząstki na antycząstkę) w układzie neutralnych mezonów dziwnych (kaonów) odkryto drugi system, w którym zachodzi to zjawisko. Eksperymenty Belle i Babar ogłosiły odkrycie tego efektu w rozpadach neutralnych mezonów zawierających kwark piękny. Co prawda nikt nie spodziewał się innego wyniku, ale przecież miło jest przekonać się, że trochę ten mikroświat rozumiemy. O co chodzi z tym łamaniem CP ? Dla tych, co nie pamiętają (oczywiście, że było już o tym w *Delcie!*) postaramy się napisać w przyszłym roku.

2. Odkryto planetoidę, którą jakiś czas temu okrzyknięto by transplutonem. Jest większa od dotąd największej planetoidy Ceres i większa niż księżyc Plutona, Charon.

3. Wystrzelono MAPa, który ma zarejestrować dokładną mapę temperatury promieniowania tła. Zbieranie danych trochę potrwa, ale za to będzie można ograniczyć liczbę przepisów na stworzenie Wszechświata.

4. Pojawiło się doniesienie, że stała struktury subtelnej... rośnie z czasem. O tym, czy i jaki ma to związek z gumką od majtek, napiszemy za miesiąc.

Piotr ZALEWSKI



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 559. Temperatura zewnętrznej warstwy Słońca (fotosfery) wynosi około 6000 K. Dlaczego atomy wodoru, które są głównym składnikiem fotosfery, nie opuszczają powierzchni Słońca?

Rozwiązanie na str. 7

F 560. Grubość fotosfery jest znacznie mniejsza od promienia Słońca. Rozpatrując równowagę oddziaływań grawitacyjnych i sił wynikających z ciśnienia materii słonecznej, oszacować grubość fotosfery. Przyjąć, że fotosfera składa się całkowicie z wodoru atomowego.

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 970. a) Matematyk A pomaga żonie w kuchni. Żona chce ugotować 4 litry pomidorówki. W tym celu musi najpierw odmierzyć 4 litry wody. Ma jednak do dyspozycji tylko dwa garnki o pojemnościach 3 l i 5 l. Jaki plan działania podsuwa A swojej żonie? (Wody jest w kranie pod dostatkiem, można ją nie tylko przelewać między naczyniami, ale również wylewać do zlewu. Nie można jednak niczego robić „na oko”.)

b) Podczas obierania marchewki do zupy A zastanawia się nad następującym uogólnieniem zadania. Należy odmierzyć n litrów wody, mając do dyspozycji dwa garnki o pojemnościach k i l litrów ($n, k, l \in \mathbb{Z}$ oraz $n \leq \max\{k, l\}$). Jaki warunek konieczny i dostateczny muszą spełniać

liczby n, k, l , aby było to możliwe?

Rozwiązanie na str. 4

M 971. a) Żona matematyka B już nagotowała pomidorówki i to 10 l! (B bardzo lubi pomidorówkę.) Chciałaby jednak rozdzielić zupę na dwie równe części, ale oprócz 10-litrowego garnka, w którym jest zupa, ma jeszcze dwa garnki o pojemnościach 7 l i 3 l. Jaki plan działania podsuwa B swojej żonie? (Z kranu, niestety, nie leci pomidorówka, więc cennej zupy nie można tym razem wylewać do zlewu!)

b) B myśli przy obiedzie o następującym uogólnieniu. Należy rozdzielić na dwie równe części $2n$ litrów pomidorówki, mając do dyspozycji garnki o pojemnościach k i l litrów oraz garnek $2n$ -litrowy, w którym początkowo jest zupa, przy czym $k + l \leq 2n$. Jaki warunek konieczny i dostateczny muszą spełniać liczby n, k, l , aby było to możliwe?

Rozwiązanie na str. 5

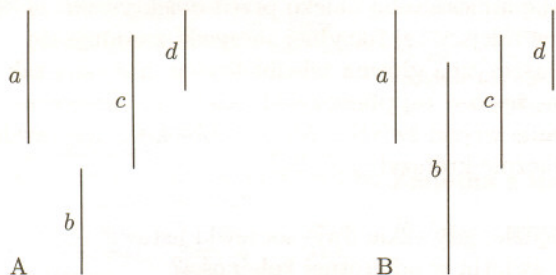
M 972. Żona matematyka C to zawzięta niewiasta i chcąc zaimponować żonom matematyków A i B , ugotowała aż 16 litrów pomidorówki. Jednocześnie jednak denerwują ją „te naukowe fajerwerki” męża, więc postanawia wręczyć C oprócz 16-litrowego garnka pełnego zupy dwa puste garnki o pojemnościach k i l litrów z poleceniem podzielenia zupy na dwie równe części. Chce oczywiście, żeby nie dało się tego zrobić precyzyjnie, ale jednocześnie nie chce, żeby C za szybko poznał się na jej niecnym planie, czyli szuka takich k, l , że $\text{NWD}(k, l) \mid 8$ i $k < n < l < 2n$ (patrz zadanie **M 971**). Jakie wartości k, l pozwalają stłamsić pomysłowość C ?

Rozwiązanie na str. 6

O pewnej trudności w rysowaniu odcinków

Krzysztof OLEŚ

Spróbujmy zmierzyć się z dziwnym zadaniem...
Narysować na płaszczyźnie skończoną rodzinę odcinków (odcinki te mogą być dowolne: domknięte, otwarte, domknięto-otwarte) parami równoległych, w taki sposób, aby każde trzy z nich przecinała prosta.



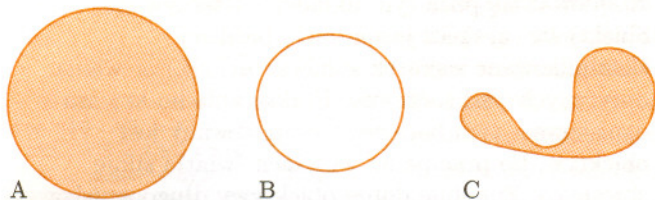
Na powyższym rysunku: w części A mamy pewne problemy (np. odcinki: a, b, d), w części B wszystko w porządku.

Zróbmy dodatkowe założenie: odcinki należy narysować tak, aby nie istniała prosta przecinająca je wszystkie. Chwila przerwy – chwila namysłu – chwila folgowania naszemu ukrytemu talentowi plastycznemu i... Zadanie jest niewykonalne? **Zadanie jest niewykonalne!** To właśnie postaramy się udowodnić. Skorzystamy z ciekawego twierdzenia geometrii kombinatorycznej, którego dowód (w przypadku płaszczyzny) znajduje się w znakomitej książce Jarosława Górnickiego [1].

Twierdzenie 1 (Helly, 1913)

Jeśli \mathcal{F} jest skończoną, co najmniej $(n+1)$ -elementową, rodziną podzbiorów wypukłych przestrzeni \mathbb{R}^n o tej własności, że każda jej $(n+1)$ -elementowa podrodzina ma przekrój niepusty, to cała rodzina \mathcal{F} ma przekrój niepusty.

Przypomnijmy, iż zbiór nazywamy wypukłym, jeśli z dowolnymi dwoma swoimi punktami zawiera łączący je odcinek domknięty.



Na powyższym rysunku: figura A jest zbiorem wypukłym, figury B i C nie są zbiorami wypukłymi.

Kiedy znamy już twierdzenie Helly'ego, możemy sformalizować nasz rysunkowy problem.

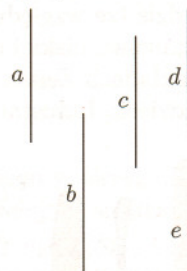
Twierdzenie 2 (o transwersali)

Niech \mathcal{F} będzie skończoną, co najmniej trójelementową, rodziną parami równoległych odcinków na płaszczyźnie. Jeśli każde trzy odcinki tej rodziny przecina prosta, to istnieje prosta (to właśnie jest transwersala) przecinająca wszystkie odcinki rodziny \mathcal{F} .

Dowód:

Najpierw pewne założenia (czym byłyby matematyka bez założeń?). Na rozważanej płaszczyźnie

wprowadzamy kartezjański układ współrzędnych i zakładamy, że odcinki (co najmniej trzy) są równoległe do osi rzędnych. Bez straty ogólności możemy założyć, że rozważane odcinki są domknięte (dlaczego?). Ponadto wykluczamy przypadek, iż któreś dwa odcinki danej rodziny „leżą jeden nad drugim”. Gdyby tak było, to założenia twierdzenia pociągałyby za sobą współliniowość wszystkich odcinków (dlaczego?).



Tak przecież być nie może...

Przystąpmy teraz do sedna sprawy.

Niech $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, $s \geq 3$; przy czym:

$$\forall_{i \in \{1, \dots, s\}} \exists_{u_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}}$$

$$\alpha_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = u_i, v_i \leq y \leq w_i\}.$$

Nasze dotychczasowe rozważania implikują także dodatkowy warunek:

$$\forall_{i, j \in \{1, \dots, s\}} \quad i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j.$$

Dla $i \in \{1, \dots, s\}$ definiujemy:

$$K_i = \{(k, d) \in \mathbb{R}^2 : v_i \leq ku_i + d \leq w_i\}.$$

Zauważmy, że $(k, d) \in K_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy prosta $y = kx + d$ przecina odcinek α_i . Rodzina $\mathcal{C} = \{K_1, \dots, K_s\}$ jest co najmniej trójelementową rodziną zbiorów wypukłych (stwierdzenie wypukłości dowolnego elementu \mathcal{C} jest prostym ćwiczonkiem), której dowolna trójelementowa podrodzina ma przekrój niepusty. Nie pozostaje nic innego, jak zastosować twierdzenie Helly'ego (jest to tak piękne, iż powstał nawet niezamierzony rym)

$$\exists_{(k_0, d_0) \in \mathbb{R}^2} \quad (k_0, d_0) \in \bigcap \mathcal{C}.$$

Powyższy warunek oznacza, że szukaną prostą jest (przykładowo – twierdzenie Helly'ego nie mówi zbyt wiele o liczności przekroju rodziny \mathcal{F}) ta o równaniu $y = k_0x + d_0$.

Po tym krótkim rozważaniu pozostaje jednak w głowie pewne pytanie dotyczące narzędzia, którym się posłużyliśmy:

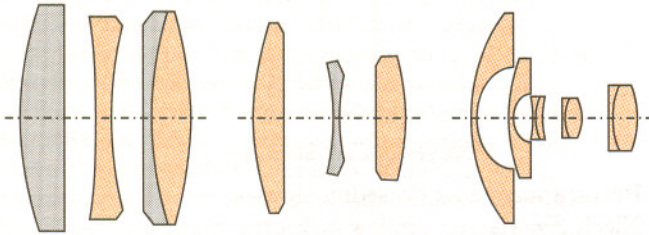
Czy twierdzenie Helly'ego jest prawdziwe dla rodzin nieskończonych?

Odpowiedź można znaleźć na stronie 4.

Bibliografia:

- [1] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa 1995.
- [2] F.A. Valentine, *Convex Sets*, New York 1964.

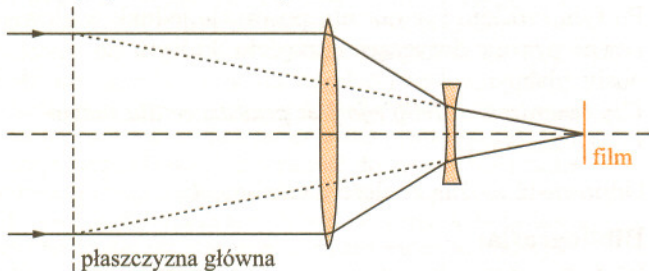
Przyjęło się, że obiektyw nazywa się standardowym, jeżeli jego ogniskowa jest zbliżona do przekątnej klatki filmu. Wprawdzie przekątna najpopularniejszych zdjęć małoobrazkowych 24×36 mm wynosi 43 mm, ale za standard uważa się ogniskowe mniej więcej 5 cm. Tak czy inaczej obiektyw taki ma dość szerokie pole widzenia, dlatego jego konstrukcja musi zapewniać dobrą korekcję wszelkich aberracji osiowych i pozaosiowych. Współczesne obiektywy fotograficzne są układami co najmniej czterosoczewkowymi, a chyba najpopularniejszym do dziś (ze względu na dobrą jakość obrazu przy stosunkowo niskiej cenie) jest Tessar, zbudowany w zakładach Zeissa w 1902 r., znany u nas też jako radziecki Industar.



Tessar Zeissa, tryplet, „rybie oko”.

Ambitniejszy fotograf amator wcześniej czy później zdobędzie jeden teleobiektyw i jeden obiektyw szerokokątny. Długa ogniskowa w pierwszym przypadku daje obraz powiększony (nie jest to dokładnie to samo co efekt „zbliżenia”), a krótka w drugim przypadku umożliwia ogarnięcie szerszego pola widzenia niż przy użyciu obiektywu standardowego. Zbudowanie w dzisiejszych czasach obiektywu o zadanej (powiedzmy – w rozsądnych granicach) ogniskowej nie jest problemem, jednak w praktyce obiektyw o długości np. pół metra byłby bardzo niewygodny w użyciu, z kolei obiektyw o zbyt krótkiej ogniskowej blokowałby ruch lusterka w lustrzance jednoobiektywowej. A przecież właśnie ten typ aparatu jest najchętniej używany przez fotografów „z prawdziwego zdarzenia”, gdyż jest najbardziej uniwersalny dzięki możliwości łatwej wymiany obiektywów. Na szczęście długość ogniskowej obiektywu i długość samego obiektywu mogą poważnie się różnić dzięki chytremu zestawieniu różnych soczewek.

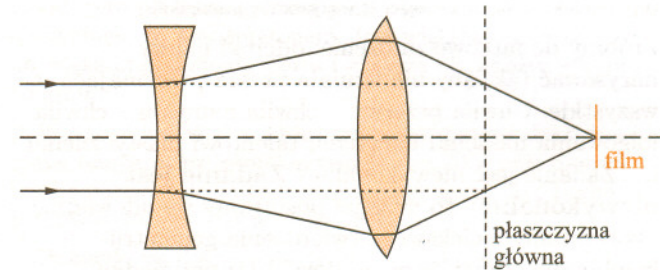
Zacznijmy od teleobiektywu.



Zasada działania jest następująca: niemal równoległa wiązka światła od odległego obiektu jest silnie skupiana przez pierwszą soczewkę, druga zaś – rozpraszająca – zmniejsza zbieżność wiązki.

W efekcie obraz jest tworzony jakby przez fikcyjną soczewkę umieszczoną daleko przed obiektywem. Mówi się, że w miejscu tej fikcyjnej soczewki znajduje się tzw. płaszczyzna główna teleobiektywu, nazwana tak dlatego, że to w tej płaszczyźnie zachodzi efektywne załamanie wiązki światła. Ale sam obiektyw naprawdę jest znacznie krótszy!

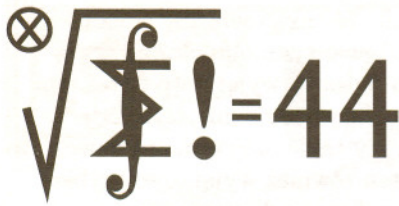
A co będzie, gdy takie dwie soczewki ustawić na drodze światła w odwrotnej kolejności?



Wiązka równoległa stanie się wprawdzie rozbieżna, wobec tego aby powstał obraz, trzeba ją na końcu silnie skupić. To jaki z tego zysk? Taki mianowicie, że teraz ogniskowa jest krótka, bo płaszczyzna główna obiektywu znajduje się blisko filmu, ale sam obiektyw jest bardziej od niego oddalony! Mamy więc obiektyw szerokokątny (krótkoogniskowy), który mimo to nie ogranicza swobody poruszania się lusterka.

Jak widać, w obu typach obiektywów wykorzystano fakt, że płaszczyzna główna układu soczewek może znajdować się poza tym układem. Rzeczywiste obiektywy są, rzecz jasna, dużo bardziej skomplikowane wskutek konieczności skorygowania optycznych wad soczewek. Praktycznie im krótsza ogniskowa – tym bardziej skomplikowany jest obiektyw, bo pracuje na wiązkach światła silnie zbieżnych. Zupełnie dobre obiektywy długoogniskowe (np. do kamer astronomicznych) budowano zaledwie z trzech soczewek (tryplet). We współczesnych obiektywach fotograficznych każda z dwóch soczewek z rysunku drugiego i trzeciego jest w rzeczywistości układem soczewek, których rodzaj szkła, krzywizny i położenia są ściśle określone. Szczególnie złożone są obiektywy typu „rybie oko” o polu widzenia niemal 180° . Jednak nawet obiektywu standardowego niech nikt nie próbuje z ciekawości rozkręcać, bo w warunkach domowych nie ma mowy o poprawnym złożeniu go z powrotem.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2002

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 417 (WT = 1,42) i 418 (WT = 1,79)
z numeru 3/2001

Witold Bednorz	- Tychy	46,56
Janusz Olszewski	- Suwałki	42,61
Adam Woryna	- Ruda Śląska	39,31
Marcin Peczański	- Latchorzew	37,70
Witold Bednarek	- Łódź	35,93

Witold Bednorz zalicza trzecie okrążenie i zostaje dwudziestym drugim Weteranem matematycznego Klubu 44.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji Delfy

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z matematyki nr 429, 430

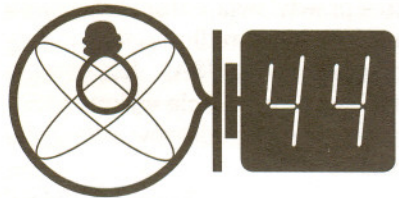
Redaguje Marcin E. KUCZMA

429. Przekątne czworokąta $ABCD$, wpisanego w okrąg o środku O , przecinają się w punkcie Q . Punkty K, L, M, N są (kolejno) środkami okręgów opisanych na trójkątach QAB, QBC, QCD, QDA . Proste KM i LN przecinają się w punkcie P . Dowieść, że punkty O, P, Q są współliniowe.

430. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją co najwyżej dwie dodatnie liczby całkowite n , dla których wartość wyrażenia $p \cdot 2^n + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których istnieją dokładnie dwie takie liczby n .

Zadanie 430 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2002

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 316 (WT = 2,50), 317 (WT = 2,44),
318 (WT = 2,60) i 319 (WT = 2,50)
z numerów 4/2001 i 5/2001

Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	39,79
Aleksander Surma	- Myszków	37,60
Jacek Piotrowski	- Rzeszów	32,30
Tomasz Rudny	- Warszawa	29,50
Tomasz Wietecha	- Tarnów	26,45
Marek Wójcicki	- Szczecin	17,84



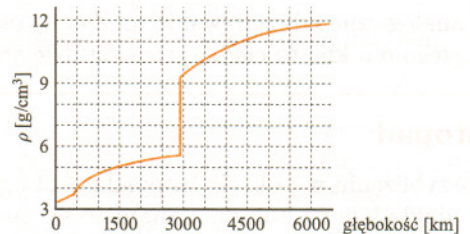
Zadania z fizyki nr 326, 327

Redaguje Jerzy B. BROJAN

326. Według szczególnej teorii względności związany układ ciał o masach $m_1, m_2, m_3 \dots$ ma masę mniejszą od sumy tych mas o wielkość Δm równą $\Delta E/c^2$, gdzie ΔE jest energią wiązania (energiją, którą trzeba dostarczyć, aby rozbić układ na poszczególne ciała), a c – prędkością światła. O ile mniejsza jest masa Ziemi od sumy mas wszystkich jej części?

W rachunku należy uwzględnić tylko wiązanie grawitacyjne. Dany jest wykres gęstości Ziemi w zależności od głębokości (rysunek), promień Ziemi (którą uznajemy za kulę) $R = 6370$ km oraz wartość c i stałej grawitacji G (zob. w tablicach).

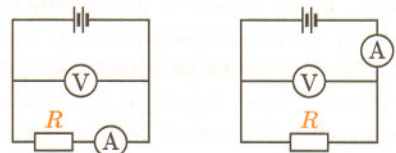
Wskazówka: Można dla uproszczenia przybliżyć przebieg wykresu kilkoma „schodkami”.



327. Do dwóch jednakowych mikroamperomierzy o zakresie $200 \mu A$ dołączono odpowiednie oporniki szeregowo lub też równoległe, tworząc z jednego z nich miliamperomierz o zakresie 50 mA,

a z drugiego – woltomierz o zakresie 20 V. W celu wyznaczenia nieznanego oporu R dokonano tymi przyrządami pomiaru napięcia i natężenia prądu

w dwóch podanych obok obwodach. Iloraz U/I okazał się równy 450Ω w jednym z obwodów, a 460Ω w drugim. Ile wynosi wartość R ?



To, że Słońce rządzi życiem na Ziemi, jest powszechnie wiadome. Fakt ten bywa nawet przeceniany, bo – mówiąc brutalnie – kariera niejednego człowieka silnie zależy od kursu dolara, a wcale od znaku Zodiaku, w którym Słońce było w chwili jego narodzin. Nie zmienia to jednak tego, że Słońce jest odpowiedzialne niemal za wszystko, co dzieje się na powierzchni Ziemi (powiedzmy – z wyjątkiem tektonicznej aktywności skorupy ziemskiej i wspomnianego kursu dolara).

Jednym ze słabo dostrzegalnych skutków działania Słońca są zakłócenia łączności radiowej. Powodują je wpadające do atmosfery szybkie cząstki emitowane z powierzchni Słońca.

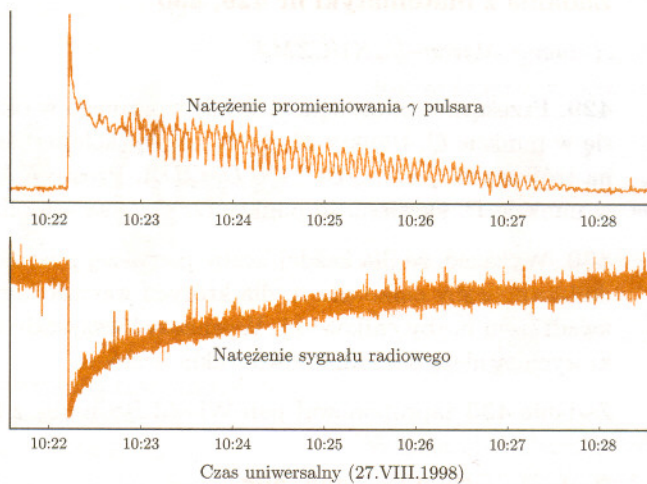
Zmieniają one stan jonizacji wysokich warstw atmosfery, co z kolei powoduje przede wszystkim dobowe zmiany słyszalności rozmaitych radiostacji. Nic dziwnego, że przypadkowe i krótkotrwałe zakłócenia łączności obserwuje się szczególnie często w okresach wzmózonej aktywności Słońca. Wtedy bowiem emituje ono

wysokoenergetyczne cząstki w większych ilościach i bardziej chaotycznie, a w zależności od tego radiowe „lustro”, jakim jest jonosfera, gwałtownie zmienia swoje parametry.

Ale analogiczne oddziaływanie na Ziemię obiektu odległego o 6 kpc to chyba przesada. Nie sposób

jednak przeczyć faktom. W takiej właśnie odległości znajduje się w Orle pulsar o symbolu katalogowym SGR 1900+14. Jest to pulsar o wyjątkowo potężnym polu magnetycznym, biliony razy silniejszym od pola ziemskiego – obiekty takie nazywane są nawet magnetarami. Pulsar ten również wyjątkowo szybko zwalnia obroty, czemu od czasu do czasu musi towarzyszyć przebudowa warstw powierzchniowych – krótko mówiąc, zwalniający obroty pulsar musi stać się bardziej kulisty, a proces ten odbywa się skokowo przez tzw. trzęsienia gwiazdy. Musi też wtedy ulec zaburzeniu jego fantastyczne pole magnetyczne,

co pociąga za sobą przyspieszanie cząstek w atmosferze pulsara do gigantycznych energii i w konsekwencji silny błysk promieniowania gamma i rentgenowskiego. Błysk taki po 20 000 lat wpada do ziemskiej atmosfery i – jak się okazuje – wywołuje doskonale mierzalne skutki! Górny wykres to przebieg natężenia promieniowania gamma zarejestrowany przez sondę Ulysses 27 sierpnia



1998 roku. Dolny wykres przedstawia natomiast przebieg natężenia sygnału pewnej radiostacji na Hawajach odbieranego w Kolorado (USA). Jak widać, jest to po prostu lustrzane odbicie wykresu górnego, a zatem wpływ na Ziemię obiektów odległych o kiloparseki został wykazany.

Tomasz KWAST

Listopad

W przybliżeniu w połowie listopada około godz. 20:30 dość dokładnie na południu znajdzie się punkt Barana, czyli punkt równonocy wiosennej, położony zresztą w gwiazdozbiornie Ryb. Ten jeden z najważniejszych punktów na niebie bardzo trudno wskazać, gdyż w jego pobliżu nie leżą żadne jasne gwiazdy.

Powiedzmy, że znajduje się on około 7° na południe od gwiazdy ω Piscium (Ryb), która jednak też nie jest jasna, więc to niewiele pomaga. Ale jeszcze dalej na południe, czyli bliżej horyzontu, leży gwiazdozbiór Rzeźbiarza, niepokazany gwiazdozbiór nieba południowego, który akurat w listopadzie częściowo widać w naszej szerokości geograficznej. Patrząc nań można pokusić się o ocenę przejrzystości powietrza nad horyzontem. Ocena z pewnością wypadnie marnie, ale można spróbować. Najjaśniejsza gwiazda Rzeźbiarza, α Sculptoris, ma jasność 4,39 mag, a więc w zasadzie powinna być swobodnie widoczna gołym okiem (w Warszawie byłaby widoczna na wysokości

zaledwie 6°). Ze trzy stopnie od niej w górę (czyli na północ) i trochę ku zachodowi znajduje się gromada kulista NGC 228 o jasności 8 mag (czyli trzeba tu mieć przynajmniej lornetkę), a jeszcze o stopień dalej galaktyka NGC 253 o jasności 7 mag. Jeżeli te dwa obiekty zdołamy dostrzec, będzie to oznaczało, że otaczającą nas atmosferą można bez obawy oddychać.

Wenus jest zbyt blisko Słońca, by można było ją zobaczyć. Mars jest w Koziorożcu i wieczorem rychło zachodzi. Jowisz jest w Bliźniętach, a Saturn w Byku i obie te planety wieczorem dopiero wschodzą. Pełnie Księżycą będą dwie: 1 i 30 XI, nów 15 XI. Żadnych jasnych gwiazd Księżyc nie zakryje, ale 3 XI zakryje Saturna. Jeżeli pogoda dopisze, to zjawisko będzie dogodnie widać z Polski: początek zakrycia o godz. 22:11, a koniec o 23:19 czasu środkowoeuropejskiego. Powodzenia!

T.K.

Z okazji Gammalimatiasu numer 47 przedstawiamy więcej niż 4 + 7 własności liczby 47.

1. Liczba 47 nie powstaje z byle czego, mamy bowiem równość $47 = 37 + 3 + 7$. O przecednej liczbie 37 pisaliśmy na przełomie tysiącleci.

2. Sumę sześcianów cyfr liczby 47 oblicza się bardzo łatwo, wystarczy wpisać zero pomiędzy jej cyfry: $4^3 + 7^3 = 407$.

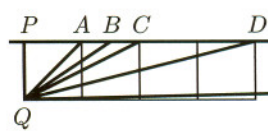
3. Jeżeli p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą, to $p_{15} = 47$. Przy tym $p_{1..5} = 4 + 7$.

4. Nie dość, że 47 jest pierwsza, to dzieląc ją przez 2 i zaokrąglając wynik w dół otrzymujemy liczbę pierwszą, a mianowicie 23. Można powtarzać tę operację otrzymując dalsze liczby pierwsze: 11, 5, 2. Następną liczbą o takiej własności jest 1439.

5. Liczba 47 jest kwadratem liczby 7 pomniejszonym o dwa. Jej połowa (zaokrąglona w dół) też jest kwadratem pomniejszonym o 2. Liczba 7 też jest kwadratem pomniejszonym o 2. Kwadrat liczby 47 pomniejszony o 2 daje liczbę pierwszą 2207, ta zaś po podniesieniu do kwadratu i pomniejszeniu o 2 daje 4870847. Co prawda liczba ta jest złożona, ale jej najmniejszy dzielnik pierwszy 1087 jest kwadratem pomniejszonym o 2.

6. Pierwiastkiem pierwotnym modulo p , gdzie p jest liczbą pierwszą, nazywamy każdą taką resztę $0 \leq r \leq p-1$, że $r^k - 1$ nie dzieli się przez p dla żadnego $1 \leq k < p-1$, natomiast $r^{p-1} - 1$ dzieli się przez p . Odnotujmy przy tym, że dla $r \neq 0$ ta ostatnia podzielność wynika z małego twierdzenia Fermata. Spośród 47 reszt modulo 47 pierwiastkami pierwotnymi są: 5, 10, 11, 13, 15, 19, 20, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45. Nietrudno policzyć, że pierwiastków pierwotnych jest 22, co stanowi około 47% wszystkich reszt.

7. Po raz pierwszy liczba pierwiastków pierwotnych jest mniejsza od 1/4 liczby wszystkich reszt



dla $p_{47} = 211$. Liczba pierwiastków pierwotnych modulo p_{47} jest równa $47 + 1$.

8. Reszty modulo 47 można przypisać nie tylko liczbom całkowitym, ale także liczbom wymiernym o mianowniku niepodzielnym przez 47, np. liczbie $2/3$ odpowiada reszta 32, gdyż

$$\frac{2}{3} \equiv \frac{96}{3} = 32 \pmod{47}.$$

Okazuje się, że liczb wymiernych, które w postaci nieskracalnej mają licznik i mianownik nie przekraczający 6, jest 47 i są one we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z resztami modulo 47.

0	0	12	1/4	24	1/2	36	3/4
1	1	13	5/4	25	3/2	37	-3/5
2	2	14	-5/3	26	5/2	38	2/5
3	3	15	-2/3	27	-6/5	39	-1/6
4	4	16	1/3	28	-1/5	40	5/6
5	5	17	4/3	29	4/5	41	-6
6	6	18	-4/5	30	-4/3	42	-5
7	-5/6	19	1/5	31	-1/3	43	-4
8	1/6	20	6/5	32	2/3	44	-3
9	-2/5	21	-5/2	33	5/3	45	-2
10	3/5	22	-3/2	34	-5/4	46	-1
11	-3/4	23	-1/2	35	-1/4		

9. Liczba 47 jest ósmym elementem ciągu Lucasa określonego wzorami

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 3, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Średnio co piętnasty element ciągu Lucasa ma końcówkę 47.

10. Ciąg z zadania 4 z finału XLIX Olimpiady Matematycznej, określony wzorami

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{\lfloor n/2 \rfloor},$$

także nie obywa się bez liczby 47, mamy bowiem $a_{12} = 47$.

11. Gdyby Delta była numerowana liczbami pierwszymi, dziś po raz pierwszy czytali byście Deltę o numerze większym od 47². Mamy bowiem

$$p_{329} = 2207 < 47^2 = 2209 < p_{330} = 2213.$$

12. Zadanie: W trójkącie prostokątnym PQR kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ = 1$ i $PD = 4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD, punkt A jest środkiem odcinka PC, punkt B jest środkiem odcinka AC. Punkt E leży na prostej PD, przy czym $\sphericalangle PQA + \sphericalangle QCB + \sphericalangle PQC = \sphericalangle PQD + \sphericalangle QPE$. Obliczyć PE.

Odpowiedź: 47.