

SPIS TREŚCI NUMERU 10 (329)

Jak blisko do Księżycy?	str. 1
Ile do Słońca?	str. 2
No a gwiazdy...?	str. 3
Paralaksy spektroskopowe <i>Tomasz Kwast</i>	str. 3
Niestandardowe gwiazdy jako świece standardowe <i>Bogdan Wszolek</i>	str. 5
Mała Delta	str. 7
Pomiar odległości najdalszych galaktyk <i>Bogdan Wszolek</i>	str. 8
Stała Hubble'a – jak dokładnie ją znamy? <i>Andrzej Marecki</i>	str.10
Zadania	str.12
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Październik	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Polowanie na jelenia
i równowagi Nasha

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*
 Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delt*
 można znaleźć w portalu Eduseek
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski
 Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Redaguje kolegium w składzie:

Andrzej Białynicki-Birula	Wiktor Bartol
Bogdan Cichocki	Krzysztof Biesaga
– wiceprzewodniczący	Ewa Czuchry
Krzysztof Ciesielski	Krystyna Kordos – sekr. red.
Jan A. Gaj	Marek Kordos – red. nac.
Piotr Goldstein	Tomasz Kwast
Andrzej Hryniewicz	Anna Ludwicka
Wiesław A. Kamiński	Urszula Marciniak
Marta Kicińska-Habior	Anna Rudnik
Krzysztof Maślanka	Witold Sadowski
Janusz Matkowski	Joanna Udalska
Andrzej Mąkowski	Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Zdzisław Pogoda	Adres Redakcji:
Michał Różyczka	ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
Konrad Rudnicki	tel. 853-59-61, 55-33-216
Grzegorz Sitarski	BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Andrzej Woszczyk	Skład systemem T _E X wykonała Redakcja.
Eligiusz Złotkiewicz	Wydrukowano
Wiesław Żelazko – przewodniczący	w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
	w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

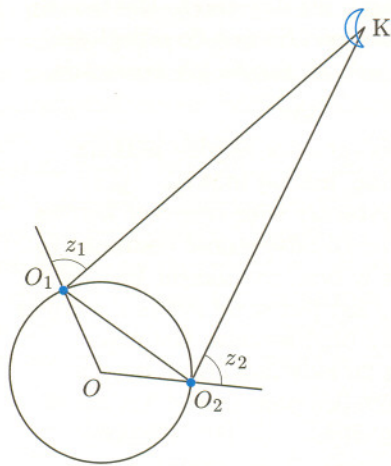
01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**
 Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
 okresu prenumeraty.
 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
 cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS
 funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
 Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2002 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
 Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Jak blisko do Księżyca?



Długość bazy O_1O_2 oblicza się, mając współrzędne geograficzne obserwatorów O_1 i O_2 (i, oczywiście, promień Ziemi). Podobnie kąty w trójkącie OO_1O_2 . Z pomiarów odległości zenitalnych Księżyca z_1 i z_2 można wtedy rozwiązać trójkąt O_1O_2K , a więc znaleźć odległość Księżyca.

Starożytny Kosmos dzielił się na świat podksiężycowy i nadksiężycowy. Dokładniej – podejrzewano, że deszcz, śnieg, tęcza, a może nawet komety to zjawiska zachodzące tuż przy ziemi (albo przy Ziemi), natomiast planety i gwiazdy osadzone na kryształowych sferach są tak odległe, że na temat ich odległości nic się nie da powiedzieć. Te dwa światy miały rządzić się każdy swoimi prawami, na początek więc chyba dobrze byłoby ustalić, gdzie przebiega granica między nimi.

Zjawisko paralaksy było już tak często omawiane w *Delcie*, iż istnieje obawa znużenia Czytelników tym zagadnieniem. Jest to jednak sprawa tak ważna, że nie można jej w tym numerze pominąć. Znajomość odległości Księżyca to pierwszy krok do poznania rzeczywistych rozmiarów Wszechświata, bez czego nie byłoby mowy o poznaniu fizycznych własności ciał niebieskich.

Pomiar odległości za pomocą dalmierza jest metodą „najuczciwszą”, bo sprowadza się do skorzystania z najprostszej geometrii. Formalnie paralaksą geocentryczną (dodaje się tu jeszcze: horyzontalną) obiektu nazywa się kąt, pod jakim byliby z niego widać promień Ziemi. Kąt ten można wyznaczyć na podstawie obserwacji położenia na niebie obiektu widzianego z dwóch dość dowolnych miejsc na powierzchni Ziemi. Wtedy znając jeden bok trójkąta rozpięty między tymi dwoma miejscami (bazę dalmierza) i oba kąty do niego przyległe, można bez trudu obliczyć pozostałe elementy trójkąta (patrz rysunek). Dobrym przybliżeniem paralaksy (w radianach) jest stosunek średnicy Ziemi do odległości obiektu od środka Ziemi (którą można wtedy obliczyć).

Nic więcej nie jest tu potrzebne i można mieć jedynie trudności techniczne z przyzwoitym wyznaczeniem którejś wielkości. W Starożytności nie sposób było zsynchronizować obserwacji Księżyca wykonywanych przez dwóch obserwatorów, których dzieliłaby odległość kilku tysięcy kilometrów. Jeden obserwator mógł natomiast wykorzystać fakt, że widząc Księżyc o wschodzie i zachodzie, widzi go z miejsc, które dzieli średnica Ziemi (a jeśli nie Ziemi, to w każdym razie średnica równoleżnika, na którym znajduje się obserwator). Niestety, w czasie od swojego wschodu do zachodu Księżyc nieco przesuwa się po orbicie i nielato było oddzielić skutek jego ruchu orbitalnego od skutku ruchu obrotowego Ziemi. W dodatku moment wschodu i zachodu fałszuje refrakcja (załamanie światła w atmosferze Ziemi), która dla ciał niebieskich na horyzoncie przekracza pół stopnia, a jest to wielkość porównywalna z wielkością samej paralaksy geocentrycznej. Lepiej jest, gdy wysokość Księżyca w górowaniu mierzą dwaj obserwatorzy, ale znajdujący się dość dokładnie na jednym południku – obserwacje takie są zsynchronizowane automatycznie. Niewątpliwie z powodu tych wszystkich kłopotów technicznych Arystarch (320–250 r. p.n.e.) zdołał wprawdzie odległość Księżyca ocenić, ale ta jego ocena (9 średnic Ziemi) mocno rozminęła się z rzeczywistością. Podobno sam Arystarch przywiązywał większą wagę do matematycznego rozwiązania problemu niż do realności wyników wyznaczeń; zresztą były to prace pionierskie i ich wyników nie było wtedy z czym porównywać.

Potem pojawił się Eratostenes (275–194 r. p.n.e.), który na podstawie pomiarów kąta padania promieni słonecznych w różnych miejscach położonych na jednym południku wyznaczył rozmiary Ziemi z budzącą podziw dokładnością. Skoro więc później Hipparch (190–125 r. p.n.e.) ocenił odległość Księżyca na $33\frac{2}{3}$ średnic Ziemi (dziś wiadomo, że jest to średnio 30,2), można uznać, że granica między światem podksiężycowym i nadksiężycowym została w Starożytności określona wprost świetnie (Ptolemeusz (100–160 r.) przyjmował 29,5 średnic Ziemi). Współczesne laserowe pomiary odległości Księżyca to tylko zdobywanie kolejnych cyfr po przecinku. Dziś wiemy, że ta najmniejsza naturalna kosmiczna odległość wynosi (średnio) 384 400 km, czemu odpowiada paralaksa geocentryczna $57'02''5$. Dla światła to nieco ponad sekunda, ale – jak pamiętamy – był to wielki krok ludzkości.



Rozwiązanie zadania M 967.

Za pomocą prostej indukcji wykazujemy, że $1 < a_n < 3$. Jeśli $x \in (1, 3)$, to $4 - \frac{3}{x} > x$, skąd wynika, że $a_{n+1} > a_n$. Tak więc (a_n) jest ciągiem rosnącym i ograniczonym, a więc zbieżnym. Oznaczmy granicę naszego ciągu przez g . Przechodząc w równaniu $a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$ do granicy $n \rightarrow \infty$, otrzymamy $g = 4 - \frac{3}{g}$, czyli $g \in \{1, 3\}$. 1 odpada, bo $g > a_1 = 2$. Tak więc $g = 3$.



Rozwiązanie zadania M 968.

Funkcja $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = (1 - \frac{1}{m})x + \frac{a}{m \cdot x^{m-1}}$ ma minimum globalne w punkcie $\sqrt[m]{a}$. Wynika stąd, że $a_n \geq \sqrt[m]{a}$ dla wszystkich $n \geq 2$. Poza tym dla każdego $x \geq \sqrt[m]{a}$ zachodzi $f(x) \leq x$. Zatem (a_n) jest malejący i ograniczony z dołu, czyli zbieżny. Jeśli g jest granicą ciągu, to przechodząc z n do ∞ otrzymujemy $g = (1 - \frac{1}{m})g + \frac{a}{m \cdot g^{m-1}}$, czyli $g = \sqrt[m]{a}$.

Ile do Słońca?

Próbę odpowiedzi na to pytanie podjął wspomniany już Arystarch. Dokładniej, była to próba stwierdzenia, jaki jest stosunek odległości Słońca do odległości Księżyca od Ziemi. Idea pomiaru tego stosunku jest tak prosta jak geometria trójkąta (patrz rysunek).

W kwadrze płaszczyzna księżycowego terminatora (granicy między półkulą oświetloną i nieoświetloną) przechodzi przez Ziemię, inaczej mówiąc – przy Księżycu jest kąt prosty (z definicji kwadry). Wystarczy więc zmierzyć kątową odległość Księżyca od Słońca i secans tego kąta (czyli odwrotność cosinusa) to właśnie poszukiwany stosunek odległości. Kłopot w tym, że moment kwadry można uchwycić tylko w przybliżeniu, a mierzony kąt jest w tej sytuacji również niemal prosty i mały błąd jego pomiaru daje duży błąd secansa. Nic więc dziwnego, że Arystarchowi wyszło, że Słońce jest 20 razy dalej od Księżyca, podczas gdy powinno być 400. Przy ówczesnej technice pomiarowej Arystarch mógł równie dobrze ocenić mierzony kąt na nieco większy od 90° . Ciekawe, co wtedy by zrobił, bo – mówiąc dzisiejszym językiem – secans takiego kąta jest przecież ujemny. Dużo później Kepler przyjmował jako stosunek odległości Słońca i Księżyca liczbę 60, jednak bez jakiegoś uzasadnienia. Dopiero w końcu XVII w. udało się uzyskać poprawny wynik.

Tu od razu warto uświadomić sobie, że bezpośredni pomiar paralaksy geocentrycznej Słońca, nawet dzisiejszymi środkami technicznymi, jest niewykonalny. Trzeba by wszak wyznaczyć kątową odległość między położeniami Słońca widzianego z dwóch miejsc na Ziemi, a do tego trzeba mieć gwiazdziste tło, tymczasem gdy widać Słońce, to na pewno nie widać gwiazd. Toteż dobrego pomiaru odległości Słońca dokonano wyznaczając odległość innego obiektu (o czym też już w *Delcie* było). Mianowicie w 1672 r. francuscy astronomowie na podstawie pomiarów wykonanych w Paryżu i w Cayenne w Gujanie Francuskiej wyznaczyli paralaksę geocentryczną (a więc odległość) Marsa. Nie było to specjalnie trudne, gdyż Marsa doskonale widać na tle gwiazd, a ponadto jest niezbyt odległy od Ziemi. I teraz najważniejsze: w owych czasach mechanika nieba umożliwiała już teoretyczne obliczenie stosunków wszystkich wzajemnych odległości planet i planet od Słońca na dowolną chwilę. Inaczej mówiąc – konfiguracje wszystkich najważniejszych ciał Układu Słonecznego były doskonale znane z dokładnością do podobieństwa. Wystarczyło więc wyznaczyć absolutną odległość dowolnego obiektu, a Mars był do tego najwygodniejszy, aby dostać wszystkie odległości w kilometrach. Dużo później, bo na początku XX w., w tej samej metodzie wykorzystano Erosa, który zbliża się czasem do Ziemi na zaledwie 22 mln km, a więc jego paralaksę jeszcze łatwiej wyznaczyć. Ale to już tylko szczegóły techniczne.

Tak została określona chyba najważniejsza w astronomii jednostka długości (odległości), czyli średnia odległość Ziemi od Słońca nazwana jednostką astronomiczną. Mierzy ona 149,6 mln km, czemu odpowiada paralaksa geocentryczna $8''80$. Światło pokonuje tę odległość w 499 s. Jest bardzo wygodną jednostką w granicach Układu Słonecznego, gdyż wszystkie odległości wyrażają się liczbami co najwyżej dwucyfrowymi.

T.K.



Rozwiązanie zadania M 969.

Wykażemy, że szukaną liczbą jest $k = \frac{1}{2}$. Podnosząc stronami do kwadratu równanie rekurencyjne ciągu (a_n) , otrzymujemy $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n} + 2$. Jasne jest również, że $a_n \geq 1$. Możemy więc

napisać $a_n^2 + 2 \leq a_{n+1}^2$. Wynika stąd, że $1 + 2(n-1) \leq a_n^2$, czyli $2 - \frac{1}{n} \leq \frac{a_n^2}{n}$. Dalej, mamy $a_n^2 = a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}} + 2 = a_{n-2}^2 + \frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}} + 4 = \dots = a_1^2 + \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}\right) + 2(n-1)$,

czyli po podzieleniu przez n : $\frac{a_n^2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}\right) + 2 \frac{n-1}{n}$. Wiemy już, że ciąg $\left(\frac{1}{a_n}\right)$

jest zbieżny do 0. Wynika z tego, że ciąg $b_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}\right)$ jest również zbieżny do zera (to jest „prawie” ciąg średnich arytmetycznych wyrazów ciągu $\left(\frac{1}{a_n}\right)$). Tak więc $\left(\frac{a_n^2}{n}\right)$ jest zbieżny do 2. Jasne jest teraz, że szukana liczba k jest równa $\frac{1}{2}$, a szukana granica jest równa $\sqrt{2}$.

Kąt
mierzony

Księżyc
w kwadrze

Ziemia

No a gwiazdy...?

O pierwszych wyznaczeniach odległości gwiazd pisaliśmy już w *Delcie* tyle razy (ostatnio nawet w numerze styczniowym), że może nie warto nadużywać cierpliwości Czytelnika. W skrócie więc przypominamy, że dalmierzem jest tu okołosłoneczna orbita Ziemi, bazą średnica orbity i w celu wyznaczenia odległości gwiazdy trzeba zmierzyć jej kątowe przesunięcie (wynikające z przemieszczenia się Ziemi) na tle gwiazd w założeniu bardziej odległych. Wynik tych pomiarów (pierwszy uzyskano w 1837 r.) był wręcz zaskoczeniem: paralaksa heliocentryczna nawet najbliższych gwiazd okazała się mniejsza od $1''$. A z tego wynika, że gwiazdy te znajdują się w odległości nie mniejszej niż odległość Ziemi od Słońca (jednostka astronomiczna) pomnożona przez odwrotność $\sin 1''$, która to odwrotność wynosi tyle, ile jest sekund łuku w jednym radianie, czyli w przybliżeniu 206 265. Taka wzorcowa jednostka nazwana została parsekiem (oczywiście od słów: paralaksa i sekunda, co na szczęście w wielu językach brzmi bardzo podobnie): $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ j.a.} = 3 \times 10^{16} \text{ m}$. Po podzieleniu stosownych odległości przez prędkość światła łatwo się przekonać, że odległość najbliższej gwiazdy tak się ma do rozmiarów Układu Słonecznego, jak cztery lata do czterech godzin.

Nic więc dziwnego, że tego pierwszego pomiaru odległości gwiazdy dokonano tak późno. Znacznie

wcześniej, bo w 1726 r., przy okazji prób pomiaru paralaks James Bradley odkrył zjawisko aberracji światła. Polega ono na tym, że wskutek ruchu Ziemi (prędkość obiegowa Ziemi wynosi 30 km/s) gwiazdy są lekko przesunięte ku punktowi nieba, ku któremu akurat Ziemia zmierza. Maksymalne przesunięcie aberracyjne wynosi w przybliżeniu $30/300\,000 \text{ rad} = 20''{,}5$, czyli więcej niż paralaksa jakiegokolwiek gwiazdy.

Tak więc metoda paralaks jest wprawdzie bardzo „czysta”, ale dość trudna technicznie i ograniczona dokładnością pomiaru małych kątów. Z powierzchni Ziemi można mierzyć kąty nie mniejsze niż $0''{,}01$. Sztuczny satelita Hipparcos pomierzył paralaksy ogromnej liczby gwiazd z dokładnością do $0''{,}001$ (bo spoza atmosfery), czyli odległości do – powiedzmy – 1 kpc . Tym samym mierzenie paralaks z powierzchni Ziemi chyba definitywnie przeszło do historii. Zwróćmy uwagę, że odległość Słońca od Ziemi wyznaczono za pomocą paralaksy geocentrycznej, a z kolei jednostka astronomiczna stała się bazą dla wyznaczeń odległości gwiazd. Jednak gwiazdy choćby tylko naszej Galaktyki ciągną się jeszcze dalej, niż sięgnął Hipparcos. Zapewne więc znajomość odległości gwiazd pobliskich umożliwiła stworzenie trzeciej metody sięgającej dalej, czyli trzeciego szczebla tzw. drabiny odległości. Jak ta metoda działa, przedstawiamy również w tym numerze.

T.K

Paralaksy spektroskopowe

Tomasz KWAST

Na podstawie samej jasności gwiazdy nie da się określić jej odległości – gwiazda jasna z daleka może wyglądać jak słaba z bliska. Jasność mogłaby być miarą odległości, gdyby było wiadomo, jak gwiazda jest jasna „sama w sobie”. Dla sprecyzowania tego, co tu powiedzieliśmy, trzeba przypomnieć kilka dość banalnych faktów. Przede wszystkim wrażenie odbierane przez oko (podobnie zresztą przez kliszę fotograficzną czy jakikolwiek elektroniczny odbiornik światła) jest tym większe, im więcej fotonów wpada do oka w jednostce czasu, czyli zależy od tzw. oświetlenia. Dokładniej, oświetleniem E jest ilość promienistej energii padająca w jednostce czasu na jednostkę powierzchni (czyli mierzy się je w W/m^2). Jeżeli gwiazda świeci z całkowitą mocą M i w dodatku równomiernie we wszystkie strony (jak każda normalna gwiazda), to w odległości r oświetlenie wynosi tyle, co moc gwiazdy podzielona przez powierzchnię sfery o promieniu r , czyli $E = M/(4\pi r^2)$.

Od co najmniej dwóch tysięcy lat stosowana jest w astronomii skala, w której najjaśniejsze gwiazdy nieba zostały nazwane gwiazdami pierwszej wielkości, a najślabsze dostrzegalne nieuzbrojonym okiem – gwiazdami szóstej wielkości. Gdy pojawiły się

przyrządy mierzące oświetlenie, astronomowie postanowili skalę jasności uczynić obiektywną, tak jednak, by zachować starożytną umowę oznaczeń jasności gwiazd. Okazało się, że starożytni astronomowie nieświadomie zastosowali się do poznanego znacznie później fizjologicznego prawa (prawo Webera–Fechnera), zgodnie z którym wrażenie jest wprost proporcjonalne do logarytmu bodźca. We współczesnym zapisie ten ważny fakt przyrodniczy opisuje wzór: $m = -2,5 \log E + \text{const}$, gdzie m to owa wielkość gwiazdowa (m od słowa *magnitudo*), czyli po prostu widoma jasność gwiazdy. Wszystkie współczynniki mają swoje uzasadnienie. Minus jest dlatego, że słabszym gwiazdom (czyli mniejszym jasnościom) ma odpowiadać większe magnitudo. Liczba 2,5 wzięła się stąd, że nowoczesne pomiary wykazały, iż oświetlenie przez gwiazdę szóstej wielkości jest w dobrym przybliżeniu stokrotnie mniejsze od oświetlenia przez gwiazdę pierwszej wielkości; zatem stosunkowi oświetleń równemu 100 powinna odpowiadać różnica magnitudo równa 5. Wreszcie stała „const” powinna być tak dobrana, by oświetlenie zmierzone w jednostkach fizycznych w ogóle można było „przetłumaczyć” na wielkości gwiazdowe. Nie musimy się jednak o nią troszczyć, bo będziemy dalej zajmować się tylko różnicami jasności.

Możemy już precyzyjnie zapisać, jak magnitudo gwiazdy zależy od jej odległości. Gdyby gwiazdę dało się raz zobaczyć z odległości r_1 , a następnie z odległości r_2 , to jej wielkości gwiazdowe m_1 i m_2 spełniałyby związek: $m_1 - m_2 = 5 \log(r_1/r_2)$; wystarczyło podstawić dwukrotnie wyrażenie na E do wzoru na m i odjąć stronami. I teraz ważna definicja: jasnością absolutną (M) nazywa się taką jasność gwiazdy, jaką miałaby obserwowana z odległości 10 pc. Jasność gwiazdy M widoczna z ustalonej odległości jest już miarą mocy promieniowania gwiazdy (i użycie tego samego symbolu nie powoduje zamieszania). Jeżeli więc w ostatnim wzorze podstawimy $m_2 = M$ oraz $r_2 = 10$, to dostaniemy jeden z najważniejszych wzorów podstaw astronomii:

$$m - M = 5 \log r - 5.$$

Wzór ten umożliwia znalezienie odległości r (w parsekach!) gwiazdy o jasności absolutnej M , jeżeli jej jasność widoma wynosi m . Jak widać, M musi być znane skądinąd, a ponadto wzór obowiązuje, o ile światło po drodze od gwiazdy nie jest ani pochłaniane, ani rozpraszane, czyli gdy przestrzeń międzygwiazdowa jest pusta. Oczywiście, nigdy dokładnie tak nie jest i różnica $m - M$ (określona już przez odległość gwiazdy) jest dodatkowo powiększona o straty światła (ekstynkcję); oznaczmy je przez a . No to w końcu skąd wziąć jasność absolutną i jak uwzględnić ekstynkcję?

Na pierwsze pytanie nietrudno odpowiedzieć. Ostatni wzór może przecież równie dobrze służyć do określania jasności absolutnych gwiazd, których odległości wyznaczono wcześniej metodą paralaksy heliocentrycznej. I tak też było. Ponadto okazało się przy tym, że jasność absolutna gwiazdy jest dość precyzyjnie określona przez jej widmo. Tak powstał chyba najważniejszy w astronomii wykres, mianowicie diagram Hertzsprunga–Russella (tylna okładka). Obecnie wykorzystuje się go w przeciwną stronę. Mając widmo gwiazdy, z diagramu H-R odczytuje się jej jasność absolutną M (dlatego przedstawiona tu metoda nazywana jest metodą „paralaks spektroskopowych”), a zmierzwszy jasność widomą m bez trudu znajduje się jej odległość.

Możliwość uwzględnienia ekstynkcji na drodze od gwiazdy do obserwatora stworzyła sama natura, mianowicie materia międzygwiazdowa fałszuje jasności gwiazd rozmaicie w różnych zakresach promieniowania. Podobnie ziemska atmosfera: Słońce jest o zachodzie czerwone dlatego, że atmosfera rozprasza promieniowanie niebieskie, a czerwonego prawie nie. Wybierzmy trzy zakresy widma: nadfioletowy „U”, niebieski „B” i wizualny „V” (stanowią one popularny system fotometryczny UBV, a wszystkie jasności powinny zawsze być opatrzone stosownym indeksem, by było wiadomo, w jakim zakresie są określone). Z trzech jasności można

utworzyć dwie niezależne różnice – będą to tzw. wskaźniki barwy: nadfioletowy $U - B = m_U - m_B$ i niebieski $B - V = m_B - m_V$ (to są wskaźniki widome) oraz analogicznie $(U - B)_0 = M_U - M_B$ i $(B - V)_0 = M_B - M_V$ (a te są absolutne, czyli niezakłócone przez materię międzygwiazdową). Z kolei różnicę wskaźnika widomego i absolutnego nazywamy nadwyżką barwy: nadwyżka nadfioletowa to $E_{U-B} = (U - B) - (U - B)_0$, a niebieska to $E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0$. Właśnie materia międzygwiazdowa jest powodem, dla którego nadwyżki barw są wielkościami niezerowymi.

Niezwykle ważne było odkrycie, że materia międzygwiazdowa tak zmienia prawdziwe barwy gwiazd, że $E_{U-B} \approx 0,7 E_{B-V}$, a ekstynkcja w zakresie wizualnym wynosi $a_V \approx 3 E_{B-V}$. To właśnie te dwie liczby, 0,7 i 3, ofiarowała nam natura – wynikają one z fizycznych własności materii międzygwiazdowej. Praktycznie proces wyznaczenia odległości przebiega następująco. Z obserwacji otrzymujemy widmo gwiazdy i trzy jasności widome w trzech barwach. Znajomość widma oznacza znajomość M_V , a z trzech jasności tworzymy dwa widome wskaźniki barwy. Z diagramu dwuwskaźnikowego można wtedy odczytać, jakie są wskaźniki absolutne, a więc znamy też dwie nadwyżki barwy. Nadwyżka niebieska pomnożona przez 3 to ekstynkcja a_V , którą trzeba dopisać po prawej stronie podstawowego wzoru otrzymując

$$m_V - M_V = 5 \log r - 5 + a_V.$$

Rzeczywistość jest wprawdzie bardziej skomplikowana: określenie jasności absolutnej gwiazdy na podstawie widma może nie być proste, dwa współczynniki liczbowe są nieco różne w różnych obszarach nieba itd., ale idea samego pomiaru odległości gwiazd normalnych jest właśnie taka. A gwiazd nietypowych? O tym też w numerze.

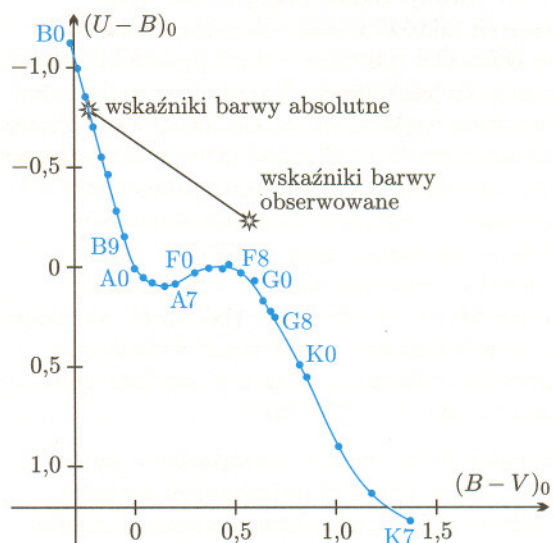


Diagram dwuwskaźnikowy dla gwiazd ciągu głównego i linia poczerwienienia – kierunek „fałszowania” barw gwiazd.

Niestandardowe gwiazdy jako świece standardowe

Bogdan WSZOŁEK

Wyznaczanie odległości ciał niebieskich, a galaktyk w szczególności, nie jest sprawą łatwą, ale ma dla astronomii ogromne znaczenie. Wiele współczesnych wysiłków astronomicznych jest w jakimś stopniu powiązane z problemem odległości. Dzieje się tak chociażby dlatego, że znajomość odległości obiektu jest konieczna dla ustalenia jego masy czy tempa produkcji energii – generalnie, jego cech fizycznych.



Choć używa się wielu metod określania odległości ciał niebieskich, to żadna z nich nie jest uniwersalna ani dość dokładna. Istnieje prawidłowość, że błędy określenia odległości obiektów coraz dalszych są coraz większe. U podstaw metody określania większych odległości leży bowiem zawsze jakaś metoda wyznaczania odległości mniejszych. Możliwość określania odległości obiektów najdalszych jest uwarunkowana stopniem znajomości odległości podobnych obiektów, ale trochę bliższych. Z kolei wyznaczenie odległości tych bliższych jest możliwe, gdy potrafimy określić odległości obiektów jeszcze bliższych. Każda z metod pośrednich wnosi typowe dla siebie, i na ogół spore, błędy. Im większa jest liczba pośrednich kroków koniecznych dla wyznaczenia odległości obiektu, tym błąd tego wyznaczenia będzie większy. Na dokładność wyznaczenia odległości najdalszych galaktyk będzie zatem mieć wpływ nawet błąd w określeniu odległości Ziemia-Słońce.

Zagadnienie wyznaczania odległości galaktyk można sprowadzić do problemu znalezienia odpowiednich tzw. świec standardowych. Rolę takiej świecy może spełniać dowolny obiekt o znanej absolutnej wielkości gwiazdowej. Jeśli bowiem oprócz mierzonej widomej wielkości gwiazdowej m takiej świecy dysponujemy informacją o jej absolutnym blasku M , to jesteśmy w stanie wyznaczyć jej odległość r (wyrażoną w parsekach), używając formuły nazywanej przez astronomów modułem odległości

$$m - M = 5 \log r - 5 + a(r),$$

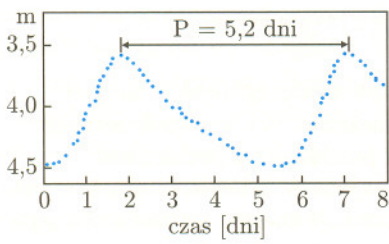
gdzie $a(r)$ oznacza tu, wyrażoną w wielkościach gwiazdowych, ekstynkcję promieniowania na drodze źródło-observator. Ekstynkcja jest osłabieniem blasku obiektu zależnym od rozpraszających i absorpcyjnych własności ośrodka międzygwiazdowego.

Przytoczony wzór ma podstawowe znaczenie przy określaniu odległości galaktyk. Widomą wielkość gwiazdową m otrzymujemy z bezpośredniego pomiaru jasności obiektu i błąd tego pomiaru jest na ogół niewielki. Wielkość absolutną obiektu określa się pośrednio i zazwyczaj obarczona ona jest sporym błędem. Ekstynkcję też wyznacza się metodami pośrednimi (o tym wszystkim w numerze) i nigdy nie jest znana zbyt dokładnie. Często jednak przyjmuje ona w ogóle małą wartość, a wtedy błąd jej wyznaczenia ma mały wpływ na dokładność określenia odległości.

Wyznaczanie odległości galaktyk z użyciem świec standardowych odbywa się według następującego schematu. Przede wszystkim należy wyróżnić jakąś grupę bliskich obiektów, których jasności absolutne dawałoby się określać i dla których zarazem istniałby związek między absolutnym blaskiem a jakimś parametrem łatwo mierzalnym, niezależnym od odległości. Grupą takich obiektów okazały się np. gwiazdy zmienne typu RR Lyrae (są to pulsujące olbrzymy typów widmowych od A2 do F2). Gwiazdy te są (absolutnie) około 100 razy jaśniejsze od Słońca i cechują się charakterystycznymi, krótkookresowymi (poniżej 1 doby) zmianami blasku. Na podstawie analizy zmienności gwiazd typu RR Lyrae, których odległości określono niezależnie, oceniono ich blask absolutny na 0 do 1 mag i stwierdzono, że bardzo słabo zależy on od okresu zmienności. Gwiazdy RR Lyrae są dzięki temu często wykorzystywanymi świecami standardowymi.

Chcąc wyznaczyć odległość konkretnej galaktyki, wykonuje się serię jej zdjęć, na których należy wyszukać pojedyncze gwiazdy (dla najbliższych galaktyk daje się to zrobić) i sprawdzić, które z nich w tej serii zachowują się w sposób typowy np. dla gwiazd RR Lyrae. Znalazłszy w galaktyce choćby jedną taką gwiazdę





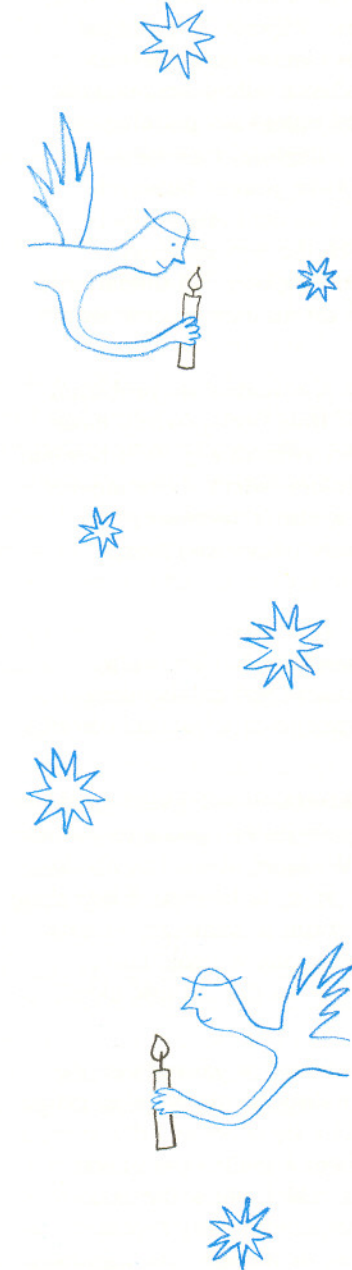
(aczkolwiek, oczywiście, znacznie lepiej jest, gdy znajdzie się ich więcej), pozostaje zmierzyć jej jasność widomą, ocenić ekstynkcję i skorzystać ze wzoru na moduł odległości.

Oprócz gwiazd typu RR Lyrae rolę świec standardowych grają też gwiazdy zmienne typu δ Cephei (tzw. cefeidy klasyczne), gwiazdy nowe oraz supernowe. Cefeidy, podobnie jak gwiazdy omawiane poprzednio, są pulsującymi olbrzymami lub nadolbrzymami o typach widmowych zawartych w dużym przedziale od F6 do K2 (typowy przebieg jasności cefeidy przedstawia rysunek). W rytmie regularnych pulsacji zachodzą w nich silne zmiany temperatury i prędkości radialnej (wskutek unoszenia się i opadania powierzchni gwiazdy). Gwiazdy te cechuje duża jasność absolutna (do około 10 000 jasności Słońca). Stwierdzono u nich też wyraźną zależność długości okresu zmian blasku od jasności absolutnych. Dłuższemu okresowi P (dla cefeid klasycznych zawiera się on w przedziale od 1 do 100 dób) odpowiada większa jasność absolutna M ; zależność ta daje się opisać fenomenologicznym wzorem $M = a + b \log P$, gdzie a i b są stałymi, które wyznacza się na podstawie obserwacji bliskich cefeid o znanych skądinąd odległościach. M jest tu absolutną wielkością gwiazdową cefeidy uśrednioną względem cyklu. Proces wyznaczania stałych a i b jest obciążony błędem wynikającym głównie z braku dokładnej znajomości odległości chociażby jednej cefeidy. Powyższą relację odkryto na podstawie obserwacji cefeid w Małym Obłoku Magellana, którego odległość (około 55 kpc) – jak się wydaje – do dziś nie jest znana z zadowalającą dokładnością, a o jej polepszenie stara się niejeden zespół badaczy. Nadto pewien wpływ na błąd (głównie stałej b) ma fakt, że wszystkie cefeidy w tej pobliskiej galaktyce uznaje się za równoodległe od Ziemi, choć przecież tak nie jest.

Mimo tych wszystkich błędów metoda wyznaczania odległości galaktyk z użyciem cefeid jest najdokładniejsza. Gdy w jakiejś galaktyce daje się znaleźć kilkadziesiąt cefeid, to błąd określenia odległości może zejść poniżej 10%. Chociaż cefeidy są łatwiej dostrzegalne w galaktykach niż słabsze od nich wspomniane gwiazdy typu RR Lyrae, to i tak z ich użyciem daje się wyznaczyć odległości zaledwie kilkunastu najbliższych galaktyk. Nawet używając Kosmicznego Teleskopu Hubble'a, nie jesteśmy w stanie dostrzec cefeid w galaktykach dalszych niż około 15 Mpc.

W galaktykach odleglejszych jako świece standardowe wykorzystuje się gwiazdy nowe i supernowe. Gwiazdy nowe doznają gwałtownych (w przeciągu kilku dni) pojaśnień do pewnej, i co ważne, z grubsza jednakowej jasności absolutnej (około 100 000 razy przewyższającej blask Słońca, czyli do $M = -8$ mag), po czym bledną i po kilku miesiącach przestają być widoczne. Jeśli uda się zarejestrować w jakiejś galaktyce gwiazdę nową w maksimum jej blasku, to znowu ze wzoru na moduł odległości można określić przybliżoną odległość galaktyki. Zupełnie podobnie rzecz się ma z gwiazdami supernowymi. Zdarzają się one jednak znacznie rzadziej niż gwiazdy nowe, za to absolutny blask tych wybuchających gwiazd osiąga na krótki czas wartość kilka miliardów razy przewyższającą blask Słońca. Inaczej mówiąc – gwiazda taka w fazie wybuchu świeci z mocą porównywalną z mocą całej galaktyki, czyli jej jasność absolutna wynosi w przybliżeniu $M = -18$ mag. Istnieją dwa główne typy supernowych, a można je rozpoznać przez śledzenie przebiegu zmian blasku gwiazdy w ciągu kilku miesięcy po wybuchu. W ramach każdego typu maksymalny blask supernowej jest w przybliżeniu taki sam, a określono go, oczywiście, na podstawie obserwacji gwiazd tego rodzaju w galaktykach o znanych skądinąd odległościach. Typ I to dość jednorodna grupa eksplodujących białych karłów o masie bliskiej tzw. masie Chandrasekhara, która zostaje przekroczona w wyniku akrecji materii gwiazdy towarzyszącej. Typ II to zapadające się i zaawansowane w ewolucji gwiazdy o dużej masie.

Używając tych gwiazd jako świec standardowych, można ocenić odległości galaktyk położonych nie dalej niż około 200 Mpc. Większość jednak galaktyk dostępnych współczesnym obserwacjom znajduje się znacznie dalej. Ich odległości, mierzone w gigaparsekach, wyznacza się innymi, jeszcze mniej dokładnymi metodami.



Nowa – eksplozja powierzchniowej warstwy białego karła, której materia pochodzi od rozdętej gwiazdy towarzyszącej. Zjawisko powtarzalne.

Supernowa – eksplozja masywnej zaawansowanej ewolucyjnie gwiazdy (ewentualnie poprzedzona zapadnięciem się jej wnętrza).



Echa

Nie pamiętam już kto – dziadkowie czy rodzice – nauczyli mnie przed wielu laty mierzenia odległości do miejsca uderzenia pioruna. A mogło to mieć wpływ na samopoczucie podczas letniej burzy, gdy byłem akurat na wakacjach u dziadków. W momencie błysku należało zacząć odliczanie i przerwać je w chwili usłyszenia grzmotu. Jeżeli odliczało się raz na sekundę, to liczba zliczonych trójek sekund była równa odległości pioruna w kilometrach. Wszak dźwięk porusza się w powietrzu z taką właśnie prędkością, że na przebycie kilometra potrzebuje trzech sekund.

Odległość obiektu „milczącego” można zmierzyć dźwiękiem, wykorzystując echo. Wiadomo, że krótki krzyk może powrócić – nieraz w bardzo mało zmienionej postaci – po odbiciu od ściany lasu lub góry (jeżeli pominąć zasadę, że w górach w ogóle wrzeszczeć nie należy, bo można zagłuszyć czyjeś wołanie o pomoc). Oczywiście odległość takiej ściany to prędkość dźwięku pomnożona przez połowę sekund od krzyku do powrotu echa.

Całkiem instynktownie na tej zasadzie orientują się w przestrzeni nietoperze. Nietoperz podczas lotu nieustannie wydaje krótkie piski ultradźwiękowe i nasłuchuje ich odbić, dzięki czemu doskonale lata również w ciemnościach. Dźwięk słabo odbija się np. od bujnej fryzury i nietoperz może jej nie zauważyć, ale łysym uderzenie przez nietoperza na pewno nie grozi.

Echo dźwiękowe ma w technice mnóstwo zastosowań. Ultradźwiękowa echosonda słuchając echa odbitego od dna, mierzy głębokość morza, ale równie dobrze może lokalizować ławice ryb pod statkiem lub obecność okrętu podwodnego. Ultradźwiękowy defektoskop wykrywa pęknięcia wewnątrz bloków metalowych lub kamiennych. A ultrasonograf umie nawet przetworzyć echo odbierane z różnym opóźnieniem z różnych kierunków na obraz organów wewnętrznych człowieka. Chyba nie trzeba dowodzić, jak wielkim dobrodziejstwem jest możliwość błyskawicznego i bezbolesnego postawienia diagnozy.

A absolutny rekord dokładności pomiaru odległości należy do echa świetlnego. Atomowe zegary wprawdzie mierzą czas z dokładnością nie gorszą niż jedna bilionowa, nie oznacza to jednak, że aż z taką dokładnością można zmierzyć czas przelotu błysku laserowego do „lusterka” i z powrotem. Niemniej jednak metodą laserową mierzy się teraz odległość Księżyca z dokładnością nie gorszą niż jeden metr, czyli do około jednej miliardowej. Jest to więc pomiar odległości nie tyle Księżyca od Ziemi, ile konkretnego lusterka, zostawionego na Księżycu przez astronautów, od konkretnego lasera na Ziemi!

Pierwsze trzy dekady XX wieku można traktować jako przełomowe dla rozpoznania skali odległości w otaczającym nas świecie. Najpierw odkryto fakt istnienia naszej Galaktyki i oceniono jej rozmiary. Posłużono się tu głównie gwiazdami typu RR Lyrae i cefeidami jako wskaźnikami odległości. Zaraz potem odkryto istnienie innych galaktyk, a odkrycie sprowadzało się do wyznaczenia przybliżonych odległości niektórych, wcześniej bardzo dobrze już znanych mgławic.

Na te sukcesy złożyły się obserwacje głównie trojga astronomów. Pani Henrietta Leavitt odkryła duże ilości cefeid i gwiazd typu RR Lyrae. Harlow Shapley dokonał kalibracji cefeid, tj. ocenił ich rzeczywiste odległości. Wreszcie Edwin Hubble w gruncie rzeczy odkrył galaktyki, a dokładniej – wykazał, że owe mgławice to właśnie ogromne zbiorowiska gwiazd.

Odległości około 25 galaktyk, w których obserwowano cefeidy (a także inne gwiazdy również służące za wskaźniki odległości – gwiazdy nowe czy gorące gwiazdy typu O), wyznaczono stosunkowo łatwo. Sposób na wyznaczanie odległości galaktyk odleglejszych pojawił się z chwilą odkrycia przez Hubble’a zależności między odległościami galaktyk a tzw. przesunięciem ku czerwieni, nazywanym też z angielska *redshiftem*. Zanim jednak podamy tę zależność, spróbujmy przybliżyć samo pojęcie redshiftu.

Kiedy obserwacje spektroskopowe galaktyk stały się normalną praktyką, okazało się, że w spektrogramach tych obiektów dają się wyróżnić pewne charakterystyczne linie widmowe. W wyniku porównywania z widmami laboratoryjnymi dokonano identyfikacji tych linii, tj. ustalono, jakie pierwiastki (lub ich jony) odpowiadają za powstawanie obserwowanych linii w widmach galaktyk. Wnet zauważono, że położenia linii określonych pierwiastków w widmach galaktyk nie odpowiadają ściśle liniom tychże pierwiastków w widmach laboratoryjnych i że są one przesunięte względem oczekiwanych położenia na ogół w stronę fal dłuższych, jak to schematycznie przedstawiono na rysunku 1.

Pierwsze spektrogramy galaktyk obejmowały zakres optyczny, zatem przesunięcia linii w kierunku fal dłuższych były jednocześnie przesunięciami ku czerwieni (czerwień jest bowiem długofalowym końcem widzialnego zakresu fal elektromagnetycznych). Za miarę przesunięcia ku czerwieni przyjęto parametr z zdefiniowany jako

$$z = \frac{\lambda_G - \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

gdzie λ_G i λ oznaczają długości fal środków

odpowiadających sobie linii w widmie galaktyki i w widmie laboratoryjnym. Okazało się, że różne linie w widmie wybranej galaktyki są tak przesunięte względem ich laboratoryjnych odpowiedników, że $z = \text{const}$. Oznacza to, że jeśli np. linii laboratoryjnej $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ odpowiada w widmie galaktyki linia $\lambda_G = 6030 \text{ \AA}$, to linii $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ odpowiada $\lambda_G = 4020 \text{ \AA}$, a linii radiowej $\lambda = 21 \text{ cm}$ odpowiadałaby $\lambda_G = 21,1 \text{ cm}$. Każda z linii przesunięta jest o inną wartość ($\Delta\lambda$: 30 \AA , 20 \AA , $0,1 \text{ cm}$), ale parametr z jest w każdym przypadku taki sam i dla całego widma wynosi 0,005. Ta cecha tego parametru z oznacza, że można go wyznaczać na podstawie dowolnej (zidentyfikowanej) linii, niezależnie od tego, czy jest to linia w nadfioletowej, optycznej, radiowej czy w jeszcze innej części widma.

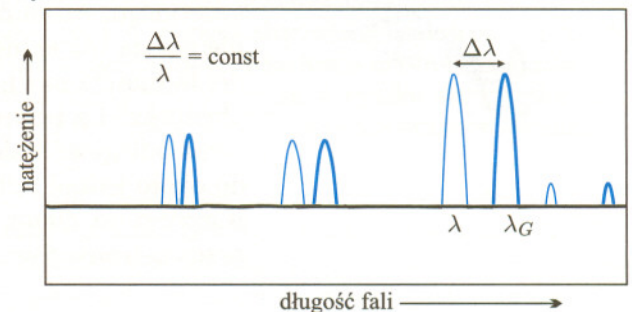
Uważa się, że obserwowane przesunięcia linii w widmach galaktyk powstają (przynajmniej częściowo) w wyniku tzw. efektu Dopplera dla fal elektromagnetycznych. Zjawisko Dopplera polega na tym, że jeśli źródło fal oddala się od obserwatora, to obserwator odbiera fale „rozciągnięte”, zatem obserwowane widmo zostaje przesunięte w stronę fal dłużych, tj. „poczerwienione”. Przy zbliżaniu się źródła obserwator odbierze fale „ściśnięte”, a więc widmo źródła zostanie przesunięte w stronę fal krótkich, „poniebieszczone”. Przesunięcie linii widmowych przy prędkości v wywołane tym zjawiskiem wyraża się wzorem

$$z = \sqrt{\frac{1 + v_r/c}{1 - v_r/c}} - 1,$$

gdzie v_r oznacza radialną składową prędkości źródła względem obserwatora (jest ona dodatnia, gdy źródło się oddala); c jest prędkością światła. W przypadku prędkości radialnych v_r , znacznie mniejszych od c , wzór powyższy przyjmuje prostą, przybliżoną postać $z = v_r/c$.

W 1929 r. Hubble opublikował wyniki pierwszych pomiarów odległości i przesunięć ku czerwieni dla 24 galaktyk znajdujących się nie dalej niż około

Rys. 1



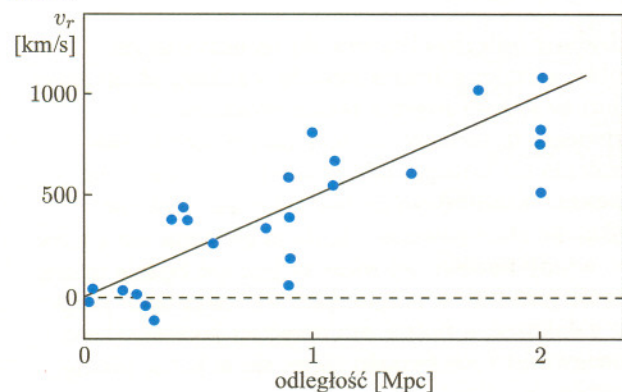
24 Mpc od Ziemi (rys. 2). Zamiast parametru z na osi rzędnych Hubble odłożył prędkości radialne, sugerując tym samym dopplerowską interpretację przesunięć ku czerwieni i przyjmując $v_r = zc$. Wypada zwrócić uwagę na fakt, że Hubble opublikował swój słynny diagram nie tyle w kontekście wyznaczania odległości galaktyk na podstawie zmierzonych przesunięć ku czerwieni, co w kontekście czysto kosmologicznym. W środowiskach ówczesnych fizyków teoretyków i kosmologów istniało bowiem ogromne zapotrzebowanie na jakikolwiek obserwacyjny argument za świeżo wtedy lansowanym modelem Wszechświata ekspandującego.

Linia prosta najlepiej dopasowana do punktów na diagramie ilustruje liniową relację wiążącą odległość galaktyki z jej prędkością radialną (zwaną też prędkością ucieczki), która jest treścią słynnego prawa Hubble'a: $v_r = Hr$. Występującą tu prędkość wyraża się zazwyczaj w km/s, a otrzymuje się ją (gdy $v_r \ll c$) z definicji przesunięcia ku czerwieni, czyli jako $v_r = zc$. Odległość r galaktyk najwygodniej wyraża się w megaparsekach, zatem stała Hubble'a H musi mieć wymiar km/(s·Mpc).

Prawo Hubble'a jest nie tylko wyrazem bardzo ważnego faktu kosmologicznego, lecz – co nas akurat interesuje – jest też narzędziem do określania odległości galaktyk. Wystarczy dla danej galaktyki uzyskać jej widmo odpowiedniej jakości (trzeba jednak zdawać sobie sprawę z tego, że dla otrzymania widma o wymaganej tu jakości potrzebny jest duży teleskop wyposażony w dobrej klasy spektrograf) i zmierzyć jego przesunięcie ku czerwieni na podstawie zidentyfikowanych linii. Niemniej w odniesieniu do bardzo odległych, a więc słabych galaktyk, zarówno procedura otrzymywania, jak i analizy widma może nastroczać sporo kłopotów.

Słabą stroną metody wyznaczania odległości z użyciem prawa Hubble'a jest niepewność co do wartości samej stałej H . Pierwsze wyznaczenie tej stałej dało wartość 500 (można to odczytać z rysunku 2). W wyniku udoskonalenia metod określania odległości galaktyk średnio odległych (np. z użyciem gwiazd supernowych

Rys. 2.



jako wskaźników odległości) ustalono, że stała Hubble'a na pewno zawiera się w przedziale między 50 a 100. Tak duża niepewność jest nie do zaakceptowania przy rozważaniu wielu aspektów astrofizycznych dotyczących galaktyk – co prawda ten przedział niepewności został ostatnio mocno zawężony. Mimo wszystko nadal szuka się innych sposobów określania odległości dalekich obiektów. Już sama jasność widoma galaktyki może być w przybliżeniu wskaźnikiem jej odległości, o ile, oczywiście, znana byłaby jej jasność absolutna (patrz artykuł o świecach standardowych). Tymczasem jasności absolutne galaktyk eliptycznych zawierają się w bardzo szerokich granicach: od $-8,5$ mag dla karłowatych dE, do -25 mag w przypadku olbrzymich cD. Jasności galaktyk spiralnych zawierają się między -17 a -22 mag. W rezultacie bardzo trudno jest ocenić moc promieniowania konkretnej galaktyki i błąd wyznaczenia odległości tą metodą jest ogromny. Podobnie wykorzystuje się rozmiary kątowe galaktyk: odleglejsze powinny być średnio mniejsze kątowo. Trzeba jednak znać skądinąd ich rzeczywiste rozmiary, których rozrzut też jest bardzo duży. Te ostatnie dwie metody stosowane są więc raczej do całych grup galaktyk (czyli statystycznie), a nie do konkretnego obiektu i obarczone są jeszcze większą niepewnością niż metoda z wykorzystaniem prawa Hubble'a. Sprawy pogarszają również rozmaite, zależne od odległości efekty selekcji, których nie daje się uwzględnić przy doborze próbek obiektów. Niemniej jednak odległości wyznaczone na podstawie tego rodzaju wskaźników są dobrze skorelowane z odległościami określonymi z prawa Hubble'a. Fakt ten można uznać za dowód poprawności metody z użyciem przesunięć ku czerwieni.

Jeszcze innym wskaźnikiem odległości, jak pokazali Brent Tully i Richard Fisher, może być wielkość poszerzenia dopplerowskiego linii widmowych galaktyk, np. stosunkowo łatwej do zaobserwowania radiowej linii neutralnego wodoru $\lambda = 21$ cm. Okazało się bowiem, że im galaktyka jest jaśniejsza w sensie absolutnym, tym szybciej rotuje. Szerokość profili linii widmowych galaktyk (ale tylko tych, które są względem obserwatora ustawione bokiem, czyli widać je w przybliżeniu z krawędzi) w pewnej mierze odzwierciedla prędkość ich obrotu. Łatwo się domyślić, że odległości wyznaczone tą metodą też są obarczone dużymi błędami.

Poszukiwanie innych, dokładniejszych metod określania odległości bardzo dalekich galaktyk i ich skupisk jest bardzo pożądane, chociażby dla sprawdzenia zakresu stosowalności prawa Hubble'a, czy też dla ewentualnego zawężenia przedziału nieokreśloności występującej w nim stałej H .

Stała Hubble'a – jak dokładnie ją znamy?

Andrzej MARECKI



Rozwiązanie zadania F 557.

Masa metra sześciennego wody wynosi 10^3 kg, a kilometr wody (czyli 18 kg) zawiera $N = 6 \cdot 10^{26}$ cząsteczek wody. Zatem metr sześcienny wody zawiera $N = 6 \cdot 10^{26} \cdot 10^3 / 18 = 3,3 \cdot 10^{28}$ cząsteczek. Średnia odległość między cząsteczkami wynosi więc $d = 1 / \sqrt[3]{N} \approx 3,1 \cdot 10^{-10}$ m. Średnia siła wzajemnego oddziaływania ma wartość

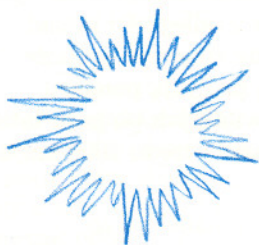
$$F \approx \frac{6p_e^2}{4\pi\epsilon_0 d^3} = 6,7 \cdot 10^{-20} \text{ N.}$$

O tym, jak fundamentalną rolę w astronomii pełni stała Hubble'a, nie trzeba nikogo przekonywać. Z jej znaczeniem zupełnie jednak „nie licuje” dokładność, z jaką ją znamy. Nic dziwnego zatem, że szukanie sposobów na znalezienie poprawnej wartości tej stałej absorbowało i nadal absorbuje astronomów i w rezultacie ich poszukiwań metod tych znamy dziś wiele. Amerykański kosmolog, Edward L. Wright, w swoim bardzo przystępnym wykładzie z kosmologii (www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm) wymienia ich aż 26.

Dlaczego jest ich tyle i żadna z nich nie jest doskonała? Otóż, zasadnicza trudność z wyznaczeniem stałej Hubble'a wynika z prostej, lecz niebanalnej okoliczności: z ogromu Wszechświata. Pół biedy, gdy chcemy wyznaczyć odległość Księżyca. Przewyższa ona – powiedzmy – wzrost człowieka 200 mln razy. Sporo, jeśli zauważyć, że tyle wynosi stosunek rozmiarów największych do najmniejszych organizmów żywych (odpowiednio: drzewa i wirusy). Ale ta odległość jest wprost śmieszna na tle ogromu Kosmosu. Aby uzmysłowić sobie rozmiary Układu Słonecznego, trzeba dopisać do owych 200 milionów jeszcze cztery zera, odległości najbliższych gwiazd – kolejne cztery, a następne cztery (to już będzie razem dwanaście dodatkowych zer!) dadzą nam stosunek odległości między Słońcem a centrum Galaktyki do wzrostu człowieka. A przecież Galaktyka to tylko mała wysepka świecącej materii oddalona od innych podobnych wysepki tak bardzo, że światło na przemierzenie tych przestrzeni zużywa w skrajnych przypadkach znaczny odsetek – nawet do 90% – całego wieku Wszechświata. Co to oznacza dla „mierniczych” Wszechświata? Otóż to, że nie ma uniwersalnej metody, która by była odpowiednia do pomiarów wszelkich odległości we Wszechświecie. Zupełnie inaczej wyznaczamy odległość do Księżyca, planet, gwiazd w naszej Galaktyce, czy wreszcie do innych galaktyk. I właśnie umiejętność wyznaczania tych ostatnich była niezbędna Edwinowi Hubble'owi do tego, by odkryć słynne prawo proporcjonalności prędkości ucieczki galaktyk v do ich odległości r , nazwane jego imieniem: $v = Hr$. Współczynnik proporcjonalności H , czyli stała Hubble'a, miała według niego (1929 r.) wynosić ponad 500 km/(s·Mpc). Dziś wiemy, że wartość ta jest zupełnie nie do przyjęcia, bo oznaczałaby wiek Wszechświata na poziomie 2 mld lat, a więc mniej nawet niż wiek Ziemi liczony od momentu zestalenia się skorupy ziemskiej: 3,8 mld lat, co w sposób pewny wyznacza się metodami izotopowymi, niemającymi związku z astronomią. Ale nie miejmy za złe Hubble'owi jego pomyłki. Błędy systematyczne wyznaczania stałej Hubble'a są poniekąd wbudowane w sam ów proces wyznaczania i są popełniane aż po dzień dzisiejszy, czego najlepszym przykładem jest najnowsza korekta jej wyznaczenia, która miała miejsce... w grudniu 2000 r. Przyczyną tych błędów jest wielostopniowość procesu wyznaczania odległości galaktyk i akumulowania się zbieranych „po drodze” błędów cząstkowych. Ogrom tych odległości sprawia bowiem, iż kalibrowanie kosmicznych „taśm mierniczych” odbywa się na podstawie innych uprzednio skalibrowanych wzorców, te zaś określa się w jeszcze innych procesach pomiarowych itd. Hierarchiczną strukturę pomiarów, zwaną – bardzo trafnie, choć nieco żargonowo – „drabiną odległości”, cechuje zatem kumulowanie się i zgoła lawinowe narastanie błędów na coraz wyższych jej szczeblach.

Konstrukcja owych szczebli drabiny odległości opiera się na oczywistym rozumowaniu. Wyobraźmy sobie, że mamy źródła światła o znanej identycznej mocy, czyli tzw. świece standardowe. Jeśli jeden z takich obiektów jest np. cztery razy słabszy od drugiego, to oznacza, że leży on po prostu dwa razy dalej (jasność widoma zmienia się bowiem odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości). Świecami standardowymi będą dla astronomów niewątpliwie jakieś gwiazdy. Ba, ale skąd pewność, że dana gwiazda ma z góry znaną, „standardową” moc? – wtedy bowiem jej widoma jasność będzie miarą tylko jej odległości. I czy w ogóle jesteśmy w stanie dostrzec i wyróżnić jakąś konkretną gwiazdę w odległej galaktyce, a potem zmierzyć jej jasność, skoro galaktyki mają setki miliardów gwiazd i ich światło zlewa się w jedną plamę?

Otóż takimi świecami standardowymi są np. cefeidy, olbrzymie i bardzo jasne pulsujące gwiazdy zmienne, w dodatku których jasność absolutną, czyli moc



promieniowania, można z niezłą dokładnością ocenić, obserwując ich okres zmian blasku (patrz strona 6). Mimo że są one jakieś 10 tysięcy razy jaśniejsze od Słońca, są wciąż na tyle słabe, iż nawet największymi teleskopami udaje się je dostrzec i pomierzyć ich parametry tylko w kilku najbliższych galaktykach. Mając już odległości tych galaktyk, należy poszukać w nich innych wzorcowych cech czy obiektów i teraz na podstawie nich określać odległości galaktyk jeszcze dalszych, czyli przejść na następny szczebel „drabiny odległości”. Oznacza to niechybnie przede wszystkim jedno: kolejne niedokładności. Nic więc dziwnego, że jeszcze dziesięć lat temu technika określania odległości we Wszechświecie była na tyle niepewna, iż w zależności od tego, jak dana grupa badaczy konstruowała sobie swoją drabinę, takie otrzymywała wyniki. Zasadniczy spór w tej materii wiodły dwie grupy: de Vaucouleursa i Sandage’a. Stała Hubble’a podana przez pierwszą z nich miała 100 km/(s·Mpc), a przez drugą – tylko 50 km/(s·Mpc), zatem rozbieżność była ni mniej ni więcej tylko dwukrotna. Cóż za frustrująca sytuacja!

Wyjście z tego impasu umożliwił Kosmiczny Teleskop Hubble’a (*Hubble Space Telescope* – HST). Dzięki temu, że znajduje się on na orbicie i nie przeszkadza mu atmosfera Ziemi, a do tego jest po prostu wielkim i doskonałym teleskopem, może on zobaczyć znacznie słabsze obiekty niż dotychczas obserwowane. Nie pozostawało zatem nic prostszego, jak zacząć szukać cefeid przy użyciu HST w znacznie dalszych galaktykach, niż to było dotychczas możliwe w obserwatoriach naziemnych, a przez to uniknąć konstrukcji dodatkowego szczebla drabiny odległości i nowych związanych z tym błędów. Projekt takich poszukiwań stał się priorytetowym programem HST – został nazwany Projektem Kluczowym (HST-KP) i niedawno został oficjalnie zakończony. W jego ramach dokonano obserwacji 800 cefeid w 18 galaktykach znajdujących się w odległościach do 20 Mpc. Rezultat ogłoszony w 1999 r. brzmiał: stała Hubble’a wynosi 70 km/(s·Mpc) z błędem na poziomie 10%.

Mimo zakończenia HST-KP poszukiwania „prawdziwej” wartości stałej Hubble’a wciąż trwają, zwłaszcza że cytowany wyżej błąd jest nadal spory. Opracowywane są nowe metody jej wyznaczania. Astronomowie zdają sobie sprawę z tego, że drabina odległości to podstawowe źródło wszelkich błędów tych wyznaczeń, więc szans upatrują w tzw. metodach bezpośrednich. Są one bardzo wyrafinowane i możliwe tylko dzięki najnowszej technologii zaprzęgniętej do prowadzenia obserwacji. Pomiar odległości jedną z takich metod stał się źródłem nie lada sensacji latem 1999 r. i spowodował ogromną konfuzję: już, już wydawało się, że wszystko będzie dobrze i problem określania odległości we Wszechświecie można będzie uznać za rozwiązany, a tu nagle...

Jedną z ważnych własności galaktyk – *nota bene* z uniwersalności której zdajemy sobie sprawę dopiero od niedawna – jest to, że w ich centrach znajdują się supermasywne czarne dziury. Słowo „supermasywne” oznacza tu, że ich masy to co najmniej miliony mas Słońca. Czarna dziura to obiekt z definicji niewidoczny, ale zdradzający swą obecność dzięki monstrualnemu polu grawitacyjnemu, jakie wytwarza. Inne ciało znalazłszy się w takim polu ma „do wyboru” albo wpaść do dziury i przepaść na zawsze w jej wnętrzu, albo bardzo szybko obiegać ją po jakiejś orbicie. Ziemi np. wystarczy biec z prędkością 30 km/s po swojej orbicie, żeby nie spaść na Słońce. Ze względu na zawrotne natężenie pola wokół galaktycznej czarnej dziury obiekt obiegający ją po orbicie o promieniu nawet dziesiątki tysięcy razy większym niż promień orbity ziemskiej musi pędzić z prędkością rzędu 1000 km/s.

Okazuje się, że takie obiekty istnieją. Co o nich wiemy? Otóż, wiemy przynajmniej tyle, iż są dość małych rozmiarów – mniejszych niż Układ Słoneczny – i że emitują fale radiowe. Źródłem tej emisji jest woda – poznajemy to po widmie owego promieniowania, a obiekty te nazywamy maserami wodnymi. Metoda pomiaru odległości wykorzystuje to, że po pierwsze mierzymy prędkości maserów na podstawie efektu Dopplera, a po drugie śledzimy ich ruchy. W niezwykle wyrafinowanych obserwacjach radiowych mamy bowiem możliwość mierzenia nieprawdopodobnie wręcz małych przesunięć kątowych,



Rozwiązanie zadania F 558.

W nieruchomym ośrodku prędkość światła wynosi $u = c/n$. Jeśli ośrodek zbliża się z prędkością v do źródła światła, prędkość światła w ośrodku wynosi wtedy

$$u' = \frac{u + v}{1 + uv/c^2} = \frac{c/n + v}{1 + v/(cn)},$$

a jeśli się oddala:

$$u'' = \frac{c/n - v}{1 - v/(cn)}.$$

Czas rozprzestrzeniania się światła zgodnie ze strumieniem cieczy wynosi

$$t_1 = \frac{2l}{u'} = \frac{2l(1 - v/(cn))}{c/n - v},$$

a dla światła biegnącego „pod prąd” mamy

$$t_2 = \frac{2l}{u''} = \frac{2l(1 + v/(cn))}{c/n + v}.$$

Różnica czasów wynosi

$$\tau = t_1 - t_2 = \frac{4lv(1 - 1/n^2)}{c^2/n^2 - v^2}.$$

Uwzględniając, że $c \gg v$, otrzymujemy

$$\tau = \frac{4lv}{c^2}(n^2 - 1).$$

rzędu zaledwie dziesięciotysięcznej sekundy łuku. Pod takim kątem widać (jeśli w ogóle można by coś takiego zobaczyć) jeden milimetr z odległości ponad 2000 km. Albo inaczej: tak subtelna metoda pozwalałaby zmierzyć grubość włosa z odległości Warszawa-Kraków. Dysponując taką precyzją pomiaru możemy nawet w obiektach oddalonych o miliony lat świetlnych po paru latach obserwacji dostrzec, że chmura poruszająca się z prędkością rzędu 1000 km/s nieco się przemieściła.

Metodę tę udało się zastosować do galaktyki NGC 4258 (znanej także jako M 106). W jej centrum rezyduje czarna dziura o masie 39 mln mas Słońca, a wokół niej na orbitach o promieniach od 33 tys. do 58 tys. j.a. poruszają się chmury zawierające masery wodne. Od 1994 r. przez kilka lat śledzono ruchy takich chmur w NGC 4258 i 5 sierpnia 1999 r. opublikowano w *Nature* wyniki tych badań. Okazało się, iż odległość NGC 4258 wynosi 7,2 Mpc z błędem zaledwie 4%, co jest najdokładniejszym dotąd wyznaczeniem tak wielkiej odległości. Oczywiście łatwo się domyślić, co zrobiono natychmiast po uzyskaniu tego wyniku: skonfrontowano go z pomiarem metodą cefeid dokonany za pomocą HST i okazało się, iż wynosi ona dla NGC 4258... 8,6 Mpc. Różnica jest znaczna, gdzie zatem tkwi błąd?

Podejrzenie padło na metodę cefeid i oparty o nią HST-KP. Zespół naukowców pracujący nad tym projektem natychmiast zabrał się za szukanie błędu w swoich obliczeniach. Po ponad roku pracy ogłoszono kolejną korektę w wyznaczeniu stałej Hubble'a – aktualna wartość to 72 km/(s·Mpc), a więc nieco więcej niż poprzednio uznana przez tę samą grupę. To sprawiło, że wyznaczenia odległości dla NGC 4258 obiema metodami zbliżyły się na tyle, iż (z biedą, ale jednak) lokują się w granicach swoich błędów losowych. W taki oto sposób metoda bezpośrednia wykazała swoją zdecydowaną wyższość – właśnie to wyznaczenie okazało się od początku poprawne!

Zakończenie HST-KP zamyka pewien rozdział w poszukiwaniach metod pomiaru odległości we Wszechświecie i wyznaczania stałej Hubble'a. Nadziejemy na poprawienie dokładności, przy jednoczesnym zachowaniu lub nawet powiększeniu zasięgu, pokładać więc należy w metodach bezpośrednich. Obecnie znane są tylko nieliczne takie metody, jak choćby ta z maserami wodnymi. Czyżby więc nadal trzeba było poszukiwać nowych metod? Wygląda na to, że tak, zatem trwający już ponad 70 lat permanentny konkurs na pomysły, jak wyznaczyć stałą Hubble'a, pozostaje nadal otwarty.



Zadania



Redaguje Łukasz WIECHECKI

Wydawałoby się, że wyobraźnia matematyka nie zna granic. A jednak...

M 967. Ciąg (a_n) spełnia warunki: $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

Rozwiązanie na str. 1

M 968. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) , który spełnia dla każdego $n \geq 1$ równanie rekurencyjne $a_{n+1} = (1 - \frac{1}{m})a_n + \frac{a}{ma_n - 1}$, gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią, $a > 0$. Wykazać, że ciąg ten jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

Rozwiązanie na str. 1

M 969. Ciąg (a_n) określony jest następująco: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ dla wszystkich $n \geq 1$. Znaleźć taką najmniejszą liczbę dodatnią k , że ciąg $(\frac{a_n}{n^k})$ jest zbieżny. Dla znalezionej k obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^k}$.

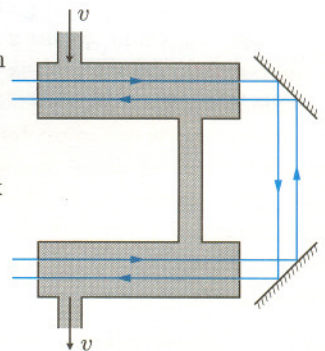
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 557. Cząsteczka wody może być w pierwszym przybliżeniu traktowana jako dipol o momencie elektrycznym $p_e = 6,1 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$. Oszacować siłę przyciągania się dwóch cząsteczek wody. Rozwiązanie na str. 10

F 558. W doświadczeniu Fizeau użyte zostały dwie wiązki świetlne: jedna w kierunku zgodnym z kierunkiem płynącej cieczy, a druga w kierunku przeciwnym (rysunek). Wiedząc, że długość każdej rurki jest l , prędkość cieczy v i współczynnik załamania n , znaleźć różnicę w czasie propagacji obu wiązek świetlnych.

Rozwiązanie na str. 11



Starych filmów czar

Pomiar odległości dalekich obiektów astronomicznych jest jednocześnie pomiarem czasu, jaki upłynął od momentu, który obserwujemy. Niosące informację fotony mogły lecieć miliardy lat. Cóż wobec tego znaczy kilkuletnie opóźnienie w publikacji wyników [1,2]? Jednak w naszym rozpadzonym świecie trochę może to dziwić. Pojawia się podejrzenie, że coś innego niż „opieszalność” badaczy stało na przeszkodzie. Rzeczywiście, coraz większym problemem we współczesnej astronomii staje się magazynowanie i przetwarzanie olbrzymich zasobów informacji uzyskiwanych w trakcie obserwacji. Czasem, dodatkowo, potrzebne jest jeszcze trochę szczęścia.

Identyfikacja gwiazdy SN 1997ff, jako najdalszej supernowej typu Ia o poczerwienieniu (redshift) $z = 1,7$ (pisałiśmy już o tym [3]), budziła kontrowersje. Dziś wracamy za kulisy.

W tym przypadku szczęście polegało na tym, że ten sam fragment nieba, który rejestrowano w świetle widzialnym w celu poszukiwania supernowych, został 25 dni oraz sześć miesięcy później zapamiętany w bliskiej podczerwieni w zupełnie innych celach, ale za to przez ten sam teleskop Hubble'a.

Szczęśliwie skompletowane dane zostały przeanalizowane w NERSC (National Energy Research Scientific Computing Center), superkomputerowym centrum LBNL (Lawrence Berkeley National Laboratory). Decydującym testem było dopasowanie parametrów opisujących typ supernowej, poczerwienienie z , odległość i ewolucję krzywej blasku. Uważnych Czytelników tego numeru *Delty* może zdziwić jednocześnie dopasowywanie poczerwienienia i odległości. Przecież odległość dla najdalszych obiektów wyznacza się, między innymi, ze stopnia przesunięcia ku czerwieni [4]. Przypominamy sobie jednak, że supernowe są jednymi z najjaśniejszych tzw. świec standardowych i ich odległość można określić na podstawie jasności obserwowanej [5]. Najlepiej daje się to zrobić dla supernowych typu Ia, gdyż ich jasność absolutną potrafimy wyznaczyć najdokładniej.

Znalezione parametry SN 1997ff nie tylko potwierdzają jej przynależność do typu Ia i isticie astronomiczną odległość, ale są zgodne z kosmologicznym modelem przyspieszającej ekspansji Wszechświata, wypełnionego głównie przez tzw. ciemną energię. Mianowicie, jasność obserwowana dalekich supernowych okazuje się mniejsza, niż wskazuje ich poczerwienienie [6]. Jak dotąd zaproponowano trzy typy wyjaśnień tego faktu: (i) światło ulega większej niż spodziewana ekstynkcji; (ii) własności supernowych były inne w młodym Wszechświecie; oraz właśnie (iii) gęstość energii związana ze stałą kosmologiczną (ciemna energia) wynosi około 0,7 tzw. gęstości krytycznej.

Wyznaczone parametry SN 1997ff przemawiają na rzecz ostatniej z wymienionych możliwości. Świadczy to między innymi o tym, że stała Hubble'a najprawdopodobniej nie jest... stała w czasie.

Jak dowiadujemy się z artykułu [7], najdokładniejsza metoda wyznaczania odległości galaktyk wykorzystuje

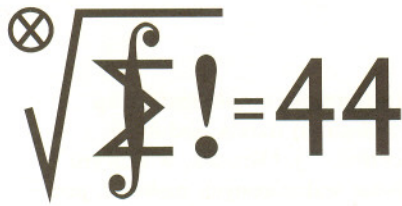
masery wodne. Maser (*microwave amplification by stimulated emission of radiation*) działa podobnie jak laser (*light amplification...*). Ośrodek, w którym utrzymuje się duże stężenie wzbudzonych molekuł, jest wzmacniaczem dla fotonów odpowiadających energii deekscytacji (zwiększenie ich liczbę). W przypadku masera wodnego wzmacniana częstość, odpowiadająca długości fali $\lambda = 1,35$ cm, jest związana ze wzbudzeniem rotacyjnym cząsteczki H_2O . Wykorzystywaną w astronomii cechą tego zjawiska jest duża jasność bezwzględna przy małych rozmiarach emitującego promieniowanie obszaru. Masery H_2O okazały się niezwykle użyteczne w interferometrii opartej na coraz większych zestawach radioteleskopów. Metoda interferometryczna pozwala na uzyskanie obrazów o rozdzielczości odpowiadającej pojedynczemu radioteleskopowi o średnicy tego samego rzędu co odległość między użytymi antenami. Wydobycie pełnej informacji z zarejestrowanych danych wymaga jednak bardzo dużej mocy obliczeniowej, która szybko rośnie ze stosunkiem kątownego rozmiaru badanej struktury do kątownej zdolności rozdzielczej.

Właśnie postęp w dostępności mocy obliczeniowej pozwolił na dokładne przeanalizowanie [2] „starych zdjęć” okolic młodej gwiazdy Cepheus A HW2, których serie zostały zrobione za pomocą układu anten VLBA (*Very Long Baseline Array*) należącego do NRAO (*National Radio Astronomy Observatory*) w dniach 11 lutego, 10 marca i 13 kwietnia 1996 roku, w celu dokładnego zbadania przestrzennego rozkładu i prędkości własnych źródeł wcześniej tam zaobserwowanej akcji maserowej.

Zaskoczeni badacze ujrzeli strukturę pojedynczych źródeł układających się dokładnie (odchylenia na poziomie promila) na łuku rozszerzającego się z miesiąca na miesiąc okręgu. Jedyny przestrzenny rozkład punktowych źródeł, który z każdego kierunku będzie widoczny jako okrąg, to sfera. Autorzy konkludują, że obserwowana struktura o promieniu 62 j.a. i prędkości radialnej rzędu 9 km/s jest cienką powłoką powstałą 33 lata wcześniej w wyniku jednokrotnej sferycznie-symetrycznej erupcji z młodej gwiazdy, która prawdopodobnie znajduje się w środku struktury (nie została ona jeszcze jednoznacznie zidentyfikowana, nie jest to odległy o około 500 j.a. Cepheus A HW2). Najciekawsze jest to, że powstania takiej bańki materii nie przewidują obecne na rynku modele ewolucji gwiazd.

Piotr ZALEWSKI

- [1] *The Ekpyrotic Universe: Colliding Branes and the Origin of the Hot Big Bang*, hep-th/0103239.
www.nersc.gov/news/supernowa04-02-01.html.
- [2] J.M. Torreses i inni, *Spherical episodic ejection of material from a young star*, *Nature* **411**(2001)277.
- [3] Piotr Zalewski, *Najdalsze supernowe*, *Delta* 6/2001.
- [4] B. Wszolek, *Pomiar odległości...* str. 8 tego numeru *Delty*.
- [5] B. Wszolek, *Niestandardowe gwiazdy...* str. 5 tego numeru *Delty*.
- [6] P. Zalewski, *Aktualności...* *Delta* 5/1998.
- [7] A. Marecki, *Stala Hubble'a...* str. 10 tego numeru *Delty*.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2001

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z matematyki nr 427, 428

Redaguje Marcin E. KUCZMA

427. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n \cos^2 x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Znaleźć wykładnik p , dla którego ciąg $(n^p x_n)$ ma granicę dodatnią, skończoną, i obliczyć tę granicę.

428. Dane są liczby rzeczywiste a_1, \dots, a_n . Dla dowolnego niepustego zbioru $J \subset \{1, \dots, n\}$ oznaczmy przez s_J sumę

wszystkich liczb a_j o numerach $j \in J$. Udowodnić, że

$$\sum_J s_J^2 \leq (n+1)2^{n-2} \sum_{j=1}^n a_j^2$$

(symbol J w pierwszym sumowaniu przebiega rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$).

Zadanie 428 zaproponował pan Marcin Peczański z Latchorzewa.

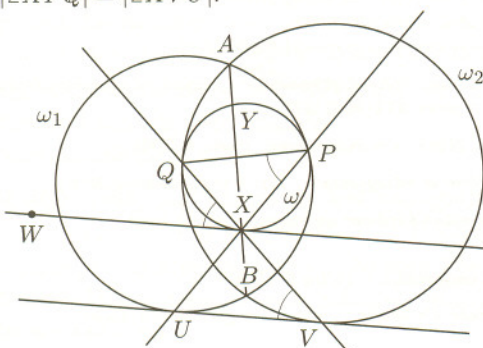
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2001

Przypominamy treść zadań:

423. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi przecinające się w punktach A i B . Dowieść, że istnieją cztery punkty Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 o następującej własności: jeżeli ω jest dowolnym okręgiem stycznym do obu danych okręgów (punkty styczności: P i Q) oraz przecinającym prostą AB (punkty przecięcia: X i Y), to każda z prostych PX, PY, QX, QY przechodzi przez jeden z punktów Z_i .

423. Oznaczmy dane dwa okręgi przez ω_1 i ω_2 . Niech ω będzie okręgiem stycznym do ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach P i Q oraz przecinającym prostą AB w punktach X i Y . Skoro przecina tę prostą, musi być styczny do obu okręgów ω_1, ω_2 jednocześnie albo zewnątrz, albo wewnątrz. W przypadku styczności wewnętrznej okrąg ω albo obejmuje okręgi ω_1, ω_2 , albo jest przez nie oba obejmowany. Tę ostatnią sytuację przedstawia rysunek; dalsze rozumowanie jest poprawne w każdym z pozostałych przypadków i nie wymaga żadnej modyfikacji.

Przyjmijmy, że prosta PX przecina okrąg ω_1 ponownie w punkcie U , a prosta QX przecina okrąg ω_2 ponownie w punkcie V . Ze związku $|UX| \cdot |PX| = |AX| \cdot |BX| = |VX| \cdot |QX|$ wynika, że trójkąty XPQ i XVU są podobne; zatem $|\angle XPQ| = |\angle XVU|$.



424. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki: $f(2) = 2$ oraz

$$f(xy) = x^3 f(y) + y^2 f(x) + x^3 y + xy^2 - xy \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Przez punkt X prowadzimy prostą styczną do okręgu ω w punkcie X i zaznaczamy na niej dowolny punkt W po tej samej stronie prostej AB co punkt Q . Otrzymujemy równość $|\angle WXQ| = |\angle XPQ| = |\angle XVU|$, która pokazuje, że prosta XW jest równoległa do UV .

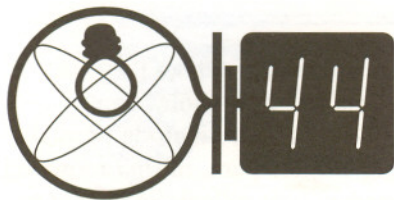
Weźmy pod uwagę jednokładność o środku P , przekształcającą okrąg ω na ω_1 , oraz jednokładność o środku Q , przekształcającą okrąg ω na ω_2 . Obrazem prostej XW odpowiednio w pierwszej oraz w drugiej jednokładności jest prosta styczna do ω_1 w punkcie U oraz prosta styczna do ω_2 w punkcie V . Obie te proste (obrazy prostej XW) są do niej równoległe. Pokrywają się więc z prostą UV , która wobec tego jest wspólną styczną do okręgów ω_1 i ω_2 .

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić zastępując punkt X przez Y . Wniosek: biorąc jako Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 punkty styczności okręgów ω_1 i ω_2 z ich wspólnymi stycznymi, otrzymujemy czwórkę punktów o wymaganej własności.

424. Niech f będzie funkcją spełniającą podane warunki. Lewa strona równania jest symetryczna względem x, y , więc prawa strona też:

$$x^3 f(y) + y^2 f(x) + x^3 y + xy^2 = y^3 f(x) + x^2 f(y) + xy^3 + x^2 y.$$

Podstawiając $y = 2$ dostajemy równanie, z którego wyznaczamy $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że znaleziona funkcja spełnia warunki zadania, jest więc jego jedynym rozwiązaniem.



Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 XII 2001

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań

zadań 415 (WT = 1,14) i 416 (WT = 2,27)

z numeru 2/2001

Paweł Kubit	- Kraków	44,38
Witold Bednorz	- Tychy	43,35
Janusz Olszewski	- Suwałki	39,40
Adam Woryna	- Ruda Śląska	36,10
Witold Bednarek	- Łódź	34,51
Marcin Peczański	- Lądz	34,49
Paweł Kubit - po raz drugi.		

324. Cząstka o masie m_1 zderzyła się ze spoczywającą cząstką o masie m_2 , przy czym $m_1 > m_2$. Jaki jest maksymalny możliwy kąt odchylenia pierwszej cząstki od kierunku początkowego? Zakładamy, że prędkości cząstek są znacznie mniejsze od prędkości światła.

325. W oscyloskopie elektrony są przyspieszane napięciem $U = 300$ V, po czym biegną do ekranu oddalonego o $l = 30$ cm. Zakładamy, że oscyloskop nie ma żadnego ekranowania magnetycznego.

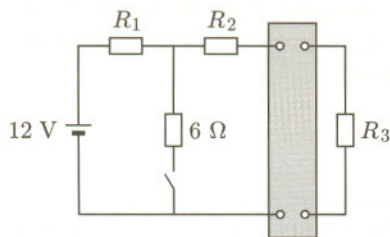
a) Oscyloskop umieszczono na równiku, gdzie pole magnetyczne ma kierunek poziomy, a jego indukcja wynosi $1,75 \cdot 10^{-5}$ T. Po jakim torze porusza się plamka na ekranie, jeśli oscyloskop powoli obracamy wokół osi pionowej? Podać wartości parametrów opisujących ten tor. Dane: ładunek elementarny wynosi $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, masa elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

b) Jak zmieni się tor plamki, jeśli doświadczenie przeprowadzimy w miejscu, gdzie wektor indukcji ma wartość taką samą, jak podano wyżej, a jego kierunek tworzy kąt 60° z poziomem? Podać wartości parametrów toru.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2001

Przypominamy treść zadań:

320. Dane są cztery punkty A, B, A' i B' . Opisać konstrukcję geometryczną pozwalającą wyznaczyć ogniska cienkiej soczewki, dla której obrazem rzeczywistym punktu A jest A' , a obrazem rzeczywistym B jest B' .



Rys. 1

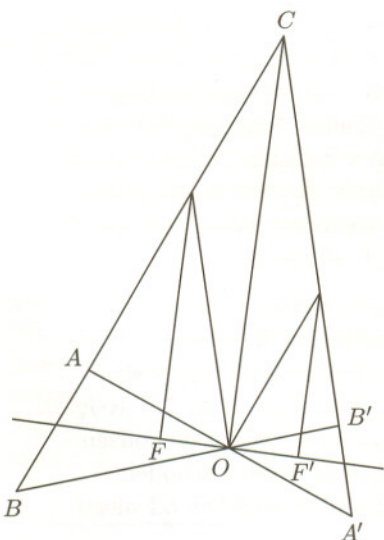
321. „Czarna skrzynka” z czterema wyjściami zawiera wyłącznie oporniki. Włączono ją do obwodu przedstawionego na rysunku 1 i okazało się, że przy otwartym kluczu natężenie prądu czerpanego z baterii wynosiło 3 A, a prądu płynącego przez opornik $R_3 - 1,8$ A. Jeśli przy zamkniętym kluczu obwód czerpie z baterii prąd o natężeniu 4 A, to ile wynosi wtedy natężenie prądu płynącego przez opornik R_3 ? Opór jednego z oporników i SEM baterii są dane.

320. Promienie przechodzące przez środek soczewki O nie zmieniają kierunku, dlatego musi on leżeć na przecięciu prostych AA' i BB' . Zauważmy dalej, że promień biegnący wzdłuż prostej BA należy zarówno do wiązki wybiegającej z A , jak i z B – dlatego po załamaniu w soczewce musi on przebiec przez oba punkty A' i B' . Punkt przecięcia prostych AB i $A'B'$ (oznacmy go przez C) leży więc w płaszczyźnie soczewki, a prosta prostopadła do OC i przechodząca przez O jest osią optyczną soczewki. Innym wynikiem powyższego rozumowania jest to, że obrazem każdego punktu prostej AB jest odpowiedni punkt prostej $A'B'$; jeśli jeden z nich oddala się do nieskończoności, to drugi – zgodnie z równaniem soczewki – zbliża się do płaszczyzny ogniskowej. Konstruujemy więc ognisko w następujący sposób: prowadzimy przez O prostą równoległą do $A'B'$, a punkt jej przecięcia z prostą AB rzutujemy na oś optyczną (rysunek 2). Analogicznie wyznaczamy drugie ognisko.

321. Oznaczmy przez R'_2 opór prawej części obwodu, tzn. „czarnej skrzynki” wraz z opornikami R_2 i R_3 . Z danych zadania wynika, że opór całego obwodu wynosi 4 Ω przy kluczu otwartym i 3 Ω przy kluczu zamkniętym. Pomijając jednostki możemy napisać układ równań

$$\begin{cases} 4 = R_1 + R'_2 \\ 3 = R_1 + \frac{6R'_2}{R'_2 + 6} \end{cases}$$

Znajdujemy $R'_2 = 3 \Omega$, co oznacza, że przy zamkniętym kluczu $\frac{1}{3}$ prądu czerpanego z baterii płynie przez opornik 6 Ω i klucze, a $\frac{2}{3}$ (czyli $\frac{8}{3}$ A) – przez prawą część obwodu. Z tej wartości przez R_3 przepływa $\frac{1,8}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$, czyli 1,6 A.



Rys. 2

Patrz w niebo

Ponad połowa gwiazd w Galaktyce to układy podwójne. Czy z tego powodu sposoby wyznaczania ich odległości są jakieś wyjątkowe? Zdawałoby się, że odległość każdego składnika można wyznaczyć standardowo metodą paralaksy spektroskopowych i po kłopotcie. Fakt, że tych gwiazd jest para, można najwyżej wykorzystać do kontroli całego postępowania, bowiem obie odległości powinny wyjść praktycznie identyczne. To prawda, można jednak zastosować sposób dający wyniki jeszcze dokładniejsze.

W wielu przypadkach wręcz widać, jak gwiazdy tworzące parę wzajemnie się obiegają. Jeżeli gwiazdy w parze dzieli odległość dziesiątek jednostek astronomicznych lub więcej, to ruch ten odbywa się wprawdzie bardzo powoli i nawet na jego zauważenie potrzeba lat. Niemniej jednak z czasem można ocenić, jak długo obieg trwa, a wtedy... No właśnie, chciałoby się jakoś zastosować trzecie prawo Keplera, ale przecież nie znamy mas gwiazd. Trzecie prawo głosi, że wielka pólś względnej orbity a (w jednostkach astronomicznych), okres obiegu T (w latach) i masy składników M_1 i M_2 (w masach Słońca) spełniają związek: $a^3/T^2 = M_1 + M_2$. Gdyby więc mieć masy, to z porównania rozmiarów – rzeczywistych i kątowych orbity łatwo określiłoby się odległość. Co prawda, orbitę widać z Ziemi w skrócie perspektywicznym, ale jej pólś (kątową) α zawsze można wyznaczyć.

To w końcu skąd wziąć masy gwiazd? Odpowiedź: z diagramu Hertzsprunga–Russella. Każdy ciąg zaznaczony na diagramie jest dodatkowo sparametryzowany masą gwiazdy, którą można określić na podstawie wyglądu jej widma. To nie prościej na podstawie widma określić jasność absolutną? Może i prościej, ale z użyciem mas wynik będzie dokładniejszy. Bo jeżeli oznaczyć paralaksę gwiazdy podwójnej przez p , to $a = \alpha/p$, co po podstawieniu do prawa Keplera daje na paralaksę (a więc i odległość) wzór:

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{(M_1 + M_2)T^2}}$$

Lepsza dokładność tak wyznaczonej paralaksy bierze się stąd, że słabo zależy ona od mas gwiazd; znajdują się one pod pierwiastkiem – i to trzeciego stopnia. Gdyby natomiast na podstawie widma określić jasności absolutne, to – jak pamiętamy – bezpośrednio od nich zależy logarytm odległości. Metoda jest więc warta stosowania, jeżeli tylko jest to wykonalne.

Październik

Wieczorami jeszcze ciągle wysoko na niebie znajduje się okazały gwiazdozbiór Łabędzia. Przechodzi przez niego Droga Mleczna, toteż mnóstwo w nim mgławic i gromad otwartych. W pobliżu najjaśniejszej gwiazdy, Deneba, leży mgławica nazwana od swego kształtu Ameryką Północną (NGC 7000). Zwrot „w pobliżu” jest tu zasadny zarówno w odniesieniu do sytuacji na niebie, jak i w przestrzeni, bowiem to właśnie Deneb pobudza Amerykę Północną do świecenia. Tę gazowo-pyłową mgławicę widać w zasadzie już przez mały teleskop, jednak jej prawdziwy kształt można ujrzeć dopiero na zdjęciach. Zawsze tak jest z obiektami mgławicowymi. Jej rozmiary kątowe wynoszą 2° , a odległość – w przybliżeniu tyle co Deneba, czyli 470 pc.

Venus jest w Pannie i wschodzi na krótko przed Słońcem, trudno więc ją dostrzec. Mars jest w Strzelcu i wieczorem już zachodzi. Za to wschodzi znajdujący się w Byku Saturn i trochę później od niego znajdujący się w Bliźniętach Jowisz. Pełnia Księżycy wypada 2 X, a nów 16 X. 7 X Księżyc zakryje Saturna, a 23 X Marsa, ale z Polski zobaczymy tylko jego zbliżenia do tych planet. Pod koniec miesiąca można próbować przed wschodem Słońca szukać Merkurego, który 29 X znajdzie się w największej od niego odległości 19° .

T.K.

MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (27)

ZADANIE 1: Czy szachownicę o wymiarach 8×8 z usuniętym narożnym polem można wypełnić prostokątnymi klockami o wymiarach 3×1 ?

Rozwiązanie:

Ponumerujemy pola szachownicy jak na rysunku 1. Wówczas każdy klocek umieszczony na szachownicy pokrywa trzy pola z różnymi numerami. Nietrudno

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Rys. 1

policzyć, że spośród 63 pól szachownicy 21 ma numer 1, 22 mają numer 2, 20 ma numer 3. Każda figura wypełniona klockami ma równą liczbę pól z każdym z numerów, zatem żądane pokrycie szachownicy rozłącznymi klockami nie jest możliwe.

ZADANIE 2: Czy szachownicę o wymiarach 50×51 z usuniętymi polami z trzech naroży można wypełnić prostokątnymi klockami o wymiarach 3×1 ?

Rozwiązanie:

Numerujemy szachownicę jak w poprzednim zadaniu (na rysunku 2 pokazano numerację w pobliżu naroży). Uważne przeliczenie pokazuje, że pól z każdym z trzech numerów 1, 2, 3 jest tyle samo, a mianowicie 849. Zatem szachownicę można pokryć 849 klockami o wymiarach 3×1 .

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
.
.
.
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

Rys. 2

MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (28)

ZADANIE: Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność $\sqrt[6]{a} \sqrt[3]{c} + \sqrt[6]{b} \sqrt[3]{d} + \sqrt[6]{c} \sqrt[3]{e} + \sqrt[6]{d} \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{e} \sqrt[3]{b} \leq \sqrt{5(a+b+c+d+e)}$.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy następujące twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych.

TWIERDZENIE.

Niech $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ oraz y_1, y_2, \dots, y_n będą liczbami rzeczywistymi. Rozważamy wszystkie liczby postaci $S_\sigma = x_1 y_{\sigma(1)} + x_2 y_{\sigma(2)} + \dots + x_n y_{\sigma(n)}$, gdzie σ jest permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Wówczas dla permutacji σ , dla której $y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \dots \leq y_{\sigma(n)}$, liczba S_σ jest największa. Natomiast dla permutacji, dla której $y_{\sigma(1)} \geq y_{\sigma(2)} \geq \dots \geq y_{\sigma(n)}$, liczba S_σ jest najmniejsza.

Uwaga:

Wartość największa (i odpowiednio najmniejsza) liczby S_σ może być przyjmowana także dla innych permutacji, jeśli np. $x_1 = x_2$, to największą wartość liczby S_σ daje także każda permutacja, dla której $y_{\sigma(2)} \leq y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(3)} \leq y_{\sigma(4)} \leq \dots \leq y_{\sigma(n)}$.

Następny Γ -limatiás będzie poświęcony liczbie 47, a wyjaśnienia oszustw zamieścimy za dwa miesiące.

Idea dowodu twierdzenia:

Jeżeli dla danej permutacji σ istnieje takie $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, że $y_{\sigma(k)} > y_{\sigma(k+1)}$, to dla permutacji σ' określonej wzorem $\sigma'(i) = \sigma(i)$ dla $i \notin \{k, k+1\}$, $\sigma'(k) = \sigma(k+1)$, $\sigma'(k+1) = \sigma(k)$ zachodzi nierówność $S_{\sigma'} \geq S_\sigma$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania zadania. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Wówczas $\sqrt[6]{a} \leq \sqrt[6]{b} \leq \sqrt[6]{c} \leq \sqrt[6]{d} \leq \sqrt[6]{e}$ i na mocy twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{a} \sqrt[3]{c} + \sqrt[6]{b} \sqrt[3]{d} + \sqrt[6]{c} \sqrt[3]{e} + \sqrt[6]{d} \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{e} \sqrt[3]{b} &\leq \\ &\leq \sqrt[6]{a} \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{b} \sqrt[3]{b} + \sqrt[6]{c} \sqrt[3]{c} + \sqrt[6]{d} \sqrt[3]{d} + \sqrt[6]{e} \sqrt[3]{e} = \\ &= \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e}, \end{aligned}$$

gdyż $\sqrt[3]{a} \leq \sqrt[3]{b} \leq \sqrt[3]{c} \leq \sqrt[3]{d} \leq \sqrt[3]{e}$.

Ponieważ funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest wklęsła, z nierówności Jensena otrzymujemy

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c) + f(d) + f(e)}{5} \leq f\left(\frac{a+b+c+d+e}{5}\right),$$

co daje

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} &\leq 5 \sqrt{\frac{a+b+c+d+e}{5}} = \\ &= \sqrt{5(a+b+c+d+e)}. \end{aligned}$$

Tym samym dowód danej w zadaniu nierówności został zakończony.