

SPIS TREŚCI NUMERU 8 (327)

Jak rozpoznać chaos?

Krzysztof Barański

Zadania

Średnia czy mediana?

Andrzej Zieliński

O wyjaśnianiu, tęczy,
 kształcie kropel deszczu
 i innych interesujących
 głupstwach

Bogusław Jackowski

Aktualności

(nie tylko) fizyczne

Wokół niczego

Grzegorz Derfel

Klub 44

Paradoksy

Krzysztof Oleszkiewicz

Patrz w niebo

Sierpień

Gammalimatias

W następnym numerze:

Kody kreskowe

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim

<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delt*

można znaleźć w portalu Eduseek

<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Redaguje kolegium w składzie:

str. 1

Andrzej Białynicki-Birula

Wiktor Bartol

str. 3

Bogdan Cichocki

Krzysztof Biesaga

– wiceprzewodniczący

Ewa Czuchry

str. 4

Krzysztof Ciesielski

Krystyna Kordos – sekr. red.

Jan A. Gaj

Marek Kordos – red. nac.

Piotr Goldstein

Tomasz Kwast

Andrzej Hryniewicz

Anna Ludwicka

Wiesław A. Kamiński

Anna Rudnik

Marta Kicińska-Habior

Witold Sadowski

Krzysztof Maślanka

Joanna Udalska

Janusz Matkowski

Anna Wojtyra

Andrzej Mąkowski

Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Zdzisław Pogoda

Adres Redakcji:

str. 6

Michał Różyczka

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa

Konrad Rudnicki

tel. 853-59-61, 55-33-216

Grzegorz Sitarski

BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Andrzej Woszczyk

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Eligiusz Złotkiewicz

Wydrukowano

Wiesław Żelazko – przewodniczący

w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.

w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**

Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Jak rozpoznać chaos?

Krzysztof BARAŃSKI

Słowo *chaos* stało się ostatnio niezwykle modne w literaturze popularnonaukowej. Często można usłyszeć o matematyce chaosu, chaosie deterministycznym, układach chaotycznych itd. Chaos kojarzy się z nieuporządkowaniem, bałaganem. Czy tak jest również w matematyce? Co to znaczy, że jakiś układ jest chaotyczny?

Zagadnieniem tym zajmuje się gałąź matematyki zwana teorią układów dynamicznych. Dziedzina ta wyrosła na przełomie XIX i XX wieku z rozważań nad pewnymi problemami mechaniki i równań różniczkowych i bada, najogólniej mówiąc, ewolucję różnych układów w czasie. Z matematycznego punktu widzenia *układ dynamiczny* (z czasem dyskretnym) to pewna przestrzeń X wraz z przekształceniem $f : X \rightarrow X$. Ponieważ wartości f leżą w tej samej przestrzeni co argumenty, możemy rozpatrywać wielokrotne złożenia tej funkcji. Oznaczmy $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ razy}}$. Takie złożenie nazywamy *n-tą iteracją przekształcenia f* .

Wygodnie jest przyjąć $f^0(x) = x$. *Trajektorią* lub *orbitą* punktu x nazywamy zbiór $\{f^n(x)\}_{n \geq 0}$. Interesują nas graniczne zachowania trajektorii punktów przestrzeni X , czyli co dzieje się z punktami, gdy iterujemy przekształcenie f bardzo wiele razy.

Zobaczmy na prostym przykładzie, jaki układ możemy nazwać chaotycznym. Niech na płaszczyźnie S będzie okręgiem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1. Każdy punkt $x \in S$ jest jednoznacznie określony przez swoją kątową współrzędną w układzie biegunowym, czyli przez zorientowany kąt α , który tworzy oś OX z odcinkiem łączącym początek układu z punktem x . Określmy przekształcenie $f : S \rightarrow S$, przyporządkowując punktowi o kącie α punkt o kącie 2α (pamiętajmy, że utożsamiamy kąty różniące się o wielokrotność 2π). Pozornie wydaje się, że nasze przekształcenie jest tak proste i regularne, iż nie ma tu mowy o żadnym chaosie. Cóż może być łatwiejszego od mnożenia przez 2? A jednak...

Będziemy iterować naszą funkcję. Wyobraźmy sobie, że co sekundę stosujemy przekształcenie f i patrzymy, co stanie się z różnymi punktami po długim czasie. Spójrzmy najpierw na dwa punkty leżące bardzo blisko siebie (odległość między punktami z S wygodnie jest mierzyć przez długość krótszego łuku między tymi punktami). Załóżmy, że odległość ta jest bardzo mała, np. równa $\varepsilon_0 = 0,000\,000\,000\,001$, czyli tyle co nic. Jak zmieni się ona po jakimś czasie? Łatwo sprawdzić, że po każdej z początkowych iteracji f odległość między bliskimi punktami wzrasta dwa razy. Po pierwszej sekundzie mamy więc $\varepsilon_1 = 0,000\,000\,000\,002$ – w dalszym ciągu tyle co nic. Ale już po 15 sekundach mamy $\varepsilon_{15} = 0,000\,000\,03\dots$, po 30 sekundach $\varepsilon_{30} = 0,001\dots$, a po 40 sekundach ta odległość jest już równa $\varepsilon_{40} = 1,099\dots$. Widzimy, że trajektorie naszych punktów rozbiegły się niezmiernie szybko. Co więcej, gdy nadal będziemy iterować funkcję f , to losy tych punktów mogą być zupełnie różne. Jeden z nich może, na przykład, wpaść w punkt o współrzędnej kątowej 0 i tam pozostać, bo jest to punkt stały przekształcenia f . Drugi zaś może biegać po okręgu S i nigdy nie wracać do wcześniejszych położeń, a jego trajektoria może nawet być gęsta w S , to znaczy odwiedzać każdy niepusty otwarty łuk w S .

Widać stąd, że trajektorie dwóch dowolnie bliskich punktów z S zawsze oddalają się od siebie po pewnym czasie. Ta własność, zwana w teorii układów dynamicznych *wrażliwością na warunki początkowe*, jest jedną z charakterystycznych cech chaosu. Bardzo to niewygodne dla eksperymentatorów – pomiar zawsze jest obciążony pewnym błędem, więc w układzie chaotycznym *nie można* przewidzieć, co stanie się z danym punktem po bardzo długim czasie. Najlepszym przykładem jest tu prognoza pogody. Można nieźle przewidzieć pogodę na jeden, dwa lub trzy dni naprzód, ale nie na miesiąc! Prognozy podawane w środkach masowego przekazu, takie jak „Zima



będzie w tym roku mroźna, ale bez śniegu, styczeń będzie ciepły, a luty zimny” to czysta statystyka. No właśnie, statystyka, prawdopodobieństwo... Tam również występuje pewien rodzaj chaosu wynikający z nieprzewidywalności. Nie wiemy, za którym razem wypadnie orzeł przy wielokrotnym rzucie monetą, choć wiemy, że średnio będzie to połowa razy. Ale to jest inny rodzaj chaosu, tak zwany chaos stochastyczny, niedeterministyczny. Natomiast chaos w układach dynamicznych to chaos deterministyczny – wzór naszej funkcji jest ściśle określony, możemy dokładnie wyliczyć, co stanie się po paru początkowych iteracjach przekształcenia. Trudność polega na tym, że przy dużej liczbie iteracji ilość obliczeń rośnie wykładniczo i żaden komputer nie da sobie z tym rady.

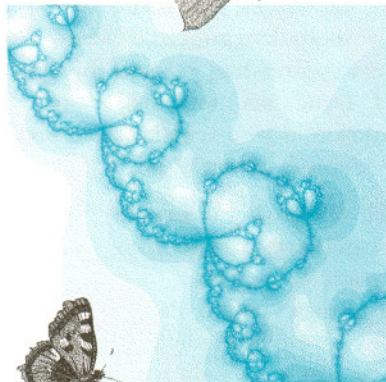
Popatrzmy na przykład, jak komputer radzi sobie z iterowaniem naszego przekształcenia, czyli mnożeniem kąta przez dwa. Współczesne maszyny posługują się z reguły arytmetyką dwójkową – liczby reprezentowane są jako ciągi zer i jedynek o pewnej określonej długości. Mnożenie przez 2 liczby w układzie dwójkowym to po prostu przesunięcie wszystkich cyfr jej rozwinięcia o jedno miejsce w lewo. Ale ponieważ komputerowa reprezentacja liczby ma skończoną długość, to ciąg tych cyfr obcina się na pewnym miejscu i dopisuje zera. Zatem po pewnej liczbie iteracji naszego przekształcenia (zależnej od dokładności reprezentacji) okaże się, że wszystkie punkty wpadły w punkt o współrzędnej 0 – oczywisty absurd. Ten przykład, mimo pewnych uproszczeń (komputerowe reprezentacje liczb mogą być bardziej wyrafinowane) pokazuje, że istnieją zasadnicze ograniczenia przy komputerowym modelowaniu układów chaotycznych. Żeby jeszcze wszyscy naukowcy o tym pamiętali...

Wróćmy do naszego przykładu. Kolejną cechą chaosu, o której już wspomnieliśmy, jest *istnienie gęstych trajektorii*. Jak wykazać, że istnieje punkt z S , którego trajektoria odwiedza każdy niepusty otwarty łuk okręgu? Najłatwiej zrobić to za pomocą *kodowania*. Oznaczmy górną połowę okręgu (wraz z punktem o współrzędnej kątowej 0) przez G , a dolną (wraz z punktem o współrzędnej kątowej π) przez D . Każdemu punktowi x na okręgu możemy teraz przyporządkować ciąg $a_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ złożony z zer i jedynek, kładąc $a_n = 0$, gdy $f^n(x) \in G$ i $a_n = 1$, gdy $f^n(x) \in D$. Jest to właśnie nasze kodowanie. Łatwo sprawdzić, że dwa różne punkty po pewnej liczbie iteracji f wpadną w dwie różne połowki okręgu, więc kodowanie to jest różnowartościowe. Widać też, że $a_n(f(x)) = a_{n+1}(x)$, czyli przekształcenie f przesuwca cały kod punktu o jedno miejsce w lewo, obcinając jego pierwszą cyfrę. Ciągi zer i jedynek kojarzą się z rozwinięciem dwójkowym... Rzeczywiście, jak łatwo się przekonać, nasze kodowanie to po prostu rozwinięcie dwójkowe współrzędnej kątowej punktu x podzielonej przez 2π . Możemy teraz znaleźć punkt o gęstej trajektorii. Oznaczmy przez $B_{n,1}, \dots, B_{n,2^n}$ wszystkie bloki (skończone ciągi) długości n złożone z zer i jedynek. Zauważmy, że punkty o kodzie rozpoczynającym się od $B_{n,k}$ tworzą łuk $I_{n,k} \subset S$ o długości $2\pi/2^n$ oraz $\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} = S$. Spójrzmy teraz na punkt x_0 o kodzie

$$B_{1,1}B_{1,2}B_{2,1}B_{2,2}B_{2,3}B_{2,4} \dots B_{n-1,2^{n-1}}B_{n,1} \dots B_{n,2^n}B_{n+1,1} \dots,$$

czyli na punkt, którego współrzędna kątowa podzielona przez 2π ma właśnie takie rozwinięcie dwójkowe. Ponieważ w kodzie punktu x_0 występują *wszystkie* możliwe bloki oraz f przesuwca kody punktów o jedno miejsce w lewo, trajektoria punktu x_0 odwiedzi *wszystkie* łuki $I_{n,k}$, a więc będzie gęsta w S . Można wykazać, że takich gęstych trajektorii jest nieskończenie wiele, a nawet że większość punktów (ściślej: prawie wszystkie w sensie miary Lebesgue’a na S) ma takie trajektorie. Wynika z tego, że w S istnieje gęsty zbiór punktów o gęstych trajektoriach. Z drugiej strony, punkty o kodach, w których jest skończona ilość jedynek (czyli punkty, które po pewnej ilości iteracji wpadną w punkt o współrzędnej kątowej 0, mający kod złożony z samych zer), też tworzą zbiór gęsty w S . Ich trajektorie na pewno nie są gęste, bo są skończone.

Zauważmy też, że biorąc jakikolwiek nieskończony ciąg złożony z zer i jedynek (na przykład uzyskany losowo przy wielokrotnym rzucie monetą), znajdziemy



Uwaga! Zdanie obok nie jest całkowicie ścisłe. Przy naszej definicji kodowania istnieją pewne nieskończone ciągi złożone z zer i jedynek, które nie są kodami żadnego punktu z S . Jakie to ciągi?

punkt w S , którego orbita odwiedza górną i dolną połowę okręgu w takim porządku, jaki wyznacza ten ciąg.

Trzecia cecha chaosu, o której tu wspomniemy, dotyczy *punktów okresowych* przekształcenia f . Punkt okresowy o okresie p to punkt x , dla którego $f^p(x) = x$. Otóż cechą układu chaotycznego jest *występowanie gęstego zbioru punktów okresowych i gęstego zbioru punktów nieokresowych*. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie tej własności w naszym przypadku. Okazuje się przy tym, że f ma punkty okresowe o *wszystkich okresach*, co również jest cechą układu chaotycznego. Z opisanych wyżej własności wynika *niestabilność* naszego układu. Przy dowolnie małej zmianie punktu z S jego zachowanie pod działaniem iteracji f może drastycznie się zmienić.

Widzimy więc, że nasz pozornie prosty układ ma naprawdę skomplikowane własności. Wybierając „losowo” punkt z okręgu, mamy małe szanse przewidzenia jego trajektorii...



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Tym razem wszystko kręci się wokół przeuroczego twierdzenia geometrycznego, którego treść zawarta jest w zadaniu M 963. Zadania M 961 i M 962 są jego gierkami.

M 961. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz punkty K, L, M, N położone tak jak na rysunku 1, przy czym wiadomo, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|DL|}{|LC|} = \alpha$ oraz $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \beta$. Udowodnić, że jeśli P jest punktem przecięcia odcinków KL i MN , to $\frac{|MP|}{|PN|} = \alpha$ i $\frac{|KP|}{|PL|} = \beta$.

Rozwiązanie na str. 13

M 962. Boki AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$ podzielono na k równych części, a następnie odpowiadające sobie punkty połączono odcinkami (rys. 2). Udowodnić, że pola S_1, \dots, S_k powstałych w ten sposób czworokątów tworzą ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie na str. 13

M 963. Boki AB i CD czworokąta $ABCD$ podzielono na m , a boki BC i AD – na n równych części, gdzie m i n są liczbami nieparzystymi. Następnie połączono odcinkami odpowiadające sobie punkty na przeciwległych bokach (rys. 3 dla $m = 3, n = 5$). Udowodnić, że pole środkowego, powstałego czworokąta jest mn razy mniejsze niż pole czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie na str. 8

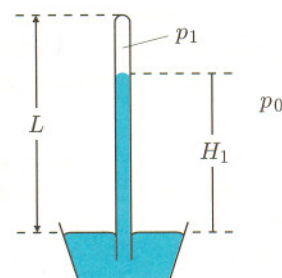
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 553. Naczynie o objętości V połączone jest z pompą tłokową, w której objętość komory wynosi V' (rys. 4). Ile ruchów tłokiem należy wykonać, aby ciśnienie w naczyniu zmniejszyło się od p do p' . Ciśnienie atmosferyczne wynosi p_0 , zmiany temperatury można zaniedbać.

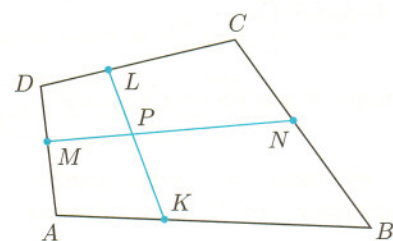
Rozwiązanie na str. 11

F 554. Do rurki barometru rtęciowego dostał się pęcherzyk powietrza, w wyniku czego przy ciśnieniu atmosferycznym p_0 i temperaturze T_0 wysokość słupa rtęci w rurce zmniejszyła się do H_1 (rys. 5). Ile wynosi ciśnienie atmosferyczne (w mm Hg), jeśli w temperaturze T wysokość słupa rtęci w uszkodzonym barometrze wynosi H ?

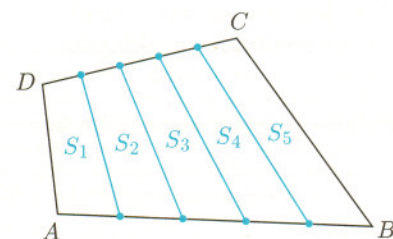
Rozwiązanie na str. 4



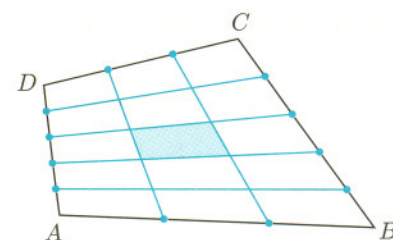
Rys. 5



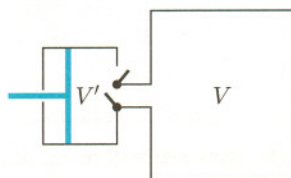
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Stałem kiedyś na rondzie między dwoma przystankami tramwajowymi i zastanawiałem się, który z nich wybrać (patrz rysunek 1). Do wyboru miałem przystanek S , z którego tramwaj bezpośrednio dowoził mnie do domu, lub przystanek Q , ale wtedy musiałbym przesiąść się na przystanku R . Ze względu na duże oddalenie przystanków S i Q musiałem zdecydować się na jeden z nich (stanie na środku i próba podbiegnięcia do jednego z nich w razie przyjazdu tramwaju nie wchodziła w rachubę).

Rozmyślenia nad wyborem lepszego przystanku, czyli takiego, z którego szybciej dostanę się do domu, doprowadziły do powstania tego artykułu.

Oznaczmy przez x_S, y_Q, y_R czas czekania na przystanku S, Q i R odpowiednio (załóżmy, że są to zmienne losowe niezależne). Literami A, B i C oznaczmy odpowiednio: czas przejazdu z S do domu, czas przejazdu z Q do R i czas przejazdu z R do domu (załóżmy, że są to wielkości stałe).

Kryterium wyboru przystanku mogę sformułować następująco:

Przystanek S będzie lepszy od przystanku Q , gdy wybierając ten przystanek, stracę na dojazd średnio mniej czasu, niż gdybym wybrał przystanek Q , czyli gdy

$$E(x_S) + A \leq E(y_Q) + B + E(y_R) + C,$$

gdzie $E(x)$ to wartość średnia zmiennej x .

Wystarczy więc znać wszystkie wielkości występujące w powyższej nierówności, by problem był natychmiast rozstrzygnięty.

Niech $z = x_S - y_Q - y_R, D = B + C - A$ (z i D oznaczają odpowiednio różnice w czasie czekania i w czasie przejazdu między wariantami S i Q). Sformułowane kryterium można więc zapisać krótko:

$$E(z) \leq D.$$

Nazwijmy je *kryterium według wartości średniej*. Czy jest ono jednak dobre? Charakteryzuje się prostotą, ale nie uwzględnia – poza średnimi – rozkładów zmiennych x_S, y_Q i y_R .

Jeśli chcemy uwzględnić te rozkłady, kryterium wyboru przystanku moglibyśmy sformułować tak

Przystanek S będzie lepszy, gdy

$$P(x_S + A \leq y_Q + B + y_R + C) \geq P(x_S + A > y_Q + B + y_R + C),$$

czyli gdy $P(z \leq D) \geq \frac{1}{2}$.

To drugie kryterium związane jest z pewnym parametrem, który nazywa się *medianą*.

Definicja. Liczba m jest medianą zmiennej losowej x , jeśli $P(x \geq m) \geq \frac{1}{2}$ i $P(x \leq m) \geq \frac{1}{2}$.

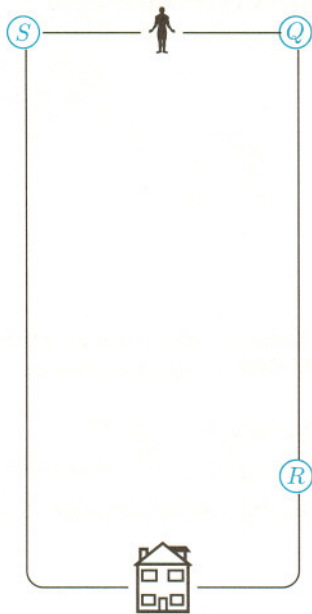
Każda zmienna losowa ma medianę, ale nie zawsze jedną. Oznaczmy przez M_x zbiór wszystkich median zmiennej x . W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy tylko te zmienne losowe, dla których M_x jest zbiorem jednopunktowym. (Jest tak np. dla rozkładu jednostajnego, normalnego, czy wykładniczego). W tym przypadku, dla podkreślenia jednoznaczności, jedyną medianę zmiennej x oznaczać będziemy przez $M(x)$.

Drugie kryterium możemy teraz wyrazić następująco:

Przystanek S będzie lepszy, gdy $M(z) \leq D$.

Kryterium to nazwiemy kryterium względem mediany.

Powstaje pytanie, czy kryterium według średniej i kryterium względem mediany są równoważne? Mediana, w przeciwieństwie do średniej, na ogół nie jest addytywna, tzn. nie musi zachodzić wzór $M(x + y) = M(x) + M(y)$. Nawet więc



Rozwiązanie zadania F 554.

Wartość p_0 równa jest sumie ciśnienia powietrza w rurce nad rtęcią p_1 i ciśnienia hydrostatycznego słupa rtęci o wysokości H_1

$$p_0 = p_1 + H_1.$$

Podobnie, gdy wskazanie barometru jest równe H

$$p_{\text{atm}} = p + H.$$

Traktując powietrze w rurce jako gaz doskonały, można posłużyć się równaniem stanu

$$\frac{p_1(L - H_1)}{T_0} = \frac{p(L - H)}{T},$$

stąd

$$p = (p_0 - H_1) \frac{L - H_1}{L - H} \frac{T}{T_0}$$

i ostatecznie

$$p_{\text{atm}} = (p_0 - H_1) \frac{L - H_1}{L - H} \frac{T}{T_0} + H.$$

w najprostszym przypadku, gdy rozkłady x_S, y_Q i y_R są jednostajne, odpowiedź nie jest widoczna natychmiast. Bezpośrednie sprawdzenie daje odpowiedź pozytywną, co nie jest przypadkiem, zachodzi bowiem następujące

Twierdzenie. Jeśli zmienne losowe x_1, x_2, \dots, x_n są niezależne, każda ze zmiennych $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, ma rozkład symetryczny i jednoznaczną medianę $M(x_i)$, to również zmienna $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ma jednoznaczną medianę oraz $M(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_n)$.

Dowód twierdzenia. Wystarczy udowodnić twierdzenie dla rozkładów symetrycznych względem zera. Wtedy z założenia zmienna $u = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ma rozkład symetryczny względem zera. Załóżmy, że jej mediana nie jest jednoznaczna, tzn. że medianą jest także pewna liczba $c > 0$. Ponieważ $P(u \leq -c) = P(u \geq c) \geq 1/2$, więc $P(|u| < c) = 0$. Mamy

$$P\left(|x_1| < \frac{c}{n}\right) P\left(|x_2| < \frac{c}{n}\right) \dots \\ \dots P\left(|x_n| < \frac{c}{n}\right) = \\ = P\left(|x_1| < \frac{c}{n}, |x_2| < \frac{c}{n}, \dots, |x_n| < \frac{c}{n}\right) \leq \\ \leq P(|u| < c) = 0.$$

Skąd wynika, że $P\left(|x_i| < \frac{c}{n}\right) = 0$ dla pewnego i , ale to oznacza, że $\frac{c}{n}$ jest różną od zera medianą zmiennej x_i . Sprzeczność z założeniem.

Przypomnijmy jeszcze, że zmienna x ma rozkład symetryczny względem zera, gdy zmienne x i $-x$ mają ten sam rozkład. Gdy taka zmienna ma wartość oczekiwaną, to wartość ta jest równa zeru. Gdy zmienne x_1, x_2, \dots, x_n mają rozkłady symetryczne względem zera, to również ich suma ma taki rozkład. Rozkład zmiennej x jest symetryczny, jeżeli istnieje takie a , że zmienna $x - a$ ma rozkład symetryczny względem zera. W takim przypadku, jeśli mediana jest jednoznaczna, to jest równa a .

Jasne jest teraz, że w naszym przypadku najciekawsza jest sytuacja, gdy zmienne x_S, y_Q i y_R nie są symetryczne. Przyjmijmy zatem, że zmienne te mają np. rozkład wykładniczy. Załóżmy też, że $E(y_Q) = E(y_R)$ oraz oznaczmy $k = \frac{E(y_Q)}{E(x_S)}$. Po żmudnych, niestety, rachunkach dojdziemy do następującego wyniku:

- jeśli $k \leq \sqrt{2} - 1$, to $M(z) = \ln 2 - 2 \ln(1+k)E(x_S)$,
- jeśli $k > \sqrt{2} - 1$, to $M(z) = -sE(y_Q)$, gdzie s jest jedynym pierwiastkiem dodatnim równania $e^s = \frac{2k}{k+1} \left(s + \frac{k+2}{k+1}\right)$.

Powiedzmy, że czasy czekania na przystankach i czasy jazdy są następujące: $E(x_S) = 10, E(y_Q) = E(y_R) = 3, A = 22, B = 13, C = 11$ (wszystko, oczywiście, w minutach).

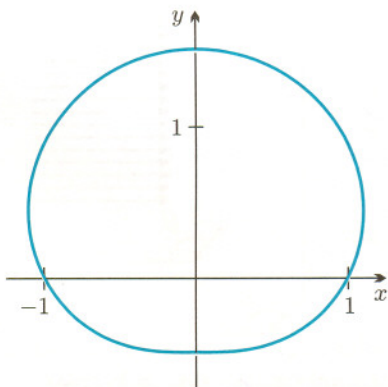
Wtedy $D = 2, E(z) = 4, M(z) = 1,68$.

Jeśli czasy czekania na przystankach mają rozkłady wykładnicze, to który przystanek wybrać? Zgodnie z kryterium według wartości średniej powinienem wybrać przystanek Q , podczas gdy kryterium według mediany wskazuje na przystanek S . Postawię więc metapytanie: które kryterium jest lepsze? Otóż jeśli **częściej** chciałbym być w domu **szybciej**, to powinienem postąpić zgodnie z kryterium według mediany, czyli ustawiać się na przystanku S . Co wcale nie oznacza, że zyskałbym (np. w ciągu miesiąca takich przejazdów) na **łącznym czasie podróży**. Ten, zgodnie z kryterium według wartości średniej, byłby **krótszy** (średnio o 2 minuty), gdybym ustawiał się na przystanku Q .

Ale w takim razie wybór zależy np. od gustu, który – przynajmniej na razie i chyba na szczęście – nie poddaje się matematycznej formalizacji.

Przypomnijmy też, że rozkład wykładniczy (z parametrem $\lambda > 0$) to taki rozkład, dla którego zmienna przyjmuje tylko dodatnie wartości, przy czym prawdopodobieństwo tego, że zmienna osiągnie wartość x małutkiego przedziału długości dx zawierającego punkt $x > 0$, wynosi $\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx$.

Droga Redakcjo



W marcowej tegorocznej *Delcie*, w artykule *Hipoteza, twierdzenie, dowód, kontrprzykład* znalazło się pytanie, czy znajomość długości cięciw przechodzących przez ustalony punkt wyznacza figurę wypukłą jednoznacznie. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna.

Rozważmy koło o środku $O = (0, 0)$ i promieniu 1. Wszystkie cięciwy przechodzące przez O (czyli średnice) mają długość 2. Rozpatrzmy teraz figurę, której brzeg jest opisany we współrzędnych biegunowych przez równanie $r(\varphi) = (1 + \frac{1}{2} \sin \varphi)$ dla $\varphi \in (0, 2\pi)$. Jest to figura wypukła, której kształt przedstawia rysunek.

Długość cięciwy o kierunku tworzącym z osią Ox kąt φ wynosi $(1 + \frac{1}{2} \sin \varphi) + (1 + \frac{1}{2} \sin(\pi + \varphi)) = (1 + \frac{1}{2} \sin \varphi) + (1 - \frac{1}{2} \sin \varphi) = 2$, niezależnie od φ . Mamy więc dwie nieprzystające figury o równych cięciwach.

Pozdrowienia

Witold BEDNAREK

O wyjaśnieniu, tęczy, kształcie kropeł deszczu i innych interesujących głupstwach

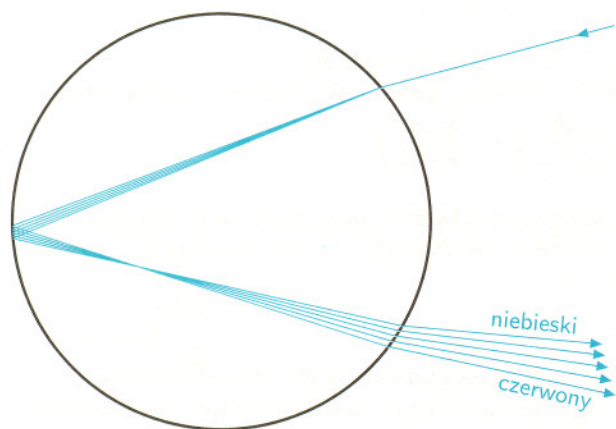
Bogusław JACKOWSKI

- Skąd się bierze tęcza?
- Ze zmieszania światła z deszczem.
- A poważniej?

1. Wyjaśnienie uproszczone, ale za to kolorowe

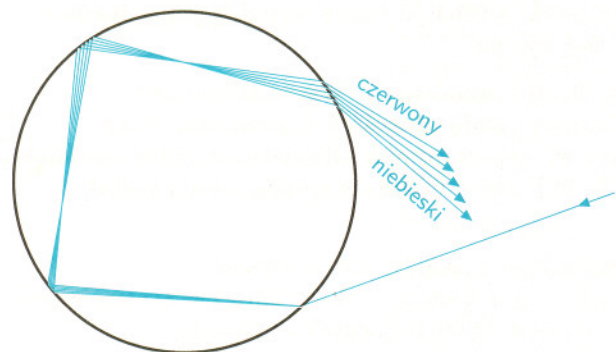
Tęcza powstaje, bo światło wpada do kropli, załamuje się, przy okazji się rozszczepia, i już rozszczepione odbija się od wewnętrznej powierzchni kropli, po czym wychodzi z kropli załamując się raz jeszcze, wewnętrzne odbicie i ponowne załamanie potęgują efekt rozszczepienia – i stąd tęcza.

Takie wyjaśnienie można znaleźć w wielu popularnych artykułach na temat tęczy. Towarzyszy temu na ogół schematyczny rysunek postaci:



Ten opis, tak uproszczony, że wahałbym się użyć doń określenia „wyjaśnienie”, mimo wszystko coś pozwala zrozumieć – na przykład, dlaczego tęczę widzimy stojąc tyłem do Słońca i dlaczego czerwony kolor pojawia się na zewnątrz, a niebieski wewnątrz tęczy, jeśli tylko pamiętamy, że światło niebieskie ulega większemu załamaniu niż czerwone.

Jeśli rozważymy w równie uproszczony sposób dwukrotne wewnętrzne odbicie, to możemy – całkiem zresztą słusznie – dojść do wniosku, że odpowiada ono tęczy „wtórnej”, w której kolejność kolorów powinna być odwrotna niż w tęczy pierwotnej

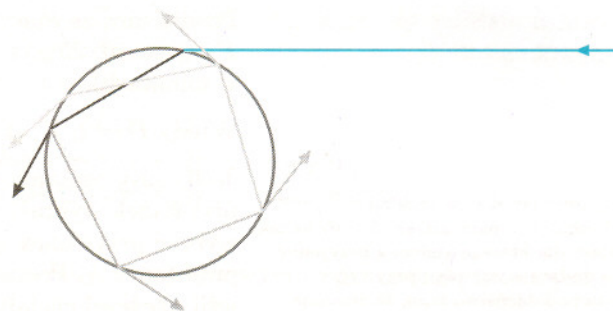


Czego zatem w powyższym wyjaśnieniu brakuje?

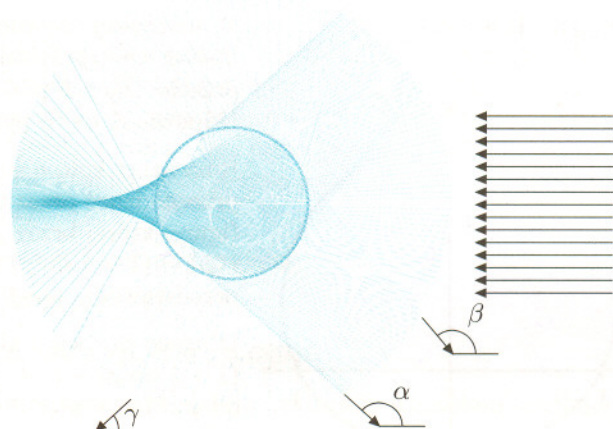
Brakuje odpowiedzi na pytanie, dlaczego promień kątowy jest równy na ogół około 40° (*Encyklopedia Popularna PWN* podaje zdumiewająco precyzyjną wartość $42,5^\circ$). Poprzednie ilustracje w żaden sposób nie wyróżniają jakiegokolwiek kierunku. Spróbujmy się zastanowić, skąd zatem bierze się uprzywilejowanie pewnych kierunków.

2. Wyjaśnienie dokładniejsze, opisujące tęczę monochromatyczną

Po pierwsze, zauważmy, że przy każdym odbiciu część światła opuszcza kroplę, a część wędruje dalej w jej wnętrzu. Uprościmy sobie życie i nie zadamy pytania „a jaka jest proporcja natężenia światła opuszczającego kroplę do natężenia światła pozostającego w kropli?”. Przyjmijmy jedynie do wiadomości, że po każdym zetknięciu promienia z powierzchnią kropli natężenie światła maleje. Na poniższym rysunku efekt ten odzwierciedlony został za pomocą rozjaśniania promienia po kolejnych zetknięciach z powierzchnią kropli.



Zobaczymy, jaki efekt uzyskamy, rysując przebieg odbicia dla promieni padających na kroplę w różnej odległości od osi kropli, czyli jakby nakładając powyższe obrazy dla różnych promieni. Żeby uniknąć nadmiernego galimatiasu, wyobraźmy sobie, że na kroplę pada z prawej strony wiązka równoległych promieni, wysyłanych przez monochromatyczne źródło światła.



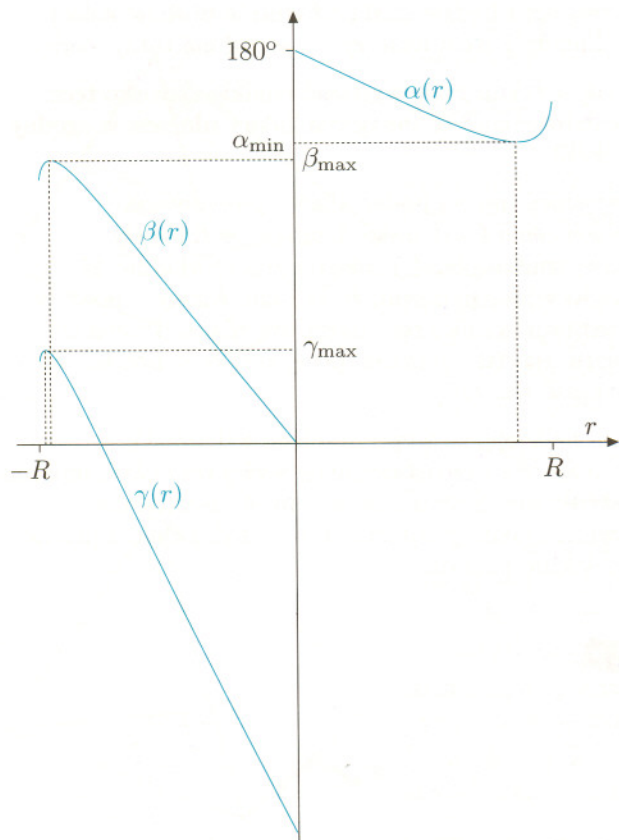
To, co rzuca się w oczy, to oczywisty fakt, że kropla

działa jak soczewka: najwięcej światła opuszcza kroplę przy pierwszym wewnętrznym odbiciu – każdy, kto patrzył na Słońce przez ścianę deszczu, łatwo się z tą obserwacją zgodzi. A co z kolejnymi odbiciami? W płątaniu promieni trudno na pierwszy rzut oka się połapać, zwłaszcza jeżeli chodzi o bieg światła wewnątrz kropli. Na potrzeby rozważań o tęczy możemy się zanadto nie przejmować tym, co dzieje się wewnątrz kropli (tym bardziej, że ilustracja przedstawia bardziej artefakty, niż rzeczywisty obraz zjawiska). Co innego, gdybyśmy się zastanawiali nad rozproszeniem światła w „mętym deszczu”.

Skupmy się zatem na promieniach wychodzących z kropli: zauważymy wyraźne „zgęstki” promieni opuszczających kroplę w dół pod kątami zaznaczonymi na poprzednim rysunku jako α , β , γ oraz – symetrycznie – w górę.

Po staranniejszym przyjrzeniu się biegowi promieni dojdziemy do wniosku, że promienie odpowiedzialne za „zgęstek” wychodzący pod kątem α wpadają do kropli powyżej jej osi i wychodzą po jednokrotnym odbiciu; promienie odpowiedzialne za „zgęstki” wychodzące pod kątami β i γ wpadają do kropli poniżej osi i wychodzą odpowiednio po dwukrotnym i trzykrotnym odbiciu.

Analizując zależność między odległością padającego promienia od osi r i kątami wyjścia $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $\gamma(r)$ dla jedno-, dwu- i trzykrotnego odbicia, zauważymy, że wszystkie trzy funkcje wykazują ekstrema.



Łatwo się zgodzić, że w kierunkach określonych przez wartości ekstremalne natężenie promieniowania

opuszczającego kroplę będzie wyraźnie większe, gdyż w pobliżu ekstremów niewielka zmiana odległości promienia od osi powoduje znikomą zmianę kierunku promienia wychodzącego – stąd właśnie biorą się „zgęstki”. Zatem rozsądne jest przypuszczenie, że tęcza i – dla kąta γ – halo obserwowane będą w tych właśnie kierunkach.

Konkretna wartość kąta zależy od współczynnika załamania i kształtu kropli. Przyjmując, że współczynnik załamania dla wody wynosi około 1,33 i że kropla jest idealnie kulista, można porachować, że $\alpha_{\min} \approx 137^\circ$, $\beta_{\max} \approx 130^\circ$ oraz $\gamma_{\max} \approx 43^\circ$. Dla promieni wychodzących w górę otrzymuje się analogiczne wartości.

Jeżeli krople deszczu znajdują się nad nami, jak to na ogół bywa, to widzimy „zgęstki” wychodzące w dół: α_{\min} odpowiada kątowi, pod jakim widzimy tęczę pierwotną, β_{\max} – kątowi, pod jakim widzimy tęczę wtórną, γ_{\max} – kątowi, pod jakim widzimy halo wokół Słońca. Ponieważ natężenie promieniowania w poszczególnych kierunkach maleje (wykładniczo) wraz ze wzrostem liczby odbić wewnątrz kropli, mamy małe szanse zauważyć halo, patrząc w kierunku jaskrawo świecącego Słońca. Łatwiej zauważyć tęczę wtórną, która – jak to wynika z rozważań przeprowadzonych w poprzednim punkcie – powinna mieć odwrotny układ kolorów niż tęcza pierwotna. Z rozważań przeprowadzonych w tym punkcie wynika, że tęczę wtórną powinniśmy widzieć na zewnątrz tęczy pierwotnej.

3. Kształt kropli a kształt tęczy

Czy rozumowanie przedstawione w poprzednim punkcie wyjaśnia całkowicie mechanizm powstawania tęczy? Z pewnością nie. Na przykład nie wiadomo, jak na tej podstawie obliczyć natężenie światła wychodzącego w danym kierunku, co byłoby istotne przy empirycznej weryfikacji modelu tęczy.

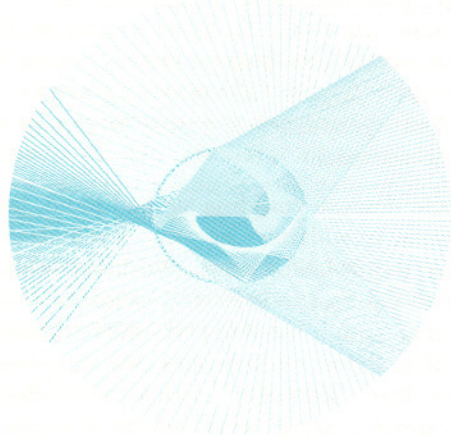
Ale moglibyśmy oszacować – gdyby nam się chciało rachować – szerokość kątową wstęgi tęczy. W tym celu należałoby obliczyć kąty ekstremalne dla widzialnego zakresu długości fal świetlnych, uwzględniając zależność współczynnika załamania światła od długości fali. Zostawmy sobie te proste, acz żmudne rachunki na inną okazję.

Ciekawsze jest uwzględnienie kształtu kropli. Oczywiście kształt kropli wyciągniętej do góry w coś w rodzaju stożka, rysowany przez ilustratorów książek dla dzieci, nie ma nic wspólnego z rzeczywistością. Tak wygląda kropla odrywająca się od kranu. Kropla lecąca w powietrzu musi być, podobnie jak pączek, nieco spłaszczona na skutek oporu powietrza. A tak naprawdę to powinna wykonywać drgania, natomiast o kształcie „pączkowatym” można myśleć jako o kształcie uśrednionym.

Załóżmy zatem, że kropla jest spłaszczona, a dokładniej, że ma kształt elipsoidy obrotowej o osi prostopadłej do kierunku padania światła. Są to –

wobec powyższych spostrzeżeń – drastyczne uproszczenia, ale i tak stanowiące istotne uogólnienie w stosunku do modelu kropli kulistej.

Niewielkie, zaledwie dziesięcioprocentowe spłaszczenie kropli powoduje zauważalną zmianę kierunków tęczy i halo. Najwyraźniejszej zmianie ulega kąt halo, nieco mniejszej – kąt tęczy pierwotnej, natomiast kąt tęczy wtórnej prawie się nie zmienia:



Poszczególne wartości dla tego konkretnego przypadku wynoszą: $\alpha_{\min} \approx 150^\circ$, $\beta_{\max} \approx 128^\circ$ oraz $\gamma_{\max} \approx 20^\circ$. Podobny efekt dałoby pięcioprocentowe zwiększenie współczynnika załamania światła w modelu kropli kulistej, mianowicie: $\alpha_{\min} \approx 148^\circ$, $\beta_{\max} \approx 113^\circ$ oraz $\gamma_{\max} \approx 19^\circ$. W tym przypadku kąt tęczy wtórnej uległby jednak wyraźnej zmianie.

Powyższe spostrzeżenia mogą być pomocne do posłużenia się tęczą w celu zaobserwowania kształtu kropeł.

Ponieważ zgodnie z założeniem kropla ma kształt elipsoidy obrotowej, więc patrząc z góry, zaobserwowalibyśmy obraz taki sam jak w przypadku modelu kropli kulistej. Oznacza to, że kąt poziomego rozwarcia tęczy różniłby się od pionowego, a zatem tęcza miałaby kształt elipsy. Jeśli więc odległość między brzegami tęczy pierwotnej i wtórnej byłaby zmienna, oznaczałoby to, że krople deszczu są elipsoidalne.

Szczerze mówiąc, nigdy nie obserwowałem tęczy z tego punktu widzenia. A może Szanowny Czytelnik zauważył, czy brzegi tęczy są równo odległe?

4. Wyjaśnienia i pytania

Wygląda więc na to, że zamiast definitywnych wyjaśnień pojawiły się kolejne pytania:

- Jak obliczyć natężenie światła w danym kierunku?
- Czy kierunek spłaszczenia kropli powoduje zauważalne efekty?
- Jak drga kropla i jak to uwzględnić w modelu tęczy?
- Itp., itd. . .

No cóż, mądrzy ludzie powiadają, że jest to prawidłowość – im więcej wiemy, tym więcej nie wiemy. Brzmi to trochę jak kalambur, ale nie jest to

wbrew pozorom jedynie gra słów. Rzeczywiście, wyjaśnienia nieuchronnie noszą nowe pytania, ale już precyzyjniejsze, głębsze, czyli – ponownie narażając się na zarzut gry słów – możemy powiedzieć, że trochę więcej wiemy, czego nie wiemy. Powyższe przykładowe trzy pytania są jednak innej natury, niż pytanie „skąd się bierze tęcza”.

Ważniejsze jest to, że czegoś przecież się dowiedzieliśmy. Myślę, że na podstawie powyższych rozważań Szanowny Czytelnik sam zgadnie, skąd w encyklopedii wzięła się magiczna wartość $42,5^\circ$ (dla ułatwienia powiem, że nieco dokładniejsza wartość kąta α_{\min} dla kropli kulistej wynosi $137,5^\circ$).

Ale jeszcze ważniejsze jest to, że nasza teoria poddaje się empirycznej krytyce. Wystarczy bowiem zmierzyć kąt, pod jakim widzimy tęczę, porównać z kątem wynikającym z naszej teorii i. . . No właśnie, przecież prawie na pewno nie uzyskamy pełnej zgodności. O tym, żeby uzyskać „encyklopedyczną” dokładność $0,5^\circ$, nawet nie ma co marzyć!

Co wtedy? Ano, można wszystko zwać na niedokładność pomiaru, na nieznaną wartość współczynnika załamania światła w wodzie deszczowej (kropeł, w których powstaje tęcza, nigdy nie złapiemy), na nieuwzględnione czynniki dodatkowe w rodzaju zapylenia powietrza. Sceptyków takie tłumaczenia nie przekonują, nas samych zresztą pewnie też nie.

Jeśli jednak tęcza wtórna (ta słabiej widoczna i rzadziej występująca) będzie na zewnątrz tęczy pierwotnej i będzie miała odwrotnie ułożone kolory, to skłonny jestem uwierzyć w wyłożoną tutaj teorię.

A jak w takim razie wyjaśnić rzadkie zjawisko tęczy wielokrotnych, i to mających kolory ułożone w zgodny sposób?

Wyjaśnienie można podać kilka – pozostawiam Szanownemu Czytelnikowi zabawę w domysły. To, że trudno podać jednoznaczną wykładnię, nie świadczy jeszcze o tym, że za mało wiemy – powody powstawania kilku tęczy mogą być różne. Trzeba się wprawdzie zjawisku uważnie przyjrzeć, żeby potem móc wyciągać wnioski.

Mam nadzieję, że wyposażeni we wskazówki, wynikające z przedstawionych wyżej rozważań, możemy dostrzec więcej niuansów w tym olśniewającym zjawisku, jakim jest tęcza. I o to chyba chodzi przede wszystkim, prawda?



Rozwiązanie zadania M 963.

Z tezy zadania M 961 wynika, że każdy z „poziomych” odcinków jest „pocięty” na m , a każdy z „pionowych” – na n równych części. W każdy z małych czworokątów wpiszmy liczbę równą jego polu. Powstaje w ten sposób tablica mn liczb. Z tezy zadania M 962 wynika natomiast, że liczby w każdej kolumnie i w każdym wierszu tej tablicy tworzą ciąg arytmetyczny. Tak więc suma liczb w każdym wierszu jest m razy większa niż liczba w środkowej klatce, a suma liczb w środkowej kolumnie jest n razy większa niż liczba w środkowej klatce. Stąd wynika teza twierdzenia.



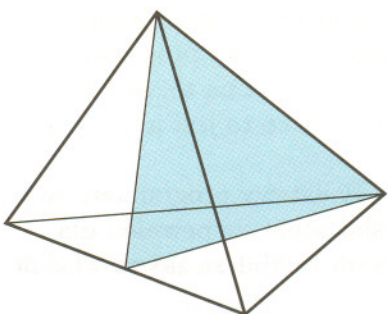
Proof i profani

Według *Słownika wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych* Władysława Kopalińskiego:

profan *nie wtajemniczony, nie będący znawcą, laik; dyletant; ignorant; nieuk.*

Jak widać dalej, często bywa inaczej:

jest to starannie, ale niemądrze wykształcony człowiek.



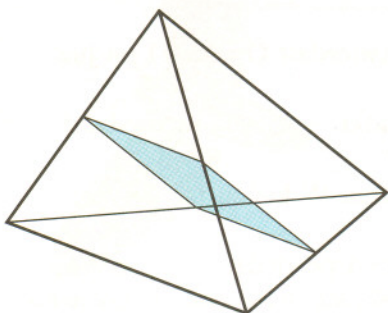
Rys. 1

Jest taki profesor matematyki, który nosi pseudonim Proof. Że to niby profesor, a niby, że jego ulubionymi zadaniami są geometryczne zadania na dowodzenie, co w dobie amerykanizacji życia całkowicie uzasadnia brzmienie tego pseudonimu. Uczy bardzo efektywnie i efektywnie, więc grupa prooffanów (a więc sympatyków Proofa) jest bardzo liczna. Ale nawet on przyznaje, że grupa profanów – przez jedno o i jedno f – jest jeszcze liczniejsza (choć nie rozłączna z poprzednią). Ma zresztą wiele prostych sposobów przekonania się, czy ktoś faktycznie jest profanem, czy też nie.

Oto próbka. Pytanie: *Na ile sposobów można płaszczyzną przepołowić czworościan foremny?*

Co to jest połowa czworościanu? To taka jego część, że jej pozostałość jest dokładnie taka sama – naukowo: przystająca.

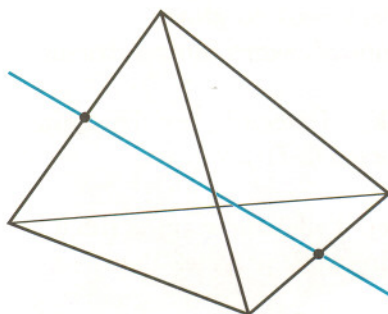
Najgłębszy poziom (spośród orientujących się, czego dotyczy pytanie) reprezentują profani mówiący, że sposobów takich jest sześć: tniemy przez krawędź i środek przeciwległej krawędzi (rys. 1). Krawędzi jest sześć, więc i tyle jest połowiących przecięć.



Rys. 2

Bardziej wyedukowani profani do poprzednich sześciu dodają jeszcze trzy: tną płaszczyzną równoległą do dwóch skośnych krawędzi – wiedzą, że jest taka – w połowie odległości między nimi. Takie przecięcie jest kwadratem (rys. 2). Ponieważ par skośnych krawędzi czworościan ma trzy, więc i tyle jest dodatkowych przecięć.

I tu na ogół się kończy. Profan zaś to taki, którego myślenie biegnie właśnie na opisane wyżej sposoby.



Rys. 3. Jedna z osi symetrii czworościanu foremnego.

A co na to nieprofan? Ten zauważa, że czworościan foremny ma trzy osie symetrii: proste łączące środki wspomnianych przed chwilą skośnych krawędzi. A przecież **każda płaszczyzna, przechodząca przez oś symetrii bryły, dzieli ją na symetryczne względem tej osi (a więc jednakowe) części**. Stąd można powiedzieć, że płaszczyzn, o które pyta Proof, jest nie tylko nieskończenie wiele, ale nawet trzy razy tyle. Podobnie zresztą jest na płaszczyźnie: każda prosta, przechodząca przez środek symetrii figury, połowi ją.

Chętnie poznalibyśmy te proste testy na rozpoznanie profana, których używają Wasi nauczyciele.



Odkrywczy mimo woli

Okazało się, że Gładki nie tylko był gładki, ale też donosił na kolegów. Kiedy następnego dnia Opak przyszedł do szkoły, Pan już wiedział o wszystkim. Nic więc dziwnego, że poprosił Opaka, by razem z Gładkim zechcieli na niego chwilę poczekać po lekcjach.

Opak nawet nie próbował dowiadywać się od Gładkiego, co ten nagadał. W końcu sam wiedział, że nie jest w porządku.

Dla tych, którzy nie czytali piątego numeru *Delty* (i nie mają szans, aby to zrobić przed przeczytaniem tej historyjki), wyjaśniamy, że Opak opowiedział swemu koledze, Gładkiemu, jak obliczać NWD inną metodą, niż

przez rozkład liczb na czynniki pierwsze. O tym sposobie będzie za chwilę mowa. Potem zaś zademonstrował przedziwną sztuczkę: znalazł NWD dla bardzo dużych liczb za pomocą dwóch mnożeń i odejmowania.

– Nigdy bym nie przypuszczał, że będziecie po lekcjach dyskutować o matematyce – jak widać, Pan nie miał wiary w swoje talenty dydaktyczne i myślał, że o matematyce mówi się źle albo wcale. – Jeśli chodzi o algorytm Euklidesa, to nie mówię o nim na lekcjach, bo mam za mało czasu, a i tak to, co robię, wykracza poza podstawy programowe. Opak był zdumiony: przecież to on oszukał, a wygląda na to, że Pan się im tłumaczy! Jednak zaryzykował pytanie: – A co to jest algorytm Euklidesa i co to są podstawy programowe?

Pan zdecydował, że wszystkiego nie powie. – Podstawy programowe to historia dla dorosłych – powiedział (a pomyślał sobie, że pewnie i dla dorosłych to się nie bardzo nada). – Algorytm Euklidesa zaś to właśnie Twoja metoda z odejmowaniem.

Opak proponował znajdować NWD w ten sposób, aby od liczby większej odejmować mniejszą tak długo, jak się da, potem od mniejszej odejmować to, co zostało itd., aż otrzyma się zero. Konkretnie pokazał to na przykładzie 299 i 247:

$$\begin{aligned} 299 - 247 &= 52, & 247 - 52 &= 195, & 195 - 52 &= 143, \\ 143 - 52 &= 91, & 91 - 52 &= 39, & 52 - 39 &= 13, \\ 39 - 13 &= 26, & 26 - 13 &= 13, & 13 - 13 &= 0. \end{aligned}$$

Ostatnia odejmowana liczba to właśnie NWD.

– Ten Euklides żył chyba bardzo dawno – stwierdził Opak. – I on już znał taką metodę?

– Żył ponad 2300 lat temu – wtrącił się Gładki. – A jeśli on wiedział, dlaczego to działa, to może i ja się dowiem?

Opak wbił oczy w sufit i udawał, że go nie ma. W końcu trzeba dać i Panu szansę, aby się wykazał.

Pan zrozumiał, że to jego wzywają do tablicy i powiedział: – Przecież wystarczy spostrzec, że jeśli dwie liczby dzielą się przez coś, to zarówno ich suma, jak i różnica dzieli się przez to samo. Zresztą także iloczyn liczby dzielącej się przez coś i dowolnej liczby całkowitej dzieli się też przez to coś – dodał.

– Ale to, jak widać, się nie stosuje – pospieszył z komentarzem Opak. – Wcale nie – wyrwał się Gładki, któremu przyszedł do głowy rewelacyjny pomysł. – Po co tyle razy odejmować, skoro można dzielić z resztą?

– Upadłeś na głowę – poinformował go Opak. – Przecież przy dzieleniu to się wszystko psuje! Zobacz: 12 dzieli się przez 6. Dzielę przez 4 i otrzymuję 3, które się przez 6 nie dzieli.

– Bo z tym dzieleniem z resztą to jest inaczej. Tylko znów tutaj robią nam wodę z mózgu – powiedział Gładki i zdrętwiał: przecież Pan tego słucha, a to właśnie on...

– Całkowicie się zgadzam – powiedział jednak Pan. Więc Gładki brnął dalej. – Bo to się pisze tak:

$$66 : 17 = 3 \text{ r. } 15,$$



a powinno się pisać tak:

$$66 = 3 \cdot 17 + 15.$$

I wtedy sam widzisz, że jest dobrze – zwrócił się do Opaka.

– Nic nie widzę. – Opak faktycznie zgubił się w tym wszystkim.

– Całe twoje rachunki, to znaczy moje, bo to ja liczyłem – ciągnął Gładki

– można krócej napisać tak:

$$299 = 1 \cdot 247 + 52, \quad 247 = 4 \cdot 52 + 39,$$

$$52 = 1 \cdot 39 + 13, \quad 39 = 3 \cdot 13 + 0.$$

I wszystkie liczby, tak jak powiedział Pan, mają wspólny dzielnik, a więc jest nim 13 – dokończył niezbyt ściśle.

– Absolutnie masz rację – poparł go jednak Pan – Zresztą tak właśnie wygląda oryginalny algorytm Euklidesa, ten z jego dzieła *Elementy*.

– To teraz nawet wiem, skąd się wzięły liczby Opaka – Gładki sunął jak burza.

– Jakie liczby? – Pan był wyraźnie niezorientowany.

– E tam, żartowałem. Powiedziałem, że można policzyć prościej:

$5 \cdot 299 - 6 \cdot 247 = 13$, ale te liczby po prostu sobie dobrałem, aby wyszedł NWD. Takie nieduże oszustwo – Opak był zadowolony, że zdołał się wykręcić. Przecież od początku bał się, że Pan będzie o ten przekręt miał do niego pretensję.

– A nie musiałeś ich zgadywać: wystarczyło liczyć od tyłu, za każdym razem powtarzając kolejny rachunek. Zobacz – i na tablicy Gładki napisał długi, ale przecież rozsądny napis

$$\begin{aligned} 13 &= 52 - 1 \cdot 39 = 52 - (247 - 4 \cdot 52) = \\ &= 5 \cdot 52 - 247 = 5 \cdot (299 - 1 \cdot 247) - 247 = \\ &= 5 \cdot 299 - 6 \cdot 247. \end{aligned}$$

– No widzisz – Opak przeszedł do kontruderzenia. – Można ten NWD obliczyć od razu.

Pan roześmiał się. – No i co ty, Bogdan, na to?

Bo przecież Gładki miał także zwyczajne imię. Ale rozpędu, jaki miał przed chwilą, nie było już ani śladu: faktycznie Opak podał dobrą metodę obliczania.

Pan wyraźnie zobaczył, że najwyższa pora wkroczyć. – Słuchaj, a nie przychodzi ci do głowy, że jedyną metodą na znalezienie tych liczb jest przeprowadzenie najpierw algorytmu Euklidesa? – zwrócił się do Gładkiego. – Przecież wykonując swoje obliczenia, korzystałeś z tego, że były gotowe obliczenia w przeciwną stronę.

– To znaczy, że te liczby Opaka do niczego się nie przydają? – Gładki, mimo zdemaskowania kolegi czuł się wyraźnie zawiedziony.

– Wręcz przeciwnie, dokonaliście wspólnie poważnego odkrycia matematycznego – zaprzeczył Pan.

– To miłe z jego strony – pomyśleli chłopcy – ale czy nie mógłby nam jeszcze powiedzieć jakiego?

Pan zorientował się, o co chodzi. – Nawet dwóch odkryć. Pierwsze to takie, że

dowolne dwie liczby całkowite (większe od jedności) można pomnożyć przez jakieś liczby całkowite (większe od zera) tak, aby po odjęciu otrzymać ich największy wspólny dzielnik.

– Po drugie zaś, że

jeśli się nawet źle dobierze liczby, przez które chcemy mnożyć, to zawsze otrzyma się wielokrotność największego wspólnego dzielnika.

Chłopcy spojrzeli na siebie z podziwem. Czego, jak czego, ale tego się po sobie nie spodziewali.

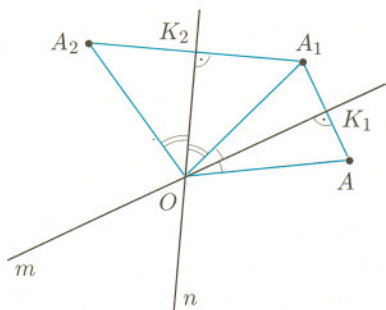
M.K.

– Człowieku, czy ty wiesz, co to jest obrót?! – krzyknęła ze złością Hania Sieczkówna, gdy po raz kolejny Jasio pomylił kroki w tańcu.

– Jasne, że wiem. Obrót to złożenie dwóch symetrii osiowych względem przecinających się prostych. – odparł ze stoickim spokojem Jasio. Dziewczyny popatrzyły na niego z wyraźną dezaprobatą.

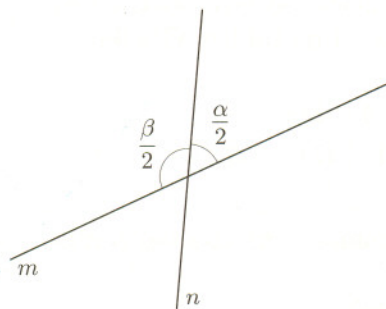
– Jaki ty jesteś mało romantyczny – stwierdziła z żalem Agatka.

– Ojej, popatrzcie na ten rysunek (rys. 1) – zaczął usprawiedliwiać się Jasio, tak, jakby to, że znalazł się w niełasce, wynikało z wątpliwości co do wypowiedzianego twierdzenia. – Najpierw składamy odbicia: A_1 to obraz A w symetrii względem prostej m , A_2 to obraz A_1 w symetrii względem prostej n . Mamy $AO = A_1O = A_2O$ i $\angle AOK_1 = \angle K_1OA_1$ oraz $\angle A_1OK_2 = \angle K_2OA_2$. A stąd $\angle AOA_2 = \alpha$, gdzie $\frac{\alpha}{2}$ to kąt między prostymi. Czyli złożenie dwóch symetrii osiowych względem prostych przecinających się w punkcie O pod kątem $\frac{\alpha}{2}$ to obrót o kąt α wokół punktu O . I to wszystko jedno, jak te proste są ułożone, byleby kąt między nimi był ten sam i przecinały się w O .



Rys. 1

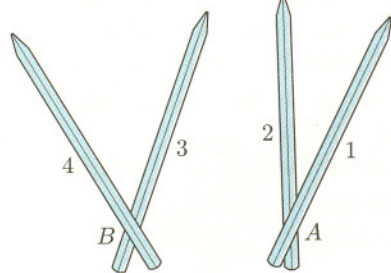
Wywody Jasia, które zupełnie już zdegustowały Agatkę, zaciekały Jacka do tego stopnia, że odsunął się od ściany i rzucił okiem na rysunek. Był w wyjątkowo dobrym humorze, więc choć spostrzegł, że dowód Jasia pomijał pewien przypadek („a co będzie, gdy prosta m lub n nie znajdzie się wewnątrz kąta $\angle AOA_2$?”), pominął ten fakt milczeniem, tym bardziej że potrafił bez trudu uzupełnić tę lukę. Nie wyraził też wątpliwości co do tego, czy kąt między prostymi m i n to kąt $\alpha/2$ czy $\beta/2$ (rys. 2), bo spodziewał się, iż Jasio tylko wzruszy ramionami i spyta, skądinąd słusznie: „A co za różnica?”. Ograniczył się więc tylko do stwierdzenia:



Rys. 2

– No, dobrze, może nawet masz rację. Ale po co tak komplikować proste pojęcia? To przerost formy nad treścią. Jasio uśmiechnął się chytrze.

– No to może w takim razie powiesz mi, czym jest złożenie dwóch obrotów?



Rys. 3

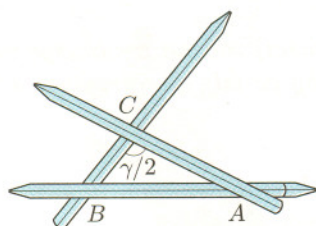
Jacek spróbował zachować spokój. Złożenie dwóch obrotów?! Ten Jasio musi być strasznie wredny, że o to pyta. Kilka obrazków przemknęło w wyobraźni Jacka, ale nic z nich nie wynikało. Nerwowo narysował na kartce kilka nowych sytuacji i... znów klęska...

– Poddam się. Ale jak mi powiesz, że złożenie dwóch obrotów to złożenie dwóch obrotów, to twoja *fizis* na tym ucierpi.

– Po co ta mowa? – Jasio był pewny swego. – Złożenie dwóch obrotów to obrót.

Teraz nawet Agatka i Hania się zainteresowały. Chyba Jasio robi Jacka w balona! Tymczasem Jasio wyjął dwa długopisy i spytał:

– Macie może jeszcze dwa?

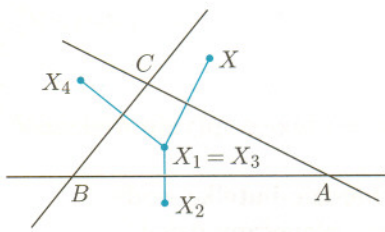


Rys. 4

Teraz były już pewne, że to jakaś prowokacja. Przecież nie ma takiego rysunku, do którego potrzeba czterech długopisów! Radośnie spełniły więc życzenie Jasia, oczekując co najmniej jakiejś bójki w finale. Tymczasem Jasio ujął długopisy tak, jak na rysunku 3 i powiedział:

– Oto dwa obroty wokół punktów A i B . Złożenie tych obrotów to zatem złożenie czterech symetrii osiowych: względem prostych, kolejno, 1, 2, 3 i 4.

Następnie obrócił długopisy (nie zmieniając kąta pomiędzy długopisami 1 i 2 oraz 3 i 4 ani punktów „przecięcia długopisów”: A i B), tak, że długopisy 2 i 3 „pokryły się” (rys. 4).



Rys. 5

– Teraz to znów złożenie dwóch tych samych obrotów. Tyle, że odbicie względem prostej 2 „zjada się” z odbiciem względem prostej 3 (rys. 5) i to, co zostaje, to tylko złożenie obrotów względem prostych 1 i 4, czyli obrót o kąt γ wokół punktu C.

– O, kurczę! – podsumowała wywód Jasia Agatka.

Jacek nie mógł uwierzyć w swą porażkę. Wreszcie pojawił się na jego twarzy kwaśny uśmiech.

– Może i masz rację. Ale jest taki przypadek, że złożenie dwóch obrotów nie jest obrotem, tylko przesunięciem równoległym.

Jasio pomyślał chwilę i wiedział już, kiedy tak jest. A Ty, Czytelniku?

W.S.

Jak nieuzbrojonym okiem odróżnić gwiazdę od planety?

Najprościej po jej położeniu na niebie i jasności. Najjaśniejszą „gwiazdą” jest Wenus widoczna albo jako Jutrzenka (Gwiazda Zaranna), albo jako Gwiazda Wieczorna. Jej odległość kątowa od Słońca nigdy nie przekracza 45° . Wenus nie sposób pomylić z żadną gwiazdą. Każdy ją wiele razy widział, choć niekoniecznie wiedział, co widzi.

Zdecydowanie jaśniejsze niż gwiazdy są również Jowisz i Merkury. Ten ostatni nie oddala się od Słońca na więcej niż 22° , więc jest bardzo trudny do zaobserwowania (zwłaszcza w mieście). Jeżeli już jest widoczny, to może być pomyłony tylko z Wenus.

Wspomnianego już Jowisza też każdy widział: jako najjaśniejszą „gwiazdę” środka nocy. Jako planeta zewnętrzna może on znaleźć się w dowolnej odległości kątowej od Słońca.

Podobnie dowolne położenie na ekliptyce mogą zająć pozostałe dwie dostrzegalne gołym okiem planety: Mars i Saturn. Należą one zazwyczaj do najjaśniejszych „gwiazd”, ale nie aż tak jasnych, żeby ich z prawdziwymi gwiazdami nie można było pomylić. Trzeba wtedy przynajmniej mniej więcej wiedzieć, gdzie ich szukać (np. czytając naszą rubrykę *Patrz w niebo*). W razie wątpliwości można rozpoznać planetę po jej spokojnym (w odróżnieniu od migających gwiazd) świeceniu. Jest to jednak efekt dość subtelny. Migotanie („mruganie”) gwiazd spowodowane jest fluktuacjami gęstości atmosfery. Nawet przez najpotężniejsze teleskopy, gwiazdy widoczne są jako punktowe źródła światła. Planety już w lornetce okazują się obiektami rozciągniętymi. Ich obraz dociera do nas szerszą wiązką, mniej wrażliwą na fluktuacje gęstości.

Niektórzy twierdzą nawet, że są w stanie gołym okiem dostrzec kątową rozciągłość planet. Jest to raczej efekt psychologiczny: połączenie wiedzy o tym, że to jest planeta, ze spokojnym świeceniem tego obiektu.

Przytaczana bywa jednak anegdota o matce Gaussa. Gdy syn pokazał jej Wenus, zapytała, dlaczego „rogalik” w lunecie jest odwrócony w drugą stronę. Czy rzeczywiście można dostrzec fazę Jutrzenki gołym okiem? Sami sprawdźcie swój sokoli wzrok.

Ostatnim, ale za to pewnym sposobem odróżnienia planety od gwiazdy jest stwierdzenie jej ruchu względem gwiazd stałych. Ale do tego potrzebna jest systematyczna, co najmniej kilkudniowa (wielotygodniowa) obserwacja, do czego, oczywiście, gorąco zachęcamy.

P.Z.



Czy środek wakacji to odpowiednia pora na eksperymenty? Mam nadzieję, że jesteście daleko od waszych „laboratoriów”. Nic jednak straconego, bo przecież najwspanialszym źródłem obserwacji jest otaczająca nas przyroda. Ciekawym obiektem badań jest np. brzeg morza. Weźmy najbliższy nam Bałtyk. Dla rozgrzewki kilka pytań, na które znane są zadowalające odpowiedzi:

1. Dlaczego na granicy plaży i morza jest dużo więcej żwiru niż wszędzie wokół?
2. Dlaczego praktycznie wszędzie na polskim wybrzeżu kilkadziesiąt metrów od brzegu znajduje się płycizna? Można ją zaobserwować jako jaśniejszy, żółty pas morza, dobrze widoczny z brzegu (gorzej z wody). Kategorycznie odradzamy jednak dopływanie do niej! Choć jej głębokość nie przekracza zazwyczaj 1,5 metra, to od brzegu oddziela ją niebezpieczna, nawet przy niewielkiej fali, głębia. Absolutnie zabronione są takie samowolne „próby pływackie” podczas obozów i kolonii. Pamiętajcie również, że w Polsce zabronione jest (i słusznie) pływanie na nadmuchiwanym materacach.
3. Dlaczego postawienie stopy na mokrym, ubitym, zalewanym przez niektóre fale piasku powoduje natychmiastowe „wyschnięcie” podłoża dookoła stopy, a po jej zdjęciu w śladzie pojawia się woda?

4. W jakiej odległości od brzegu płynie większość statków?
5. Jak najszybciej schłodzić butelkę wody mineralnej w gorący, słoneczny dzień?

Po rozgrzewce pora na ciekawszy, naszym zdaniem, problem. Na wyludnionych odcinkach plaż silny wiatr usypuje z piasku charakterystyczną „tarkę”. Podobny wzór można zaobserwować na dnie morza. Na ile podobne są te wzory i skąd biorą się te podobieństwa? Jak oszacować „długość fali” i „amplitudę” takiej tarki? O ile nam wiadomo, obserwacja ta nie ma zadowalającego wyjaśnienia. Jeżeli jednak ono istnieje lub zostanie znalezione, to chętnie je opublikujemy.

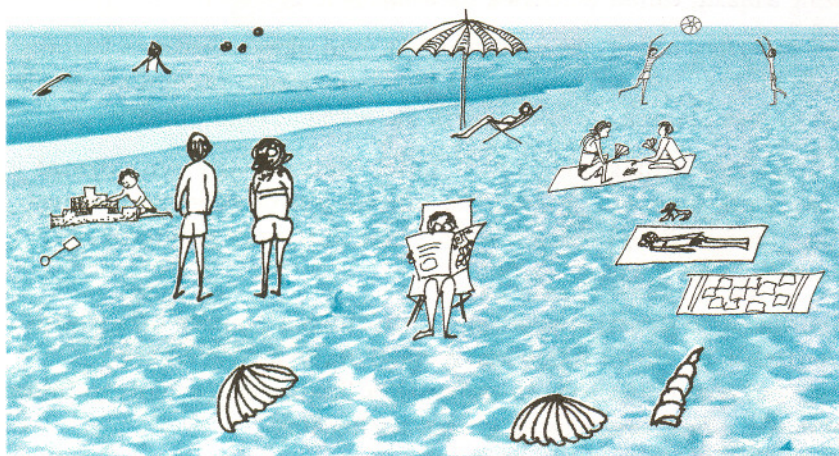
Po tej serii pytań proponujemy coś dla majsterkowiczów. W dobie nadużywania telefonów komórkowych problemy łączności wydają się raz na zawsze rozwiązane. A jednak czasem nadal przydają się stare, proste, wypróbowane sposoby. Jednym z nich jest telefon akustyczny. Do jego wykonania potrzebny jest mocny cienki sznurek i dwa kubeczki po jogurcie. W dniu każdego robimy małą dziurkę, przewlekamy sznureczek, wiążemy na każdym końcu węzełek i sznurek napinamy. Otrzymujemy łączność typu półdupleks (prawda, że ładne słowo?). Zawsze mnie ciekawiło, jaki może być maksymalny zasięg takiego połączenia. Czy da się w ten sposób skomunikować np. podobozu zgrupowania harcerzy? „Opis techniczny” realizacji takiego rozwiązania telekomunikacyjnego byłby bardzo mile widziany.

P.Z.

Odpowiedzi na pytania z poprzedniego kącika (Delta 5/2001).

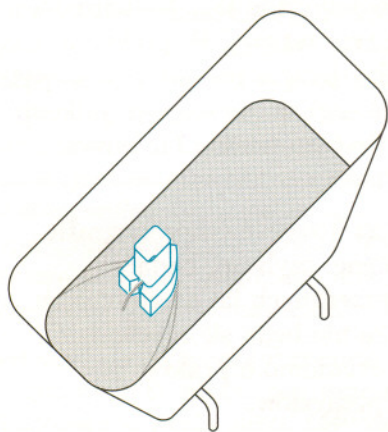
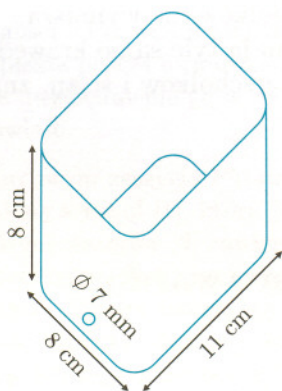
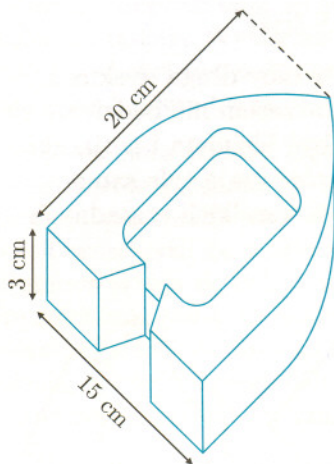
1. Aby jak najszybciej wylać wodę z butelki, należy butelkę zakręcić. Wtedy w czasie wylewania tworzy się w butelce wir, przez który powietrze może bez przeszkód dostawać się do środka. Woda nie bulgocze i wylewa się szybko.

2. Aby „wdmuchnąć” do butelki prawie wpełnięty korek (czyli używając tylko powietrza, którym oddychamy, spowodować, żeby korek znalazł się w środku), należy powietrze z butelki zassać ustami. Po oderwaniu ust ciśnienie atmosferyczne samowolnie wcisnie korek do środka.



Napęd odrzutowy

Bardzo łatwo wprawić w ruch samochodzik – zabawkę. Wystarczy popchnąć i jedzie! Równie łatwo wprawić w ruch kamień. Wystarczy (od)rzucić... i leci! W pewnym sensie podobnego rodzaju napęd stosowany jest w raketach i samolotach odrzutowych. Wystarczy popychać... i leci! Myśląc o przykładzie z kamieniem, można dojść do wniosku, że napęd odrzutowy jest jednym z najstarszych wynalazków ludzkości. Ale co pcha raketę? Żeby znaleźć odpowiedź na to pytanie, skonstruujemy własny silnik odrzutowy. Aby móc spokojniej obserwować jego pracę, zastosujemy go do napędu łódki, a nie rakiety. Łódkę można wykonać ze styropianu. Silnikiem będzie plastikowy kubek po serku. W pobliżu dna robimy dziurkę o średnicy około 5–7 mm. Możemy ją wytłoczyć łebkiem wkręta rozgrzanego nad palnikiem. To będzie dysza wylotowa. Silnik mocujemy do łódki, po prostu stawiając go na niej po napełnieniu paliwem. Jako paliwa użyjemy tlenu wodoru. Substancja ta nadaje się znakomicie ze względu na stosunkowo niską lepkość i brak szkodliwego działania na środowisko. Młody fizyk-eksperymentator nie powinien mieć trudności z jej zdobyciem. Napełniamy silnik i umieszczamy łódkę na powierzchni akwenu. Mój prototyp przepłynął w kilka sekund całą wannę!



Czy wiemy już, co popycha łódkę? Paliwo pozostające w silniku? Ale jak może wprawić w ruch coś, co pozostaje w spoczynku względem łódki? Może paliwo wylatujące z silnika? Tak naprawdę naszą łódkę popycha... zasada zachowania pędu. Pęd to iloczyn masy m i prędkości v . Początkowo pęd łódki i paliwa jest równy zero. Paliwo wypływając z silnika unosi pewien pęd $m_p v_p$. Aby całkowity pęd nie zmienił się, łódka musi uzyskać przeciwnie skierowany, ale równy co do wartości pęd $m_l v_l = m_p v_p$.

A jak wytłumaczyć to w języku sił? Otóż gdyby nie było dyszy, paliwo działałoby z jednakową siłą na przednią i tylną ściankę silnika. Ale skoro w tylnej ściance jest dziura, to w tym miejscu siła na ściankę działać nie może, bo ścianki nie ma. Pozostaje więc niezrównoważona siła działająca na ściankę przednią.

Ze wzoru na pęd widać, że w silniku raketowym prędkość wyrzucanego paliwa jest równie ważna jak jego masa (gęstość). Także ważna jest masa łódki (rakiety). Powtarzając „loty” łódką po powierzchni wanny, można zaobserwować, że nasza rakietka wcale nie ma stałego przyspieszenia. Gdy już zrozumiemy, dlaczego, to można zaprosić kolegów na zawody. Jaki stopień napełnienia silnika zapewnia najszybsze osiągnięcie przeciwnego brzegu wanny?

Skonstruujmy teraz raketę o lepszych osiągnięciach. W tym celu jako paliwo zastosujemy mieszaninę azotu, tlenu i dwutlenku węgla w stanie gazowym. Napełniamy nią gumowy balonik i... puszczamy. Przez kilka sekund balonik pędzi jak oszalały. Dlaczego osiągi tej rakiety są lepsze?

W każdym razie jest to piękny dowód eksperymentalny tego, że gazy też mają masę, gdyż inaczej pęd byłby równy zero. A może ktoś z Czytelników pokusiłby się o eksperymentalne wyznaczenie tą metodą gęstości użytej mieszaniny gazów?

Mając do dyspozycji gumowy balonik, rurkę o średnicy 15 mm i długości kilku centymetrów, cienki sznurek, ciężarek o masie 100 g, plastelinę, listewkę o długości 50 cm, centymetr krawiecki i stoper, wyznacz gęstość powietrza.

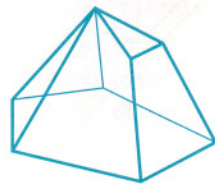
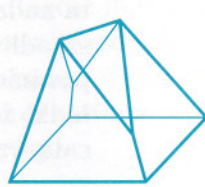
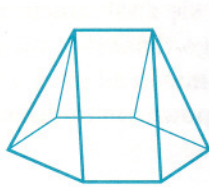
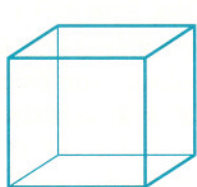
Grzegorz WROCHNA

Poprzednio stwierdziliśmy, że dla dowolnych liczb naturalnych spełniających warunki

$$W \leq 2S - 4 \quad \text{ i } \quad S \leq 2W - 4$$

istnieje wielościan mający W wierzchołków i S ścian.

No dobrze, istnieje, ale czy tylko jeden? – tu byłaby długa dyskusja, które wielościany uznać za takie same. My tymczasem nie będziemy się nad tym zastanawiać, bo pokażemy, że mogą być bliźnięta i trojaczki, to znaczy takie dwa (albo trzy) wielościany, które mają tyle samo wierzchołków i tyle samo ścian, ale są – w myśl wszelkich rozsądnych kryteriów – różne.



Bliźnięta ($W = 8$, $S = 6$).

Trojaczki ($W = 8$, $S = 7$).

Czy istnieją czworaczki, pięcioraczki itd.?

Jak widać z przykładów, ta sama liczba wierzchołków nie wymusza, aby ścian było tyle samo. Natomiast bliźnięta mają tyle samo krawędzi. Podobnie trojaczki. Czy zatem znając liczbę wierzchołków i ścian, znamy tym samym liczbę krawędzi?

M.K.

Jak odróżnić jajko surowe od jajka ugotowanego na twardo (bez tłuczenia skorupki)?

Wystarczy nim zakręcić na gładkim stole. Ugotowane na twardo kręci się jako całość, więc zakręcone wykona ładnych kilka obrotów.

Jajko surowe nie jest ciałem sztywnym, więc kręcenie skorupką nie przenosi się bezpośrednio na wnętrze jajka (chodzi głównie o żółtko). Surowe jajko prawie natychmiast się zatrzyma.

Jeszcze bardziej tajemniczo wygląda następujące doświadczenie. Kładziemy jajko na stole i rozkręcamy je palcem tak, aby jajko wykonało kilka, w miarę szybkich, wymuszonych obrotów (poprzednio kręciliśmy jajkiem jak bączkiem – tylko raz). Jeżeli teraz zatrzymamy je na chwilę, to:

- jajko na twardo po prostu się zatrzyma;
- jajko surowe (po cofnięciu palca) będzie się dalej kręcić!

Łatwo to wytłumaczyć. W drugim przypadku, zatrzymując na chwilę skorupkę, nie zatrzymaliśmy rozkręconego wnętrza jajka. Czy w ten sposób można odróżnić jajko na twardo od jajka na miękko? Teoretycznie tak. Im bardziej jest ono na miękko, tym łatwiej. W praktyce jednak różnica między jeszcze nie całkiem ściętym jajkiem na miękko, a dopiero co ściętym jajkiem na twardo okaże się bardzo trudna lub wręcz niemożliwa do ustalenia.

Może można wtedy zastosować echosonografię albo metody sejsmiczne, czyli np. badać rozchodzenie się poprzecznych fal dźwiękowych (w ciekłej części jajka nie będą się rozchodzić). Nic nam jednak nie wiadomo o praktycznej realizacji tego typu pomysłów.

P.Z.

Duże krople

W lecie mało komu zależy na deszczu. Choć jedni ciężko pracują przy żniwach, a drudzy wprost przeciwnie – odpoczywają, to ani ci, ani tamci do opadów nie tęsknią. Wymarzony upał nie powinien jednak trwać zbyt długo. Nic tak nie odświeża atmosfery jak dobra burza.

Ale skąd się biorą deszcze? Ogólnie wiadomo, że deszcze padają z chmur, a chmury tworzą się w procesie kondensacji pary wodnej na cząsteczkach areozoli unoszących się w atmosferze. Chmura początkowo składa się tylko z malutkich kropelek, które stopniowo rosną, aż osiągną rozmiary rzędu jednego milimetra, co pozwala im na rozpoczęcie spadania, w czasie którego dalej rosną, aby stać się znanymi nam kroplami deszczu.

Jest jednak pewien problem. Ten proces trwa zbyt długo. Obliczenia prowadzą do oszacowania minimalnego czasu formowania się kropelek na kilkanaście godzin, podczas gdy obserwuje się czasy nawet nieprzekraczające pół godziny.

Specjaliści od dawna podejrzewają, że to wiatr przyspiesza proces formowania się kropelek, ale proste uwzględnienie go w modelach niewiele dotąd poprawiało.

W marcowym zeszycie *Physical Review Letters* ukazał się artykuł [1], który tak według autorów, jak i komentatorów [2] zawiera klucz do rozwiązania tego problemu. Jest nim uwzględnienie turbulencji. Wewnątrz chmury tworzą się małe wiry, które na zasadzie wirówki odrzucają kropelki na zewnątrz, tworząc ich zagęszczenia o milimetrowych rozmiarach – właśnie takich, jakie są potrzebne, aby kropelka mogła stać się deszczem.

Artykuł [1] opiera się na całej serii prac opublikowanych w ciągu ostatnich kilku lat, a dotyczących analitycznego modelowania ruchu masywnych cząsteczek w różnego rodzaju przepływach. Rozwinięte podejście może okazać się pomocne przy okazji badania dystrybucji wtryskiwanego do silników paliwa czy też rozkładu zanieczyszczeń atmosferycznych. Nadzieje wiąże się ze stworzeniem dla meteorologów prostych reguł typu „jeżeli wiatr jest odpowiednio silny, to deszcz zacznie padać za czterdzieści minut”. Niestety, na razie pozostanie to tylko marzeniem.

Bez względu na to, czy rozumiemy mechanizm powstawania kropli czy nie, wcześniej czy później dopadnie nas letnia burza. Gdy już uda nam się schronić przed nią pod dach, namiot czy do kabiny łódki, to możemy zapytać: co na temat wielkości kropelek można powiedzieć na podstawie ich łoskotu o nasze schronienie? Problem jest chyba nadal otwarty.

Inaczej sprawa wygląda w fizyce materii skondensowanej. Tam od dawna porcję przepływającego przez cienkie złącze ładunku mierzy się za pomocą „słuchania szumu” takiego przepływu.

Pod koniec kwietnia ukazał się artykuł [3], w którym zaprezentowane zostały wyniki badania przepływu prądu przez punktowe złącze pomiędzy dwoma nadprzewodnikami. Wyniki okazały się perfekcyjnie pasować do kwantowo-mechanicznych obliczeń teoretycznych [4].

Zespół [3] chciał sprawdzić zaskakujące przewidywania teorii nadprzewodnictwa. Normalnie w metalach nośnikami prądu są pojedyncze elektrony. W stanie nadprzewodnictwa elektrony łączą się w tzw. pary Coopera. Ale przewidywania dotyczące prądu płynącego przez słaby nadprzewodzący kontakt, łączący dwa nadprzewodniki są jeszcze dziwniejsze. Dla odpowiednio małego napięcia prąd przepływa w coraz większych porcjach. Dodatkowo, wielkość tych porcji dla odpowiednio małej przewodności złącza (odpowiadającej tunelowaniu przez barierę potencjału) coraz dokładniej odpowiada całkowitym wielokrotnościom ładunku elementarnego. Zależność wielkości porcji przesyłanego ładunku od przyłożonego napięcia staje się coraz bardziej schodkowa [1].

W doświadczeniu użyto nanotechnologii pozwalającej na uzyskiwanie punktowych złączy o regulowanej wielkości. Pracowano z jak najmniejszymi złączami składającymi się z pojedynczych atomów glinu. Glin ma w tych warunkach trzy kanały przewodności odpowiadające trzem dostępnymi orbitalom typu p . Do charakterystyki prądowo-napięciowej złącza można dopasować krzywe teoretyczne, których parametrami są przewodności w dostępnych kanałach. Liczby te nazywane są w środowisku badaczy PIN-kodem złącza. Ich wyznaczenie pozwala przewidzieć zależność wielkości przysyłanych przez złącze nośników ładunku od napięcia bez żadnych wolnych parametrów.

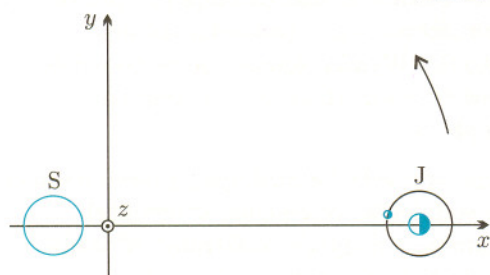
Okazało się, że wyniki pasują do przewidywań jak rękawiczka do ręki. Świadczy to o zrozumieniu teorii przewodnictwa we wspólnym obszarze zainteresowań fizyki ciała stałego i chemii.

Piotr ZALEWSKI

- [1] E. Balkowsky, G. Falkovich, A. Fouxon, *Intermittent Distribution of Inertial Particles in Turbulent Flows*, Phys. Rev. Lett. **86**(2001) 2790.
- [2] G. Brumfiel *How Raindrops Form*, Phys. Rev. Focus (22 marca 2001).
- [3] R. Cron, M.F. Goffman, D. Esteve, C. Urbina, *Multiple-Charge-Quanta Shot Noise in Superconducting Atomic Contacts* Phys. Rev. Lett. **86**(2001) 4104.
- [4] *Electric Current in Big Chunks*, Phys. Rev. Focus (30 kwietnia 2001).

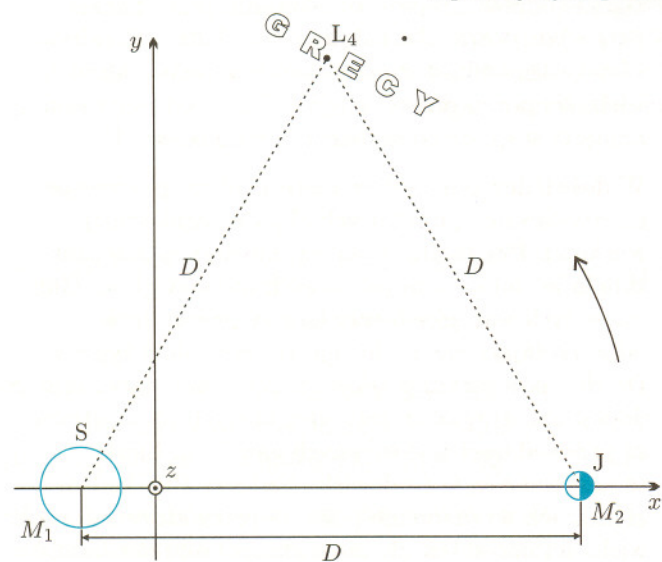
In medio vero omnium residet Sol – „W pośrodku zaś wszystkich rozsiadło się Słońce”. To zdanie dotyczące orbit planet zamyka w sobie istotę systemu Kopernika: Słońce stanowi centrum, wokół którego krążą planety. Dzięki ogromnej masie Słońca ruchy ciał Układu Słonecznego odbywają się zgodnie z tym przybliżonym obrazem. Zwykle opisujemy je w układzie odniesienia, który nie wyróżnia żadnego z tych ciał i jest związany z „gwiazdami stałymi”. Dalej będziemy nazywać go „nieruchomym”.

Dla opisu ruchu księżycy jakiejś planety także można wykorzystać wygodny układ odniesienia. Posłużmy się tu przykładem Jowisza, który zdołał zgromadzić wokół siebie około 20 księżyców, tworząc miniaturowy „system planetarny”. Wybierzmy układ współrzędnych nieruchomy względem Jowisza, o początku w środku masy pary Jowisz-Słońce. Jego oś x skierujmy wzdłuż prostej łączącej te ciała, a osi z nadajmy kierunek prostopadły do płaszczyzny orbity Jowisza (zwroty osi pokazuje rysunek 1). Tak zdefiniowany układ obraca się względem układu nieruchomego raz na jowiszowy rok. Ponieważ księżyce są znacznie mniejsze od Jowisza, można uznać, że pod wpływem przyciągania planety każdy z nich okrąża go po elipsie.



Rys. 1

Pozostając w płaszczyźnie xy tego układu, przejdźmy w okolice jednego z dwóch punktów wyznaczających wraz ze Słońcem i Jowiszem trójkąty równoboczne – tego mianowicie, który w układzie nieruchomym wyprzedza planetę o około 1/6 roku (rys. 2). Znajdziemy tam grupę planetoid zwanych Grekami. Pierwszą z nich, Achillesa, odkrył w 1906 r. M. Wolf. W obracającym się układzie współrzędnych planetoidy także krążą, jednak inaczej niż księżyce: wokół



Rys. 2

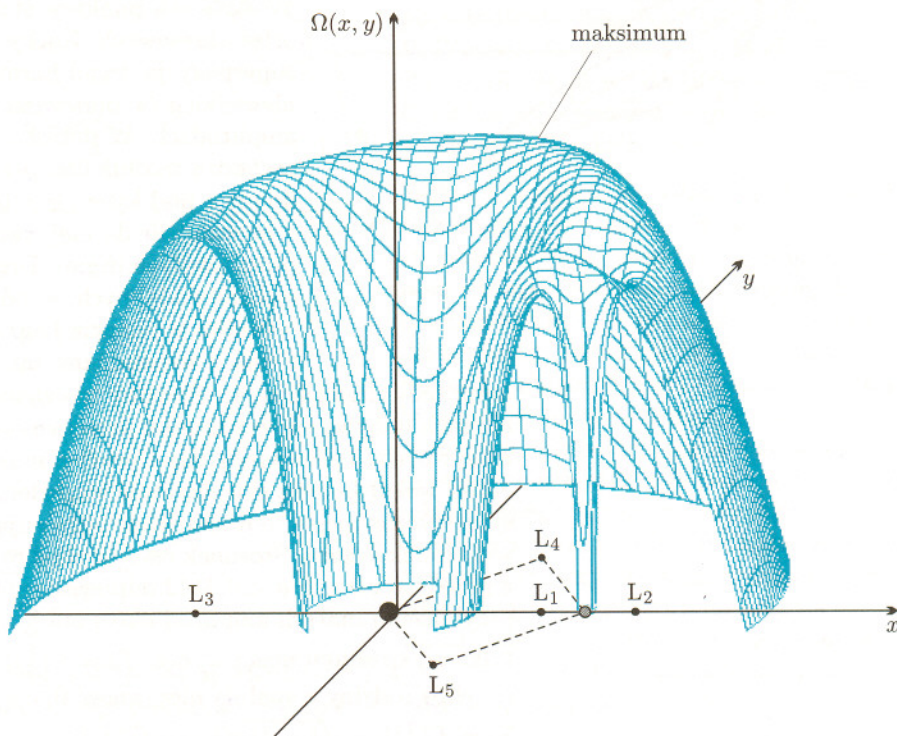
niczego. Poruszają się po torach, wewnątrz których nie ma żadnej centralnej masy. Okrążają tzw. trójkątny punkt libracji, oznaczany zwykle symbolem L_4 . Podobna grupa planetoid – Trojan – skupia się wokół punktu libracji L_5 , w miejscu symetrycznym do L_4 względem osi x . Istnienie punktów libracji wykazał J.L. Lagrange w 1772 r. w pracy dotyczącej zagadnienia trzech ciał *Essai du probleme des trois corps*. Problem ten, polegający na znalezieniu ruchu trzech mas przyciągających się siłami grawitacji, jest w ogólnym przypadku praktycznie nierozwiązywalny. Lagrange znalazł rozwiązania w przypadkach szczególnych, z których najprostszym jest wariant zwany ograniczonym kołowym zagadnieniem trzech ciał. Zakłada się w nim, że wszystkie trzy ciała poruszają się w jednej wspólnej płaszczyźnie, że jedna z mas m jest znacznie mniejsza od pozostałych M_1 i M_2 , więc nie wpływa na ich ruch, i że tory tych dwu ciał masywnych są kołowe.

Jednym z rozwiązań szczególnych jest wtedy ruch małego ciała, podczas którego przebywa ono stale właśnie w trójkątnym punkcie libracji. Zazwyczaj ruch małej masy w ograniczonym zagadnieniu trzech ciał bada się w układzie obracającym się jednostajnie, razem z dwoma ciałami masywnymi, ze stałą prędkością kątową, równą tej, jaką mają ciała masywne krążące po okręgach w układzie nieruchomym. Załóżmy, że $M_1 > M_2$, wprowadźmy masę zredukowaną $\mu = M_2 / (M_1 + M_2)$ oraz oznaczmy przez D odległość między ciałami masywnymi, a przez T okres ich pełnego obiegu kołowej orbity w układzie nieruchomym (rys. 2). Przyjmijmy też, że będziemy interesować się ruchem ciała „znikomego” tylko w płaszczyźnie xy .

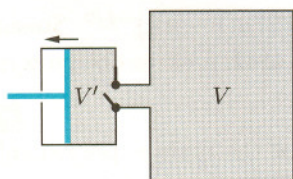
Ruch masy znikomej m jest konsekwencją działających na nią sił. W układzie obracającym się – a więc nieinercjalnym – oprócz sił przyciągania przez M_1 i M_2 pojawiają się siły bezwładności: odśrodkowa i Coriolisa. Ta ostatnia działa wtedy, gdy prędkość masy m jest różna od zera. Pole wypadkowej \vec{F} siły grawitacji i siły odśrodkowej jest nadal polem potencjalnym, tzn. że można

zdefiniować funkcję $\Omega(x, y)$, która będzie opisywać energię potencjalną ciała o znikomej masie i zerowej prędkości w opisanym układzie.

Powierzchnię opisaną funkcją $\Omega(x, y)$ przedstawia rysunek 3. Oczywiście, wypadkowa \vec{F} sił grawitacji jest ujemnym gradientem funkcji Ω , tzn. że siła \vec{F} jest w każdym punkcie (x, y) skierowana w stronę spadku funkcji $\Omega(x, y)$, a jej wartość jest proporcjonalna do nachylenia powierzchni wyznaczonej funkcją Ω .



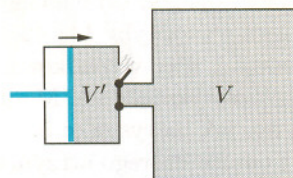
Rozwiązanie zadania F 553.
Rozpatrzmy pierwszy ruch tłoka w lewo:



Ciśnienie gazu zmniejsza się do pewnej wartości p_1 . Z prawa Boyle'a-Mariotte'a

$$pV = p_1(V + V').$$

Podczas ruchu tłoka w przeciwnym kierunku powietrze z komory pompy jest wypychane na zewnątrz:



Oznaczając ciśnienie pod koniec drugiego cyklu przez p_2 , mamy

$$p_1V = p_2(V + V').$$

Z powyższych dwóch wzorów

$$p_2 = p \left(\frac{V}{V + V'} \right)^2.$$

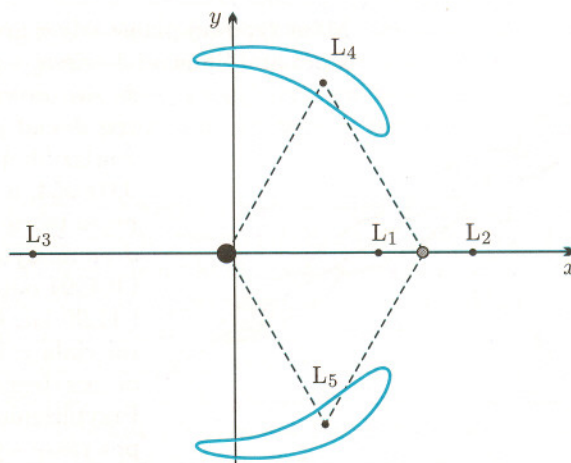
Po n ruchach tłoka ciśnienie p_n w naczyniu będzie równe

$$p_n = p \left(\frac{V}{V + V'} \right)^n,$$

a więc obniżenie ciśnienia do $p_n = p'$ nastąpi po

$$n = \frac{\log \frac{p'}{p}}{\log \frac{V}{V + V'}}$$

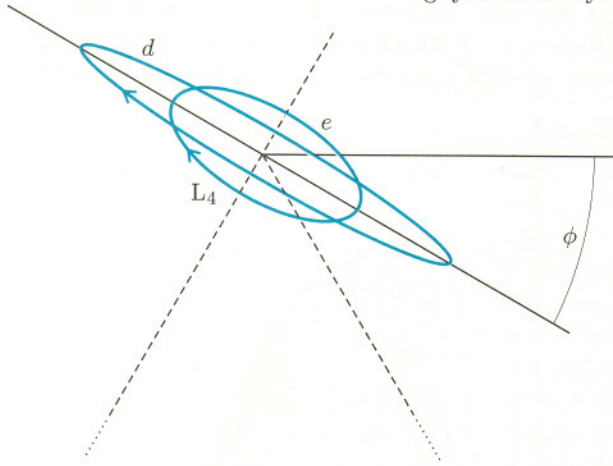
ruchach tłoka.



Rys. 3

Przekroje tej powierzchni poziomymi płaszczyznami $\Omega = C$ są tzw. krzywymi zerowej prędkości Hilla. Ograniczają one obszary niedostępne dla ciała, którego energia wynosi C . Na rysunku 3 u dołu pokazany jest przykład takich krzywych. Funkcja $\Omega(x, y)$ ma pięć ekstremów, w których składowe siły \vec{F} są równe zero. Wyznaczają one pięć punktów oznaczanych L_1, \dots, L_5 , w których masa znikoma pozostaje w równowadze, a numeracja odpowiada rosnącej energii ciała. Punkty L_1, L_2 i L_3 leżą na osi x i zwane są współliniowymi. Funkcja $\Omega(x, y)$ ma w nich siodła. Są one niestabilne w tym sensie, że małe wychylenie z każdego z tych punktów powoduje nieograniczone oddalenie się ciała znikomego. Punkty L_4 i L_5 mają współrzędne $(D(\frac{1}{2} - \mu), D\sqrt{3}/2)$ i $(D(\frac{1}{2} - \mu), -D\sqrt{3}/2)$ i zwane są trójkątnymi. Funkcja $\Omega(x, y)$ ma w nich maksima. Punkty trójkątne mogą być stabilne. Oznacza to, że małe wychylenie z położenia równowagi w L_4 lub L_5

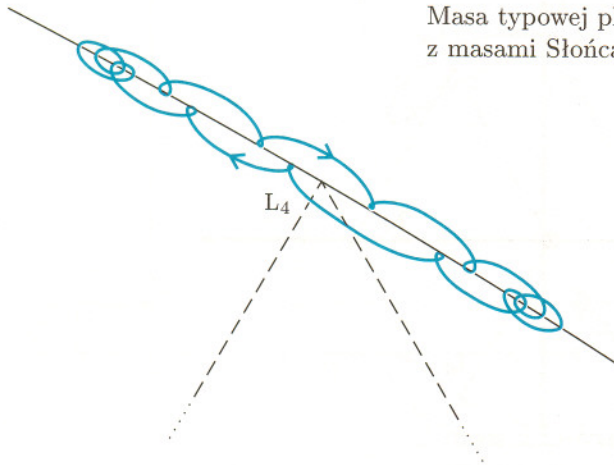
prowadzi do ruchu okresowego wokół tych punktów. Jest to możliwe, jeżeli siła Coriolisa jest przeciwnie skierowana do wypadkowej sił grawitacji i odśrodkowej. Stabilność (podkreślmy: dla małych wychyleń) ma miejsce jednak tylko wtedy, gdy ciała masywne spełniają warunek $\mu(1 - \mu) < 1/27$, czyli gdy $\mu < 0,038521$.



Rys. 4

Teorię niewielkich ruchów – libracji – w bliskim sąsiedztwie punktów Lagrange’a opracował w 1899 r. C.V.L. Charlier. W okolicach punktów stabilnych można spodziewać się orbit okresowych. Ruchy takie mogą być traktowane jako superpozycja drgań harmonicznnych o dowolnych, lecz niewielkich (w porównaniu z odległością od ciał masywnych) amplitudach. W pobliżu np. punktu L_4 dwa z tych drgań zachodzą wzdłuż linii przechodzącej przez L_4 i nachylonej do osi x pod kątem $\phi = 0,5 \arctg(\sqrt{3}(1 - 2\mu))$, a dwa inne – prostopadle do niej; tworzą więc dwie pary wzajemnie prostopadłych drgań. Drgania każdej pary składają się na rodzinę podobnych, współśrodkowych i współosiowych elips o środku w punkcie Lagrange’a, dużych osiach tworzących z osią x wspomniany kąt i rozmiarach określonych przez

amplitudy drgań (rys. 4). Rodziny te oznaczane są literami d i e . Ruch po tych elipsach odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku obiegu ciał masywnych. Tylko wtedy siła Coriolisa może zapewnić stabilność. Odpowiednie elipsy wokół L_5 leżą symetrycznie względem osi x , ale ruchy po tych torach symetryczne nie są, bowiem także odbywają się w kierunku zgodnym z obrotem wskazówek zegara. Stosunek osi b/a elips rodziny d przyjmuje wartości z przedziału $0 < b/a < 0,4142$ odpowiednio dla $0 < \mu < 0,038521$. W przyjętym przybliżeniu małych amplitud okres obiegu po elipsach libracyjnych zależy też tylko od stosunku mas i wynosi $T_d = T \left\{ \frac{1}{2} [1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}] \right\}^{-1/2}$. Stosunek osi elips rodziny e spełnia nierówność $0,5 > b/a > 0,4142$, a okres obiegu wynosi $T_e = T \left\{ \frac{1}{2} [1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}] \right\}^{-1/2}$.

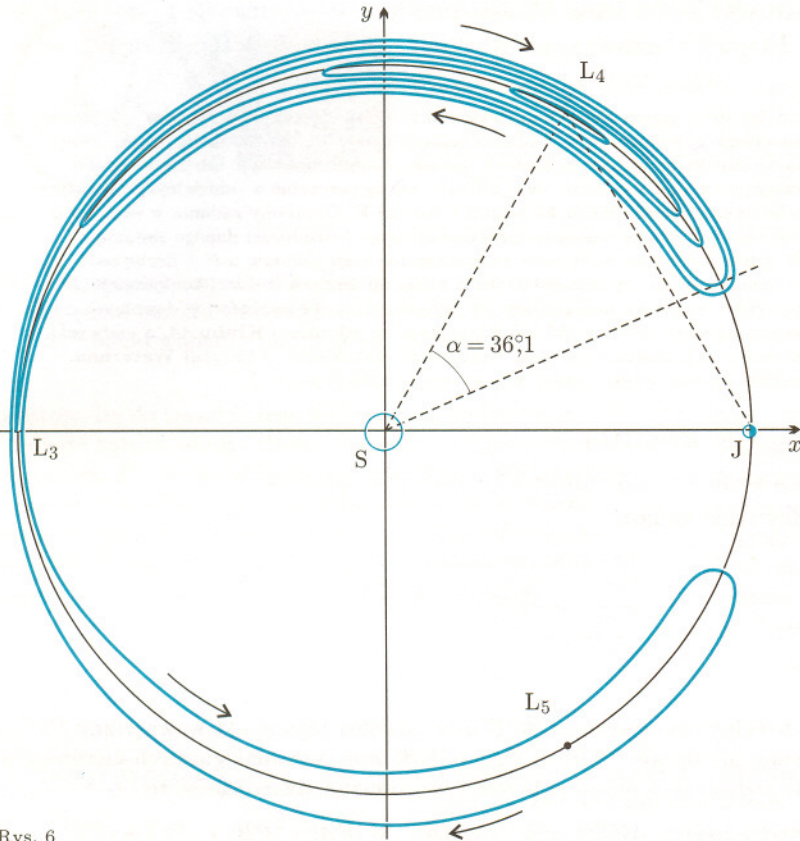


Rys. 5

Masa typowej planetoidy z grup Trojan i Greków jest tak mała w porównaniu z masami Słońca i Jowisza, a orbita Jowisza tak zbliżona do okręgu, że zastosowanie do nich ograniczonego kołowego zagadnienia trzech ciał jest całkowicie uzasadnione. Dla układu Jowisz-Słońce masa zredukowana Jowisza wynosi zaledwie 0,000954, a więc trójkątnie punkty libracji są stabilne. Opisane przez teorię Charliera ruchy mogłyby się zrealizować. Elipsy d i e miałyby kształty określone przez stosunki osi 0,05356 i 0,4994 odpowiednio, a okresy obiegu wynosiłyby 147,42 i 11,90 lat. Okresy te są niewspółmierne, więc wypadkowy tor ciała zanikomego byłby krzywą niezamykającą się. Mógłby on przybierać dość zawiły kształt, np. jak na rysunku 5. Przybliżenie małych amplitud, za pomocą którego otrzymano powyższe wyniki, nie jest jednak spełnione dla rzeczywistych ruchów Trojan i Greków. Planetoidy te oddalają się dość

znacznie od punktów libracji i ich tory nie są superpozycją elips (wychylają się także poza płaszczyznę orbity Jowisza). Są asymetryczne względem punktu L_4 : maksymalne wychylenie w kierunku Jowisza jest mniejsze niż w kierunku przeciwnym. W granicy bardzo małych amplitud tory takie przechodzą w wydłużone elipsy typu d .

W 1961 r. E. Rabe przeprowadził pierwsze numeryczne obliczenia okresowych torów o dowolnej amplitudzie. Rysunek 6 przedstawia serię takich orbit o coraz większych rozmiarach, sięgających coraz dalej od punktu Lagrange’a L_4 (orbity symetryczne względem osi x i otaczające punkt L_5 nie zostały narysowane). W kierunku Jowisza planetoida oddala się od punktu libracji o kąt α sięgający 40° ; w kierunku przeciwnym może oddalić się dowolnie daleko. W granicznym przypadku, gdy $\alpha = 36^\circ, 1$, orbita sięga punktu libracji L_3 i łączy się z symetryczną do niej orbitą otaczającą punkt L_5 (co prawda, ruch trudno



Rys. 6

wtedy uznać za okresowy, ponieważ ciało znikome zatrzymuje się teoretycznie w punkcie L_3). Po przekroczeniu tego granicznego przypadku tworzy się jedna orbita w kształcie podkowy, otaczająca punkty libracji L_4 , L_3 i L_5 i obieganą w skończonym czasie. Przypadek ten znalazł potwierdzenie obserwacyjne: w 1997 r. P. Wiegert, K. Innanen i S. Mikkola stwierdzili, że niewielka planetoida 3753 Cruithne odbywa ruch po podkowie w układzie Ziemia-Słońce.

Wokół żadnego ze współliniowych punktów Lagrange'a nie można, oczywiście, spodziewać się trwałego ruchu o naturalnym pochodzeniu. Warto jednak wspomnieć o sondzie SOHO (*Solar and Heliospheric Observatory*), która od 1996 r. okrąża punkt L_1 układu Ziemia-Słońce, położony w odległości około 1,5 mln km od Ziemi, w miejscu, gdzie znika suma przyspieszeń grawitacyjnych obu tych ciał i przyspieszenia odśrodkowego. Ta szczególna lokalizacja sondy zapewnia możliwość ciągłej obserwacji Słońca, nieprzerywanej „zaćmieniami”, które zdarzałyby się, gdyby sonda krążyła wokół Ziemi. Stabilność orbity jest zapewniona

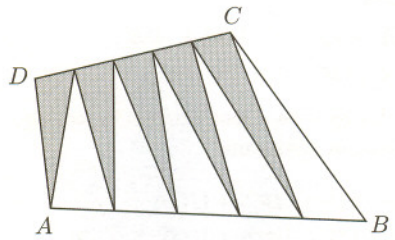
„sztucznie” przez uruchamianie 2–4 razy na rok silników korekcyjnych, co kompensuje powoli narastające odchylenia od nominalnej orbity.

Opisane w tym artykule ruchy ciała znikomego, odbywające się wokół niczego w układzie obracającym się, mają w układzie nieruchomym mniej spektakularny charakter: polegają w gruncie rzeczy na krążeniu wokół Słońca. Orbity nie są jednak krzywymi zamkniętymi i wyglądają na dość nieregularne. Ich wyjątkowy charakter, tj. związek z punktami Lagrange'a, jest widoczny dopiero z układu obracającego się.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na jeszcze jeden przykład ruchu wokół niczego, nie związany z zagadnieniem trzech ciał. Rozważmy ruch np. Jowisza po elipsie okołosłonecznej, ale względem układu odniesienia obracającego się jednostajnie z okresem równym dokładnie jowiszowemu rokowi. W układzie tym Jowisz zmienia odległość od Słońca w granicach od peryhelium do aphelium. Ponadto okresowo oddala się od osi x , ponieważ wskutek różnicy między swoją prędkością kątową a prędkością kątową obracającego się układu wyprzedza ją lub zostaje za nią w tyle. W efekcie krąży z okresem T wokół niczego – po eliptycznym epicyklu (podobnym do elips rodziny e) o stosunku osi równym 0,5 i ustawionym małą osią w kierunku Słońca. To samo dotyczy oczywiście każdego innego ciała krążącego wokół Słońca po eliptycznej orbicie keplerowskiej, jeśli spojrzeć na nie z układu obracającego się jednostajnie.



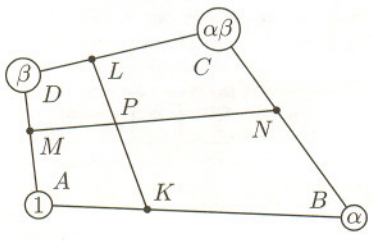
Rozwiązanie zadania M 962.
Każdy z powstałych czworokątów podzielmy przekątną na dwa trójkąty: zakreskowany i niezakreskowany.

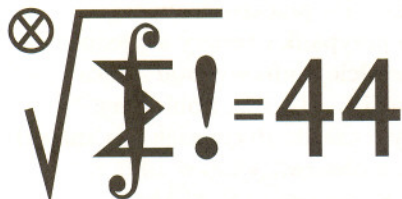


Jasne jest, że pola trójkątów zakreskowanych, podobnie jak pola trójkątów niezakreskowanych, tworzą ciąg arytmetyczny. Dodając dwa ciągi arytmetyczne, otrzymujemy ciąg arytmetyczny.



Rozwiązanie zadania M 961.
W punktach A, B, C, D umieścimy masy $1, \alpha, \alpha\beta, \beta$ odpowiednio. Znajdziemy środek masy tego układu na dwa różne sposoby. Środek ciężkości mas $A(1)$ i $B(\alpha)$ znajduje się w punkcie K , a mas $D(\beta)$ i $C(\alpha\beta)$ – w punkcie L . Oznacza to, że środek ciężkości wszystkich czterech mas znajduje się w punkcie P' , leżącym na odcinku KL i dzielącym go w stosunku $\frac{|KP'|}{|P'L|} = \frac{\beta + \alpha\beta}{1 + \alpha} = \beta$. Rozumując analogicznie stwierdzamy, że środek ciężkości wszystkich czterech mas P' leży na odcinku MN i dzieli go w stosunku $\frac{|MP'|}{|P'N|} = \alpha$. Wynika z tego równość $P = P'$ oraz prawdziwość tezy zadania.





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2001

Przypominamy treść zadań:

419. Wyznaczyć największą liczbę α oraz najmniejszą liczbę β takie, że nierówności

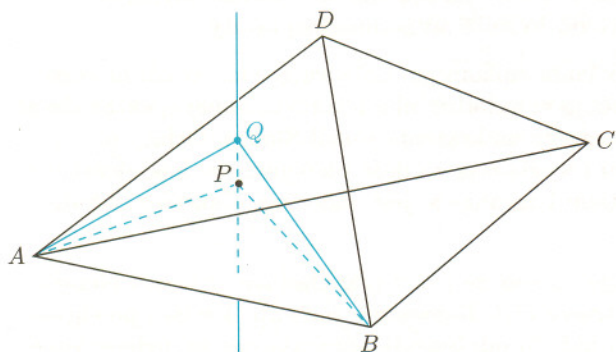
$$\alpha \leq \frac{|PA| + |PB| + |PC| + |PD|}{|AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD|} \leq \beta$$

zachodzą dla każdego czworokątnu $ABCD$ i dla każdego punktu P leżącego wewnątrz tego czworokątnu.

420. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $a + b = c + d$. Dowiedz, że jeżeli nierówność $a^n + b^n > c^n + d^n$ zachodzi dla pewnej liczby naturalnej $n > 1$, to zachodzi ona dla każdej liczby naturalnej $n > 1$.

419. Weźmy dowolny czworokąt $ABCD$ oraz dowolny jego punkt wewnętrzny P . Dodając stronami nierówność $|AB| < |PA| + |PB|$ oraz pięć analogicznych nierówności napisanych dla pozostałych pięciu krawędzi czworokątnu stwierdzamy, że

$$|AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD| < 3(|PA| + |PB| + |PC| + |PD|).$$



Możemy przyjąć, że najdłuższą krawędzią czworokątnu jest jeden z boków ściany ABC . Oznaczmy jego długość przez d ; liczba d jest więc jednocześnie średnicą czworokątnu oraz średnicą ściany ABC . Przez punkt P prowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny ABC i znajdujemy na niej punkt Q należący do czworokątnu, najbardziej oddalony od płaszczyzny ABC . Ustalmy oznaczenia wierzchołków trójkąta ABC tak, by Q był punktem ściany ABD . Wówczas

$$\begin{aligned} |PA| + |PB| &< |QA| + |QB| \leq |DA| + |DB|, \\ |PC| + |PD| &< 2d < |AB| + |AC| + |BC|; \end{aligned}$$

ostatnia nierówność zachodzi dlatego, że d jest długością jednego z boków trójkąta ABC . Po dodaniu stronami:

$$\begin{aligned} |PA| + |PB| + |PC| + |PD| &< |AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| < \\ &< |AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD|. \end{aligned}$$

Z uzyskanych zależności wynika, że dla $\alpha = 1/3$ oraz $\beta = 1$ postulowana nierówność podwójna jest zawsze spełniona. Weźmy teraz czworokąt, którego trzy wierzchołki leżą bardzo blisko siebie. Umieszczając punkt P w pobliżu tych wierzchołków bądź też w pobliżu czwartego wierzchołka otrzymujemy dla rozważanego ułamka wartość bliską $1/3$ bądź 1. Zatem liczby $\alpha = 1/3$ oraz $\beta = 1$ dają najlepsze oszacowania zachodzące dla każdego czworokątnu i dla każdego punktu wewnątrz niego.

420. Jeśli $a + b = c + d = 2m$, to zapisujemy liczby a, b jako $m+x, m-x$, oraz liczby c, d jako $m+y, m-y$, gdzie $0 \leq x, y < m$. Wówczas

$$A_n = a^n + b^n = (m+x)^n + (m-x)^n = 2 \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} m^{n-2j} x^{2j},$$

$$C_n = c^n + d^n = (m+y)^n + (m-y)^n = 2 \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} m^{n-2j} y^{2j}$$

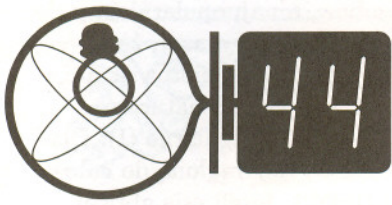
i jest jasne, że różnice $A_n - C_n$ mają (dla $n = 2, 3, 4, 5, \dots$) wszystkie taki sam znak, jak $x - y$. Stąd teza.

**Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 411 ($WT=1,02$) i 412 ($WT=2,80$)
z numeru 12/2000

Piotr Kumor	- Olsztyn	43,32
Paweł Kubit	- Kraków	43,24
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	42,01
Janusz Olszewski	- Suwałki	39,40
Witold Bednorz	- Tychy	37,77





Przypominamy treść zadań:

316. Wahadło Foucault zawieszono na linie o długości 10 m zostało odchyłone od pionu o 1,5 m i puszczono. Jeśli zdarzyło się to w Warszawie, to w jakiej odległości od swojego położenia równowagi przeleci środek masy wahadła?

317. W Kosmosie jest więcej neonu niż argonu, a jednak atmosfera Ziemi zawiera prawie 1% argonu i tylko 0,0018% neonu. Podać możliwe przyczyny tej rozbieżności.

316. Rozwiązując w układzie inercjalnym stwierdzamy, że względem punktu zawieszenia obrót Ziemi (trwający $23^{\text{h}}56^{\text{m}}$) nadał wahadłu początkową prędkość

$$v_1 = \omega_0 R \sin \theta$$

prostopadłą do zasadniczego kierunku ruchu (gdzie ω_0 – prędkość kątowna obrotu Ziemi, θ – szerokość geograficzna Warszawy, R – dane odchylenie początkowe). Maksymalna prędkość wahadła v_2 jest w bardzo dobrym przybliżeniu dana wzorem, wynikającym z zasady zachowania energii $v_2 = R\sqrt{\frac{g}{l}}$, gdzie l – długość liny. Aby znaleźć szukaną odległość r , wystarczy teraz odwołać się do zasady zachowania momentu pędu

$$v_1 R = v_2 r,$$

zatem $r = \omega_0 R \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \theta$. Po podstawieniu $\omega_0 = \frac{2\pi}{23^{\text{h}}56^{\text{m}}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\theta = 52^\circ$, otrzymujemy $r = 0,11 \text{ mm}$.

317. Jedną z przyczyn jest fakt, że neon – jako gaz lżejszy – uciekł z atmosfery Ziemi w przestrzeń kosmiczną (zwłaszcza w początkach istnienia Ziemi, gdy temperatura atmosfery była wyższa od obecnej). Drugim – prawdopodobnie ważniejszym – powodem jest stale zachodzący rozpad β^+ izotopu potasu ^{40}K , w wyniku czego powstaje izotop ^{40}Ar . (To zadanie pochodzi z zawodów im. Leo Szilarda – Węgry).

Paradoksy

Krzysztof

OLESZKIEWICZ

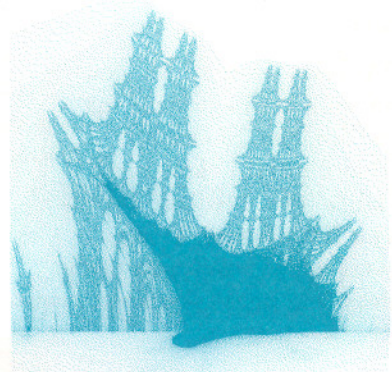
Paradoks to rozumowanie prowadzące do sprzeczności (czasem pozornej) z tym, co powszechnie uznawane jest za prawdę. Klasyczny paradoks Epimenidesa, *Kreteńscy zawsze kłamcy*, polega na tym, że Epimenides też był Kreteńczykiem; gdyby więc mówił prawdę, kłamałby. Jak zauważył Eubulides z Miletu, *Kiedy kłamca mówi, że kłamie, to zarazem kłamie i mówi prawdę*. W języku używanym na współczesnych lekcjach logiki matematycznej można ten paradoks wyrazić nieco inaczej: *Niniejsze zdanie jest fałszywe*. Jeśli zdanie owo jest prawdziwe, to jest fałszywe – i odwrotnie. Nie może więc być ani prawdziwe, ani fałszywe, albo też powszechnie przyjęte rozumienie prawdy i fałszu nie przystaje do tej sytuacji. Ten typ paradoksu wiąże się, oczywiście, z faktem, iż zdanie odnosi się do siebie samego. Możliwe są też nieco inne warianty: *Następne zdanie jest prawdziwe. Poprzednie zdanie jest fałszywe*.

Poniższe rozumowanie nosi nazwę antynomii Russella i obrazuje kłopoty związane z pojęciem zbioru. Rozważmy zbiór T wszystkich tych zbiorów, które nie są swoimi elementami. Czy $T \in T$? Jeżeli $T \in T$, to T nie jest swoim elementem, czyli $\neg(T \in T)$. Jeśli zaś $\neg(T \in T)$, to T jest swoim elementem, a więc $T \in T$. Ta sprzeczność sprawia, że współczesna matematyka narzuca ostre ograniczenia na sposób określania zbiorów. Definicja T nie spełnia tych wymogów, w związku z czym zagrożenie związane z antynomią Russella zostało oddalone. Nie ma jednak pewności, czy w przyszłości nie zostaną odkryte jakieś inne paradoksy godzące w podstawy matematyki; co więcej, z twierdzenia Kurta Gödla wynika, że jeśli nawet w matematyce nie ma sprzeczności, to udowodnić tego nie można. Dowód Gödla w wyrafinowany sposób korzysta z paradoksu kłamcy, ale jest zbyt skomplikowany, by go tu streszczać.

Na koniec zajmijmy się nieco mniej destrukcyjnym zastosowaniem paradoksu kłamcy. Udowodnimy, za Georgiem Cantorem, że każdy niepusty zbiór A ma więcej podzbiorów niż elementów. Istotnie, założmy, że każdemu $x \in A$ można przypisać pewien podzbiór $P_x \subset A$, w taki sposób, iż każdy podzbiór zbioru A zostanie przypisany przynajmniej jednemu elementowi A . Niech

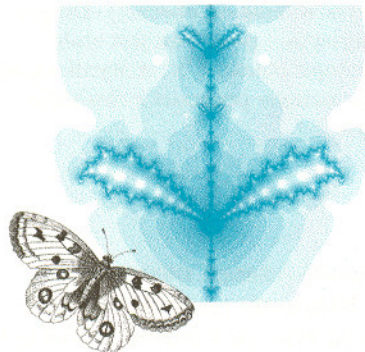
$$B = \{x \in A : \neg(x \in P_x)\}.$$

B jest podzbiorem zbioru A , więc $B = P_y$ dla pewnego $y \in A$. Jeżeli $y \in P_y$, to $y \in B$, więc $\neg(y \in P_y)$. I vice versa: jeżeli $\neg(y \in P_y)$, to $\neg(y \in B)$, czyli $y \in P_y$. Otrzymana sprzeczność nie godzi w podstawy matematyki – dowodzi jedynie, że fałszywe było założenie, iż zbiór A ma nie więcej podzbiorów niż elementów.



Zbiór Y „ma więcej elementów” niż zbiór X , gdy Y nie jest zbiorem wartości żadnej funkcji określonej na X . Taki sposób porównywania zbiorów ma tę przewagę nad zwykłym liczeniem elementów, że stosuje się także do zbiorów nieskończonych. Na przykład zbiór wszystkich liczb naturalnych \mathbb{N} nie ma więcej elementów niż zbiór liczb naturalnych parzystych, ponieważ \mathbb{N} jest zbiorem wartości funkcji: $2n \rightarrow n$.

Galaktyki próbowano klasyfikować na kilka sposobów, a najpopularniejszy do dziś system pochodzi od Edwina Hubble'a, badacza, który wykazał, że tzw. mgławice pozagalaktyczne są rzeczywiście galaktykami, czyli zbiorowiskami ogromnej liczby gwiazd. Jego klasyfikacja galaktyk jest bardzo naturalna. Mamy trzy typy galaktyk: eliptyczne (E), spiralne (S) i nieregularne (I). Dla galaktyk eliptycznych podaje się jeszcze liczbę, będącą zaokrągloną do całości wartością widocznego spłaszczenia pomnożoną przez 10. Jeżeli osie obrazu galaktyki wynoszą a i b , to owa liczba wynosi $10(a - b)/a$ i w praktyce zawiera się w przedziale od 0 do 7 – nie ma galaktyk eliptycznych bardziej spłaszczonych niż E7. Symbol galaktyki spiralnej składa się jeszcze z litery oznaczającej wielkość centralnego zgęszczenia lub tym samym stopień wyrazistości ramion spiralnych. Symbol Sa oznacza galaktykę o wielkim centralnym zgęszczeniu i drobnych ramionach, Sc zaś galaktykę zbudowaną niemal tylko z potężnych ramion. Nasza Galaktyka jest typu pośredniego – Sb. Między tymi dwiema literami umieszcza się jeszcze B, jeżeli galaktyka ma poprzeczkę.



Osobną klasę stanowią galaktyki S0, tzw. soczewkowate. Są one tak płaskie jak E7, mają jednak wyraźny dysk w płaszczyźnie równikowej, ale bez śladów struktury spiralnej. Od czasów Hubble'a odkryto też inne rzadkie rodzaje galaktyk, np. olbrzymie eliptyczne o symbolu cD, z wyjątkowo jasnym jądrem, albo – odwrotnie – w wielkich ilościach występujące karłowate. Można by oczekiwać, że im mniejsze i słabsze są galaktyki, tym trudniej je zarejestrować na zdjęciach (lub obrazach z kamery CCD) i tym mniej o nich wiadomo. Jakby na przekór tej oczywistości istnieje typ galaktyk bardzo jasnych, które mimo to zaobserwować jest niełatwo. Są to tzw. galaktyki zwarte, których obecność sygnalizował już Fritz Zwicky w latach 60 minionego wieku. Nie ma ich w bezpośrednim sąsiedztwie naszej Galaktyki, a z wielkiej odległości, choć doskonale je widać, na ogół nie dają się odróżnić od gwiazd. Typowe bowiem ich rozmiary nie przekraczają $2''$ – stąd trudności obserwacyjne. Na podstawie znanych odległości niektórych z nich wiadomo, że są to galaktyki znacznie mniejsze od naszej, a mimo to o zbliżonej jasności. Są wielką moc promieniowania zawdzięczającą, jak się wydaje, ogromnemu tempu formowania się nowych gwiazd. Do dziś nie wiadomo, dlaczego tak jest, dlaczego ich nie ma w sąsiedztwie, ile właściwie ich jest itd.

Tomasz KWAST

Sierpień

Wieczorem z północy na południe przecina niebo Droga Mleczna. W pobliżu zenitu znajduje się Łabędź, nisko na południu Strzelec, a ponadto dość nisko na zachodzie (oczywiście poza Drogą Mleczną) widać jeszcze Warkocz Bereniki. Każdą parę z tych trzech gwiazdzbiorów dzieli kątowa odległość równa kątowi prostemu, nawet więcej: wyznaczają one na niebie przykładowy trójkąt (oczywiście sferyczny) o wszystkich bokach i wszystkich kątach równych 90° . Nie byłoby w tym nic nadzwyczajnego, gdyby nie fakt, że w Strzelcu (a dokładniej na granicy Strzelca, Skorpiona i Wężownika) znajduje się centrum Galaktyki, wokół którego Słońce i niemal wszystkie widoczne gołym okiem gwiazdy dokonują jednego obiegu w ciągu mniej więcej ćwierci miliarda lat. W Warkocz Bereniki leży biegun Galaktyki. Wreszcie w swoim ruchu obiegowym Słońce wraz z okolicznymi gwiazdami pędzi właśnie w stronę Łabędzia ze średnią prędkością 220 km/s (mierzoną oczywiście względem centrum Galaktyki). Widzimy więc naraz trzy najważniejsze punkty określające geometrię naszej

Galaktyki i jej obrót. A nawet czwarty. Mianowicie w tym wspólnym strumieniu każda gwiazda ma prędkość nieco różną od średniej. Słońce np. ma względem całego zbioru gwiazd okolicznych prędkość zaledwie 20 km/s (tzw. prędkość swoista), a skierowana jest ona ku Herkulesowi, którego w sierpniowe wieczory też widać wysoko na niebie. Mówi się, że w Herkulesie leży apeks prędkości swoistej Słońca.

Wenus jest w Bliźniętach i widoczna jest jako Gwiazda Poranna. Również w Bliźniętach jest Jowisz, a niedaleko w Byku – Saturn, w rezultacie wszystkie te planety widać przed świtem. Mars jest w Wężowniku, przez co po północy już zachodzi. Pełnia Księżyca wypada 4 VIII, a now 19 VIII. Księżyc zakryje Saturna 14 VIII i Jowisza 15 VIII, ale z Polski zjawisk tych nie będzie widać; zobaczymy tylko zbliżenia Księżyca do tych planet. Ponadto 6 VIII Wenus i Jowisz znajdują się we wzajemnej odległości nieco ponad 1° , a 16 VIII Księżyc w odległości 2° od Wenus.

T.K.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (25')

Wyjaśnienie oszustwa (25):

Nierówność, chociaż „udowodniona”, nie jest prawdziwa. Najprostszy kontrprzykład otrzymujemy dla $n = 2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, kiedy to dana nierówność sprowadza się do $1 \leq \frac{1}{2}$. Funkcja f nie jest wypukła! Widać to wyraźnie na wykresie (rys. 2). Funkcja f nie ma drugiej pochodnej w zerze, gdyż nie ma tam nawet pierwszej pochodnej. Ma natomiast pochodne jednostronne $f'(0_-) = 1$ i $f'(0_+) = -1$.

W poprzednim Γ -limatiasie stwierdziliśmy, że f ma w zerze obie pochodne jednostronne drugiego rzędu i że są one równe. Aby wywnioskować na tej podstawie istnienie pochodnej drugiego rzędu, musimy wiedzieć, że istnieje pochodna rzędu pierwszego, ta jednak w zerze nie istnieje. Ponieważ funkcja f nie jest dwukrotnie różniczkowalna, nie można wnioskować o jej wypukłości na podstawie dodatniości drugiej pochodnej. Druga pochodna funkcji f w zerze nie istnieje, pomimo że można sensownie mówić o $f''(0_+) = f''(0_-) = 2$, o ile przyjmiemy definicję

$$(5\clubsuit) \quad g''(x_+) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{g'(x+h) - g'(x_+)}{h}$$

zamiast

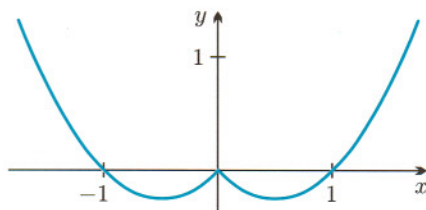
$$g''(x_+) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h}$$

i podobnie dla pochodnych lewostronnych.

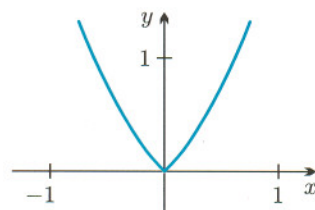
Definicja (5♣) jest użyteczna, gdy chcemy badać funkcję g na przedziale domkniętym $[a, b]$ i rozważać jej pochodne jednostronne na końcach tego przedziału. Pamiętać trzeba jednak, że przy tak przyjętej definicji istnienie pochodnej rzędu k w punkcie wewnętrznym x tego przedziału nie wynika tylko z istnienia i równości pochodnych jednostronnych $g^{(k)}(x_-)$ i $g^{(k)}(x_+)$, ale wymaga także istnienia wszystkich pochodnych funkcji g w punkcie x aż do rzędu $k - 1$.

Dodać należy, że nieistnienie pochodnej drugiego rzędu nie przesądza o braku wypukłości, o czym świadczy przykład funkcji $F(x) = x^2 + |x|$ (rys. 3). Funkcja F nie ma drugiej pochodnej w zerze, ale jest wypukła.

JWR



Rys. 2



Rys. 3

DLACZEGO? (II/3)

Czy zauważyłeś, Drogi Czytelniku, jak poprzednio mówiłem o cyfrze jedności, a unikałem określenia „ostatnia cyfra”? To dlatego, że liczba a_{2040} ma cyfrę jedności równą 9, ale nie ma ostatniej cyfry. Mamy bowiem

$$a_{2040} = 89364 \dots 83119,97204 \dots,$$

gdzie przed przecinkiem jest 32721...40831 cyfr. Ta ostatnia liczba jest 4049-cyfrowa, tzn.

$$10^{10^{4048}} < a_{2040} < 10^{10^{4049}}.$$

Tak, liczba a_{2040} nie jest całkowita! **DLATEGO** jej cyfra jedności jest, mówiąc szczerze, całkiem losowa. Siódemki na miejscu jedności utrzymują się do 2039-tego wyrazu ciągu, gdyż wtedy wyrazy ciągu są całkowite. Wyraz 2040-ty jest pierwszym wyrazem niecałkowitym. Odpowiedziałem na pytanie, **DLACZEGO** na miejscu jedności liczby a_{2040} nie ma siódemki, ale powstało nowe pytanie: **DLACZEGO** liczba a_{2040} nie jest całkowita, **DLACZEGO**?

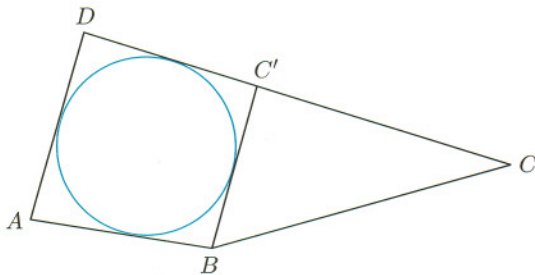
MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (26')

Wyjaśnienie oszustwa (26):

Nie jest prawdą, że zawsze $BC' > BC$ (rys. 1). Jednak podany dowód można łatwo poprawić. Jeden sposób to założenie, że kąt przy wierzchołku C jest nieostry (założenie takie można poczynić bez szkody dla ogólności rozumowania). Wówczas nierówność $BC' > BC$ jest prawdziwa. Drugi sposób to wykorzystanie nierówności trójkąta

$$BC' + C'C > BC,$$

która daje: $AB + CD = AB + C'D + C'C = AD + BC' + C'C > AD + BC$.



Rys. 1