



SPIS TREŚCI NUMERU 9 (328)

Zadanie Euklidesa <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 1
Bolek i Lolek oraz model Lorenza <i>Witold Sadowski</i>	str. 2
Mała Delta	str. 4
O pewnych równaniach diofantycznych <i>Witold Bednarek</i>	str. 7
Oceńcie sami	str. 8
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str. 9
Jak to było? <i>Marek Kordos</i>	str.10
Zadania	str.11
Kody kreskowe <i>Krzysztof Biesaga</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Wrzesień	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Odległości kosmiczne

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim

<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delty*
można znaleźć w portalu Eduseek

<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Redaguje kolegium w składzie:

Andrzej Białynicki-Birula	Wiktor Bartol
Bogdan Cichocki	Krzysztof Biesaga
– wiceprzewodniczący	Ewa Czuchry
Krzysztof Ciesielski	Krystyna Kordos – sekr. red.
Jan A. Gaj	Marek Kordos – red. nac.
Piotr Goldstein	Tomasz Kwast
Andrzej Hryniewicz	Anna Ludwicka
Wiesław A. Kamiński	Anna Rudnik
Marta Kicińska-Habior	Witold Sadowski
Krzysztof Maślanka	Joanna Udalska
Janusz Matkowski	Anna Wojtyra
Andrzej Mąkowski	Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61, 55-33-216
BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

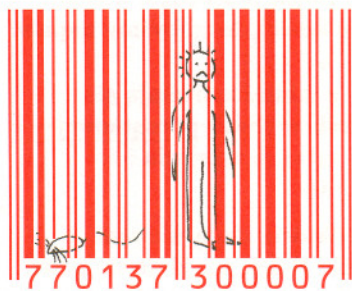
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Zadanie Euklidesa

Jarosław GÓRNICKI



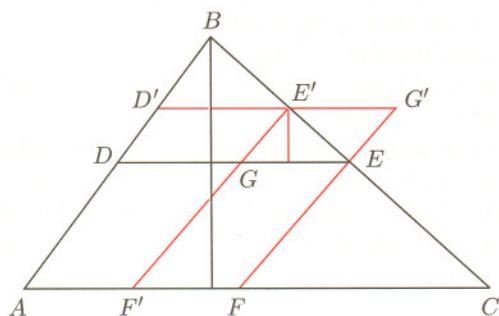
W starożytnej Grecji problemy matematyczne formułowano i rozwiązywano w języku geometrycznym. Umożliwiało to wizualizację ówczesnej matematyki – posługiwanie się sugestią rysunku. Z przekazów, które dotrwały do naszych czasów, możemy się przekonać o kunszcie ówczesnych mistrzów. Rozwiązania problemów, nad którymi pracowali starożytni matematycy, są zazwyczaj tak doskonale, że późniejsze pokolenia niewiele mogły je ulepszyć. Spektakularny jest tutaj przykład *Elementów* Euklidesa (uczonego działającego około 300 roku p.n.e. w Aleksandrii za czasów panowania w Egipcie króla Ptolemeusza I Sotera), w których przedstawione są podstawy planimetrii, arytmetyki i stereometrii. Zaprezentowane tam środki z powodzeniem można wykorzystać do rozwiązywania (na drodze geometrycznych rozważań) pewnych zagadnień ekstremalnych, czyli wyznaczania wielkości (obiektów) największych albo najmniejszych. Tego typu problematyka, m.in. za sprawą prac Zenodora (III/II w. p.n.e.), powoli zyskiwała coraz większe znaczenie. Jej rozkwit nastąpił dopiero w XVII wieku wraz z rozwojem rachunku różniczkowego. Oto przykład zadania na ekstremum, przypisywanego Euklidesowi. Porównajmy metody jego rozwiązania, które oddziela 2000 lat naszego rozwoju.

Zadanie Euklidesa. W dany trójkąt ABC wpisać równoległobok $ADEF$ ($EF \parallel AB$, $DE \parallel AC$) o największym polu.

Rozwiązanie geometryczne tego zadania polega na wyróżnieniu równoległoboku, który mógłby być jego rozwiązaniem (wybór ten jest intuicyjny lub następuje na drodze analizy warunków zadania), a następnie na wykazaniu, że każdy inny równoległobok jest „gorszy”.

Rozwiązanie geometryczne

Największe pole ma równoległobok $ADEF$, gdy punkty D , E i F połowią odpowiednie boki trójkąta ABC .



Niech $AD'E'F'$ będzie równoległobokiem wpisanym w trójkąt ABC , różnym od $ADEF$. Wówczas pole równoległoboku $AD'E'F'$ jest mniejsze od pola równoległoboku $ADEF$ o pole równoległoboku $EG'E'G$. Rzeczywiście, z podobieństwa trójkątów $\triangle GE'E \sim \triangle ABC$ ($E'G \parallel AB$, $GE \parallel AC$) wynika

$$\frac{H_1}{|GE|} = \frac{H}{|AC|} \Leftrightarrow \frac{H_1}{\frac{H}{2}} = \frac{|GE|}{\frac{|AC|}{2}},$$

gdzie H jest wysokością trójkąta ABC , H_1 wysokością trójkąta $GE'E$. Relacje te oznaczają, że pole równoległoboku $D'G'ED$ o wysokości H_1 i boku długości $|DE| = \frac{1}{2}|AC|$ jest równe polu równoległoboku $EGF'F$, którego wysokość wynosi $\frac{1}{2}H$ i dla którego $|F'F| = |GE|$, co kończy dowód.

Rozwiązanie analityczne

Przy takich samych oznaczeniach niech $|AC| = b$, $|AF| = x$, wysokość zaś trójkąta BDE opuszczoną z wierzchołka B oznaczmy przez $h(x)$. Wówczas pole równoległoboku $ADEF$ jako funkcja zmiennej x , gdzie $0 \leq x \leq b$, dane jest wzorem $P(x) = (H - h(x))x$.

Podobieństwo trójkątów $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ ($DE \parallel AC$)

implikuje, że $\frac{h(x)}{H} = \frac{x}{b}$, więc pole wpisanego równoległoboku opisuje funkcja

$$P(x) = \frac{Hx(b-x)}{b}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Ponieważ

$$P'(x) = \frac{H(b-2x)}{b} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{2},$$

więc punktami krytycznymi są 0 , $\frac{1}{2}b$, b i, jak łatwo obliczyć, maksimum funkcji $P(x)$ jest realizowane dla $x = \frac{1}{2}b$. Oznacza to, że równoległobok $ADEF$ ma największe pole, gdy punkt F jest środkiem odcinka AC .

* * * * *

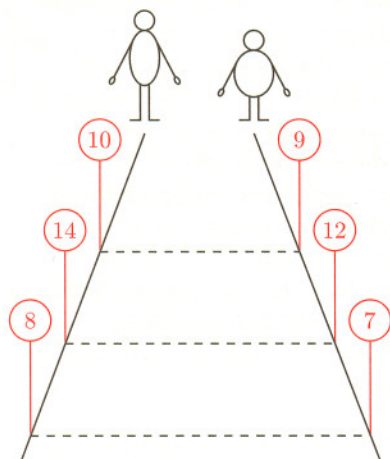
Oba te rozwiązania mają swój urok. Oczywiście, druga z prezentowanych metod ma bardziej uniwersalny charakter. Jednak jej stosowanie wymaga dużo większej wiedzy. Rozwiązanie geometryczne jest elementarne!

Bolek i Lolek oraz model Lorenza

Witold SADOWSKI

Jeśli Bolek i Lolek w tym samym momencie wyruszają z linii startowej, przy czym w każdym punkcie drogi prędkość Lolka jest mniejsza niż prędkość Bolka w tym samym punkcie drogi (patrz rysunek 1), to Bolek przebędzie większą drogę niż Lolek. Gdybyśmy chcieli zapisać to nieco ściślej, moglibyśmy napisać np. tak:

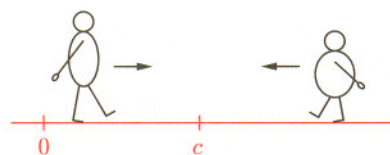
Fakt 1. Niech v_1 oraz v_2 będą prędkościami, z jakimi zmieniają się w czasie wielkości s_1 oraz s_2 , odpowiednio. Jeśli w chwili początkowej wielkości s_1 i s_2 są równe: $s_1(0) = s_2(0)$ oraz $v_1(s) \leq v_2(s)$ dla każdego s , to $s_1(t) \leq s_2(t)$ w każdej chwili $t \geq 0$.



Rys. 1

Rozważmy teraz sytuację, gdy Bolek biegnie z prędkością daną wzorem: $v_2(s) = -s + c$, gdzie c to jakaś stała dodatnia. Jeśli Bolek znajduje się przed punktem c ($s < c$), to biegnie z prędkością dodatnią, czyli w kierunku punktu c (rys. 2). Jeśli natomiast jest za punktem c ($s > c$), to biegnie z prędkością ujemną, czyli... też w stronę c . I chociaż do samego punktu c nie dobiegnie w żadnym skończonym czasie (patrz „Trudności wujka Zenona”, *Delta* 6/2000), to łatwo spostrzec, że znajdzie się dowolnie blisko punktu c po odpowiednio długim czasie. Co z tego wynika dla Lolka, którego prędkość spełnia nierówność: $v_1(s) \leq -s + c$? Oczywiście to, że po odpowiednio długim czasie Lolek znajdować się będzie tylko w punktach $x < c_1$, gdzie c_1 to dowolna liczba większa od c . Jeśli ponadto założymy, że s nie może osiągać wartości ujemnych (bo np. w $s = 0$ stoi ściana, a linia startowa zaczyna się w pewnym $s > 0$; rys. 3), to nasze spostrzeżenie wyrazić możemy następująco:

Fakt 2. Niech v oznacza prędkość zmiany w czasie wielkości s , przyjmującej tylko nieujemne wartości. Jeśli v spełnia nierówność $v(s) \leq -s + c$ dla pewnej stałej $c > 0$, to $s(t) \in [0, c_1]$ dla każdej stałej $c_1 > c$ i dla wszystkich odpowiednio dużych wartości czasów t .

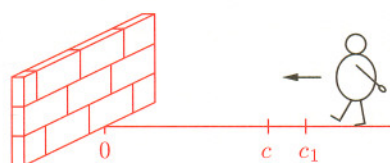


Rys. 2

Innymi słowy, Lolek, biegnący z opisaną wyżej prędkością, wpada po pewnym czasie do odcinka $[0, c_1]$ i już tam pozostaje. Dzieje się tak bez względu na to, skąd Lolek startował.

* * *

Nie byłoby sensu w formułowaniu powyższego faktu, gdyby nie to, że można go wykorzystać nie tylko w odniesieniu do wyścigów biegaczy. Zastosujemy go mianowicie do pewnego układu równań, który stał się symbolem naszych kłęk w przewidywaniu pogody, a wiążąc z sobą modne tematy, takie właśnie jak pogoda, porażka i chaos, zyskał światową sławę. Mowa o modelu Lorenza. Model ten pojawił się przy opisie zjawisk unoszenia ciepłego powietrza w atmosferze. Początkowo układ równań (rozważany jeszcze przez Saltzmana) był dość skomplikowany, Lorenz jednak uprościł go do następującej postaci, w której v_1, v_2, v_3 to prędkości, z jakimi zmieniają się w czasie pewne wielkości s_1, s_2, s_3 :



Rys. 3

$$\begin{cases} v_1 = -10s_1 + 10s_2 \\ v_2 = -10s_1 - s_2 + s_1s_3 \\ v_3 = -\frac{8}{3}s_3 - s_1s_2 + \frac{114}{3} \end{cases}$$

Interesować nas będzie to, co dzieje się z rozwiązaniami, czyli wielkościami $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$ wyrażonymi jako funkcje czasu, dla bardzo dużych t . Żeby się tego dowiedzieć, pomnożmy teraz pierwsze równanie przez s_1 drugie przez s_2 , a trzecie przez s_3 i dodajmy stronami. Otrzymamy

$$s_1v_1 + s_2v_2 + s_3v_3 = -10s_1^2 - s_2^2 - \frac{8}{3}s_3^2 + \frac{114}{3}s_3.$$

Ponieważ $(s_3 - \frac{57}{3})^2 \geq 0$, więc

$$\frac{114}{3}s_3 \leq s_3^2 + \left(\frac{57}{3}\right)^2.$$

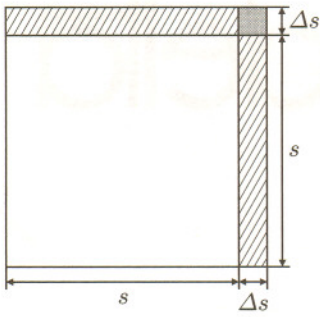
Mamy zatem:

$$s_1v_1 + s_2v_2 + s_3v_3 \leq -10s_1^2 - s_2^2 - \frac{8}{3}s_3^2 + s_3^2 + \left(\frac{57}{3}\right)^2,$$

Dokładniej: układ, jaki badał Lorenz, miał postać

$$\begin{cases} v_1 = -10s_1 + 10s_2 \\ v_2 = 28s_1 - s_2 + s_1s_3 \\ v_3 = -\frac{8}{3}s_3 - s_1s_2 \end{cases}$$

Po podstawieniu zamiast s_3 wielkości $s_3 - 38$ otrzymamy jednak układ rozważany obok.



Rys. 4

Widać, że otrzymana nierówność różni się od nierówności z faktu 2 o czynnik 1/2. Widać też, że czynnik ten nic istotnego nie zmienia poza tym, że stała c_1 musi być teraz większa od $2c$.

czyli

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 \leq -10s_1^2 - s_2^2 - \frac{5}{3}s_3^2 + \left(\frac{57}{3}\right)^2.$$

Stąd

$$(*) \quad s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 \leq -(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \frac{3249}{9}.$$

Zastanówmy się teraz, co wyraża lewa strona powyższej nierówności, tzn. jakie znaczenie ma iloczyn pewnej wielkości i prędkości jej zmiany: sv . Gdyby s było po prostu drogą, a v prędkością, to taki iloczyn miałby wymiar: metr kwadratowy na sekundę i wyrażałby prędkość zmiany pola. Ta fizyczna intuicja podpowiada, że iloczyn sv powinien mieć jakiś związek z kwadratem wielkości s . Jest tak w istocie. Spójrzmy bowiem na rysunek 4.

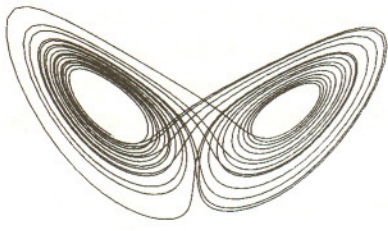
Zakładamy, że wielkość s wzrosła w małym przedziale czasu Δt o Δs . Wtedy przyrost Δs^2 jest równy w przybliżeniu sumie pól dwóch zakreskowanych prostokątów, bo szary kwadracik możemy zaniedbać. Pole jednego z takich prostokątów wynosi $s \cdot \Delta s$. A więc $s \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$, czyli vs , to prędkość zmiany wielkości $\frac{1}{2}s^2$. Korzystając z tego możemy nierówność (*) zapisać w postaci

$$\frac{1}{2}v(s) \leq -s + c.$$

gdzie $s = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, $c = \frac{3249}{9}$, a v to prędkość, z jaką s zmienia się w czasie. Z faktu 2 wynika, że po odpowiednio dużym czasie $s(t)$ znajdzie się w przedziale $[0, R^2]$, gdzie R^2 to jakakolwiek stała większa od c . Zauważmy, że oznacza to, iż punkt tak poruszający się w przestrzeni trójwymiarowej, że jego współrzędne opisują rozwiązanie układu Lorentza w chwili t : $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$, znajdzie się po odpowiednio dużym czasie w kuli o środku w zerze i promieniu R . Uzyskaliśmy więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Każda kula $K(0, R)$ o środku w zerze i promieniu $R > \sqrt{2 \cdot \frac{3249}{9}}$ pochłania rozwiązania (s_1, s_2, s_3) układu równań Lorentza, tzn. po odpowiednio długim czasie T punkt $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$ należy do $K(0, R)$ dla każdego $t > T$.

Wiemy już teraz, że rozwiązania układu Lorentza „siedzą” od pewnego momentu w jakiejś kuli. Używając trochę bardziej subtelnych metod, można wykazać więcej: istnieje pewien ograniczony zbiór $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ (rys. 5), który przyciąga rozwiązania (znajdują się one dowolnie blisko tego zbioru po odpowiednio dużym czasie) oraz sam ten zbiór jest niezmienniczy, tzn. gdy w chwili początkowej $(s_1(0), s_2(0), s_3(0)) \in \mathcal{A}$, to $(s_1(t), s_2(t), s_3(t)) \in \mathcal{A}$ dla każdego t . Zbiór \mathcal{A} jest zatem atraktorem. Punkty $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$ poruszają się po nim w bardzo chaotyczny sposób i dlatego nazywany jest on dziwnym atraktorem. Skoro wszystkie rozwiązania zblizają się do tego zbioru, po pewnym czasie one również zachowują się w sposób chaotyczny. Jak się jednak o tym przekonać, to już zupełnie inna historia.



Rys. 5



Rozwiązanie zadania F 555.

Prędkość neutronu po zderzeniu z pierwszym jądrem helu jest wyznaczona z prawa zachowania energii i pędu

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} \quad \text{i} \quad mv = Mu - mv_1,$$

gdzie m – masa neutronu, M – masa jądra helu, v – prędkość neutronu przed zderzeniem, v_1 – prędkość neutronu po zderzeniu z jądrem helu, u – prędkość jądra helu po zderzeniu. Uwzględniając, że $M = 4m$ otrzymujemy $v_1 = (3/5)v$. Wobec tego, przy jednokrotnym zderzeniu neutronu z nieruchomym jądrem helu energia kinetyczna neutronu zmieni się n razy

$$n = \frac{E_k}{E_{k_1}} = \left(\frac{v}{v_1}\right)^2 = \frac{25}{9},$$

gdzie E_k i E_{k_1} – energia kinetyczna neutronu przed i po zderzeniu. Podczas drugiego zderzenia energia neutronu zmieni się także n razy, czyli

$$\frac{E_k}{E_{k_2}} = n^2 = \frac{625}{81} \text{ razy.}$$



Rozwiązanie zadania M 966.

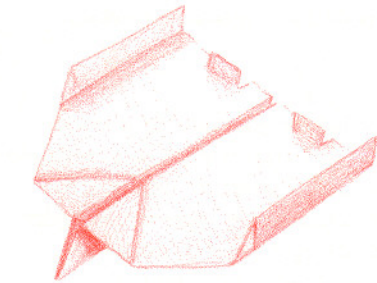
Załóżmy, że na początku n części było zarośniętych chwastem. Zauważmy, że po każdym zarośnięciu jednej części pola długość brzegu zarośniętego obszaru zmniejsza się co najmniej o 2. Po zarośnięciu całego pola długość brzegu obszaru zarośniętego zmniejszy się co najmniej o $2(100 - n)$. Ponieważ części w rogu sąsiadują tylko z dwiema częściami, więc muszą one być na początku zarośnięte. Z ostatnich dwóch zdań wynika, że na każdym brzegu pola znajdują się co najmniej dwie sąsiadujące klatki, które są na początku zarośnięte. Stąd na początku długość brzegu obszaru zarośniętego wynosi co najwyżej $4n - 4$. Całe pole ma brzeg długości 100. Wynika stąd, że $(4n - 4) - 2(100 - n) \geq 40$, czyli $n \geq 40 \frac{2}{3}$. Stąd teza.

Uwaga: Czy 41 to najlepsze oszacowanie? A jak to jest dla pól innych rozmiarów?

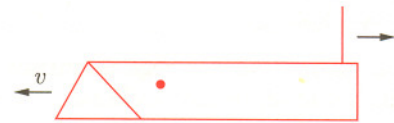
Aerodynamika podwórkowa

Robienie samolotów z papieru to zajęcie uczniów niezbyt mile widziane przez nauczycieli. Może być ono jednak całkiem pouczające.

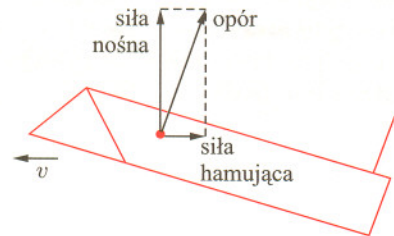
Co powoduje, że szybowiec utrzymuje się w powietrzu? Jaka siła równoważy siłę grawitacji? Przekonajmy się na modelu. Chyba każdy z Was potrafi zrobić „samolot” z papieru taki, jak na rysunku 1. Jeżeli nie wykonamy żadnych „sterów” na końcach skrzydeł, to rzucony poziomo samolot spadnie w dół ostrym łukiem i uderzy dziobem o ziemię. Aby zapewnić stateczny lot ślizgowy, należy dorobić pionowe stery, mniej więcej 5×10 mm (rys. 1). W jaki sposób stery wytwarzają tę tajemniczą siłę, która przeciwdziała spadkowi samolotu? Przecież stery zwiększają opór, co powinno spowodować jeszcze szybszy spadek samolotu. Otóż tajemnica tkwi w tym, że stery są wysunięte nieco do góry. Siła oporu powietrza, działająca na stery, wytwarza więc pewien moment obrotowy, który ustawia samolot nieco skośnie, dziobem do góry (rys. 2). Teraz opór powietrza działa nie tylko na dziób samolotu, ale także, pod małym kątem, na jego spód. Pozioma składowa tej siły hamuje samolot, pionowa zaś, zwana siłą nośną, równoważy siłę grawitacji. Wytwarza się nowy stan równowagi (rys. 3).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

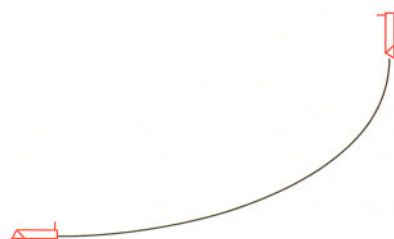
Przekonajmy się o tym eksperymentując nieco z naszym samolotem.

Stańmy na krześle i trzymając samolot za ogon (dziobem w dół) wypuśćmy go z ręki. Samolot bynajmniej nie trzaśnie dziobem w ziemię. Siła oporu, działająca na stery, dotąd będzie obracała samolot, aż ustawi go pod równowagowym kątem tak, że znów wyląduje on miękko pięknym lotem ślizgowym (rys. 4).

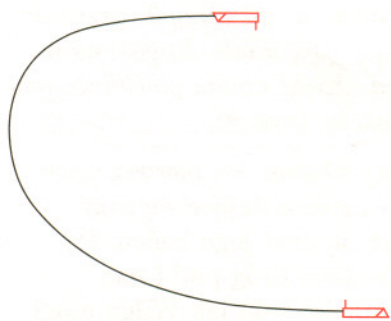
A jeśli opuścimy stery w dół i rzucimy samolot poziomo? Siła oporu działając na stery, będzie teraz obracała samolot dziobem w dół, aż przewróci się „na plecy”. „Góra” zamieni się miejscami z „dołem” i dalej wszystko będzie po staremu (rys. 5).

Wróćmy do normalnego ustawienia sterów. Jeżeli będą miały za dużą powierzchnię, to działająca na nie siła oporu zanadto obróci samolot i składowa pozioma oporu, działającego na spód samolotu, wzrośnie tak, że szybko zahamuje jego ruch. Spadek prędkości spowoduje, że zmaleje opór powietrza. Zaniknie siła nośna (będąca przecież jego składową). Ciężki dziób pochyli się ku ziemi i samolot zacznie coraz szybciej spadać. Ale wzrost prędkości to wzrost siły oporu. Stery znów obrócą samolot dziobem do góry. Znowu pojawi się siła nośna, która poderwie samolot wzwyż i historia powtórzy się od początku. Samolot będzie leciał poszarpanym lotem pliszki, to podnosząc się, to opadając (rys. 6).

A co będzie, jeżeli jeden ster będzie bardziej podniesiony niż drugi? Ponieważ siły działające na oba skrzydła będą nieco różne, samolot przechyli się na bok i wykona łagodny skręt.



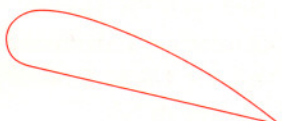
Rys. 4



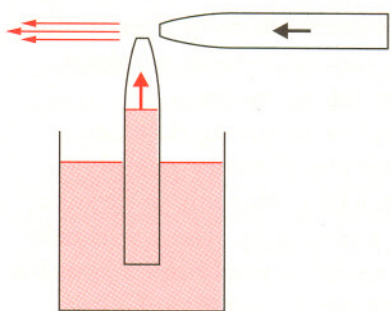
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Podobnie działają stery prawdziwych samolotów. Podobna jest też przyczyna powstawania siły nośnej. To właśnie opór powietrza umożliwia latanie, choć wydawałoby się, że jest on raczej istotną przeszkodą. W próżni samolot latać nie może. Szczegóły mechanizmu powstawania siły nośnej w prawdziwych samolotach są wprawdzie nieco bardziej złożone, ale ogólne zasady są podobne.

Jak działa skrzydło samolotu?

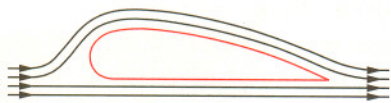
Siła nośna powstaje głównie dzięki skrzydłom samolotu. Aby się pojawiła, potrzebna jest różnica ciśnień działających na górną i dolną powierzchnię skrzydła, którego przykładowy profil pokazany jest na rysunku 7. Spróbujmy zrozumieć, skąd ta różnica ciśnień może się brać.

Wykonajmy proste doświadczenie. Weźmy dwie kartki i zagnijmy jeden brzeg każdej z nich pod kątem prostym. Powstałe „uchwyty” przyłożmy do policzków z obu stron ust tak, aby powierzchnie kartek były równoległe i odległe o kilka centymetrów. Teraz mocno dmuchnijmy między kartki. Spodziewać by się można, że powietrze wdmuchnięte gwałtownie między kartki powinno je rozepchnąć. Tymczasem dzieje się wręcz przeciwnie. Kartki skleją się! Jak to wytłumaczyć? Zróbmy nieco ambitniejsze doświadczenie. Weźmy dwie rurki zakończone dziurką o średnicy rzędu 1 mm. Ja wykorzystałem stare długopisy. Jedną rurkę wstawiamy do szklanki z wodą dziurką do góry. Drugą ustawiamy poziomo dziurka przy dziurce i mocno przez nią dmuchamy (rys. 8). Jeżeli rurka w szklance jest przezroczysta, to widać, jak podnosi się w niej słup wody. Słysząc coraz wyższy gwizd, a jeśli dmuchniemy dostatecznie silnie, to woda wydostanie się z rurki i rozpyli w strumieniu wydmuchiwanego powietrza. Tak działały rozpylacze perfum w czasach, kiedy nie było jeszcze ciśnieniowych sprayów. Dobrze, ale co wspólnego ma rozpylacz perfum z samolotem? Otóż, wykorzystują one to samo prawo fizyki głoszące, że poruszające się z dużą prędkością powietrze ma mniejsze ciśnienie niż powietrze pozostające w spoczynku. Niższe od atmosferycznego ciśnienie powietrza wylatującego z rurki wysysa wodę ze szklanki. Ciśnienie atmosferyczne, wyższe od ciśnienia szybko wydmuchiwanego z ust powietrza, przyciska do siebie kartki papieru z pierwszego doświadczenia.

Umiemy już wyjaśnić oba eksperymenty, ale ciągle nie wiemy, jak się one mają do samolotu. Wykonajmy zatem trzeci, który powinien nas naprowadzić na właściwy trop. Włączmy suszarkę do włosów i skierujmy wytwarzany przez nią strumień powietrza pionowo w górę. Teraz umieścimy w nim piłeczkę pingpongową. Wydawać by się mogło, że piłeczka podskoczy w górę i spadnie obok. Jednak, o dziwo, piłeczka tkwi w samym środku strumienia niczym w dołku, lekko tylko kołysząc się w lewo i w prawo. Możemy przesunąć suszarkę, a piłeczka posłusznie przesunie się wraz z nią. Możemy nawet pochylić strumień powietrza przekrzywiając suszarkę nadal nie gubiąc piłeczki. Jak wytłumaczyć jej tajemnicze zachowanie? Wyobraźmy sobie, że piłeczka odchyliła się tak, że jej połowa wystaje poza strumień powietrza. Na tę połowę działa ciśnienie atmosferyczne spoczywającego powietrza. Druga połowa jest opływana przez szybkie powietrze, które, jak już wiemy, ma ciśnienie niższe. A zatem ciśnienie atmosferyczne wpycha piłeczkę do środka strumienia.

Wróćmy do skrzydła samolotu. Aby powstała odpowiednia różnica ciśnień, powietrze nad skrzydłem musi poruszać się szybciej niż powietrze pod skrzydłem. Popularne wyjaśnienie, które można znaleźć w wielu

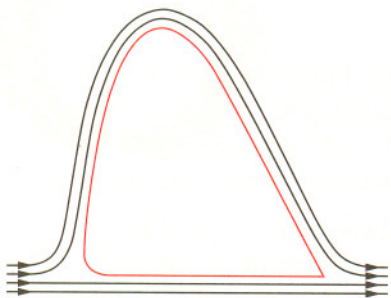




Rys. 9

podręcznikach i encyklopediach, jest następujące: *profil skrzydła jest tak dobrany, aby powietrze opływające jego górną część, miało do pokonania dłuższą drogę niż to, które opływa część dolną, dzięki czemu powietrze nad skrzydłem musi poruszać się z większą prędkością.* (rys. 9).

Wyjaśnienie to jest bardzo proste, ale niestety błędne. Po pierwsze, nie ma żadnego powodu, żeby objętości powietrza rozdzielające się przy natarciu na skrzydło miały ponownie spotkać się przy jego końcu. Po drugie, gdyby tak nawet było, to stosunek długości dróg pod i nad skrzydłem musiałby wynosić 2–3, żeby np. samolot taki jak Wilga mógł utrzymać się w powietrzu. Profil przekroju poprzecznego skrzydła musiałby być wyższy niż dłuższy (szerszy; rys. 10)!

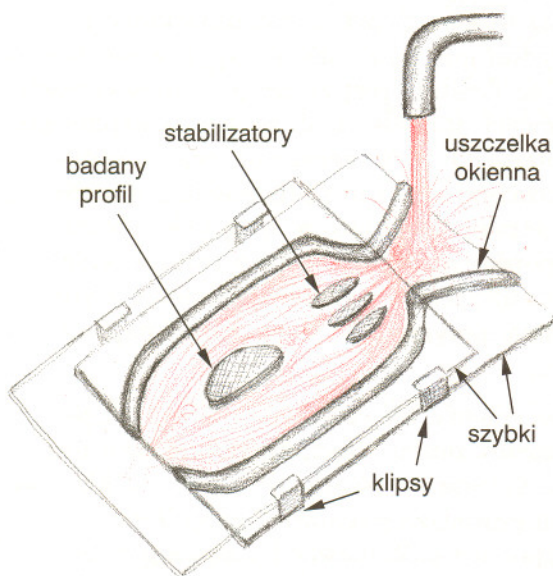


Rys. 10

Dlaczego więc samolot lata, a skrzydła mają taki, a nie inny kształt? O tym napiszemy następnym razem, gdyż najpierw chcemy umożliwić Wam przeprowadzenie badań... w tunelu areodynamicznym.

Tunel hydrodynamiczny

Analityczne obliczenie optymalnego kształtu samolotu jest w zasadzie niewykonalne. Projektując samolot, wykonuje się więc wiele symulacji i prób. Zamiast ryzykować rozbiciem niedopracowanych prototypów buduje się modele i testuje w tunelach aerodynamicznych. W takim tunelu model samolotu ypozostaje nieruchomy, porusza się natomiast opływające go powietrze. W podobny sposób testuje się także modele nowoczesnych samochodów, aby przez dobór optymalnego kształtu zmniejszyć do minimum opór powietrza.

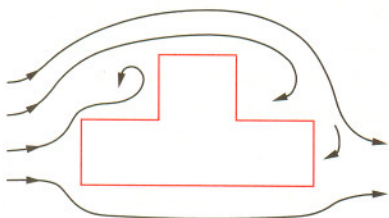


Rys. 11

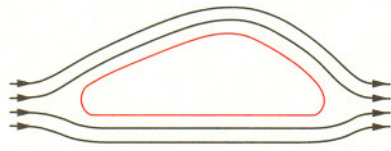
W prosty sposób możemy własnoręcznie wykonać taki tunel. Zamiast powietrza wykorzystamy jednak wodę. Będziemy ją przepuszczać między dwiema szybami. Kształt tunelu modelujemy jak na rysunku 11, przyklejając do jednej z szyb uszczelkę do okien. Tuż za wlotem umieszczamy stabilizatory przepływu. Im więcej i im węższe, tym lepiej. Możemy je wykonać ze skrawków uszczelki lub z plasteliny. Teraz w tunelu możemy umieścić badany model, wycięty np. z kawałka gumoleum lub nawet wykonany z plasteliny. Całość przykrywamy drugą szybą tak, aby sam wlot pozostał odkryty. Najlepiej całość spiąć odpowiednio dobranymi klamrami lub opasać gumkami. Trzeba tylko pamiętać, że szkło jest kruche, więc pracę należy wykonywać tak, aby się nie pokaleczyć.

Kiedy uda nam się uzyskać stabilny przepływ, wpuszczamy kroplę atramentu przy wlocie. W tunelu pojawią się piękne smugi opływające model.

Warto porównać modele staroświeckiego i nowoczesnego samochodu, takie jak na rysunkach 12 i 13. W przypadku samochodu staroświeckiego płynące strugi uderzają gwałtownie w jego przód, mieszając się ze sobą. Kąt między przednią szybą i maską staje się martwą pułapką. Za tylną szybą powstaje zaburzająca przepływ pustka. Maskę samochodu nowoczesnego pięknie rozdziela nacierające strugi, które gładko opływają nadwozie. Z tyłu strugi niczym przyklejone przylegają do tylnej szyby i bagażnika, po czym gładko łączą się ze strugami płynącymi pod spodem. Teraz wiemy, dlaczego taki kształt nazywa się opływowy.



Rys. 12



Rys. 13

Oczywiście, nie można zapomnieć o przetestowaniu profilu skrzydła! Pamiętajcie, że nie tylko kształt, ale również kąt nachylenia skrzydła ma znaczenie. Postarajcie się zauważyć, którądy znaczone atramentem woda płynie szybciej.

Życzę pomysłowości w opracowywaniu nowych modeli i dobrej zabawy przy ich testowaniu.

Małą Deltę przygotował Grzegorz WROCHNA



O pewnych równaniach diofantycznych

Witold BEDNAREK

Równanie Pitagorasa $x^2 + y^2 = z^2$ jest najbardziej znanym równaniem diofantycznym, tj. takim, którego rozwiązania poszukuje się w zbiorze liczb naturalnych – lub ogólniej – liczb całkowitych. Rozwiązaniem tego równania w liczbach naturalnych z najmniejszym z (o czym dowiadujemy się już w szkole podstawowej) jest trójka liczb $(x, y, z) = (3, 4, 5)$. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań, które opisują wzory $x = 2kmn$, $y = k(m^2 - n^2)$, $z = k(m^2 + n^2)$, gdzie k i $m > n$ są liczbami naturalnymi, przy czym wystarczy podstawiać m i n względnie pierwsze różnej parzystości.

Równanie Pitagorasa można uogólnić, wprowadzając większą liczbę niewiadomych

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 = y^2.$$

Nie wdając się w szczegóły, powiedzmy jedynie to, że powyższe równanie ma rozwiązanie dla każdego $m > 2$. Wystarczy bowiem przyjąć

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{m-1} = 2, \quad x_m = m - 2$$

$$\text{i } y = m.$$

Można dokonać innego uogólnienia i zwiększyć wykładniki (jak to zrobił Fermat), rozważając równanie $x^n + y^n = z^n$ dla $n > 2$ i $n, x, y, z \in \mathbb{N}$. Równanie to nie ma rozwiązania, co ostatecznie udowodnił Andrew Wiles w 1994 r.

Można pójść krok dalej, zwiększając i wykładniki, i liczbę niewiadomych.

Na przykład

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3.$$

Mamy tu rozwiązanie $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Euler wyraził przypuszczenie, że równanie

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4.$$

nie ma rozwiązania. Hipotezę tę obalił Elkies w 1988 r., podając przykład

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,373^4$$

(dziś znamy mniejsze liczby stanowiące rozwiązanie

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4).$$

Równanie

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = u^4.$$

ma również rozwiązanie:

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4.$$

Inne przypuszczenie Eulera mówi, że równanie

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = u^5.$$

nie ma rozwiązania. Tę hipotezę Eulera obalono w 1967 r.

$$27^5 + 85^5 + 110^5 + 135^5 = 144^5.$$

Nic jednak nie wiadomo o równaniu

$$x^5 + y^5 + z^5 = t^5;$$

Euler przypuszczał, że i ono nie ma rozwiązania.

Powyższe równania można zapisać w postaci ogólnej

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = y^n.$$

Na podstawie podanych przykładów wypada stwierdzić, że nie widać jakiejś uniwersalnej metody rozwiązania. Dlatego ułatwimy sobie zadanie (co za chwilę się okaże) i rozważymy równanie

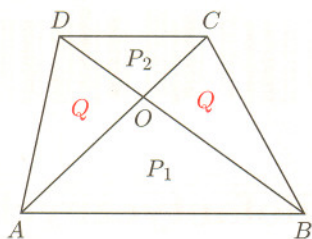
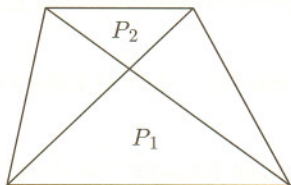
$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = y^k,$$

gdzie liczby n i k są względnie pierwsze.

Skoro n i k są względnie pierwsze, to istnieją takie liczby naturalne α i β , że $\alpha k - \beta n = 1$. Połóżmy $x_1 = x_2 = \dots = x_m = m^{sk+\beta}$ i $y = m^{sn+\alpha}$, gdzie s jest dowolną liczbą naturalną. Wtedy

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n &= m \cdot m^{(sk+\beta)n} = \\ &= m^{1+skn+\beta n} = \\ &= (m^{sn+\alpha})^k = y^k. \end{aligned}$$

Oceńcie sami



Zadanie to można również znaleźć w *Repetytorium* Danuty i Marka Zakrzewskich wydanym przez WSz PWN.



Rozwiązanie zadania F 556.

Na stół działają ze strony sznura w kierunku poziomym dwie jednakowe, ale przeciwnie skierowane siły (działające na górny i dolny krążek zamocowane na stole) oraz siła tarcia T skierowana w prawo. Z równania

$$F - F + T = \frac{Q_1}{g} a_1$$

otrzymujemy przyspieszenie, z jakim porusza się stół. Przyspieszenie, z którym porusza się ciało, wyznaczamy z równania

$$F - T = \frac{Q_2}{g} a_2.$$

Jeśli siła F jest na tyle mała, że ciało nie ślizga się po stole (tzn. stół i ciało poruszają się z jednakowym przyspieszeniem), mamy

$$F = T \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}.$$

Ślizganie się ciężaru po stole rozpoczyna się przy maksymalnej wartości siły tarcia kQ_2 , tj. przy wartości przyłożonej do sznura siły

$$F_{\text{kryt}} = kQ_2 \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 100 \text{ N}.$$

Przy danej w warunkach zadania wartości siły 80 N nie ma ślizgania się ciała po stole, a więc stół i ciało poruszają się z jednakowymi przyspieszeniami

$$a = \frac{F}{Q_1 + Q_2} g \approx 3,14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Podczas treningu do nowej matury w jednej z zaprzyjaźnionych szkół trafiło się zadanie, którego treść pozwolimy sobie przedstawić na rysunku: w trapezie znane jest pole P_1 i pole P_2 ; należy obliczyć pole trapezu. No to obliczyliśmy.

Sposób I, geometryczny.

Korzystając z tego, że trójkąty mające wspólną wysokość mają pola proporcjonalne do podstaw, stwierdzamy, że oba pola, nienazwane przez autorów zadania, są równe (bo uzupełniają P_1 do pola trójkąta ABC lub ABD) oraz

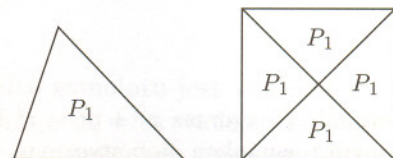
$$\frac{P_1}{Q} = \frac{AO}{OC} = \frac{Q}{P_2},$$

skąd mamy $Q = \sqrt{P_1 \cdot P_2}$ i ostatecznie pole trapezu jest równe $P_1 + 2\sqrt{P_1 P_2} + P_2$ lub, jak kto woli, $(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$.

Sposób II, nietrywialny.

Pole jest funkcją wielkości P_1 i P_2 . Zastanówmy się, co to za funkcja. Ponieważ wynik nie zależy od podobieństwa, więc jest to funkcja jednorodna kwadratowa i symetryczna zmiennych $\sqrt{P_1}$ i $\sqrt{P_2}$, słowem, powinna to być funkcja postaci $a(\sqrt{P_1})^2 + b\sqrt{P_1}\sqrt{P_2} + a(\sqrt{P_2})^2$.

Biorąc pod uwagę trójkąt (czyli zostało tylko P_1), otrzymujemy $a = 1$. Dla odmiany kwadrat (wszystkie cztery trójkąty równe) wobec poprzedniego daje nam $b = 2$. Wynik jest więc ten sam.

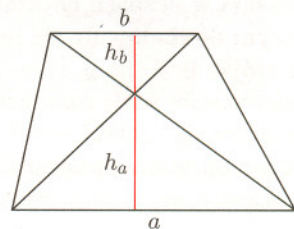


Sposób III, arytmetyczny.

Ze względu na to, że wynik nie zależy od rozmiaru trapezu, lecz tylko od jego kształtu, dla pewnego α mamy (oznaczenia z rysunku) $a = \alpha\sqrt{P_1}$.

Ponieważ $P_1 = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, więc $h_a = \frac{2}{\alpha}\sqrt{P_1}$. Wobec podobieństwa dolnego i górnego trójkąta mamy $b = \alpha\sqrt{P_2}$ i $h_b = \frac{2}{\alpha}\sqrt{P_2}$. Zatem pole trapezu jest równe

$$\frac{1}{2}(a+b)(h_a+h_b) = \frac{1}{2}\alpha(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}) \cdot \frac{2}{\alpha}(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}) = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$



Te nasze popisy uznaliśmy za godne zanotowania, bo znamy

Sposób IV, firmowy.

Jest on (po wygładzeniu) taki. Chcemy obliczyć $\frac{1}{2}(a+b)(h_a+h_b)$. Wykonując mnożenie, otrzymujemy $P_1 + \frac{1}{2}(ah_b + bh_a) + P_2$. Zauważmy jednak, że z podobieństwa trójkątów uzyskujemy

$$\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b}, \text{ czyli } ah_b = bh_a.$$

Z kolei

$$\frac{ah_a}{2} \cdot \frac{bh_b}{2} = P_1 P_2, \text{ czyli } (ah_b)^2 = 4P_1 P_2.$$

Zatem $\frac{1}{2}(ah_b + bh_a) = 2\sqrt{P_1 P_2}$ i wynik jest (oczywiście) ten sam.

Jak wiadomo, prace maturalne są sprawdzane przez odpowiednio wytrenowanych egzaminatorów i według szczegółowych instrukcji przewidujących odpowiednią liczbę punktów za wykonanie kolejnych kroków rozumowania (oczywiście według firmowego wzorca). Mamy więc pytanie do każdego, kto potrafi na nie kompetentnie odpowiedzieć: jakie oceny zdobyliby czterej uczniowie, gdyby przedstawili podane wyżej rozwiązania? Szczególnie cenilibyśmy wypowiedzi trenerów przyszłych egzaminatorów.

W chwili, gdy ten tekst zostanie wydrukowany, będą już pierwsze wrażenia pomaturalne po egzaminie częściowo w nowym stylu. Oby były to dobre wrażenia.

27 lutego 2001 roku

Marek KORDOS i Piotr MANKIEWICZ

Przestrzenne obrazy atomowe z Krakowa i z Japonii

Pierwszy ostry holograficzny obraz przestrzennej struktury atomowej uzyskany za pomocą promieniowania gamma udało się otrzymać w Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie [1,2]. Autorzy sukcesu, P. Korecki, J. Korecki oraz G. Materlik (DESY), użyli modyfikacji metody „holografii z wykorzystaniem źródła wewnętrznego” (ISH: *internal source holography*).

ISH wykorzystuje fakt, że wzór interferencyjny utworzony przez promieniowanie emitowane przez zlokalizowane źródło wewnątrz próbki może być zinterpretowane jako hologram najbliższej źródłu struktury atomowej. Zastosowanie promieniowania gamma powoduje, że wzbudzone są nie atomy, tylko ich jądra. W tym przypadku używa się tzw. odwróconej w czasie (*time-reversed*) wersji ISH, tzn. rejestruje się pochłanianie, a nie emisję promieniowania. Metoda ISH opiera się na tym, że każde jądro może zostać wzbudzone albo bezpośrednio przez padającą wiązkę kwantów gamma (fala odniesienia), albo po rezonansowym rozproszeniu na jednym z otaczających jąder (fala przedmiotowa).

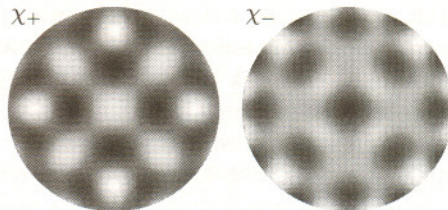
Dla porządku dodajmy, że intensywność powstającego pola interferencji mierzona jest za pomocą pomiaru intensywności deaktywacji jąder przez emisję elektronów konwersji wewnętrznej w zależności od kąta padania promieniowania gamma.

Do tej pory problemem było jednak nakładanie się tzw. sprzężonych obrazów powstających przy odczytywaniu hologramu. Naukowcy z Krakowa dokonali przełomu, rejestrując pełną informację o polu interferencji w postaci tzw. hologramu zespolonego. Przedstawiona metoda wykorzystuje możliwość zmiany fazy fali rozproszonej przez odstrojenie od rezonansu mössbauerowskiego.

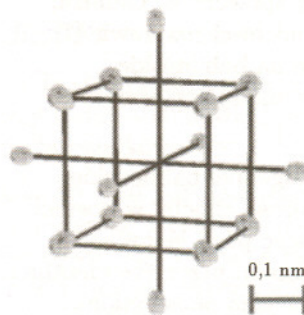
Tu należy się przypomnienie zjawiska Mössbauera, polegającego na rezonansowej emisji lub absorpcji kwantów gamma przez jądra atomów tworzących sieć krystaliczną, bez zmiany energii wewnętrznej kryształu. Inaczej mówiąc, jądro nie doznaje odrzutu, który jest przejmowany przez kryształ jako całość. Rezonansowe linie mössbauerowskie mają bardzo małą szerokość (szerokość względna jest rzędu 10^{-10} – 10^{-15}). Dlatego badanie struktury rezonansowej przeprowadza się, zmieniając względną prędkość źródła promieniowania gamma i badanej próbki w zakresie centymetrów na sekundę! Wtedy dopplerowska zmiana energii kwantów γ jest rzędu szerokości linii rezonansowej.

Do praktycznej realizacji γ -holografii użyto materiału zawierającego izotop żelaza ^{57}Fe oświetlanego promieniowaniem z radioaktywnego kobaltu ^{57}Co . Autorzy w pracy [2] pokazali, że wystarczy zarejestrować dwa γ -hologramy, jeden dla energii rezonansowej powiększonej, a drugi pomniejszonej o dowolną wartość ΔE , aby następnie z ich sumy i różnicy otrzymać odpowiednio część urojoną χ_+

i część rzeczywistą χ_- pola interferencyjnego. Dysponując tą pełną informacją autorzy odtworzyli przestrzenny obraz badanej struktury z rozdzielczością nie gorszą niż $0,5 \text{ \AA}$.



Metoda ta może zostać użyta do badania przestrzennej, a zwłaszcza magnetycznej struktury atomowej cienkich błon i warstw zawierających ^{57}Fe . W dodatku badane próbki nie muszą mieć ani dalekozasięgowego, ani chemicznego uporządkowania.



Okazuje się, że różne odmiany holografii to nie jedyne sposoby otrzymania obrazu przestrzennej struktury atomowej. Japoński fizyk H. Daimon proponuje [3] zastosowanie w tym celu techniki stereoskopowej, analogicznej do używanej przy produkcji

trójwymiarowych filmów czy anaglifów. W odróżnieniu od innych metod, które wymagają skomplikowanych obliczeń, proponowany sposób jest szybki i bezpośredni. W niedługiej przyszłości może nawet umożliwić trójwymiarowe rejestrowanie procesów atomowych w czasie rzeczywistym!

Widzenie przestrzenne wykorzystuje fakt, że obrazy widziane lewym i prawym okiem różnią się o pewien kąt. Aby uzyskać stereoskopową iluzję, wystarczy dostarczyć do lewego i prawego oka obrazy uzyskane z odpowiednio rozsuniętych kamer. Podobnie obrócone obrazy wytwarza fotoelektryczna dyfrakcja kołowo spolaryzowanego światła. Tak spolaryzowane fotony mają niezerowy moment pędu. Ten moment pędu jest przekazywany fotoelektronom, powodując obrót obrazu dyfrakcyjnego zgodnie lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Parę obrazów struktury atomowej kryształu wolframu wziętą z pracy [3] przedstawiamy na ostatniej stronie okładki. Wystarczy patrzeć lewym okiem na lewy, a prawym na prawy obrazek, żeby ujrzeć stereoskopowy widok badanego kryształu.

Piotr ZALEWSKI

- [1] Physics News Update **528**, 1 marca 2001.
- [2] P. Korecki, G. Materlik, J. Korecki, *Complex γ -Ray Hologram: Solution to Twin Images Problem in Atomic Resolution Imaging*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 1534.
- [3] H. Daimon, *Stereoscopic Microscopy of Atomic Arrangement by Circularly Polarized-Light Photoelectron Diffraction*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2034.

Stefan Kulczycki pisze ([3], str. 44–49):

„Rozwiązania babilońskie zawierają pedantyczny rejestr działań, które należy wykonać nad danymi liczbami, aby uzyskać odpowiedź na postawione zagadnienie, nie zawierają jednak nigdy wyjaśnień dlaczego tak, a nie inaczej należy postępować. Apodyktycznie deklarują autorzy tabliczek: takie jest postępowanie. Wskutek tego nie posiadamy znowu autentycznych informacji o toku rozumowania Babilończyków i zdani jesteśmy na domyśle interpretujące rachunek Babilończyków jako realizację takiej czy innej myśli przewodniej. Główny pracownik na polu odcyfrowywania i interpretacji tekstów matematycznych babilońskich, O. Neugebauer, posługuje się metodą, [...] która prowadzi do doszukiwania się równoległości do współczesnego rachunku literowego. Metoda Neugebauera budzi obiekcje. [...] W stosunku do zadań stopnia drugiego opinie Neugebauera wywołały sprzeciw S. Gandza, który w stukilkudziesięciostronicowej rozprawie [1] w inny sposób pojmował zadania babilońskie – w sposób, że się tak wyrażę, mniej algebraicznie uczone i bodaj trafniejszy. [...]

Rachunku literowego w niej [algebrze babilońskiej] nie znajdujemy i żadnych wzorów, choćby w postaci słownie ujętych reguł, [...] może poza jednym przypadkiem niedawno wskazanym przez Freudenthala (patrz [6]), który to przypadek jako odosobniony potwierdza regułę. [...]

[Równanie stopnia drugiego traktowane było jak] układ równań z dwiema niewiadomymi, przede wszystkim

$$x + y = a, \quad xy = b;$$

$$x - y = a, \quad xy = b;$$

a także

$$x^2 + y^2 = b, \quad x \pm y = a;$$

i do tych układów starali się sprowadzić rozmaite inne zagadnienia drugiego stopnia. [...] Jak rozwiązywali układ $x + y = a$, $xy = b$ nie wiemy. Obecnie sprowadza się to do rozpatrzenia równania

$$z^2 + pz + q = 0,$$

w którym $z^2 + pz$ przedstawia się w postaci

$$\left(z + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2.$$

Van der Waerden [6] uważa za prawdopodobne, że Babilończycy znali to przekształcenie, ale poparcia na to w tekstach nie widzę. Gandz bardzo obszernie wyluszcza, że było stałą metodą Babilończyków przyjmowanie jako niewiadomej pomocniczej $\frac{x-y}{2}$. [...]

Na jednej z tabliczek (Alter Orient, Lipsk, 8863, por. [4], str. 108–122) znajduje się rozwiązanie zadania

$$x + y = 100 = a,$$

$$(x + y)(x - y) + xy = 4400 = c.$$

Rachunek biegnie:

$$100^2 = 10\,000, \quad 10\,000 - 4\,400 = 5\,600,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 100 = 50, \quad 50^2 = 2\,500,$$

$$5\,600 + 2\,500 = 8\,100, \quad \sqrt{8\,100} = 90,$$

$$100 - 90 = 10,$$

$$50 + 10 = 60 = x, \quad 50 - 60 = 40 = y.$$

Jak obliczono tu x i y ? Najwyraźniej $x = \frac{1}{2}a + 10$, $y = \frac{1}{2}a - 10$, czyli obliczaną w rzeczywistości niewiadomą było powyższe $\frac{x-y}{2}$ [...]

Drugie zadanie (Vorder-Asiatische Textsammlung Berliner Museum, por. [4], str. 335–340):

$$xy = 600, \quad x^2 = 9(x - y)^2.$$

Rachunek:

$$\sqrt{9} = 3, \quad 3 - 1 = 2,$$

$$3 \cdot 2 = 6, \quad \frac{1}{6} \cdot 600 = 100,$$

$$\sqrt{100} = 10,$$

$$10 \cdot 3 = 30 = x, \quad 10 \cdot 2 = 20 = y.$$

I tutaj obliczaną wielkością jest 10, tzn. $x - y = t = 10$, i rachunek biegnie tak; $x^2 = 9t^2$, $x = 3t$, $y = 2t$, a więc $3t \cdot 2t = 600$ itd.

Może zaciekawić tu komentarz Neugebauera ([5], str. 189). Bierze on

$xy = F$, $\alpha(x - y)^2 = x^2$, tzn. $\alpha x^2 - 2\alpha F + \alpha y^2 = x^2$, stąd

$$x^4 - \frac{2\alpha F}{\alpha - 1}x^2 + \frac{\alpha F^2}{\alpha - 1} = 0,$$

skąd z kolei

$$x^2 = F \left\{ \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \sqrt{\frac{\alpha^2 - \alpha(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^2}} \right\} = \frac{F\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha - 1}},$$

i ostatecznie

$$x = \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{F}{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - 1)}}.$$

Tekst babiloński rachuje w samej rzeczy według tego wzoru. Tymczasem Babilończycy rachowali inteligentniej.” [Po czym następuje próba dostrzeżenia w rozwiązaniach różnych równań głębszych prawidłowości.]

Tyle Kulczycki. W tym duchu opowiadałem o problemie babilońskiego rozwiązywania równań kwadratowych na wykładzie. Ciekawe, że studenci byli raczej skłonni przychylić się do opinii, iż poszukiwanie ogólnych reguł rozwiązywania równań kwadratowych – jak chciałby Kulczycki – nie jest w przypadku metod babilońskich sensowne. Nie oznacza to jednak, że podzielają pogląd Neugebauera o wyprowadzaniu wzorów odpowiednich do danego typu równań. Pan Piotr Anders podał algorytm rozwiązujący AO 8863.

Oto on:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{2} \pm \left(a - \sqrt{a^2 - c + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right),$$

co dziś uprościlibyśmy do postaci

$$x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - c}, \quad y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - c}.$$

Stwierdził jednak, że ten wzór jest po prostu sprawozdaniem z umieszczonych na tabliczce obliczeń. Wyraził też pogląd, że spodziewa się, iż do każdego typu równania (wyrażenia mogą się różnić wyrazami stałymi) dobierano empirycznie stosowną metodę – dziś powiedzielibyśmy: wzór albo algorytm.

Jak widać, sformułowany ćwierć wieku temu pogląd Donalda Knutha ([2]; w Polsce kontynuował to Jan Waszkiewicz [7]), że analogii do babilońskiego

zajmowania się liczbami należy szukać nie w matematyce, lecz w informatyce (gdzie algorytmów się nie dowodzi, lecz się je testuje), przyjmowany jest obecnie jako naturalny.

Przywołane prace:

- [1] S. Gandz, *The origin and development of quadratic equation in babylonian, greek and early arabic algebra*, Osiris 3(1937), 405-557.
- [2] D.E. Knuth, *Ancient Babylonian algorithms*, [w:] Communications of the ACM, 1972.
- [3] S. Kulczycki, *Z dziejów matematyki greckiej*, Warszawa, 1973.
- [4] O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte*, Quellen und Studien A3 (1935-1937).
- [5] O. Neugebauer, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, t. I, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934.
- [6] B.L. van der Waerden, *Science awakening*, Groningen 1954.
- [7] J. Waszkiewicz, *System informatyczny jako składnik kultury (studium przypadku matematyki babilońskiej)*, Wrocław 1987.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Matematyka słynęła z tego, że stosuje się do wielu najróżniejszych dziedzin życia. Tym razem nasze trzy zadania stanowią podwaliny teorii wypleniania chwastów, jakże pomocnej dla działkowiczów.

M 964. Kwadratowa działka 10×10 jest podzielona standardowo na 100 kwadratowych części 1×1 . Dziewięć z tych części zarosło chwastem. Wiadomo, że każdego roku chwast rozprzestrzenia się na te części, które sąsiadują (tzn. mają bok wspólny) z co najmniej *dwiema* już zarośniętymi. Wykazać, że pole nigdy nie zarosnie w całości chwastem.

Rozwiązanie na str. 16

M 965. Kwadratowa działka 7×7 jest podzielona standardowo na 49 kwadratowych części 1×1 . Wiadomo, że każdego roku chwast rozprzestrzenia się na te części, które sąsiadują (tzn. mają bok wspólny) z co najmniej *trzema* już zarośniętymi. Ile początkowo części musi być zarośniętych chwastem, aby po pewnym czasie całe pole było zarośnięte chwastem?

Rozwiązanie na str. 16

M 966. Kwadratowa działka 10×10 jest podzielona standardowo na 100 kwadratowych części 1×1 . Wiadomo, że każdego roku chwast rozprzestrzenia się na te części, które sąsiadują (tzn. mają bok wspólny) z co najmniej *trzema* już zarośniętymi. Udowodnić, że aby po pewnym czasie całe pole zarosło chwastem, początkowa liczba zarośniętych części musi być większa niż 40.

Rozwiązanie na str. 3

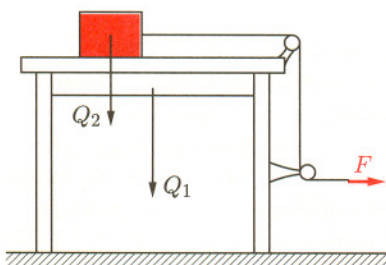
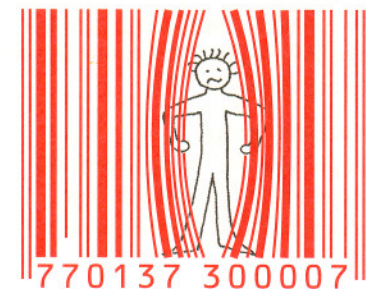
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 555. Neutron zderza się sprężysto z jądrem helu, a następnie (po odbiciu) zderza się sprężysto z drugim jądrem helu. Jądra helu przed zderzeniem były nieruchome. Traktując oba zderzenia jako centralne, wyznaczyć, ilukrotnie zmienia się energia neutronu po zderzeniach.

Rozwiązanie na str. 3

F 556. Stół o ciężarze $Q_1 = 150$ N, wyposażony w układ krążków (rys.) może przesuwać się bez tarcia po poziomej podłodze. Na stole leży ciało o ciężarze $Q_2 = 100$ N. Współczynnik tarcia między stołem a ciałem wynosi $k = 0,6$. Z jakim przyspieszeniem będzie poruszał się stół, jeśli z siłą $F = 80$ N pociągniemy za sznur, przymocowany do ciała i przerzucony przez krążki. Siła jest skierowana poziomo.

Rozwiązanie na str. 8



Kody kreskowe

Krzysztof BIESAGA



Jeden z kodów o nazwie Code39. Pozwala kodować symbole o zmiennej, mogące składać się z 44 różnych znaków, w tym cyfr i liter.



Kod o nazwie Postnet stosowany na pocztach w USA, używany do zapisu kodów pocztowych.



Kod dwuwymiarowy PDF 417. Można nim na powierzchni jednego cala kwadratowego zakodować ponad tysiąc znaków.



Kod Cremony w standardzie EAN13. Dłuższe kreski to kody rozdzielające. Napis pod spodem kresek jest odczytywany tylko przez ludzi i automatom nie jest potrzebny. Pierwsza cyfra i znak „>” określają minimalną szerokość jasnego pola, na którym kod ma występować.

Trochę historii

Najpierw była „tarcza strzelnicza”, bowiem tak popularnie nazywano pomysł dwóch Amerykanów – Joego Woodlanda i Bernego Silvera. Realizując w początkach lat czterdziestych zapotrzebowanie handlowców na automatyzację i kontrolę odczytu cen detalicznych, wymyślili oni pierwszy sposób kodowania liczb w postaci rzędu ciemnych i jasnych kresek. Pomysł został opatentowany w roku 1949, a nazwa wzięła się od ułożenia kresek we współśrodkowe okręgi, przypominające „bull’s eye”, jak Amerykanie nazywają centrum tarczy strzelniczej.

By się upowszechnić na całym świecie, pomysł czekał z jednej strony na istotny wzrost zapotrzebowania, co przyszło, gdy pojawiły się supermarkety, a z drugiej, na pojawienie się możliwości technicznych, jakie powstały wraz z miniaturyzacją elektronicznych automatów. W tym czasie postać kodów kreskowych uległa zmianie i zamiast współśrodkowego ułożenia przybrały one postać liniową. Za to pomysł kodowania znaków, w postaci jasnych i ciemnych kresek, pozostał.

Kodowanie cech przedmiotów w postaci kodów kreskowych to rzecz obecnie powszechna. Umieszcza się je na opakowaniach kartonów z mlekiem, przylepia na ołówkach, szpeci nimi okładki książek i czasopism. Kody kreskowe są na opakowaniach lekarstw, kartkach pocztowych, pojemnikach z krwią i pod maską współczesnych samochodów. „Mir”, „Alpha” czy „Columbia” są zapewne też pokreskowane.

I na tym się nie skończy, bo zapowiada się, że wejdzie w użycie kolejna generacja kodów – kody dwuwymiarowe, czyli takie, w których informacja zapisana jest nie tylko w rzędach, ale i w kolumnach jasnych i ciemnych plamek.

Na czym to polega?

Pomysł jest prosty, można by rzec, że został zaczerpnięty ze znanego wszystkim alfabetu Morse’a – każdy znak należy zakodować w postaci ciągu na przemian jasnych i ciemnych kresek. Kreski i tło powinny być jak najbardziej kontrastowe, by ułatwić bezbłędne rozpoznanie automatycznym czytnikiem.

Zachowując powyższą zasadę, stosuje się dwie zasadnicze grupy jednowymiarowych kodów kreskowych. Bardziej popularna to ta, w której do kodowania używa się kresek o różnej grubości. Druga grupa stosowana jest powszechnie jedynie na pocztach. Są to kody, w których znaki rozróżnia się dzięki różnej długości kresek.

Wreszcie wspólną cechą wszystkich kodów jest dbałość o wiarygodność odczytu. Stosuje się więc powszechnie cyfry kontrolne, czyli cyfry, które nie stanowią części zakodowanego napisu, ale które dają się z niego obliczyć. Algorytm obliczania cyfry kontrolnej jest tak dobrany, że jeżeli po odczytaniu otrzymujemy inną od spodziewanej cyfrę, to odczyt uznaje się za nieprawidłowy. Ze względu na wiarygodność i możliwość błędów odczytu sposób kodowania znaków jest też niezwykle wymyślny. Trzeba przecież uwzględnić nie tylko możliwość odczytu wspan, ale też błędy w rozpoznaniu szerokości kresek. Każdy taki przypadek powinien prowadzić do sygnalizacji błędu. Warto tu wspomnieć, że pod względem odporności na błędy odczytu kody dwuwymiarowe rokują duże nadzieje. O dwuwymiarowym kodzie PDF 417 przeczytałem, że zamazanie 50% jego powierzchni nie wystarczy jeszcze do tego, by zapisana informacja nie dała się odczytać.

Diabeł tkwi w szczegółach

By choć trochę zagłębić się w szczegóły, przyjrzyjmy się kodowi EAN13, powszechnie stosowanemu w handlu detalicznym. Koduje się w nim numery towarów nadane im przez krajowe przedstawicielstwa Międzynarodowego Stowarzyszenia EAN. Numer EAN13 składa się z 13 cyfr. Pierwsze trzy cyfry określają pochodzenie produktu – w przypadku Polski to 590. Kolejne to numer przedsiębiorstwa, numer produktu i wreszcie cyfra kontrolna. W przypadku książek i czasopism, którym nadawane są międzynarodowe numery ISSN i ISBN, pierwsze trzy cyfry to odpowiednio 977 i 978.

Rozpoznanie kraju pochodzenia produktu po pierwszych trzech cyfrach kodu może niekiedy okazać się zwodnicze. Do oznaczania kodami kreskowymi mają prawo, oprócz producentów, także dystrybutorzy. Zdarza się, że na etykiecie przyklepionej przez polskiego hurtownika-importera pojawi się kod 590. Może tak być wtedy, gdy na przykład w kraju producenta towaru nie ma krajowego przedstawicielstwa EAN.

Liczbę kontrolną oblicza się w EAN13 według następującego algorytmu (ilustruje go numer występujący na dwustugramowym opakowaniu śmietanki do kawy *Cremona*).

Numer produktu (pierwszych 12 cyfr): 590094701005

1. Obliczamy sumę cyfr występujących na parzystych pozycjach:
 $9 + 0 + 4 + 0 + 0 + 5 = 18$.
2. Mnożymy wynik przez 3: $18 \cdot 3 = 54$.
3. Obliczamy sumę cyfr występujących na nieparzystych pozycjach:
 $5 + 0 + 9 + 7 + 1 + 0 = 22$.
4. Sumujemy wyniki kroków 2 i 3: $54 + 22 = 76$.
5. Cyfra kontrolna reprezentuje najmniejszą liczbę, która dodana do wyniku poprzedniego kroku daje liczbę podzielną przez 10. W tym przypadku to 4. Zakodować należy więc numer 5900947010054.

Kodowana cyfra	Kody dla „lewej” grupy		Kody dla „prawej” grupy
	1	0	
0	0001101	0100111	1110010
1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100
3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100
5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000
7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000
9	0001011	0010111	1110100

Skoro wiemy zatem, co zakodować, przyjrzymy się, jak to się robi. Po pierwsze, koduje się jedynie ostatnich 12 znaków, pierwszy wyliczając z kolejnych sześciu. Następnie dzieli się cyfry numeru na dwie sześciocyfrowe grupy – lewą i prawą – i koduje je czarno-białymi paskami. Każda cyfra zakodowana jest za pomocą 7 jednakowej szerokości kresk ciemnych i jasnych. Dla ułatwienia, ciemnym przypiszmy cyfrę „jeden”, a jasnym „zero”. Stosuje się trzy kody do zapisu dziesięciu cyfr występujących w numerze. Który z nich zastosujemy, zależy od tego, czy kodujemy początek, czy koniec numeru oraz zależnie od wartości pierwszej cyfry (przypomnijmy, że nie jest ona bezpośrednio kodowana kreskami). Używane kody pokazuje tabela.

Kodowana cyfra	Kolejność kodów „lewej” grupy
0	111111
1	110100
2	110010
3	110001
4	101100
5	100110
6	100011
7	101010
8	101001
9	100101

Użycie kodu „1” lub „0” z „lewej” strony pozwala zakodować pierwszą cyfrę numeru, a potem jednoznacznie ją odczytać.

Przyjrzymy się pierwszej tabeli i znajdziemy charakterystyczne cechy kodu. Po pierwsze, widać, że każda cyfra kodowana jest na przemian dwoma jasnymi i dwoma ciemnymi paskami o szerokości od 1 do 4. Po drugie, odczyt wspanie nigdy nie daje poprawnego wyniku. I po trzecie, pozostawiam spostrzegawczości Czytelników dostrzeżenie innych regularności, jak na przykład sposobu otrzymania kolumny trzeciej z prostego przekształcenia drugiej. A oto, jak powyższe przełożyć na kreski ze słodka *Cremony*. Trzeba wiedzieć jeszcze coś. By ułatwić czujnikowi bezbłędny odczyt kresk, a w szczególności uniezależnić go od szybkości przesuwu kodu, wprowadzono kody rozpoczynające i kończące oraz rozdzielające grupę „lewą” od „prawej”. Są to kreski 101 – z boku i 01010 – pośrodku kodu. Teraz wiadomo już wszystko i nasz kod wygląda jak na rysunku.

ISSN *Delty*

Kod *Delty*, to oczywiście ISSN, ale nie tylko. Zgodnie z międzynarodowymi ustaleniami w postaci kodu paskowego zapisuje się numer o następującej strukturze:

1	2	3	Numer ISSN bez jego znaku kontrolnego							QQ	K	Kod czasowy	
9	7	7	0	1	3	7	3	0	0	0	0	0	3

QQ – oznacza kod stosowany do wydań specjalnych lub 00 (czasami używany jako numer roku), K – to cyfra kontrolna liczona jak dla zwykłego kodu EAN13. Kod czasowy – w przypadku miesięcznika numer miesiąca w roku.

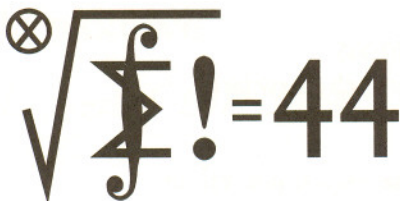
Do kodowania numeru czasopisma używa się zasad kodu EAN13. Dla dodatkowych, ostatnich dwóch cyfr stosuje się kody z „lewej” grupy, zaczynając je kreskami 1011 i rozdzielając 01. Do wyboru numeru kodu należy użyć przedstawionej obok tabeli. Podaję jedynie jej początek, licząc na oczywistość zasad jej konstrukcji.

I to wszystko. Miłej zabawy.



Kod kreskowy marcowej *Delty*.

Kolejność kodów „lewej” grupy			
11	10	01	11
Kodowane pary cyfr grupy			
00	01	02	03
04	05	06	07
08	09	10	11



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2001

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z matematyki nr 425, 426

Redaguje Marcin E. KUCZMA

425. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ o nierównoległych bokach AB i CD znajduje się punkt X taki, że $|\angle ADX| = |\angle BCX| < 90^\circ$ oraz $|\angle DAX| = |\angle CBX| < 90^\circ$. Symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie Y . Dowiedz, że $|\angle AYB| = 2 \cdot |\angle ADX|$.

426. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $(b + c)(a + b + c) = c$ oraz $b + c < 0$. Dowiedz, że wielomian $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma i iloczyn są równe.

Zadanie 426 zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2001

Przypominamy treść zadań:

421. Niech A będzie zbiorem n -elementowym ($n > 3$). Ile jest funkcji $f: A \rightarrow A$ o tej własności, że $(n-2)$ -krotna iterata $f^{n-2} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n-2}$ jest odwzorowaniem stałym, podczas gdy f^{n-3} nie jest

odwzorowaniem stałym?

422. Rozważamy ciąg liczb $a_n = \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin 2^{-n} k\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Wykazać istnienie i obliczyć

wartość granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{2^{-n}}$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 413 ($WT=2,40$) i 414 ($WT=1,05$)
z numeru 1/2001

Piotr Kumor	- Olsztyn	46,53
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	44,88
Paweł Kubit	- Kraków	43,24
Witold Bednorz	- Tychy	40,50
Janusz Olszewski	- Suwałki	39,40

Parada Weteranów! Piotr Kumor zalicza czterdziestkę czwórkę już po raz szósty, a Przemek Gadziński – po raz siódmy.

421. Niech f będzie jedną z rozważanych funkcji. Istnieje więc element $c \in A$ taki, że

$$(1) \quad f^{n-2}(x) = c \quad \text{dla wszystkich } x \in A.$$

Podstawiając kolejno $x = f(c)$ oraz $x = c$ łatwo stwierdzamy, że $f(c) = c$. Skoro f^{n-3} nie jest odwzorowaniem stałym, istnieje element $b \in A$, dla którego $f^{n-3}(b) \neq c$. Oznaczmy $b = a_2$, $f(b) = a_3$, $f^2(b) = a_4$, itd. Działanie funkcji f można przedstawić w postaci grafu skierowanego, zawierającego łańcuch

$$(2) \quad a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow a_n \circlearrowright$$

($a_2 = b$, $a_n = c$), w którym wszystkie elementy a_i są różne. Pozostaje w zbiorze A jeszcze jeden element, który nazwiemy a_1 . Z warunku (1) wynika, że $f(a_1) \neq a_1$ oraz $f(a_1) \neq a_2$. Pełny graf działania f uzyskamy dorysowując do łańcucha (2) strzałkę od dołączonego elementu a_1 do któregoś z elementów a_3, \dots, a_n .

Policzymy, ile jest sposobów skonfigurowania zbioru A , aby powstał taki graf. Wybieramy element a_1 (n możliwości), po czym ustawiamy pozostałe elementy w ciąg typu (2) ($(n-1)!$ możliwości); następnie prowadzimy strzałkę od a_1 do jednego z punktów a_3, \dots, a_n , rozróżniając dwie sytuacje: albo $a_1 \rightarrow a_3$, albo $a_1 \rightarrow a_j$, $4 \leq j \leq n$ ($n-3$ możliwości realizacji tej drugiej sytuacji).

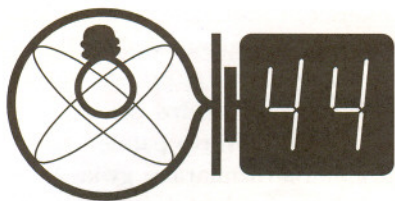
Jeśli $a_1 \rightarrow a_3$, to graf nie zmienia się po zamianie miejscami elementów a_1 i a_2 , co oznacza, że odpowiadające takiej sytuacji funkcje f policzyliśmy dwukrotnie. W każdym z pozostałych $n-3$ przypadków rola elementu a_1 jest wyróżniona i wszystkie konfiguracje różnią się istotnie. Zatem liczba rozważanych funkcji f wynosi $n \cdot (n-1)! \cdot (\frac{1}{2} + (n-3))$, czyli $(n - \frac{5}{2})n!$.

422. Przekształcamy wyrażenie określające n -ty wyraz rozważanego ciągu, stosując w pewnym miejscu podstawienie $j = 2^n + k$:

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin \frac{k\pi}{2^n} = \prod_{k=1}^{2^n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{k\pi}{2^{n+1}} = \\ &= 2^{2^n-1} \cdot \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}} \cdot \prod_{j=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} \cos \left(\frac{j\pi}{2^{n+1}} - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 2^{2^n-1} \cdot \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}} \cdot \prod_{j=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} \sin \frac{j\pi}{2^{n+1}} = 2^{2^n-1} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Przyjmując $b_n = 2^{2^n-n} a_n$ otrzymujemy zależność $b_{n+1} = b_n$. Ciąg (b_n) jest więc stały, wszystkie jego wyrazy są równe b_1 , czyli 2, i ostatecznie

$$a_n^{2^{-n}} = (2^{n-2^n} b_n)^{2^{-n}} = 2^{(1+n)2^{-n}-1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

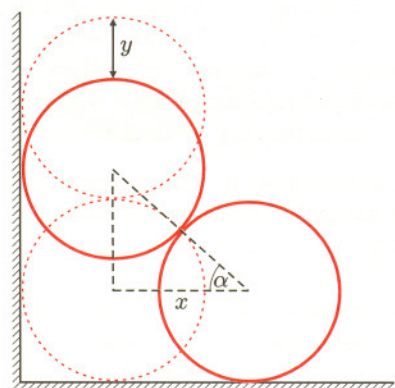


Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2001

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 314 (WT=2,92) i 315 (WT=1,84)
z numeru 3/2001

Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	39,79
Aleksander Surma	- Myszków	37,60
Tomasz Rudny	- Warszawa	28,28
Jacek Piotrowski	- Rzeszów	24,86
Tomasz Wietecha	- Tarnów	23,95



318. Oznaczmy promień walców jako r , przesunięcie dolnego walcu wzdłuż osi poziomej – jako x , a przesunięcie górnego wzdłuż osi pionowej – jako y . Dopóki walce się stykają, ich środki pozostają odległe o $2r$, zatem przesunięcia spełniają związek

$$(2r - y)^2 + x^2 = 4r^2.$$

Inną miarą przesunięcia walców jest kąt α (rys.), $\cos \alpha = x/2r$. Różniczkując powyższe równanie (lub analizując prędkości geometrycznie) otrzymujemy wzór

$$v_x \cos \alpha = v_y \sin \alpha,$$

gdzie $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$. Dalej skorzystamy z zasady zachowania energii, przy czym ze względu na brak tarcia ruch walców będzie czysto postępowy, czyli należy pominąć energię kinetyczną ruchu obrotowego. Wynika stąd związek

$$v_x^2 + v_y^2 = 2gy,$$

który po podstawieniu zależności między v_x a v_y sprowadza się do

$$v_x^2 = 2gy \sin^2 \alpha.$$

Dolny walec osiągnie maksymalną prędkość w momencie, w którym $dv_x/dt = 0$ (wtedy walce oderwą się od siebie). Przyrównując do zera pochodną $d(v_x^2)/dt$ dochodzimy do wniosku, że nastąpi to dla kąta α spełniającego warunek $\sin \alpha = y/r$, a ponieważ $\sin \alpha = (2r - y)/2r$, zatem $y = 2r/3$, $\sin \alpha = 2/3$. Po podstawieniu do bilansu energii wyznaczamy szukaną maksymalną wartość v_x

$$v_{x \max} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{gr}{3}}.$$

Zadania z fizyki nr 322, 323

Redaguje Jerzy B. BROJAN

322. Na obracającej się ze stałą prędkością kątową ω_0 poziomej ośce osadzono ciało (wahadło), które może się wokół niej obracać, przy czym moment sił tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości poślizgu i jest równy maksymalnemu momentowi tarcia statycznego. Moment ten ma wartość $M_t = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$, moment bezwładności wahadła względem osi obrotu $I = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, a maksymalny moment siły ciężkości (równy iloczynowi ciężaru wahadła przez odległość jego środka masy od osi obrotu) $M_g = 1,5 \text{ N}\cdot\text{m}$. W chwili początkowej nadano wahadłu dużą prędkość kątową zgodną ze zwrotem ω_0 . Dla jakich wartości ω_0 wahadło po długim czasie będzie się obracać, a dla jakich – wykonywać drgania wokół pewnego położenia równowagi?

Poza konkursem: Jaka jest odpowiedź dla przypadku, kiedy $M_g = 2 \text{ N}\cdot\text{m}$, a pozostałe dane są niezmienione?

323. Żarówka o mocy nominalnej 15 W jest dostosowana do napięcia 10 V . Ile ogniw o SEM równej $1,5 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym 2Ω trzeba wziąć i jak je połączyć, aby napięcie na żarówce było co najmniej równe nominalnemu?

(Zadanie ma charakter konkursu na minimalną liczbę potrzebnych ogniw; ścisły dowód, że mniejsza liczba ogniw nie wystarczy, nie jest wymagany.)

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2001

Przypominamy treść zadań:

318. Dwa jednakowe walce położono jeden na drugim przy pionowej ścianie (rysunek) i bardzo lekko pchnięto dolny walec w prawo, tak że zaczął się wysuwać spod górnego, który pozostawał w kontakcie ze ścianą. Jaką prędkość osiągnie ostatecznie dolny walec? Zakładamy, że na żadnej ze stykających się powierzchni nie występuje tarcie.

319. Ciepło parowania rtęci wynosi $r = 2,9 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$, napięcie powierzchniowe rtęci – $\sigma = 0,49 \text{ J/m}^2$, gęstość – $\rho = 1,36 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$, a masa atomowa – $M = 201$. Na podstawie tych danych wyprowadzić przybliżoną wartość liczby Avogadra.

Wskazówka: napięciem powierzchniowym cieczy nazywamy energię, którą trzeba dostarczyć, aby zwiększyć powierzchnię cieczy o jednostkę. Dla ścisłości należałoby ustalić ośrodek, z jakim styka się rtęć – przyjmijmy, że jego cząsteczki słabo oddziałują z cząsteczkami rtęci (np. jest to powietrze).

319. Napięcie powierzchniowe jest energią, którą trzeba dostarczyć cząsteczkom, aby je przeprowadzić z głębi cieczy na powierzchnię. Zakładamy przy tym, że cząsteczki oddziałują tylko ze swoimi najbliższymi sąsiadami, czyli powyższa zmiana energii dotyczy tylko jednocząsteczkowej warstwy powierzchniowej. Rozsądnie jest przyjąć, że całkowite oderwanie cząsteczki od pozostałych (przejście w parę) wymaga dwa razy większej energii, tzn. 2σ na jednostkę powierzchni takiej warstwy. Z drugiej strony, iloczyn ciepła parowania r przez gęstość ρ jest energią niezbędną do odparowania jednostki objętości cieczy. Dzieliąc te dwie wielkości otrzymamy zatem grubość u warstwy jednocząsteczkowej

$$u = \frac{2\sigma}{r\rho}.$$

Objętość zajmowana przez jedną cząsteczkę wynosi w przybliżeniu u^3 , a ponieważ objętość 1 mola jest równa M/ρ (gdzie M należy wyrazić w kilogramach), więc otrzymujemy liczbę Avogadra daną wzorem

$$N = \frac{M}{\rho} \left(\frac{r\rho}{2\sigma} \right)^3 = M\rho^2 \left(\frac{r}{2\sigma} \right)^3.$$

Podstawienie wartości liczbowych daje wynik $N = 9,6 \cdot 10^{23}$. Jest rzeczą godną uwagi, że tak proste rachunki dają dobry rząd wielkości liczby Avogadra, choć dokładne jej obliczenie wymagało – jak wiadomo z historii fizyki – trudnych pomiarów. Odnotujmy przy okazji, że dla wody analogiczny rachunek byłby obarczony znacznie większym błędem, co przypuszczalnie ma związek z dipolowym charakterem jej cząsteczek.



Rozwiązanie zadania M 965.

Zalóżmy, że na początku n części było zarośniętych chwastem. Zauważmy, że po każdym zarośnięciu jednej części pola długość brzegu zarośniętego obszaru zmniejsza się co najmniej o 2. Po zarośnięciu całego pola długość brzegu obszaru zarośniętego zmniejszy się co najmniej o $2(49 - n)$. Na początku długość ta wynosi co najwyżej $4n$, całe pole zaś ma brzeg długości 28. Wynika stąd, że $4n - 2(49 - n) \geq 28$, czyli $n \geq 21$. Na rysunku przedstawione jest minimalne początkowe „zachwaszczenie”, które prowadzi do klęski.

×		×		×		×
	×					×
×		×		×		×
			×			
×		×		×		×
	×				×	
×		×		×		×

Przestrzeń międzygalaktyczna to może być np. miejsce, z którego do najbliższego atomu wodoru jest kilka metrów, a do najbliższej galaktyki kilka megaparseków. To prawda, ale niekoniecznie. Gdzieś tam w tej przestrzeni, a zwłaszcza dosłownie między galaktykami, sporo się dzieje. Bardzo często spotykaną strukturą jest tzw. most łączący dwie galaktyki. Warto pamiętać, że odległości międzygwiazdowe są ogromne w porównaniu z rozmiarami gwiazd, natomiast międzygalaktyczne w porównaniu z rozmiarami galaktyk takie nie są. Inaczej mówiąc, mała jest szansa zderzenia się gwiazdy z gwiazdą, natomiast spora – galaktyki z galaktyką; a w każdym razie bliskiego spotkania. W wyniku takiego spotkania galaktyki mogą wyrwać sobie „fragmenty własnych ciał”, czyli strugi składające się z gwiazd i materii międzygwiazdowej. Na zdjęciach wygląda to np. tak, jakby dwie galaktyki łączyło jedno wspólne ramię spiralne, często przy tym nadmiernie długie i pokręcone.

Bywa też, że taki most międzygalaktyczny jest prawie niewidoczny, a mimo to jest obiektem stale aktywnym. Jest w Lwie trójka galaktyk (M 65, M 66 i NGC 3628, leżąca w odległości ponad 6 Mpc), znana jako Leo Triplet, przy czym z NGC 3628 ciągnie się gazowa struga długości 75 kpc, widoczna tylko na zdjęciach z bardzo długą ekspozycją. Wydaje się, że struga ta została z galaktyki wyrwana 800 mln lat temu w wyniku bliskiego przejścia M 66. W strudze tej wykryto przynajmniej cztery gwiazdowe zgęszczenia, a własności tych gwiazd wskazują na to, że najmłodsze z nich mają zaledwie 12 mln lat. A więc w tym moście międzygalaktycznym toczą się jakby normalnie procesy gwiazdotwórcze.

Czasami najtrudniej jest dostrzec coś leżącego „tuż na oczach”. Mianowicie dopiero w 1973 r. odkryto gazowy most łączący naszą Galaktykę z Obłokami Magellana, ciągnący się jeszcze dalej poza nimi. Co prawda, nie widać go wprost, gdyż jest to struga wodorowa, dostrzegalna dopiero metodami radioastronomicznymi (na fali 21 cm). Fragment tej strugi, znajdujący się dalej od Galaktyki niż same Obłoki Magellana, poprzedza je w ich ruchu wokół Galaktyki, a część bliższa zapewne z nią się łączy. Struktura taka dowodziłaby, że w tym przypadku wodór pochodziłby z Obłoków, a wyrwany z nich został działaniem pływowych sił naszej Galaktyki. Wniosek ogólny: nawet w przestrzeni międzygalaktycznej próżnia nie jest doskonała.

Tomasz KWAST

Wrzesień

Wieczorami wysoko i nieco na południu widać gwiazdozbiór Delfina. Nieuzbrojone oko widzi w nim – powiedzmy – pięć gwiazd układających się w zarys małego latawca wyraźnie wyodrębniającego się z tła gwiazd. Jego najjaśniejsze dwie gwiazdy noszą nazwy Sualocin i Rotanev – dziwaczne, prawda? Toteż choć nazwy te pojawiły się w katalogu gwiazd z 1814 r., przez kilkadziesiąt lat nie było wiadomo, skąd pochodzą; zresztą może niespecjalnie się tym interesowano. Wreszcie wydało się, że jest to wspaniale napisane (w dodatku w zlatynizowanej formie) imię i nazwisko Nicolausa Venatora, asystenta G. Piazziego – znanego z odkrycia pierwszej planetoidy. Poza tą anegdotyczną sprawą warto może wiedzieć, że w Delfinie znajduje się chyba najdalsza gromada kulista naszej Galaktyki, NGC 7006. Jej odległość od centrum Galaktyki ocenia się na ponad 40 kpc, a więc niemal jak Obłoków Magellana. Siłą rzeczy gromada ta jest dość słaba, ma 11,5 mag, i do jej ujrzenia potrzebny jest już mały teleskop.

Wenus praktycznie nie widać wskutek bliskości Słońca. Mars jest w Strzelcu i wieczorem widać go niezbyt długo, nisko nad południowo-zachodnim horyzontem. Jowisz jest w Bliźniętach a Saturn w Byku i planety te wschodzą około północy. Pełnia Księżycza wypada 2 IX, a now 17 IX. Księżyc zakryje Saturna 10 IX i Jowisza 12 IX. Pierwsze zakrycie będzie widoczne tylko z Hawajów i USA, drugie wprawdzie z Europy, w tym i z Polski, ale i tak oba zakrycia nastąpią podczas dnia. Zakryć jasnych gwiazd nie będzie. Około północy 22/23 IX nastąpi równonoc, czyli początek jesieni.

T.K.



Rozwiązanie zadania M 964.

Zauważmy, że każdego roku łączna długość brzegu obszaru zarośniętego chwastem nie zwiększa się. Na początku długość ta jest nie większa niż $9 \cdot 4 = 36$, całe pole zaś ma brzeg długości 40. Wynika stąd teza zadania.

$\left(\frac{S_{n+1}}{n+1}\right)^{96} \equiv 1 \pmod{p}$ i mamy zagwarantowaną podzielność S_p przez p . Jeśli natomiast $\left(\frac{S_n}{n}\right)^{96} \not\equiv 1 \pmod{p}$, to może być $\left(\frac{S_{n+1}}{n+1}\right)^{96} \not\equiv 1 \pmod{p}$ lub $\left(\frac{S_{n+1}}{n+1}\right)^{96} \equiv 1 \pmod{p}$. Jest pewna szansa, że zajdzie ten drugi przypadek, co oznacza, że ciąg (S_n) złapie gwarancję podzielności S_p przez p .

Podsumowując: są dwa rodzaje przyczyn, dla których S_p dzieli się przez p :

- (i) dla pewnego $n < p$ liczba S_n dzieli się przez p ,
- (ii) dla pewnego $n < p$ zachodzi $\left(\frac{S_n}{n}\right)^{96} \equiv 1 \pmod{p}$.

Oczywiście, te dwie przyczyny wzajemnie się wykluczają. Jeśli jednak dla pewnego n nie zachodzi żadna z nich, to jest pewna szansa, że przy $n + 1$ jedna z nich się objawi. Jeśli więc śledzimy powstawanie ciągu (S_n) , to do podzielności S_p przez p potrzeba, aby po drodze zaistniała jedna z powyższych przyczyn.

Jeśli przyjmie się założenie, że wedle naszej wiedzy reszty $S_n \pmod{p}$ i $\frac{S_n}{n} \pmod{p}$ są losowe, dopóki ciąg S_n nie złapie jednego z warunków (i) lub (ii), to można oczekiwać, że na każdym kroku prawdopodobieństwo złapania warunku (i) jest rzędu $\frac{1}{p}$, natomiast prawdopodobieństwo złapania warunku (ii) jest rzędu $\frac{NWD(p-1, 96)}{p-1}$. Liczba $NWD(p-1, 96)$ to liczba reszt *modulo* p , których 96-ta potęga jest jedynką *modulo* p .

Jeśli więc $p-1 \nmid 96$, to warunek $\left(\frac{S_n}{n}\right)^{96} \equiv 1 \pmod{p}$ jest spełniony od samego początku (poza $p = 2$). To dowodzi podzielności S_p przez p dla $p = 3, 5, 7, 13, 17, 97$.

Prześledźmy w pewnych szczególnych przypadkach, jakie są nasze przewidywania.

Przypadek $p \equiv 11 \pmod{12}$. Wtedy $NWD(p-1, 96) = 2$ i oczekujemy, że na każdym kroku ciąg (S_n) łapie warunek (i) z prawdopodobieństwem rzędu $\frac{1}{p}$ i warunek (ii) z prawdopodobieństwem rzędu $\frac{2}{p}$, co daje razem prawdopodobieństwo rzędu $\frac{3}{p}$ (interesują nas duże p i liczymy tylko rząd wielkości prawdopodobieństwa).

Nasze przewidywania:

- 1) warunek (ii) zajdzie około 2 razy częściej niż (i),
- 2) na zajęcie któregośkolwiek z tych warunków trzeba czekać średnio około $\frac{p}{3}$ kroków,
- 3) S_p dzieli się przez p z prawdopodobieństwem rzędu $1 - \left(1 - \frac{3}{p}\right)^p \approx 1 - e^{-3} \approx 0,95$.

Podobnie w przypadku gdy $p \equiv 5 \pmod{24}$, czyli gdy $NWD(p-1, 96) = 4$, przewidujemy prawdopodobieństwo podzielności S_p przez p rzędu $1 - e^{-5} \approx 0,993$. Jakkolwiek z uwagi na przyjęte uproszczenia nasze przewidywania nie są dokładne ilościowo, to jakościowo dają dobry obraz zachowania ciągów (a_n) i (S_n) . Oczekujemy, że podzielność S_p przez p dla liczb pierwszych $p \equiv 11 \pmod{12}$ zajdzie w 95%, a dla innych liczb pierwszych będzie jeszcze lepiej.

Skoro podzielność S_p przez p jest prawie (ale tylko prawie!) pewna, nie powinno dziwić, że wyrazy ciągu (a_n) są przez długi czas całkowite. Nie przeprowadzamy analizy podzielności przez liczby złożone, nietrudno jednak uwierzyć, że dochodzą wówczas do głosu podobne zjawiska.

JWR

DLACZEGO? (II/4)

Pytanie, **DLACZEGO** liczba a_{2040} nie jest całkowita, jest trochę niewłaściwie postawione. Nie jest całkowita, bo nie widać powodów, żeby była. Obliczając kolejne wyrazy ciągu (a_n) , wykonujemy dzielenie, które wcale nie musi prowadzić do liczby całkowitej. To, co naprawdę wymaga wyjaśnienia, to **DLACZEGO** liczby a_n są całkowite dla $n \leq 2039$. Oczywiście, nie udowodnię tego bez liczenia, pokażę jednak powody, dla których całkowitość wielu wyrazów ciągu (a_n) nie powinna dziwić.

W celu dokładniejszego przeanalizowania procedury obliczania kolejnych wyrazów ciągu (a_n) wprowadźmy pomocniczy ciąg (S_n) zdefiniowany wzorem

$$S_n = a_0^{97} + a_1^{97} + a_2^{97} + \dots + a_n^{97}.$$

Wówczas, wobec równości $a_{n+1} = \frac{S_n}{n}$, ciąg (S_n) możemy określić rekurencyjnie wzorami

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 2, \quad S_{n+1} = S_n + \left(\frac{S_n}{n}\right)^{97} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zależność rekurencyjna może być zapisana w postaci

$$(7\Diamond) \quad S_{n+1} = \frac{S_n}{n} \left(n + \left(\frac{S_n}{n}\right)^{96} \right).$$

Niech p będzie liczbą pierwszą. Przypuśćmy, że liczby a_n są całkowite dla $n \leq p$. Kolejny wyraz obliczamy ze wzoru $a_{p+1} = \frac{S_p}{p}$. Chcę wyjaśnić **DLACZEGO** jest bardzo duża szansa (ale tylko szansa!) na to, że S_p dzieli się przez p . Przyjrzyjmy się wzorowi (7 \Diamond). Wynika z niego, że jeżeli dla pewnego $n < p$ liczba S_n dzieli się przez p , to S_{n+1} i wszystkie następne, aż do S_p , także dzielą się przez p . Jeśli zaś S_n nie dzieli się przez p , to czynnik $n + \left(\frac{S_n}{n}\right)^{96}$ przez p się dzieli albo nie dzieli. Jest jednak pewna szansa, że się dzieli, a wtedy ciąg (S_n) „łapie” podzielność przez p i nie puszcza jej aż do wykonania dzielenia przez p przy obliczaniu a_{p+1} .

Jest też druga, mniej widoczna, ale silniejsza przyczyna, **DLACZEGO** S_p lubi dzielić się przez p . Otóż jeśli dla pewnego $n < p$ mamy $\left(\frac{S_n}{n}\right)^{96} \equiv 1 \pmod{p}$, to

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{n+1} &= \frac{S_n}{n} \left(n + \left(\frac{S_n}{n}\right)^{96} \right) \cdot \frac{1}{n+1} \equiv \\ &\equiv \frac{S_n}{n} (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \equiv \frac{S_n}{n} \pmod{p}, \end{aligned}$$

skąd wynika, że także $\left(\frac{S_{n+1}}{n+1}\right)^{96} \equiv 1 \pmod{p}$.

W konsekwencji $\left(\frac{S_{p-1}}{p-1}\right)^{96} \equiv 1 \pmod{p}$, co daje

$$S_p = \frac{S_{p-1}}{p-1} \left(p-1 + \left(\frac{S_{p-1}}{p-1}\right)^{96} \right) \equiv \frac{S_{p-1}}{p-1} \cdot p \equiv 0 \pmod{p}.$$

Widzimy więc, że jeżeli $\left(\frac{S_n}{n}\right)^{96} \equiv 1 \pmod{p}$, to

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu \cdot s \quad \nu=3,14159$

delcie
POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY



Zadania II i III
etapu Olimpiad
przedstawimy
w *Delcie* 6/2002

Dodatek Olimpijski

Zadania I stopnia

Olimpiady Astronomicznej, Matematycznej i Fizycznej 2001/2002

XLV OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2001/2002

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (pierwsza seria)

1. Załogowy statek kosmiczny został wprowadzony na kołową orbitę wokół Ziemi w odległości $h = 500$ km od jej powierzchni. Następnie zwiększono wartość chwilowego wektora prędkości wprowadzając statek na orbitę eliptyczną. Stwierdzono, że w aparacie fotograficznym o ogniskowej $f = 24$ mm obraz Ziemi w największym oddaleniu statku od Ziemi mieści się dokładnie na klatce filmowej o wymiarach $a = 36$ mm, $b = 24$ mm.

Przedstaw na schematycznym rysunku wzajemne usytuowanie obydwu orbit. Jaki mimośród miała nowa orbita statku? Jak zmienił się okres obiegu statku w porównaniu z okresem obiegu na pierwszej orbicie? Jakie były minimalne i maksymalne odległości statku od powierzchni Ziemi na drugiej orbicie?

Załóż, że Ziemia jest kulą o promieniu 6400 km.

2. Oszacuj, czy gołym okiem można dostrzec gwiazdę ciągu głównego typu widmowego:

- a) B0 – odległą od nas o 2000 lat świetlnych,
- b) A0 – odległą o 1000 lat świetlnych,

c) G2 – odległą o 4 lata świetlne,

d) M5 – odległą o 4 lata świetlne.

Pozostałe potrzebne dane znajdź samodzielnie.

3. Podczas obserwacji jednego z zakryć Jowisza przez Księżyc obserwator odnotował czas pomiędzy I i II kontaktem wynoszący 56 sekund. Przez I kontakt rozumiemy pierwsze zetknięcie obu tarcz, przez II kontakt – koniec widoczności tarczy planety. Współrzędne równikowe (rektascensja, deklinacja) Księżyca dla miejsca obserwacji pół godziny przez I kontaktem (α_1, δ_1) i pół godziny po I kontakcie (α_2, δ_2) były następujące:

$$\alpha_1 = 6^h 48^m 45,37^s, \delta_1 = +22^\circ 57' 12,1''$$

$$\alpha_2 = 6^h 51^m 29,54^s, \delta_2 = +22^\circ 53' 27,7''$$

Przyjmując upraszczająco, że zakrycie było centralne, oblicz odległość Jowisza od Ziemi. Promień równikowy Jowisza $r_J = 7,14 \cdot 10^7$ m.

4. Zwięźle opisz wyniki ostatnich badań Słońca, powołując się na literaturę, z której korzystałeś.

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej należy dołączyć negatywy. Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 19 listopada 2001 r.

ZADANIA OBSERWACYJNE

1. Zaproponuj metodę wyznaczenia lokalnego południka w swojej miejscowości, a następnie posługując się tym południkiem wyznacz 5 momentów górowania Słońca w kilkudniowych odstępach.

2. Dysponując odpowiednim teleskopem dokonaj próby zaobserwowania Czerwonej Plamy na Jowiszu. Określ z możliwie dużą dokładnością jej:

- położenie na tarczy Jowisza,
- rozmiary,
- okresy widoczności związane z obrotem Jowisza.

Do wyników obserwacji dołącz samodzielnie wykonane rysunki wyglądu tarczy Jowisza podczas obserwacji.

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki własnych obserwacji prowadzonych w ostatnich dwóch latach, a w szczególności obserwacji zakrycia Saturna przez Księżyc 3/4.11.br.

INFORMACJE REGULAMINOWE

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół średnich.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do 15 października 2001 r., rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Uczniowie, którzy przysłać rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań.

5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do 19 listopada br. Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem: **KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ, Planetarium Śląskie, 41-500 Chorzów, skr. poczt. 10**, w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych, należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: rok i miejsce urodzenia, pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).

10. O uprawnieniach laureatów i finalistów decydują senaty wyższych uczelni. Wśród nagród znajdują się teleskopy.

ZALECANA LITERATURA:

- obowiązujące w szkołach średnich podręczniki do przedmiotów ścisłych;
- H. Chrupała, M.T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych; Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach);
- H. Chrupała, J. Kreiner, M. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*;
- J.M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*;
- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika*;
- J. Mietelski, *Astronomia w geografii*;
- E. Rybka, *Astronomia ogólna*;
- *Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa;
- atlas nieba;
- obrotowa mapa nieba;
- czasopisma: *Delta, Fizyka w Szkole, Świat Nauki, Urania – Postępy Astronomii, Wiedza i Życie*.



I SERIA

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych równanie
 $|x| - |x + 2| + |x + 4| - |x + 6| + \dots - |x + 998| =$
 $= |x + 1| - |x + 3| + |x + 5| - |x + 7| + \dots - |x + 999|.$

2. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznaczyć możliwe wartości wyrażenia $MN:BC$.

5. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna m , że każda z liczb $m, 2m, 3m, \dots, m^2$ w rozwinięciu dwójkowym ma dokładnie k jedynek.

6. Okrąg dzieli każdy bok rombu na 3 odcinki. Malujemy otrzymane odcinki kolejno na czerwono, zielono i biało, zaczynając od wierzchołka rombu i poruszając się po jego obwodzie w ustalonym kierunku. Wykazać, że suma długości odcinków czerwonych jest równa sumie długości odcinków białych.

9. Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego tworząc w przekroju sześciokąt wypukły $D_1D_2D_3D_4D_5D_6$. Niech d_i ($1 \leq i \leq 6$) będzie odległością punktu D_i od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastosłupa. Dowieść, że

$$d_1^2 + d_3^2 + d_5^2 = d_2^2 + d_4^2 + d_6^2.$$

10. Dana jest szachownica 2000×2000 . Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu, i czy ruch opróżni jakiegokolwiek pole).

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2001 r. – I seria

12 listopada 2001 r. – II seria

10 grudnia 2001 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

3. Wykazać, że liczba

$$\sum_{n=0}^{10^{10}} \binom{2 \cdot 10^{10}}{2n} 5^n$$

jest podzielna przez $2^{2 \cdot 10^{10} - 1}$.

4. Dowieść, że wykres wielomianu $W(x)$ stopnia większego od 1 ma oś symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, że $W(x) = F(G(x))$, przy czym $G(x)$ jest stopnia 2.

II SERIA

7. W grupie $n \geq 3$ osób każda ma parzystą (być może zerową) liczbę znajomych. Dowieść, że istnieją trzy osoby mające tę samą liczbę znajomych.

Uwaga: Zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych, oraz że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy B zna A .

8. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $S(2n^2 + 3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

III SERIA

Rozstrzygnąć, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle B > \sphericalangle C$. Punkt D leży na odcinku BC i spełnia równość $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}(\sphericalangle B - \sphericalangle C)$. Okrąg styczny w punkcie A do prostej AC i przechodzący przez punkt D przecina prostą AB w punkcie $P \neq A$. Dowieść, że

$$\frac{BP}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

12. W niemalejącym ciągu a_1, a_2, a_3, \dots wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi dodatnimi, a ponadto dla każdego k dokładnie k wyrazów jest równych k . Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze postaci

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Dla województwa pomorskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa śląskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

KOOM – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

KOOM – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:

KOOM – Instytut Geologii Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Maków Polnych 16, 61-606 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

KOOM, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY FIZYCZNEJ

KOOF w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-224 Białystok (woj. podlaskie, powiaty: kętrzyński, mławowski, piski, giżycki, olecko-gołdapski, ełcki).

KOOF w Częstochowie, Al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa (woj. opolskie, woj. świętokrzyskie, powiaty: częstochowski, kłobucki, lubliniecki, myszkowski).

KOOF w Gdańsku, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz (woj. pomorskie, woj. warmińsko-mazurskie z wyłączeniem powiatów: kętrzyńskiego, mławowskiego, piskiego, giżyckiego, olecko-gołdapskiego, ełckiego).

KOOF w Gliwicach, ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice (woj. katowickie z wyłączeniem powiatów: częstochowskiego, kłobuckiego, lublinieckiego, myszkowskiego).

KOOF w Krakowie, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków (woj. małopolskie).

KOOF w Lublinie, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin (woj. lubelskie).

KOOF w Łodzi, ul. Pomorska 149, 90-236 Łódź (woj. łódzkie).

KOOF w Poznaniu, ul. Umultowska 85, 60-780 Poznań (woj. wielkopolskie).

KOOF w Rzeszowie, ul. Reytana 16A, 35-310 Rzeszów (woj. podkarpackie).

KOOF w Szczecinie, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin (woj. zachodnio-pomorskie, woj. lubuskie).

KOOF w Toruniu, ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń (woj. kujawsko-pomorskie).

KOOF w Warszawie, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa (woj. mazowieckie).

KOOF we Wrocławiu, pl. M. Borny 9, 50-205 Wrocław (woj. wrocławskie).

LI OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej w terminach: część I – do **25 października br.**, część II – do **20 listopada br.** O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich oraz na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

CZĘŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań – 25 października 2001 r.)

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

**Podaj lub wybierz i krótko uzasadnij prawidłową odpowiedź
(za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty).**

1. Znając kąt, pod jakim widać z Ziemi tarczę Słońca ($\alpha = 1,2 \cdot 10^{-2}$ rad), promień Ziemi ($R_Z = 6400$ km), przyspieszenie ziemskie ($g = 9,8$ m/s²), oraz przyjmując, że rok ma w przybliżeniu $T = 3,2 \cdot 10^7$ s, oblicz stosunek średnich gęstości Ziemi i Słońca.

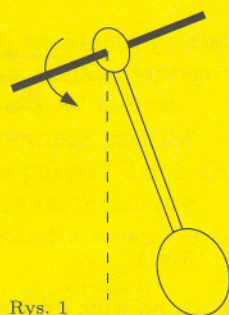
2. Wyjaśnij, dlaczego temperatura w kabinie samochodu pozostawionego na otwartym placu w letni słoneczny dzień, jest wyższa niż temperatura w bagażniku.

3. Na poziomym pręcie obracającym się ze stałą prędkością kątową wokół własnej osi osadzono ciało (wahadło), które może się obracać wokół pręta (rys. 1). Moment sił tarcia między ciałem a prętem jest mniejszy od maksymalnego momentu siły ciężkości ciała. Wahadło ma zatem położenie równowagi, w którym jest odchylone od pionu. Określ, jaki rodzaj drgań będzie wykonywało wahadło, jeśli odchyliny je od tego położenia równowagi o pewien niewielki kąt i puścimy swobodnie. Czy będą to wahania:

- (a) o stałej amplitudzie,
- (b) gasnące,
- (c) samowzbudne (to znaczy o rosnącej amplitudzie).

Podaj odpowiedź dla każdego z poniższych przypadków:

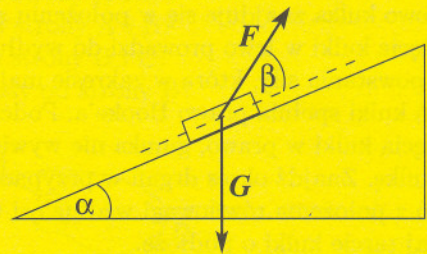
1. moment sił tarcia jest niezależny od prędkości poślizgu,
2. moment sił tarcia rośnie ze wzrostem prędkości poślizgu,
3. moment sił tarcia maleje ze wzrostem prędkości poślizgu.



Rys. 1

4. Dziecko wciąga sanki o ciężarze G po stoku. Stok tworzy kąt α z poziomem (rys. 2), a sanki poruszają się ruchem jednostajnym. Pod jakim kątem β do powierzchni stoku dziecko powinno ciągnąć sznur przymocowany do sanek, aby przyłożona siła F była najmniejsza? Jaka jest wówczas wielkość przyłożonej

siły? Współczynnik tarcia pomiędzy płozami sanek a powierzchnią stoku wynosi μ .

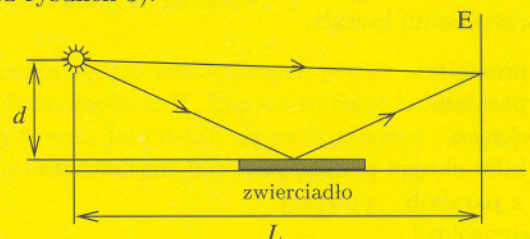


Rys. 2

5. Na jaką maksymalną wysokość są wyrzucane krople wody z kół roweru jadącego po mokrej szosie? Średnica kół roweru wynosi $R = 65$ cm, prędkość roweru – $V = 6$ m/s, a przyspieszenie ziemskie – $g = 9,8$ m/s².

6. Na podstawie znajduje się N metalowych zacisków. Każde dwa z tych zacisków połączono opornikiem o oporze R . Znajdź opór zastępczy pomiędzy dwoma dowolnymi zaciskami.

7. W doświadczeniu Lloyd'a promienie świetlne biegnące bezpośrednio od źródła interferują z promieniami odbitymi od powierzchni zwierciadła (patrz rysunek 3).



Rys. 3

W rezultacie na ekranie E obserwuje się prążki interferencyjne. W doświadczeniu użyto światła monochromatycznego o długości fali λ . Odległość źródła od ekranu wynosiła $L = 1$ m, a odległość źródła od płaszczyzny zwierciadła wynosiła d . Odległość pomiędzy kolejnymi prążkami wynosiła początkowo $\Delta x = 0,5$ mm, a po oddaleniu źródła od zwierciadła o dodatkowe $d_0 = 0,6$ mm zmniejszyła się $N = 1,5$ raza. Oblicz długość fali światła λ . Załóż, że $d \ll L$.

8. Rozpatrzmy układ złożony ze sprężynki o stałej sprężystości K , wiotkiej gumki o tej samej stałej sprężystości K oraz małej kulki o masie M (rys. 4).



Rys. 4

Początkowo kulka znajduje się w położeniu równowagi. Przesunięcie kulki w lewo prowadzi do wydłużenia gumki i powstania siły, która w zakresie małych wychyleń kulki spełnia prawo Hooke'a. Podczas przesunięcia kulki w prawo, gumka nie wywiera żadnej siły na kulkę. Znajdź okres drgań w przypadku małych wychyleń z położenia równowagi wzdłuż osi układu. Zaniedbaj tarcie kulki o podłoże.

9. Fragment kanału przechodzący nad szosą jest podparty na przęsłach mostowych. Kanałem przepływa powoli barka. Wytrzymałość przęseł mostu wynosi 2000 t, a ciężar pustej barki wynosi 500 t. Obciążenie obliczone zanim na moście pojawiła się barka wyniosło 1000 t. Jaki jest maksymalny ciężar ładunku, który można przewieźć tą barką nie doprowadzając do uszkodzenia przęseł mostu?

10. Nad rozległą, poziomą, jednorodnie naładowaną płaszczyzną lewituje w polu grawitacyjnym mała naładowana kulka. Układ jest izolowany od ziemskiego pola magnetycznego. Czy po lekkim pchnięciu kulki w kierunku ukośnym tor jej ruchu będzie miał w przybliżeniu kształt:

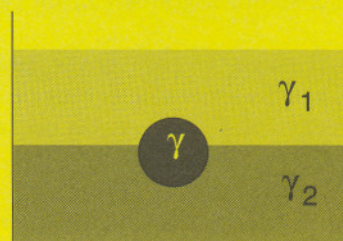
- (a) prostej,
- (b) paraboli,
- (c) okręgu,
- (d) łuku okręgu poniżej poziomu równowagi, a paraboli – powyżej,
- (e) sinusoidy?

11. Doskonale czarna kula o promieniu 2 cm jest stale ogrzewana od wewnątrz. Jej temperatura wynosi 2000 K. Obok znajduje się druga doskonale czarna kula o promieniu 1 cm. Odległość pomiędzy środkami kul wynosi 25 cm. Początkowo temperatura mniejszej kuli wynosiła 4 K. Cały ten układ znajduje się w próżni i jest izolowany od zewnętrznych źródeł promieniowania.

Temperatura drugiej kuli osiąga po długim czasie w przybliżeniu wartość:

- (a) 2000 K,
- (b) 1000 K,
- (c) 500 K,
- (d) 400 K,
- (e) 4 K.

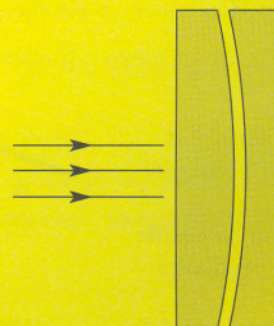
12. Jednorodna kulka o objętości V pływa na granicy dwóch niemieszających się cieczy (rys. 5).



Rys. 5

Ciężar właściwy jednej z cieczy wynosi γ_1 , a drugiej γ_2 , natomiast ciężar właściwy materiału, z którego wykonana jest kulka, wynosi γ i spełnia relację $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. Jaka część objętości kuli znajduje się w górnej, a jaka w dolnej cieczy? Co się dzieje, gdy $\gamma \rightarrow \gamma_1$ lub $\gamma \rightarrow \gamma_2$?

13. Płaskorównoległą płytkę szklaną rozcięto tak, jak pokazano na rysunku 6.



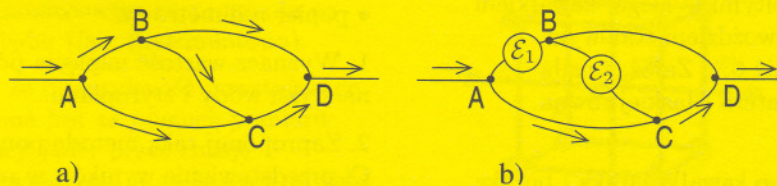
Rys. 6

Utworzono więc dwie soczewki, z których jedna jest płasko-wypukła, a druga płasko-wklęsła. Następnie obie soczewki rozsunęto. Jaki będzie dalszy bieg przedstawionej na rysunku wiązki promieni równoległych padających wzdłuż osi układu? Przedyskutuj bieg promieni w zależności od rozsunęcia soczewek.

14. Skala barometru rtęciowego została wykonana z mosiądzu. Barometr został wyskalowany w temperaturze 0°C . Współczynnik liniowej rozszerzalności mosiądzu wynosi $\lambda = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, zaś współczynnik objętościowej rozszerzalności rtęci wynosi $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. W temperaturze 18°C dokonano pomiaru ciśnienia atmosferycznego. Wysokość słupka rtęci wyniosła 760 mm. Co pokazywałby ten barometr, przy tym samym ciśnieniu atmosferycznym, gdyby temperatura otoczenia wynosiła 0°C ?

15. Rozkład prądów w układzie przewodników elektrycznych pokazano na rysunku 7a. Przecinając przewody AB oraz BC w obwód włączono dwa źródła siły elektromotorycznej \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 . Stwierdzono, że wówczas płynie prąd z A do D, natomiast nie płynie prąd na odcinkach AB oraz BC (rys. 7b). Jakie były zwroty sił elektromotorycznych \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 ?

- a) plus od strony A i C?
- b) plus od strony A i B?
- c) plus od strony B i C?
- d) oba plusy od strony B?



Rys. 7

CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań – 20 listopada 2001 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę i adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. Na powierzchni szklanej kuli znajdują się pająk i mucha. Współczynnik załamania szkła, z którego wykonana jest kula, wynosi $n = \sqrt{2}$. W którym miejscu na powierzchni tej kuli powinna siedzieć mucha, aby była niewidoczna dla pająka? Załóż, że promień kuli jest znacznie większy od rozmiarów muchy i pająka. Pomiń odbicia światła wewnątrz kuli.

T2. Rozważmy układ składający się z trzech równoległych, doskonale przewodzących płytek o powierzchni S każda. Przestrzeń pomiędzy jedną ze skrajnych płytek a płytką środkową jest wypełniona materiałem o stałej dielektrycznej ϵ_1 oraz oporze właściwym ρ_1 , a przestrzeń pomiędzy drugą ze skrajnych płytek a płytką środkową jest wypełniona materiałem o stałej dielektrycznej ϵ_2 i oporze

właściwym ρ_2 . Do zewnętrznych płytek zostało przyłożone napięcie U . Znajdź wartość ładunku elektrycznego, jaki ustali się na środkowej płytce po długim czasie od przyłożenia napięcia.

T3. Nietoperz leci wzdłuż prostej prostopadłej do dwóch pionowych przeciwległych ścian jaskini. W czasie lotu wysyła on do przodu i do tyłu fale dźwiękowe o częstotliwości ν . Fale te ulegają wielokrotnym odbiciom od ścian jaskini i docierają do uszu nietoperza. Ile różnych częstotliwości słyszy nietoperz? Oblicz te częstotliwości zakładając, że prędkość nietoperza wynosi v_n , a prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu jest równa v_d , oraz że $v_n \ll v_d$.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych.
Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Masz do dyspozycji:

- surowe ziemniaki, świeże jabłka, świeże buraki,
- kawałki drutu miedzianego,
- oczyszczone gwoździe stalowe,
- mikroamperomierz z kabelkami połączeniowymi,
- baterię płaską o nominalnym napięciu 4,5 V.

1. Wyznacz wartość siły elektromotorycznej ogniwa złożonego z ziemniaka z wbitymi w niego: kawałkiem druczka miedzianego oraz gwoździem stalowym, z dokładnością nie gorszą niż 5%. Załóż, że siła elektromotoryczna nowej baterii płaskiej równa jest 4,8 V.

2. Wykorzystując dodatkowo kawałki jabłka i buraka, porównaj siłę elektromotoryczną ogniwa z ziemniaka z siłą elektromotoryczną ogniwa z jabłka oraz z siłą elektromotoryczną ogniwa z buraka. Czy widzisz jakąś prawidłowość?

3. Przedyskutuj przyczyny wpływające na dokładność Twojego pomiaru i na tej podstawie określ niepewność wyznaczonej wartości siły elektromotorycznej.

D2. Masz do dyspozycji:

- prostopadłościan styropianowy o wymiarach około $2\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ i o znanej masie,
- pudełko jednakowych, metalowych spinaczy biurowych,
- linijkę,
- przezroczyste naczynie z wodą o głębokości nie mniejszej niż 10 cm,
- papier milimetryowy.

1. Wyznacz wartość napięcia powierzchniowego na styku wody i styropianu.

2. Zaproponuj taką metodę pomiarową, która umożliwi Ci przedstawienie wyników w postaci wykresu, na którym będziesz mógł dopasować prostą do danych doświadczalnych.

UWAGA! Masę prostopadłościanu styropianowego możesz wyznaczyć używając wagi laboratoryjnej ze szkolnej pracowni fizycznej lub chemicznej. Wartość gęstości wody i przyspieszenia ziemskiego możesz wziąć z tablic.

D3. Masz do dyspozycji:

- taśmę papierową o wymiarach $297\text{ mm} \times 50\text{ mm}$,
- słomkę do picia napojów,
- plastelinę,
- taśmę samoprzylepną,
- linijkę,
- kątomierz,
- papier milimetryowy,
- stoper.

1. Zbuduj wahadło skrętne z taśmy papierowej obciążonej słomką i plasteliną.

2. Dla kilku długości taśmy wyznacz doświadczalnie zależność okresu wahań skrętnych T takiego wahadła od amplitudy jego wychylenia kąтового. Przedstaw wyniki w postaci wykresu.

3. Sprawdź, że dla małych amplitud wychyleń spełniona jest zależność $T^2 = kL$, gdzie L jest długością papierowej taśmy. Wyznacz wartość współczynnika proporcjonalności k . Od czego zależy jego wartość?

